Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **57:** 67–87, (2002).

La Función Zeta de Riemann

Catalina Calderón

Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco

1 Introducción

(George Friedrich) Bernhard Riemann (1826-1866), nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, cerca de Hannover. Hijo de un pastor luterano que se ocupó personalmente de la educación de su hijo durante los primeros años y lo instruyó en materias como aritmética, geometría e historia.

Riemann quería seguir los pasos de su padre y estudió filosofía y teología en Göttingen, pero los cursos que siguió del gran Gauss le llevaron muy pronto al estudio de las matemáticas. Incluso redactó su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss.

Estudió un año en Berlin con insignes matemáticos como Jacobi, Steiner, Eisenstein y con el que (posiblemente) tuvo una influencia decisiva en sus investigaciones relativas a la teoría de los números, nos referimos a P.G.L. Dirichlet.

Riemann fue uno de los fundadores de la teoría de las funciones analíticas. Hizo contribuciones importantes en materias como geometría, física matemática y muy especialmente en teoría de los números, por las notables consecuencias que ha tenido su famosa hipótesis [32]. Las páginas que siguen sólo pretenden ser un breve esbozo de algunas de las

Figura 1: Bernhard Riemann

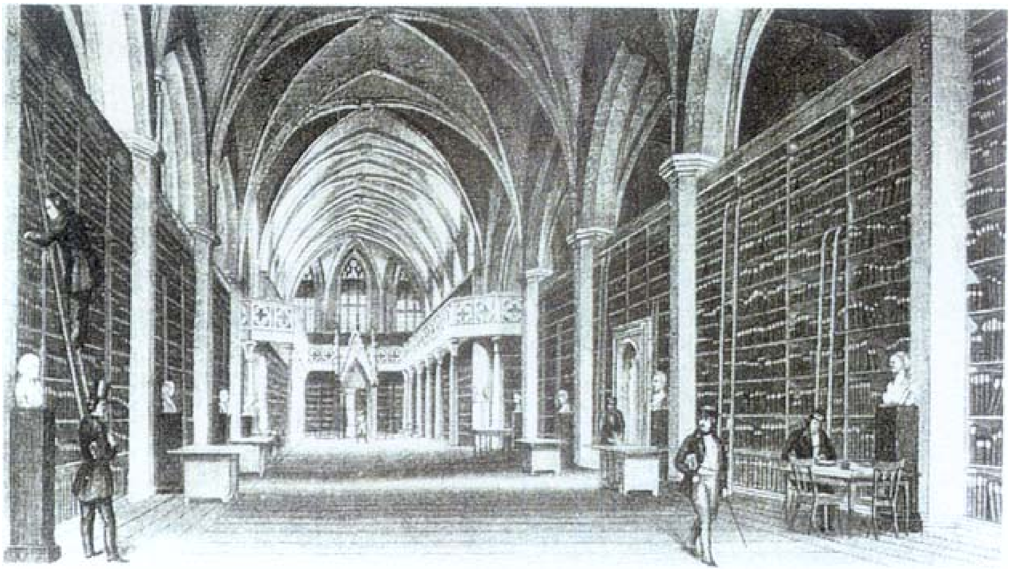

Figura 2: Biblioteca de la Universidad de Göttingen (alrededor de 1854)

propiedades relativas a la denominada función zeta de Riemann y su relación con ciertos problemas de la teoría de los números.

2 De Euler a Riemann

Desde Euclides (año 300 a. C.) se sabe que la sucesión de números primos es infinita. En 1737 Euler demostró que $\sum_n 1/p_n$ diverge, lo cual conduce a otra demostración de la existencia de infinitos números primos. Uno de los más notables descubrimientos de Euler fué la siguiente fórmula $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$. La observación de Euler (1749) de que el producto

$$\prod_p \{1 - p^{-s}\}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s > 1 \tag{2.1}$$

donde p recorre todos los números primos p y n los naturales, será el comienzo de las investigaciones de Riemann en esta dirección.

A Riemann la fórmula de Euler le pareció realmente admirable. Entre los más de 100 años que hay desde el descubrimiente de esta fórmula por Euler y el interés de Riemann por ella, la mayoría de los matemáticos la consideraban como una mera curiosidad. Resulta difícil ver como esta representación en producto puede ayudar a establecer un planteamiento analítico para la función $\pi(x)$, esto es, la cantidad de números primos en el intervalo $[1, x]$. La distribución de los primos es realmente obstrusa.

Riemann se interesó, entre otros temas, por la distribución de los números primos. Se plantean inmediatamente numerosas preguntas como son: existencia de infinitos números primos; determinación de fórmulas que permitan obtener los números primos; distribución de los mismos en otras sucesiones distintas de la de números naturales; medida de los intervalos entre dos primos consecutivos; etc.

En 1849 A. de Polignac conjeturó que para todo número par $2n$ había infinitas parejas de primos cuya diferencia era $2n$. El caso $n = 1$ corresponde a la famosa conjetura de los primos gemelos. La pregunta que nos hacemos aquí es ¿ existen infinitos primos p, tales que $p + 2$ sea también primo?. Una caracterización de los primos gemelos la da Clement [7]. Sea $n \geq 2$, los enteros n y $n + 2$ forman un par de primos gemelos sí y sólo si $4[(n-1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$.

Para cada $x > 1$, denotamos por $\pi_2(x)$ al número de primos $p \leq x$ tales que $p + 2$ es a su vez primo. La conjetura es que $\pi_2(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. V. Brun obtiene los primeros resultados no triviales relativos a esta conjetura (ver [29]) y demuestra que la serie $\sum_n 1/p_n$ restringida a los primos gemelos es convergente.

Legendre y Gauss se interesaron por el problema de establecer la cantidad de números primos que hay en un intervalo $[1, x]$. Legendre afirmaba que para valores suficientemente grandes $\pi(x)$ es aproximadamente igual a $x/(\log x - 1,08366)$.

Independientemente de Legendre, Gauss (1792), calculando la cantidad de números primos consecutivos que hay en cada mil números de la sucesión natural, afirmaba que $\pi(x)$ se diferencia relativamente poco de la integral

$\int_2^x dt/\log t$. Prácticamente las hipótesis de Legendre y Gauss se expresan por las fórmulas

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}, \qquad \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Esta última integral es denotada usualmente por *li* x. Aplicando integración por partes el *li* x se demuestra que

$$li\ x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \sim \frac{x}{\log x}$$

así que $\pi(x) \sim li\ x$ y $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, x \to \infty$ son equivalentes.

Chebyshev (1851) demuestra las desigualdades $0.92 \leq \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1.11$ y deduce que si existe el límite cuando $x \to \infty$ de $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$, entonces debe ser la unidad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1, \tag{2.2}$$

(en el supuesto de que dicho límite exista). Es decir que se cumpliría la equivalencia asintótica siguiente $\pi(x) \sim x/\log x, \quad x \to \infty$. Esta conjetura es la que conocemos como *Teorema de los números primos,* sobre la *densidad* de estos entre los naturales.

