# SOBRE LA TEORIA DE LA MEDIDA Y SUS FUNDAMENTOS

DISCURSO DE INGRESO EN LA ACADEMIA

leído por el Académico electo

ILMO. SR. D. BALTASAR R.-SALINAS PALERO

en el acto solemne de su recepción

celebrado el día 2 de mayo de 1965

*Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,*

*Señores Académicos,*

*Señoras y señores:*

En un acto tan importante para mí como éste, me es difícil expresar exactamente los sentimientos que me embargan hacia tan ilustre Corporación, que se ha dignado a invitarme a formar parte de ella. El momento más grato de todos es reconocer y agradecer profundamente el gran honor que se me ha hecho con esta elección, en la que se manifiesta la amistad que me une con todos sus miembros; porque no cabe duda de que una de las cosas más agradables y humanas es contar con un número crecido de buenos amigos. Tanto honor obliga a mucho, tanto que no puedo saber yo mismo si podré ser útil para los altos fines que tiene esta ilustre Academia de Ciencias.

Solamente puedo asegurar, reiterando mi gratitud, que intentaré corresponder a él y a las esperanzas que han puesto en mí, poniendo todo mi entusiasmo en las tareas que me sean encomendadas como miembro de ella. No he de negar que me siento abrumado por la responsabilidad que he contraído con mi aceptación, pero también he de manifestar que siento un gran alivio pensando que siempre podré contar con la ayuda y dirección de los miembros tan valiosos con que cuenta la Academia de Ciencias de Zaragoza.

Satisfacción y preocupación son los sentimientos que me han animado desde que me enteré que vengo a ocupar aquí la vacante que dejaron D. Zoel GARCÍA DE GALDEANO Y YANGUAS y D. Pedro ABELLANAS CEBOLLERO. El primero de ellos íntimamente unido a la Academia desde sus comienzos, pues fue uno de los seis miembros fundadores que formaron parte de la Comisión preparatoria de su Organización y Reglamento cuya constitución se llevó a cabo en 1914 a propuesta del entonces Catedrático de Análisis Matemático D. José RIUS Y CASAS. Como es conocido por muchos, si no es por todos, el profesor GARCÍA DE GALDEANO desempeñó un papel fundamental en la Matemática española de su tiempo, incluso hoy todavía perdura su influencia a través de los 3000 volúmenes que, aproximadamente, cedió a su muerte a la Facultad de Ciencias de Zaragoza y que fue el germen de la actual biblioteca en su Sección de Matemáticas.

D. Zoel, hombre de ciencia comunicativa, ansioso de enseñar a los demás todos cuantos conocimientos iba adquiriendo, no paró en su afán de propagar por España, mediante la pluma y la palabra, primero todas las ciencias en las que como pionero veía la base de la prosperidad nacional, y después en las Matemáticas en las que como ciencia pura por excelencia veía un índice seguro de la cultura y bienestar general. Por todo ello bien justo es que se tribute homenaje a quien su discípulo Rey Pastor llamaba tan certeramente "Apóstol de la Matemática moderna en España".

Volviendo los ojos atrás, recordemos que este ilustre profesor y académico, que nació en Pamplona el 5 de julio de 1846, era nieto del historiador navarro D. José Yanguas y Miranda e hijo de un brillante oficial de nuestro ejército, muerto en acción de guerra por los insurrectos de Santo Domingo. Su espíritu inquieto, ávido de saber, le hizo no desmayar y vencer en las dificultades económicas consiguientes, estudiando sucesivamente las carreras de Perito Agrimensor, Maestro Superior, Licenciado en Filosofía y Letras y, finalmente, la de Ciencias Exactas. Desde 1871 que se graduó en esta licenciatura, al establecerse en 1870 en nuestra Universidad una Facultad Libre de Ciencias, las Matemáticas serían el principal objeto de toda su vida profesional. Después de ejercer su actividad como Catedrático de los Institutos de Ciudad Real, Almería y Toledo durante los años 1881 al 1889, es nombrado para la Cátedra de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de Zaragoza que desempeñó hasta 1896, salvo una breve interrupción en el curso 1892-1893 por la conocida supresión accidental de la Facultad de Ciencias. En 1896, D. Zoel se hizo cargo de la Cátedra de Análisis Infinitesimal hasta su jubilación el 20 de septiembre de 1918. Ni aún después de esta fecha D. Zoel dio por terminada su actividad científica, continuando con sus publicaciones y en la Presidencia de la Real Sociedad Matemática Española de la que también fue uno de sus fundadores, y la Facultad de Ciencias se honró en contarle como Catedrático honorario hasta su fallecimiento en 1924. No creo sea momento oportuno de reproducir aquí la lista de las numerosas publicaciones de D. Zoel, más aún cuando el Prof. Rodríguez-Vidal se ha ocupado recientemente de ello. Sin embargo debo recordar que también a D. Zoel se debe la publicación de la primera revista española de Matemáticas que se llamó "El Progreso Matemático" y se publicó durante los años 1892-95 y 1899-900. Finalmente, como homenaje a tan destacada figura de la Matemática española el Seminario Matemático de Zaragoza, dependiente del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, se denomina desde hace dos años Seminario Matemático "García de Galdeano".