La existencia del límite la demostraron Hadamard y de la Vallée Poussin independientemente uno de otro en 1896, mediante las ideas desarrolladas por Riemann relacionadas con la función $\zeta(s)$ para valores complejos de s. Con ello quedaba completamente demostrada (2.2): la ley asintótica de distribución de los números primos. Pero que se verifique (2.2) o su equivalente, sólo nos dice que $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(\frac{x}{\log x})$. Nos queda por lo tanto un resto $R(x) = \pi(x) - \frac{x}{\log x}$ que hay que precisar.

Riemann observó que el orden de la diferencia de $\pi(x) - li(x)$ depende de la ubicación de los ceros de la función $\zeta(s)$ en la franja crítica $0 < Re\ s = \sigma < 1$.

En su memoria de 1859, Riemann estudia la función $\zeta(s)$ definida en $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ por la serie armónica generalizada $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s = \sigma + it, \sigma, t \in \mathbb{R}$. N. Oresme ya había demostrado que $\zeta(1)$, la propia serie armónica, diverge. Sabemos así que esta serie es convergente en la región dada y en $Re(s) \geq \delta > 1$ la serie está dominada término a término por la serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta}$ por lo que, según el criterio de Weierstrass converge uniformemente en $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq \delta\}$ y representa una función holomorfa en $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$.

La conexión fundamental entre la función $\zeta(s)$ y los números primos está dada por

$$\zeta(s) = \prod_p \{1 - p^{-s}\}^{-1}, \quad s > 1 \tag{2.3}$$

donde el producto está tomado sobre todos los números primos p.

En efecto : Si cada uno de los factores $\{1 - p^{-s}\}^{-1}$ de la derecha de (2.5) lo escribimos mediante el desarrollo $1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots$, entonces el producto de los factores extendido a los primos $p \leq N$ se puede escribir como suma de los términos de la forma n^{-s} siendo n divisible únicamente por los primos $p \leq N$. Pasando al límite obtenemos (2.3).

Veremos algunas de las propiedades que la función $\zeta(s)$ verifica, considerando $\zeta(s)$ para valores complejos de s.

(a) La primera de ellas es que la fórmula (2.3) es válida para todo s complejo del semiplano $\sigma > 1$, siendo además el producto infinito absolutamente convergente en dicho semiplano. Como consecuencia, ya que $\zeta(s)$ es un producto de factores no nulos absolutamente convergente en $\sigma > 1$, deducimos que $\zeta(s) \neq 0$ en $\sigma > 1$. Es decir, $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\sigma > 1$.

(b) La versión discreta de la integración por partes, llamada fórmula de sumación de Abel nos va a proporcionar una versión integral de la función $\zeta(s)$ en el semiplano $\sigma > 1$.

Sea $a(n)$ una función aritmética, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ y sea $f(t)$ una función con derivada continua en el intervalo $[x_0, x]$. Definamos $A(t) = \sum_{n \leq t} a(n)$ entonces

$$\sum_{x_0 < n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(x_0) f(x_0) - \int_{x_0}^{x} A(t) f'(t) dt. \tag{2.4}$$

Algunos ejemplos relacionados con la función $\zeta(s)$ se obtienen considerando $f(x) = x^{-s}$, y la función aritmética $a(n) = 1, \mu(n), |\mu(n)|, \Lambda_1(n) = \Lambda(n)/\log n, \Lambda(n)$, tal que la función $\mu(n)$ se define por $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$ siendo $\omega(n)$ el número de factores primos distintos del número n y $\mu(n) = 0$ si n es divisible por un cuadrado. La función $\Lambda(n)$ es nula salvo cuando n es una potencia de un primo p en cuyo caso $\Lambda(n) = \log p$.

Las expresiones correspondientes de $A(x)$ son $[x]$, $M(x)$, $Q(x)$, $\Pi(x)$, $\psi(x)$ $[x]$ denota la parte entera de x, $M(x)$ es la función de Mertens (1897), esto es, la función sumatoria de $\mu(n)$, $Q(x)$ cuenta los números libres de cuadrados en $[1, x]$ y

$$\Pi(x) = \pi(x) + (1/2)\pi(x^{1/2}) + (1/3)\pi(x^{1/3}) + \dots$$

y por último $\psi(x)$ que es la función de Chebyshev $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$.

Entonces si hacemos tender x a ∞ y $Re\ s > 1$, resulta

que en todos los casos mencionados se puede acotar de forma trivial $A(x) \ll x$ por lo que el límite $\lim_{x\to\infty} A(x)f(x) = 0$. Se obtienen entonces las formulaciones integrales correspondientes a las funciones siguientes $\zeta(s)$, $1/\zeta(s)$, $\zeta(s)/\zeta(2s)$, $\log\zeta(s)$, $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ por ejemplo en $\sigma > 1$ se tiene

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}}dx. \tag{2.5}$$

La siguiente propiedad muestra la estrecha relación entre $\zeta(s)$ y $\pi(x)$. Para $\sigma > 1$ se verifica

$$\log\zeta(s) = s\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)}dx. \tag{2.6}$$

El teorema del número primo puede obtenerse invirtiendo esta relación, esto es, resolviendo la ecuación para $\pi(x)$. Entonces, aparece $\pi(x)$ como una integral sobre $(\log\zeta(s))/s$, aunque la integral resultante es algo difícil de evaluar.

Si en (2.4) consideramos por función $a(n)$ el carácter $\chi(n)$ de Dirichlet estaremos en el caso de las L-funciones, $L(\chi, s)$.

(c) Si seguimos avanzando en el plano complejo nos encontramos con las investigaciones de Hadamard y de la Vallée Poussin que demostraron que

$\zeta(1 + it) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) Podemos extender $\zeta(s)$ al semiplano $\sigma > 0$, así se comprueba que $\zeta(s)$ es analítica en $\sigma > 0$ salvo en $s = 1$, y se representa en dicho semiplano por la relación

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \tag{2.7}$$

donde $\{x\}$ indica la parte fraccionaria de x. De esta expresión precisamente, vemos que el residuo de $\zeta(s)$ en $s = 1$ es la unidad y como consecuencia resulta que $\zeta(s)$ admite un desarrollo en serie de Laurent de la forma siguiente

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \dots \tag{2.8}$$

donde $\gamma_0 = \gamma = 0,5772157\dots$ es la constante de Euler y

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{k!}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n\le N}\frac{1}{n}\log^k n - \frac{\log^{k+1} N}{k+1}\right], \forall k \in \mathbb{N}.$$

(d) Todavía podemos prolongar analíticamente la función $\zeta(s)$ a un semiplano mayor. Obtenemos que para $\sigma > -1$, la función $\zeta(s)$ es analítica, salvo en el polo $s = 1$, y admite la representación

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x-[x]-1/2}{x^{s+1}}dx. \tag{2.9}$$

3 Hipótesis de Riemann

Según hemos mencionado al principio, vemos que las cuestiones relativas a la distribución de números primos están estrechamente relacionadas con las propiedades de la función $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}, s = \sigma + it, \sigma, t \in \mathbb{R}$.

Riemann, demostró que $\zeta(s)$ se puede prolongar analíticamente a todo el s-plano complejo, resultando una función meromorfa con un único polo simple en el punto $s = 1$ de residuo 1.

Teorema. *La función $\zeta(s)$ es analítica para todo valor de s salvo $s = 1$, donde existe un polo de la función de residuo 1. Se satisface la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{3.1}$$

Esta ecuación se puede demostrar usando varios métodos, algunas de las demostraciones pueden encontrarse en el libro de Titchmarsh. Una de ellas depende de la fórmula de sumación de Euler. Otra depende de la fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 2\pi nx dx. \tag{3.2}$$

Una demostración original de Riemann (entre otras), parte de la relación

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx = \Gamma(\frac{1}{2}s)n^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}s}.$$

Lo que conduce a

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{1}{2}s}\Gamma^{-1}(\frac{1}{2}s)\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\theta(x)dx, \quad (\sigma > 1). \tag{3.3}$$

Para $x > 0$, se sabe que $2\theta(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\theta(\frac{1}{x}) + 1\right)$ siendo $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$. De (3.3) se deduce

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1})theta(x)dx$$

y la integral converge para todo s, así la fórmula se verifica, por prolongación analítica, para todo valor de s. Cambiando a la derecha s por $1-s$ se obtiene la ecuación funcional en la forma

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)\zeta(1-s). \tag{3.4}$$

La ecuación funcional se escribe también en la forma $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ $s = \sigma + it$,

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \tag{3.5}$$

y $\chi(s)\chi(1-s) = 1$ si $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, entonces se verifica $\xi(s) = \xi(1-s)$ siendo $\Gamma(s)$ la función Gamma de Euler, que en forma integral es

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt, \quad Re\ s > 0.$$

El propio Euler obtuvo un caso particular de la ecuación funcional y evaluó $\zeta(s)$ para s entero positivo par y para s entero negativo impar. (ver Ayoub [2]).

De la la ecuación funcional se deduce que en el semiplano $Re\ s < 0$ la función $\zeta(s)$ sólo tiene los ceros triviales $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$. Para valores enteros de s sabemos que $\zeta(0) = -1/2$ y para m entero no nulo resulta $\zeta(-2m) = 0$; $\zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$donde los coeficientes B_m son los del desarrollo

$$\frac{s}{e^s - 1} = 1 - \frac{1}{2}s + \frac{B_1}{2!}s^2 - \frac{B_2}{4!}s^4 + \ldots, \quad |s| < 2\pi.$$

Así queda por estudiar la parte más problemática del plano, la denominada franja crítica, $0 < \sigma < 1$, $t \in \mathbb{R}$. Riemann en su memoria afirma

(1) $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros complejos que están en la banda crítica, que son simétricos respecto de las rectas $Re\ s = \sigma = 1/2$, y $Im\ s = 0$.

(2) Si denotamos por $N(T)$ al número de ceros de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 \leq Re\ s \leq 1$, $0 < Im\ s \leq T$, entonces $N(T) = (T/2\pi)\log(T/2\pi) - (T/2\pi) + O(\log T)$.

(3) La serie $\sum |\rho|^{-2}$ converge mientras que la serie $\sum |\rho|^{-1}$ es divergente. La sumación se extiende a todos los ceros complejos $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$.

(4) La función entera $\xi(s) = (1/2)s(s-1)\pi^{-(1/2)s}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ se puede escribir en la forma

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_\rho \{1 - (s/\rho)\} e^{s/\rho} \tag{3.6}$$

donde A, B son constantes. El producto es absolutamente convergente y está tomado sobre todos los ceros complejos de $\zeta(s)$.

(5) Todos los ceros complejos de $\zeta(s)$ están en la recta $Re\ s = 1/2$.

(6) Para $x > 1$, la función $\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}$ verifica $\Pi(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x})$. Riemann conjetura que para x no entero

$$\Pi(x) = li(x) - \sum_\rho li(x^\rho) + \int_2^\infty \frac{du}{(u^2-1)u\log u} - \log 2 \tag{3.7}$$

siendo $li(x)$ es el logaritmo integral, $\int_2^x dt/\log t$ y $\sum |\rho|^{-2} = \lim_{T\to\infty} \sum_{|\gamma|\leq T} |\rho|^{-2}$.

Las cuestiones (1), (3), (4) las demostró por primera vez Hadamard

[11]-[12] y fueron muy importantes en las primeras demostraciones del teorema de los números primos. La (2) fué demostrada por Mangoldt ([26]) en 1895, y más precisamente en 1905. Hardy [13], en 1914, demostró la existencia de infinitos ceros en la recta $Re\ s = 1/2$. La única afirmación abierta es (5), que es la conocida como *Hipótesis de Riemann.* El primer paso a su demostración se debe al propio Riemann, quien demostró que $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros en la recta $Re\ s = 1/2$ y que casi todos los ceros de la función están próximos a esta recta. Pero Riemann no publicó sus resultados y fué Siegel, en 1935, el que lo descubrió entre los papeles inéditos de Riemann.

En 1900 Hilbert colocó el problema (5) en la lista de los problemas más importantes con los que deberían enfrentarse los matemáticos.

4 Ceros de la función $\zeta(s)$

En el estudio de los ceros de la función zeta, consideramos tres aspectos, a) el número de ceros que hay en un rectángulo de la franja crítica, b) la magnitud de los intervalos entre ceros consecutivos de la linea crítica y c) la obtención de regiones de la franja crítica donde $\zeta(s) \neq 0$.

a) Hipótesis de Lindelöf e hipótesis de densidad. En relación con la función zeta de Riemann, Lindelöf conjetura que $\zeta(1/2+it) \ll |t|^\epsilon$ siendo $t \to +\infty$ y ϵ un número positivo arbitrariamente pequeño.

En 1912, Littlewood [24] probó que la conjetura de Riemann implica la de Lindelöf. El recíproco es falso.

Denotamos por ρ los zeros complejos de $\zeta(s)$, y $N(\alpha, T)$ al número de tales ceros ρ, tal que $0 < Im\ \rho \leq T, Re\ \rho = \sigma > \alpha$ siendo $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Una condición necesaria y suficiente para que la hipótesis de Lindelöf sea cierta es que se verifique $N(\alpha, T+1) - N(\alpha, T) = o(\log T)$ cuando $\alpha > 1/2$, $T \to +\infty$, (vease Backlund [3] y Littlewood [23]). Littlewood probó que para $1/2 \leq \alpha \leq 1$ la siguiente estimación

$$N(\sigma, T) \ll \frac{T}{\sigma - 1/2} \log \frac{1}{\sigma - 1/2}$$

es válida uniformemente respecto de σ.