D. Pedro Abellanas, último de mis predecesores en el sillón de esta Academia, nació el 20 de noviembre de 1914 en Zaragoza. Influido seguramente por su padre, constructor de obras, estudió la carrera de Arquitectura que no terminó poque su vocación le llamaba hacia las Matemáticas. Siguiendo esta llamada estudió en esta Facultad de Ciencias con los profesores SILVÁN, PINEDA, RIUS Y CASAS, MARCOS y AMAT. En 1940 ganó por oposición la Cátedra de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Media de Mérida y estudió en Leipzig, durante los meses de mayo a septiembre, bajo la dirección del famoso Profesor VAN DER WAERDEN. En 1942 ganó por oposición la Cátedra de Geometría Analítica de nuestra Universidad, dejando la de Madrid en donde era profesor encargado y a donde regresó en 1948 al ganar nuevamente por oposición la Cátedra de Geometría Proyectiva.

Poco podemos decir más sobre el Prof. ABELLANAS que no sea conocido de todos los presentes, pero debemos destacar su gran entusiasmo por la Matemática y, en especial, por el Algebra, manifestado en sus numerosas publicaciones, tanto de investigación como de carácter didáctico, así como también en los éxitos conseguidos en su labor docente.

En la actualidad el Prof. ABELLANAS es el Director del "Instituto Jorge Juan" de Matemáticas del C. S. I. C. y es uno de los mayores impulsores de las Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles, que esperamos contribuyan a propagar el entusiasmo por la Matemática en España.

Es el momento ahora que pase a desarrollar el tema elegido para cumplir con la obligación reglamentaria.

Su elección no ha sido fácil, porque en mí luchaban dos tendencias difícilmente reconciliables. Por una parte quería exponer un tema de carácter general y por otra deseaba que mi ingreso en esta Academia de Ciencias fuese acompañado por alguna contribución mía a la Matemática, que aunque no fuese importante, manifestara mi cariño y deseo de trabajar por esta Corporación. Al final me he decidido por la última tendencia, eligiendo un tema, como es el de la medida, que creo ha tenido y tiene un interés fundamental en la Matemática; procurando que en lo posible su exposición sea también de interés para todo mi heterogéneo auditorio. No creo sea fácil lograrlo, por ello comienzo pidiendo perdón por todo lo pesada que pueda resultar mi disertación:

## SOBRE LA TEORIA DE LA MEDIDA Y SUS FUNDAMENTOS

Mi interés por la teoría de la medida, se despertó hace ya bastantes años con una publicación en donde me interesaba de los tres problemas siguientes: *Construcción de medidas*, *Prolongación de medidas* y *Determinación de las relaciones existentes entre medida y topología*. Estos son desde luego, a mi parecer, tres de los problemas más importantes de la Teoría de la medida como podremos comprobar a través de la historia.