Selberg [33], obtiene una estimación uniforme respecto de σ en el intervalo $1/2 \leq \sigma \leq 1$ que rebaja el exponente de T respecto a la de Littlewood,

$$N(\sigma, T) \ll T^{1-\frac{1}{4}(\sigma-\frac{1}{2})} \log T.$$

Las estimaciones de $N(\sigma, T)$ son importantes en la aplicación a la resolución de ciertos problemas. En la conjetura de Bertrand, Chebyshev demostró un resultado más fuerte pues probó que en el intervalo $(x, x+h]$ hay un número primo si $x \geq x_0$ y $h \geq \frac{1}{5}x$. A partir de esto la pregunta siguiente es clara. ¿ Como de pequeño puede ser $h = h(x)$ de forma que se siga cumpliendo el postulado de Bertrand? Se comprueba que si se estudia la diferencia $\psi(x+h) - \psi(x), h < x$, entonces la demostración de que en el intervalo $(x, x+h]$ haya un número primo, depende de la comprobación de que la suma $\sum_{x<p\leq x+h} \log p$ sea positiva, con lo que se podrá afirmar que el intervalo de sumación es no vacío. Dicha suma depende a su vez del número de ceros complejos en un rectángulo, por lo que este problema nos lleva a la necesidad de tener estimaciones de $N(\sigma, T)$ de la forma

$$N(\sigma, T) \ll T^{a(1-\sigma)} \log^b T, \quad 1/2 \leq \sigma \leq 1 \tag{4.1}$$

(a, b constantes absolutas positivas, $a \geq 2$), uniforme en sigma. La estimación (4.1) con $a = 2$, se conoce como

Hipótesis de densidad.

Si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces $N(\sigma, T) = 0$, para $\sigma > 1/2$.

b) Intervalos entre ceros consecutivos. Una de las cuestiones que se plantean, es estudiar como están distribuidos los ceros en la linea $s = \frac{1}{2} + it, t \in \mathbb{R}$.

Por ello se busca estimar la diferencia entre las partes imaginarias de ceros consecutivos de dicha linea. Sea t_n la parte imaginaria del n-ésimo cero de la función $\zeta(s)$ de la forma $\frac{1}{2} + it, t \geq 0$, tal que $0 < t_1 \leq t_2 \ldots$. Por ejemplo, los primeros valores de t_j con seis decimales son

$$t_1 = 14.134725, t_2 = 21.022040, t_3 = 25.010858, t_4 = 30.42487666, t_5 = 32.935062,$$

$$t_6 = 37.586178, t_7 = 40.918719, t_8 = 43,327073, t_9 = 48.005151, t_{10} = 49.773832\ ,$$

(Haselgrove-Miller [16], dan los 1500 primeros ceros con seis decimales). Sea

$$\theta = \inf\{\alpha \geq 0; t_{n+1} - t_n \ll t_n^\alpha\}$$

así que $t_{n+1} - t_n < t_n^{\theta+\epsilon}$, para cada $\epsilon > 0$ y $n \geq n_0(\epsilon)$. Hardy y Litllewood obtuvieron la estimación con $\theta \leq \frac{1}{4}$ en 1918. Su estimación no se mejoró hasta 1976 cuando J. Moser [27] y R. Balasubramanian [4] obtienen $\theta \leq \frac{1}{6}$. A.A. Karatzuba [20] la obtiene con $\theta \leq \frac{5}{32}$.

A. Ivic [19], demuestra que $\theta \leq 0,15594583\ldots < \frac{5}{32}$, lo que mejora la estimación de A.A.karatzuba.

c) Regiones libres de ceros y método de Vinogradov. Una forma de abordar el problema (5) por numerosos matemáticos ha sido obtener regiones de la franja crítica $0 < \sigma < 1$, $t \in \mathbb{R}$, cada vez más amplias donde $\zeta(s) \neq 0$. Ch. de la Vallée Poussin (1898) demostró que $\zeta(s) \neq 0$ en el dominio

$$Re\ s \geq 1 - \frac{A}{\log(|t|+2)}, \qquad A > 0. \tag{4.2}$$

En 1922 Littlewood mejoró el resultado anterior demostrando que la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en

$$Re\ s \geq 1 - \frac{A \log\log|t|}{\log|t|}, \qquad |t| > e^2. \tag{4.3}$$

Es evidente que la constante A no es la misma en cada caso. En 1936 Chudakov obtiene para $|t| \geq 3$, la región libre de ceros

$$Re\ s \geq 1 - \frac{A}{\log^{3/4}|t|(\log\log|t|)^{3/4}}. \tag{4.4}$$

El método de Vinogradov-Korobov de estimación de integrales exponenciales nos permite obtener regiones libres de ceros. Sea H^n el hipercubo unidad n dimensional $(0,1]^n$. Para cada n-tupla $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ de enteros b_j, sea $J_{k,n}(\mathbf{b}, P)$ el número de soluciones de

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i^j - x_{k+i}^j) = b_j, 1 \leq j \leq n, 1 \leq x_1, \ldots, x_{2k} \leq P \tag{4.5}$$

y sea $S(\mathbf{a}, P) = \sum_{x \leq P} e(a_1 x + \ldots + a_n x^n)$. Entonces

$$J_{k,n}(\mathbf{b}, P) = \int_{H^n} |S(\mathbf{a}, P)|^{2k} e(-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) d\mathbf{a}$$

donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Es fácil ver que

$$J_{k,n}(\mathbf{b}, P) \leq J_{k,n}(0, P) = J_{k,n}(P). \tag{4.6}$$

El primer paso en el método de Vinogradov-Korobov es obtener una estimación para $J_{k,n}(P)$, hallando una cota superior para el número de soluciones del sistema de ecuaciones, cuando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, lo cual después de las investigaciones de Linnik, Karatzuba y Korobov se comprueba que equivale a calcular el número de soluciones de un sistema de congruencias. Esta cota de $J_{k,n}(P)$ se conoce como *Teorema del valor medio de Vinogradov.*

El segundo paso es aplicar el *Teorema del valor medio de Vinogradov* para estimar sumas de la forma $\sum_{n \in I} e^{2\pi i f(n)}$, $I = (a, b]$, donde f es una función real de variable real continuamente diferenciable cierto número de veces. Obsérvese que si se elige la función $f(x) = -\frac{1}{2\pi} t \log x$, $t > 0$ entonces se tiene la suma $\sum_{n \in I} n^{-it}$, $I = (a, b]$. Como consecuencia obtenemos estimaciones en sumas del tipo

$$\sum_{a < n \leq b} n^{-\sigma - it}, \quad 0 < \sigma < 1, t > 0$$

de la cual se deduce una región libre de ceros del tipo

$$\zeta(s) \neq 0, \text{ si } \ Re\ s > 1 - \frac{1}{\log^{\alpha} t}, \quad t > t_1(t_1 > 2), \ \alpha < 1.$$

que es mejor que la de Littlewood. Refinando el método se obtiene la mejor región libre de ceros conocida.

Ivic [19], da el siguiente teorema: *Existe una constante* $\eta > 0$ *tal que para* $1-\eta \leq \sigma \leq 1$ *uniformemente en* σ *se tiene*

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{122(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t, \quad (t \geq t_0). \tag{4.7}$$

Este resultado implica $\zeta(1+it) \ll (\log t)^{2/3}$ demostrado en 1958 por Korobov [21] y Vinogradov [35]. La mejor región libre de ceros conocida por ahora $\sigma \geq 1 - C(\log t)^{-2/3}(\log\log t)^{-1/3}$, $t \geq 3$. Su demostración puede encontrarse en el libro de Walfisz [36] y el resultado es debido a H.E. Richert, (ver pag.226 o también en Ivic [19]). La estimación anterior aún siendo la mejor, está todavía muy lejos de la hipótesis planteada por Riemann.

5 Algunos problemas relacionados con la hipótesis de Riemann

Ya hemos visto la estrecha relación que existe entre $\zeta(s)$ y la función $\pi(x)$. Veremos aquí que, si se supone cierta la hipótesis de Riemann, entonces, se obtiene la mejor estimación posible para los intervalos entre dos primos consecutivos.

(a) **Hipótesis de los primos consecutivos.** La cuestión ahora es: *¿como están distribuidos los números primos?* La distribución de los números primos es extremadamente irregular. Conociendo el $n-$ésimo número primo p_n, ¿ cuánto tengo que avanzar en la sucesión natural hasta encontrar otro número primo p_{n+1}? Esto nos lleva a la conocida como hipótesis de los primos consecutivos. *Dados dos primos consecutivos ¿de qué orden es su diferencia?* Para los intervalos entre dos números primos consecutivos, se obtienen estimaciones asintóticas del tipo $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{\alpha}(\log p_n)^{\beta}$ con $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$.

La hipótesis de Lindelöf implica la estimación para la diferencia de primos consecutivos $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2+\epsilon}$ para cada $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande.

C.J.Mozzochi [28] demuestra (sin hipótesis) $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{\theta}$, $\quad \theta = (11/20) - \delta$ donde $\delta \leq \frac{1}{384} = 0,547395833\ldots$. Pero si la Hipótesis de Riemann es cierta, se cumple la mejor estimación siguiente

Teorema. *Si la Hipótesis de Riemann es cierta entonces se verifica la estimación* $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \log p_n$.

Este es el mejor resultado que se tiene en este problema suponiendo la Hipótesis de Riemann.

(b) Distribución de los números primos. Obtener mayores regiones libres de ceros de $\zeta(s)$ conduce a mejores estimaciones de varias funciones conectadas con la distribución de los números primos. La evaluación más precisa del término error depende precisamente de esas regiones libres de ceros de $\zeta(s)$, cuanto mayor es la región mejor es la estimación de la diferencia $|\psi(x) - x|$; $|\pi(x) - li(x)|$.

Gran número de problemas se pueden formular mediante las funciones de Chebyshev $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$.

Riemann estableció sin demostración en 1895, una fórmula mediante la cual se relaciona $\psi(x)$ con cierta suma sobre los ceros complejos de la función zeta, esto es

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) \tag{5.2}$$

siendo γ la constante de Euler, $(x > 1, x \neq p^m)$ y que demostró H. von Mangoldt en 1895. La suma se extiende a todos los ceros complejos de $\zeta(s)$ y

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} = \lim_{T\to\infty} \sum_{|Im\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

La forma truncada de E. Landau es la que se usa en la práctica para muchas de las investigaciones,

$$\psi(x) = x - \sum_{|Im\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\frac{x}{T}(\log xT)^2) + O(\log x). \tag{5.3}$$

La propiedad de Hadamard y de la Vallée Poussin: $\zeta(s) \neq 0$ en

la linea $Re\ s = 1$ junto con (5.2) implican que $\psi(x) \sim x$, cuando $x \to \infty$ esto es, una forma equivalente de la ley asintótica de distribución de los números primos. Se ha de estimar la diferencia $\psi(x) - x$, $\theta(x) - x$, o equivalentemente $\pi(x) - li(x)$.

Teorema. *La hipótesis de Riemann aplicada aquí nos da las estimaciones*

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x}\log^2 x), \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{x}\log x). \tag{5.4}$$

Prescindiendo de la Hipótesis de Riemann y utilizando la mejor región libre de ceros de la función zeta en la franja crítica se deduce

$$\psi(x) = x + O(x \exp\{-C\delta(x)\}) \tag{5.5}$$

donde C es una constante positiva y $\delta(x) = (\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}$. Sin hipótesis de Riemann (5.5) es la mejor estimación conocida de $\psi(x)$. La fórmula se debe a H.E. Richert y A. Walfisz ([36]).

Así mismo para el número de primos $p \leq x$ se verifica

$$\pi(x) = li(x) + O(x \exp\{-C\delta(x)\}). \tag{5.6}$$

(c) Función de Möbius e hipótesis de Mertens. Consideremos la función de Mertens $M(x)$, esto es, la función suma de los coeficientes de la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad s = \sigma + it \tag{5.7}$$

que evidentemente converge en $\sigma > 1$. Nos preguntamos ahora por dos cuestiones: (i) la acotación de $M(x)$, (ii) posibilidad de convergencia de la serie en un semiplano mayor

Respecto al primer problema es conocido que, sin restricciones de hipótesis de Riemann o Lindelöf se verifica

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \ll x \exp\{-C\delta(x)\} \tag{5.8}$$

con $\delta(x)$ definida como en (5.5).

Respecto al segundo problema, mediante la fórmula de inversión para las series de Dirichlet (fórmula truncada de Perron), se demuestra que (5.7) es además válida en todos los puntos de la linea $\sigma = 1$.

Lema. *Sea $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$, absolutamente convergente en el semiplano Re $s > 1$. Supongamos que $|a(n)| < C\Psi(n)$, $C > 0$ y siendo la función $\Psi(x)$ monótona creciente para $x \geq x_0$. Sea además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^{\sigma}} \ll \frac{1}{(\sigma - 1)^{\alpha}}$$

cuando $\sigma \to 1 + 0$ para algún $\alpha > 0$. Si $w = u + iv$ (u y v reales) es arbitrario, $b > 0$, $T > 0$, $u + b > 1$, entonces

$$\sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s+w) \frac{x^s}{s} ds +$$

$$+O(x^b T^{-1}(u + b - 1)^{-\alpha}) + O(T^{-1}\Psi(2x)x^{1-u} \log 2x) + O(\Psi(2x)x^{-u}),$$

y la estimación es uniforme en x, T, b y u con tal que b y u esten acotados.

En [34] se puede ver la fórmula desglosada según que x sea entero o no. Aplicando el Lema a la función generatriz de la función de Möbius tenemos

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s+w)} \frac{x^s}{s} ds + +O(\frac{x^b}{Tb}) + O(\frac{\log x}{T}).$$

Del teorema de los residuos y las acotaciones en la región libre ceros de la función zeta se deduce

Teorema. *Se verifica la relación*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

en todos los puntos de la linea $\sigma = 1$.