## LA TEORIA DE LA MEDIDA EN LOS GRIEGOS

Alboreaba la Matemática como Ciencia, cuando en las nociones de longitud, área y volumen de los griegos se fundamentaba ya la Teoría de la medida en su invarianza respecto del grupo de movimientos. En los *Elementos* de EUCLIDES (300 a. de C.), que como se sabe es la obra clásica que más influencia ha tenido en el desarrollo de la Matemática, los libros V y VI contienen los conocimientos más importantes de la época sobre la teoría de las magnitudes. El libro V es una teoría general de las proporciones, independiente de la naturaleza de las cantidades, mientras que en el libro VI las cantidades proporcionales son geométricas. El libro V contiene una de las más bellas aportaciones de los griegos, la definición de igualdad y desigualdad de razones atribuida a EUDOXIO, en donde implícitamente está ya el concepto de número real, al no hacerse ninguna distinción entre la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de las cantidades proporcionales. Como es bien conocido el descubrimiento de los irracionales y de las cantidades inconmensurables fue debido a PITÁGORAS y a su escuela, y es famosa porque significó su descrédito y ruina al estar en contradicción con sus concepciones filosóficas.

También entre las definiciones del libro V incluye EUCLIDES el enunciado: *Se dice que dos cantidades tienen razón entre sí cuando una de ellas puede multiplicarse de manera que supere a la otra.* Esta definición es un nuevo postulado como lo reconoció ARQUÍMEDES y ahí está la explicación del nombre por el que habitualmente se le conoce.

En el libro XII de los *Elementos*, dedicado a la geometría del espacio, incluye EUCLIDES cuatro teoremas que exigen para su demostración el *método de exhaución*, que en definitiva son los siguientes:

1. Dos círculos están entre sí como los cuadros construidos sobre sus respectivos diámetros.

2. Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de igual base y altura.

3. Un cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.

4. Dos esferas están entre sí como los cubos construidos sobre sus respectivos diámetros.

Pero en los *Elementos* no se encuentra ningún intento de rectificar la circunferencia o arcos de circunferencia, como tampoco para cuadrar el círculo, ni para hallar las extensiones superficiales, totales o parciales, de las figuras limitadas por los cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. Relativo a esto solamente se dan las cuatro proposiciones anteriores, faltando toda comparación entre los poliedros y los cuerpos redondos.

Para comprender bien las ideas de EUCLIDES sobre los conceptos de longitud, área y volumen creemos muy conveniente recordar las *Nociones comunes* de los *Elementos*:

1. *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*

2. *Si a cosas iguales se agregan cosas iguales los totales son iguales.*

3. *Si de cosas iguales se sustraen cosas iguales, los restos son iguales.*

4. *Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales los resultados son desiguales.*

5. *Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí.*

6. *Las mitades de una misma cosa son iguales entre sí.*

7. *Las cosas que se pueden superponer una a la otra son iguales entre sí.*

8. *El todo es mayor que la parte.*

Está bien claro que la palabra "igual", que de algún modo viene definida por estas propiedades, se refiere a la "magnitud" de las figuras geométricas. Más tarde volveremos a hablar de estas importantes Nociones comunes cuando tratemos de nuestra teoría de la cantidad.

ARQUÍMEDES (287-212), la figura máxima de la geometría griega y una de las mentes mejores dotadas de la Matemática y de la Ciencia de todos los tiempos, cubre gran parte de las lagunas dejadas por los *Elementos* de EUCLIDES. En el libro *De la esfera y del cilindro* ARQUÍMEDES halla las áreas y volúmenes de los principales cuerpos redondos. Posiblemente, el principal motivo que se grabara sobre su tumba una esfera con su cilindro circunscrito, se debe a la atracción que sintió hacia su descubrimiento de que tanto las áreas como los volúmenes de ambos están en la misma proporción, que es la razón simple 2:3. En su escrito que se conoce con el nombre *Del método relativo a los teoremas mecánicos*, abreviadamente, el *Método*, se hallan también dos interesantes cubaturas por procedimientos mecánicos.

Otros dos libros de ARQUÍMEDES, dedicados a la geometría plana, se refieren a cuadraturas, una exacta y otra aproximada. En *Cuadratura de la parábola* se encuentra una doble demostración de la equivalencia de un segmento de parábola con un triángulo, una "mecánica" mediante las propiedades de la palanca y de los centros de gravedad y otra exclusivamente geométrica, pero en ambas, ARQUÍMEDES emplea esencialmente el proceso de paso al límite. Finalmente, en el escrito *De la medida del círculo*, ARQUÍMEDES prueba no sólo la equivalencia entre el problema de la cuadratura del círculo y el de la rectificación de la circunferencia, sino también da una solución aproximada de esos problemas.

Se podrían citar otras contribuciones de los geómetras griegos a la teoría de la medida, pero solamente recordaremos por su afinidad con el método mecánico de ARQUÍMEDES el teorema de PAPPUS (300 a. C.) referente a la determinación mediante el centro de gravedad de las áreas y volúmenes de los cuerpos engendrados por rotación, proposición que es conocida por el nombre de teorema de GULDIN (1577-1645) por haberla redescubierto este matemático suizo.

Mucho nos hemos extendido hablando de las aportaciones de los griegos a la teoría de la medida, pero en parte queda justificado por los siglos que habían de transcurrir hasta encontrar nuevas aportaciones importantes. Por otro lado, estas consideraciones nos van a ser útiles para comprender mejor los problemas que se irán planteando y resolviendo en las siguientes épocas.

# EL SIGLO XVII

Con el siglo XVI se cierra el período que va desde la decadencia griega a las grandes creaciones de la Matemática del siglo XVII.

Antes de tratar de lo que significaron estas nuevas ideas para la teoría de la medida, acaso merezca mencionarse el cálculo del sugestivo número $\pi$ con 35 decimales, llevada a cabo por Ludolf VAN CEULEN (1540-1610), y la primera expresión del mismo en producto infinito lograda por Francois VIETE (1540-1603), más comúnmente conocido por VIETA, que indudablemente fue el más grande de los matemáticos de su tiempo por sus importantes contribuciones al Algebra.

La influencia de las ideas que llevaron a la creación de la Geometría analítica por René DESCARTES (1596-1650), se hizo sentir en toda la Matemática y en especial en la teoría de la medida. Efectivamente, dichas ideas junto con la definición rigurosa del número real daría lugar a la construcción de los espacios $E_n = R^n$ sobre los que se fundamentaría esencialmente la teoría de la medida hasta los principios de este siglo. Aunque estos espacios se llamarían euclídeos por ser aplicables a ellos, para $n \leq 3$, los descubrimientos de los geómetras griegos, desde un punto de vista moderno no se podría sostener el isomorfismo de las geometrías correspondientes, a no ser que se diese por bueno el hecho de completar los axiomas de la geometría "euclídea" con un cierto número de nociones "primitivas" para los griegos. Pero ésto es una cosa ya habitual en la Matemática, puesto que todo cambio que ha afectado a los conceptos primitivos y a los axiomas ha tenido una influencia tal, que desde el punto de vista del rigor, es difícil afirmar que hayan dado lugar a la misma Matemática.

Otra de las creaciones del siglo XVII, el Cálculo infinitesimal, habría de tener capital importancia para el cálculo de áreas, volúmenes, rectificación de curvas, momentos de inercia... En nuestra concepción actual, la idea de *paso al límite* en combinación con las operaciones algebráicas es en donde reside la esencia del cálculo infinitesimal o cálculo sublime, como también se le llamaba antiguamente.

En todas las etapas de la evolución de la Matemática se encuentran, por lo menos en germen, los métodos del cálculo infinitesimal. Estos métodos aparecen en las críticas de los eleatas y en algunas argumentaciones de los sofistas y adquieren categoría y rigor científico en la teoría de las proporciones y en el método de exhaución de EUDOXIO. Este método permitió a ARQUÍMEDES deducir rigurosamente resultados que hoy se obtienen con el cálculo diferencial e integral, por lo que se puede considerar a ARQUÍMEDES como el precursor en la antigüedad de los métodos infinitesimales. La exhaución de Eudoxio es desde luego un método de demostración irreprochable, si se admiten ciertos postulados, pero tiene su punto débil en que es preciso conocer previamente el resultado a demostrar y, por tanto, en este sentido, no es propiamente un método de investigación, en contraste con los métodos nuevos del cálculo infinitesimal.

Es indudable, que la lectura de las obras de ARQUÍMEDES por los matemáticos del Renacimiento y modernos, que le tienen a la vez como modelo y fuente de inspiración, tuvo gran influencia en los nuevos métodos. En la actualidad con el descubrimiento, en 1906, de *El Método* de ARQUÍMEDES no queda ninguna duda de que la idea de integral la poseía ya el maravilloso matemático siracusano, pero esta obra quedó perdida para los precursores, fundadores y sistematizadores del cálculo infinitesimal.