En particular resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Mangoldt demuestra que esta serie es nula utilizando el teorema del número primo. También se verifica el recíproco: es decir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$ implica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = 0, \tag{5.9}$$

y esta es una de las numerosas formas equivalentes del teorema del número primo.

Pero si se supone que la Hipótesis de Riemann es cierta entonces se mejoran considerablemente ambas propiedades. Por un lado se cumple

Teorema. *Para que la hipótesis de Riemann sea cierta, es condición necesaria y suficiente que se verifique la estimación*

$$M(x) \ll x^{1/2+\epsilon} \tag{5.10}$$

para cada $\epsilon > 0$.

Obsérvese que hemos pasado de la estimación $M(x) = o(x), \quad x \to \infty$ a una estimación (5.10) mucho mas precisa. En cuanto a la convergencia de la serie, utilizando el Lema anterior con $a(n) = \mu(n)$, $F(s) = 1/\zeta(s)$, $b > 1$ obtenemos

$$\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s+w)} \frac{x^s}{s} ds + +O(\frac{x^b}{Tb}).$$

La aplicación del teorema de los residuos en el rectángulo de vértices $(b\pm iT, 1/2-\sigma+\delta\pm iT)$ donde $0 < \delta < \sigma - 1/2$, y teniendo en cuenta que si la hipótesis de Riemann es cierta entonces $\zeta(s) \ll t^{\epsilon}$, $1/\zeta(s) \ll t^{\epsilon}$ para cada s con $\sigma > 1/2$ y eligiendo $b = 2$, $T = x^3$, resulta que *si suponemos cierta la hipótesis de Riemann la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$ converge en el semiplano $\sigma > 1/2$.* Como consecuencia resulta que

Teorema. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$ converge para $\sigma > 1/2$ si y sólo si la hipótesis de Riemann es cierta.*

La hipótesis de Mertens sobre $M(x)$, establece que $|M(x)| < \sqrt{x}$ obsérvese que esta hipótesis es más fuerte que la de Riemann, de hecho la hipótesis de Mertens implicaría la de Riemann. Pero la hipótesis de Mertens fué rechazada en 1985 por Odlizco y Riele [30] quienes probaron que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > 1,06, \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} < -1,009.$$

(d) Problema divisor de Dirichlet e hipótesis de Lindelöf. En los problemas divisor se estudian las funciones aritméticas que son coeficientes de series de Dirichlet generadas por $\zeta^2(s)$, $\zeta^k(s), k > 2$. Estas funciones son $d(n) = d_2(n)$ que denota el número de divisores positivos de n y está generada por $\zeta^2(s)$.

La función $d_k(n)$ está generada por $\zeta^k(s), k > 2$ y representa el número de formas de expresar n como producto de k factores de enteros positivos. El caso $k = 3$ es conocido como problema de Piltz.

El problema divisor de Dirichlet trata de la estimación del término error $\Delta_k(x)$, $k \geq 2$ para la función sumatoria de $d_k(n)$. Cuando $k = 2$ se tiene

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x).$$

De la fórmula de inversión para series de Dirichlet, obtenemos la relación

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \zeta^k(s) x^s s^{-1} ds, \quad b > 1 \tag{5.11}$$

con la condición de x no entero y siendo $\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}, \sigma > 1$. Así se obtiene

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = x P_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x)$$

donde $P_{k-1}(t)$ representa un polinomio en t de grado $k-1$ y que se puede calcular mediante el teorema de Cauchy de los residuos. El término error está dado por

$$\Delta_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta^k(s) x^s s^{-1} ds + O(x^{\epsilon}) \tag{5.12}$$

para $1/2 < c < 1$, y $\Delta_k(x) = o(x)$, cuando $x \to \infty$.

Para $k \geq 4$ la estimación del término error depende de las estimaciones de la función zeta, y para los valores de $k = 2, 3$, las mejores estimaciones se han obtenido por otros métodos diferentes.

Para el término error, el propio Dirichlet demuestra que cuando $k = 2$ es $\Delta_2(x) \ll \sqrt{x}$. Una extensión del método de Dirichlet da la estimación para $\Delta_k(x)$ siguiente $\Delta_k(x) \ll x^{\frac{k-1}{k}} \log^{k-2} x$.

Sean α_k, β_k el ínfimo de los números a_k, b_k respectivamente para los cuales

$$\Delta_k(x) \ll x^{a_k+\epsilon}, \qquad \int_1^x \Delta_k^2(y) dy \ll x^{1+2b_k+\epsilon}. \tag{5.13}$$

Para todo $k \geq 2$ se verifican las desigualdades $\frac{k-1}{2k} \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

Problemas relacionados con $\Delta_k(x)$ se pueden formular en función de los parámetros α_k, β_k. Por ejemplo, *la condición necesaria y suficiente para la certeza de la hipótesis de Lindelöf es que* $\beta_k = \frac{k-1}{2k}, k = 2, 3, \ldots$ (ver Titchmarsh [34]).

Para α_2 la mejor estimación es la obtenida por Huxley ([17]), así por ahora es conocido que $1/4 \leq \alpha_2 \leq 23/73$.

Condiciones necesarias y suficientes alternativas para que la hipótesis de Lindelöf sea cierta son

$$\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt \ll_{\epsilon,k} T^{1+\epsilon}, \quad \epsilon > 0, k = 1, 2, \ldots) \tag{5.14}$$

(aquí la notación $\ll_{\epsilon,k}$ significa que la constante implicada depende de ϵ, k.)

(5.15) $$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt \ll_{\epsilon,\sigma,k} T^{1+\epsilon}, \quad (\sigma > 1/2, \epsilon > 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

(5.16) $$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt = (1+o(1))\sum_{n=1}^{\infty} d_k^2(n)n^{-2\sigma}$$

$(\sigma > 1/2, k = 1, 2, \ldots)$

(5.17) $$\zeta^k(s) = \sum_{n\leq|t|^\delta} d_k(n)n^{-s} + O(|t|^{-\lambda})$$

para cada entero positivo k y $\sigma \geq \sigma_0 > 1/2$, donde $\lambda = \lambda(k, \delta, \sigma_0) > 0$ y $0 < \delta < 1$ es un número cualquiera fijado.

(5.18) $$D_k(x) = \sum_{n\leq x} d_k(n) = xP_{k-1}(\log x) + O(x^{1/2+\epsilon}), k \geq 2.$$

6 Hipótesis de Riemann generalizada

Conocida la existencia de infinitos números primos en la sucesión natural, la siguiente cuestión que surge es ¿ siguen existiendo infinitos números primos si nos restringimos a una sucesión de números de la forma $h + kn, n = 0, 1, 2, \ldots$, con h, k enteros, k entero positivo ?

La respuesta nos la da un importante teorema de Dirichlet que afirma que cualquier progresión aritmética del tipo anterior con la condición de que $(h, k) = 1$ contiene infinitos números primos.