Veamos el vacilante y lento proceso que condujo al concepto de integral. Inspirado en las obras de ARQUÍMEDES, Luca VALERIO (1552-1628) escribe un tratado sobre los centros de gravedad que contiene en germen las ideas que luego desarrollará CAVALIERI. También, influenciado por ARQUÍMEDES, Johannes KEPLER (1571-1630) escribe su *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) en donde utiliza consideraciones infinitesimales. Las cuadraturas y cubaturas dadas por ARQUÍMEDES, mediante el método de exhaución, son calculadas por KEPLER recurriendo directamente a expresiones de carácter infinitesimal, admitiendo como si las figuras estuvieran compuestas de infinitas figuras infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes conocidos. Así, supone la esfera descompuesta en pequeños conos de vértice en el centro y de base una pequeña porción de superficie esférica, de esa manera la esfera es equivalente a un cono de altura el radio y de base igual al área de la superficie esférica. Por consideraciones análogas, KEPLER logra dar, aunque no siempre correctamente, el volumen de más de 90 cuerpos de rotación, que llamó casi siempre con nombres derivados de frutas y que se propuso obtener con objeto de calcular la capacidad de los toneles para vino, entonces en uso. En la segunda parte de este tratado, KEPLER, al afirmar que los toneles austríacos eran los más convenientes, hace la observación, ya indicada por Nicola de ORESME (1313-1382), y que no había escapado a los astrónomos babilonios, de que la variación de una función es particularmente lenta en el entorno de un máximo o un mínimo, propiedad equivalente a la anulación de la derivada, y que con la generalidad lograda en la actualidad, conviene destacar que sólo es válida cuando el máximo o mínimo es alcanzado en un punto interior al dominio de la función.

Concepciones semejantes a las de KEPLER se hallan en Bonaventura CAVALIERI (1598-1647) miembro del grupo de amigos y discípulos de GALILEO. CAVALIERI es autor de un método de integración basado en los "indivisibles" que ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas concepciones de ARQUÍMEDES, basadas en el método de exhaución, y los nuevos métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo. Sin definir el término, CAVALIERI adopta los indivisibles de la filosofía escolástica, en donde los puntos son los indivisibles de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas... Realmente, CAVALIERI no utiliza ninguna definición de los indivisibles, pues para él, no son más que una manera de hablar para referirse a los elementos de dos figuras que él compara, y que mediante una cierta técnica algebraica le permite calcular áreas y volúmenes de ellas, proceso estrechamente ligado al cálculo de una integral múltiple mediante integrales simples.

La falta de rigor de CAVALIERI está suplida por los resultados; el hecho es que el lenguaje de los indivisibles se mantuvo casi medio siglo.

El método lo expone CAVALIERI en *Geometría indivisilibus continuorum nova quadam ratione promota de* 1635, en la nueva edición modificada de 1653 y en *Exercitationes geometrica sex* de 1647. En la primera de estas obras se encuentra ya su famoso principio:

*Si dos áreas planas tienen la propiedad, de que toda paralela a una dirección dada las corta según segmentos cuyas longitudes están en una razón constante, entonces dichas áreas están en la misma razón.* Un principio análogo se da para los volúmenes de dos cuerpos cortados por planos paralelos a un plano fijo cuando las áreas están en una razón constante.

Los principios de CAVALIERI le llevan a reconocer que la mayoría de los problemas resueltos por ARQUÍMEDES se reducen a las cuadraturas de las tres primeras potencias de la variable que, por inducción, mediante un ingenioso método de recurrencia, generaliza para las potencias de exponente natural, lo cual le permite resolver además de los problemas de los antiguos otros resueltos o propuestos por KEPLER, así como también algunos nuevos.

Así, aparece una forma de clasificar estos problemas según el grado de dificultad, real o aparente, que presentan las cuadraturas a que ellos conducen.

También del círculo científico de GALILEO se preocuparon de estos problemas de cálculo, Evangelista TORRICELLI (1608-1647) y Vincenzo VIVIANI (1622-1703). TORRICELLI en su *Opera Geométrica* de 1644 halla diversas cuadraturas y cubaturas, entre estas últimas el volumen del sólido engendrado por rotación de un arco de hipérbola equilátera alrededor de una asíntota, haciendo notar que cuando el arco es infinito, el volumen del sólido es finito e igual al de un cilindro, que tiene por base el círculo descrito por la rotación del origen, y por altura la distancia de ese punto a la otra asíntota. Son también de interés otras investigaciones de TORRICELLI sobre las curvas exponencial, logarítmica y espiral logarítmica que quedaron inéditas hasta este siglo.