En los problemas de distribución de los números primos en progresiones, desempeñan un papel análogo a la función Zeta, las L-funciones de Dirichlet.

(6.1) $$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

donde $\chi(n)$ es un carácter respecto del módulo k. Un carácter, es una función no idénticamente nula, definida en $\mathbb{Z}$, que es completamente multiplicativa, esto es $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ y además es periódica de periodo k. Un caso especial, es el llamado carácter principal respecto del módulo k, $\chi_1(n) = 1$ si $(n, k) = 1$ y es cero si $(n, k) > 1$. La L-función corespondiente $L(s, \chi_1)$ es una función meromorfa, con un único polo de primer orden en $s = 1$, de residuo $\varphi(k)/k$; $\varphi(k) = card\{n \leq k,\ (n, k) = 1\}$. En los demás casos la L-función es entera.

Hardy y Littlewood enunciaron la hipótesis según la cual, todos los ceros no triviales de $L(s, \chi)$, en la franja $0 < Re\ s = \sigma < 1$ están situados en la recta $\sigma = 1/2$. Esta es la hipótesis de Riemann generalizada.

Para las L-funciones de Dirichlet se verifica una identidad análoga a la de Euler para la $\zeta(s)$, esto es, en $Re\ s > 1$ se tiene

$$L(s,\chi) = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

Cuando χ es el carácter principal tenemos $L(s,\chi_1) = \zeta(s)\prod_{p|k}(1-p^{-s})$. En particular $L(s,\chi) \neq 0$ cuando $Re\ s > 1$. Si $\chi \neq \chi_1$, resulta que $\max_{x\geq 1} |\sum_{n\leq x}\chi(n)| \leq \frac{k}{2}$. Por el test de Dirichlet se tiene que la serie $L(s,\chi)$ converge en $Re\ s > 0$.

Basándose en las propiedades de las L-funciones, Dirichlet, demostró en 1837 que la condición necesaria y suficiente para que en una progresión arimética $h + kn$ existan infinitos números primos, es que h y k sean primos entre si.

Posteriormente Ch. de la Vallée-Poussin demostró que

$$\pi(x;h,k) = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv h \pmod k}} 1 = \frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{6.3}$$

donde c es una constante que sólo depende de k. A. Walfisz mediante un teorema de Siegel demostró que la fórmula asintótica anterior es uniforme en $3 \leq k \leq \log^\alpha x$, donde $\alpha > 0$ es arbitrariamente grande y $c > 0$ una constante absoluta.

Pero si la hipótesis de Riemann generalizada es cierta, entonces la estimación que se obtiene es mucho más precisa

$$\pi(x;h,k) = \frac{x}{\varphi(k)\log x} + O(\sqrt{x}\log x), \tag{6.4}$$

análogamente para la función de Chebyshev se obtiene

$$\psi(x;h,k) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv h \pmod k}} \Lambda(n) = \frac{x}{\varphi(k)} + O(\sqrt{x}\log^2 x), \tag{6.5}$$

siempre que $k \leq x$.

Existen otros problemas en los que influye decisivamente la hipótesis de Riemann generalizada. Veamos para terminar estas notas, uno muy importante que por el momento sigue abierto.

En una carta de 1742 a Euler, Goldbach le expresa su creencia de que

(G) *Cada entero $n > 5$ se puede expresar como suma de tres primos.* Goldbach consideraba 1 como número primo.

A lo que Euler contesta a Goldbach, eso se puede ver fácilmente que es equivalente a lo siguiente

(E) *cada entero par, $2n \geq 4$, es la suma de dos primos.*

Observese que si (E) es cierta y si $2n \geq 6$ entonces $2n-2 \geq 4$ por lo que $2n-2 = p_1+p_2$, con p_1, p_2 primos así $2n+1 = 3+p_1+p_2$.

Figura 3: Memorial de Riemann (Breselenz)

Recíprocamente si (G) es cierta y $2n \geq 4$ entonces $2n + 2 = p_1 + p_2 + p_3$ con p_1, p_2, p_3 primos, entonces necesariamente uno es 2 por ejemplo p_3. De donde resulta que $2n = p_1 + p_2$. [P. Ribenboim (1989)]

En la actualidad permanecen abiertas las conjeturas conocidas como problema ternario: *Cada entero impar* $n > 7$ *es la suma de tres primos,* y problema binario: *cada número par, mayor que* 2*, es la suma de dos primos.*

Hardy-Littlewood (1923) demostraron que para $r_3(n)$- número de representaciones de n impar $n > 7$ como suma de tres primos- que si la hipótesis de Riemann generalizada es cierta, entonces $r_3(n) \sim S_3(n)n^2/\log^3 n$, $S_3(n)$ conocida como serie singular, depende de n pero está comprendida entre dos constantes. En 1937 I. Vinogradov demostró sin condiciones que todo número impar suficientemente grande, $N \geq N_0$,, se puede escribir como suma de tres primos. El problema después ha sido rebajar la constante N_0.

Mediante la hipótesis de Riemann generalizada, Deshouillers-Effinger-te Riele-Zinoviev ([8]), dan una demostración completa del problema ternario para todo $n > 7$ impar.

Referencias

[1] Aparicio, E. *Teoría de los números.* Editorial UPV. (1993).

[2] Ayoub, R. *Amer. Math. Monthly* . Vol. 81, 1067-1086, (1974).

[3] Backlund, R. (2) *Über die Beziehung zwischen Anwachsen und Nullstellen der Zeta funktion.* Öfversigt Finska Vetensk. Soc. 61 (1918-19), No. 9.

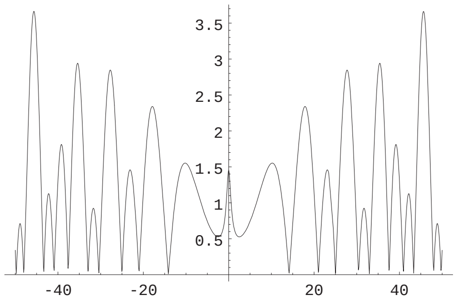

Figura 4: La función $|\zeta(\frac{1}{2}+iy)|$, con $y \in [-50, 50]$

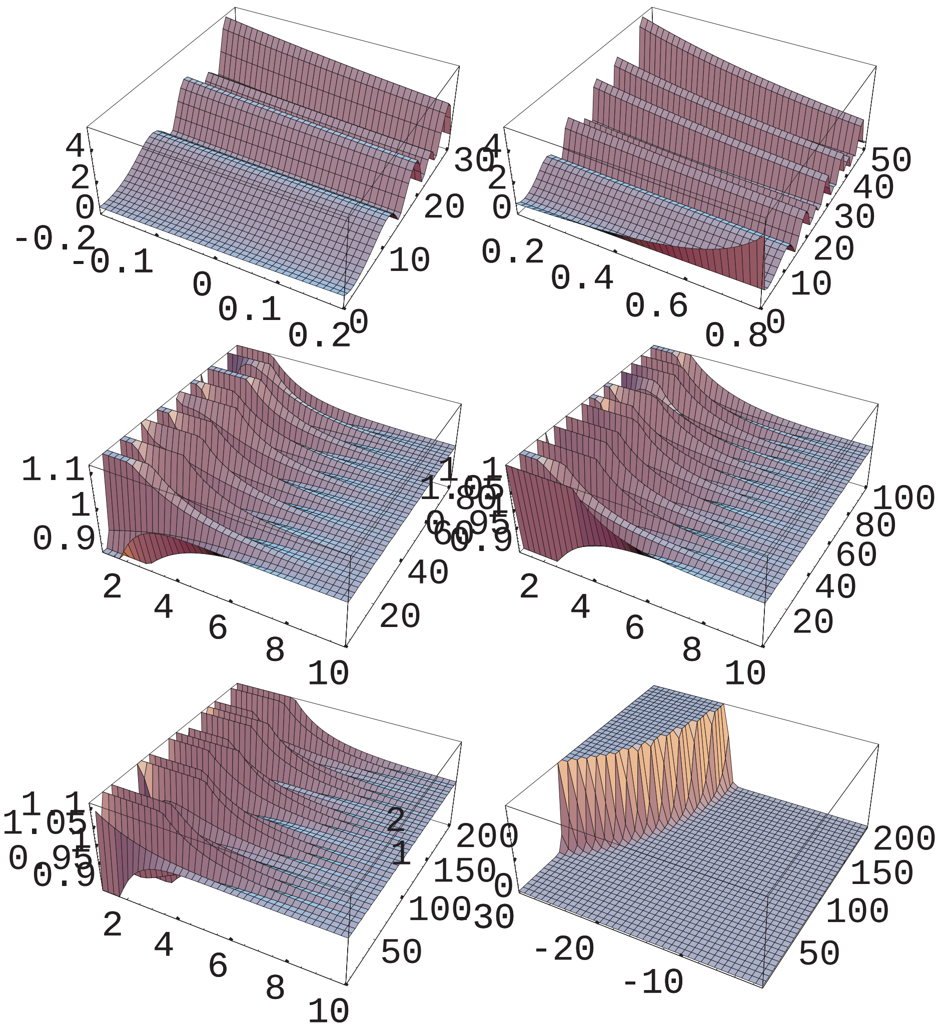

Figura 5: La función $|\zeta(x+iy)|$, con varios valores de x e y.

[4] Balasudramanian, R.*An improvement of a theorem of Titchmarsh on the mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$. Proc. London Math. Soc. 36 (1978), 540- 576.

[5] Chandrasekharan, K. *Arithmetical functions.*Springer Verlag New York 1969.

[6] —- *Introduction to Analytic Number Theory.*Springer-Verlag New-York 1968.

[7] Clement, P.A. *Congruences for sets of primes.* Amer. Math. Monthly, 56, (1949), 23-25.

[8] Deshouillers, J.M.,Effinger, G., te-Riele, H., Zinoviev, D. *A complete Vinogradov* 3*-primes theorem under the Riemann hypothesis.* Electron Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997), 99-104.

[9] Edwards, H.M. *Riemann's zeta function* Acad. Press. New York. 1974.

[10] Faisant, A. *L′équation diophantine du second degré.* Hermann, Paris,1991.

[11] Hadamard, J. *Etude sur les proprietés des fonctions entieres et en particulier d′une fonction considérée par Riemann.* J. Math. Pur. appl. 9 (1893), 171-215.

[12] —– *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmé- tiques.* Bull. Soc. Math. France 24, 199-220 (1896).

[13] Hardy, G.H. *Comptes Rendus,* Acad. Sci. Paris, 158 (1914), 1012-1014.

[14] Hardy, G.H. and Wright, E.M. *An Introduction to the theory of numbers.* Oxford. Clarendon Press. 1979.

[15] Hardy, G.H. and Littlewood, J.E, *Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the distributions of primes.* Acta Math. 41, 19-196 (1918).

[16] Haselgrove, C.B. and Miller, J.C.P.*Tables of the Riemann zeta function.* RSM 6, Cambridge University Press 1963.

[17] Huxley, M.N. *Exponential sums and lattice points II.* Proc. London Math. Soc. (3) 66, no. 2, 279-301, 1993.

[18] Ingham, A.E. (4) *On the difference between consecutive primes.* Quart. J. Math. (Oxford Series) 8 (1937), 255- 266.

[19] Ivic, A. *The Riemann zeta function.* Jhon Wiley, New York 1985.

[20] Karatzuba, A.A. *On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function on the critical line.* Trudy Math Inst. Steklov Moscu,157, 49-63 (1981).

[21] Korobov, N.M. *Estimates of trigonometric sums and their applications.* Usp. Mat. Nauk. 13:k (1958), 185-192.

[22] Lavrik,A.F., Sobirov,A.S. *On the remainder term in the elementary proof of the prime number theorem,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 211 (1973), 534-536.

[23] Laugwitz, D. *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning points in the conception of Mathematics.* Translated by Abe Shenitzer, Birkhäuser, 1999.

[24] Littlewood, J.E. *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan Res $> 1/2$.* Comptes Rendus de l'Acad. des sciences (Paris) 154(1912), 263-266.

[25] Littlewood, J.E. *On the zeros of Riemann zeta-function.* Proc. Camb. Phil. Soc. 22 (1924), 295-318.

[26] Mangoldt 1895, 1905 Math. Annalen, 60 (1905), 1-19.

[27] Moser, J. *On a theorem of Hardy-Littlewood in the theory of the Riemann zeta function.* Acta Arith. 31 (1976),45-51 and 35 (1979), 403-404.

[28] Mozzochi, C.J.*On the difference between consecutive primes,* J.N. Theory, 24 (1986), 181-187.

[29] Nathanson, M.B. *Additive Number Theory, The Classical Bases.* Springer GTM 164, (1996)

[30] Odlizco, A.M., and Riele, J.J. *Disproof of Mertens conjecture.* J. reine angew Math. 367 (1985) , 138-160.

[31] Ribenboim, P. *The book of prime number records.* Springer-Verlag, 1989.

[32] Riemann, B. *Über die Anzahl der Prinzahlen unter einer gegebener Gröse.* Mo- nastsber. Akad. Berlin, 671-680, (1859).

[33] Selberg, A. *Contributions to the theory of the Riemann zeta function.* Arch. Math. og. Naturv. B, 48 (1946) no. 5.

[34] Titchmarsh, E.C. *The theory of the Riemann Zeta-Function.* Clarendon Press. Oxford 1988. Revised by D.R. Heath Brown.

[35] Vinogradov, I.M. *A new estimate for $\zeta(1+it)$.* Iz. Ak. Nauk. 22 (1958), 161-164.

[36] Walfisz, A.*Exponentialsummen in Neueren Zahlentheorie.*Deuts. Verlag 1963.