Otro matemático de la época Giles Personne de ROBERVAL (1602-1675) se ocupó en calcular áreas y volúmenes, así como rectificaciones de curvas y determinaciones de centros de gravedad, utilizando una concepción semejante a los indivisibles, aunque algo más próxima a los de los "infinitamente pequeños". Concretamente este método, fue empleado por ROBERVAL para calcular el área limitada por la curva que GALILEO llamó cicloide y del sólido engendrado por rotación de la misma.

Ahora puede parecer inverosímil, pero es cierto que el estudio de una simple curva como la cicloide dio un gran impulso al desarrollo del cálculo infinitesimal con las polémicas, desafíos y controversias que motivó y en las que intervinieron los matemáticos más notables de la época. Entre los problemas de rectificación más famosos, figura precisamente el de la cicloide, resuelto por el arquitecto de la catedral de San Pablo Christopher WREN (1632-1723) en 1658. Algunos años antes, entre 1640 y 1645, TORRIcelli y Roberval habían logrado rectificar los arcos de la espiral logarítmica mediante métodos cinemáticos.

Con concepciones semejantes a las de Roberval, Blaise Pascal (1622-1662) estudió numerosas propiedades de la cicloide, por él llamada "roulette", propiedades que constituyeron el tema de uno de los tantos desafíos sobre la cicloide.

Pierre Fermat (1601-1666), uno de los más grandes matemáticos del siglo XVII, fue el que adelantándose a Cavalieri, logró la integración de las potencias enteras de exponente $n \neq -1$, en la forma conocida, por medio de una fórmula para las sumas de las potencias de los $m$ primeros enteros positivos, siguiendo así un método semejante al que empleó Arquímedes para la cuadratura de la espiral. El resultado fue generalizado por el mismo Fermat para exponente racional.

Algunas rectificaciones de curvas, fueron también obtenidas por este genial matemático, reduciendo el problema al de las cuadraturas, con lo que quedaba establecida la analogía algebraica de ambos problemas.

Mientras con estas cuestiones, y otras, como la determinación de máximos y mínimos y de las tangentes a una curva, en las que destacó también Fermat, se iba preparando la creación de los algoritmos del cálculo diferencial e integral; otros algoritmos infinitos, las series, productos infinitos, etc., hacen su aparición por obra principalmente de Jhon Wallis (1616-1703), James Gregory (1638-1675), Nicolau Mercator (1620-1687) y William Brouncker (1620-1684).

Wallis, en su *Arithmetica infinitorum* (1655), siguiendo un método mezcla de inducción e interpolación y sin conocer los resultados de Fermat, entonces no publicados, obtiene que la integral de $x^m$ en el intervalo $(0,1)$ es $1/(m + 1)$ cualquiera que sea $m$, racional o irracional. Es curioso destacar que este resultado, aunque incorrecto para $m < -1$ coincide para estos valores de $m$ con la parte finita de la misma integral. Pero lo más interesante y original de Wallis, se halla en la extensión que hizo de su regla para toda suma o serie de potencias, y en sus importantes consideraciones sobre la integral euleriana, $\int_0^1 (1 - x^{1/m})^n \, dx$, que le permitieron expresar $4/\pi$ como producto infinito. Aparte de todo esto, hay un hecho histórico que hace memorable la *Arithmetica infinitorum* y es que en esta obra aparece el símbolo $\infty$.

Una consecuencia importante del método de cuadratura de Wallis, fue el descubrimiento de la serie logarítmica, y con ella, una solución de la cuadratura del segmento de hipérbola equilátera. Mercator es quien resuelve este problema de cuadratura, con la feliz idea de escribir la ecuación de la hipérbola en la forma $y = 1/(1 + x)$, que podía desarrollarse en serie de potencias y, por tanto, aplicarse el método de Wallis.

Antes que Mercator, Gregoire de Saint Vincent (1584-1667) en su *Opus Geometricum Quadraturae* (1647), había hecho notar que si $s = s\ (a, b)$ es el área del segmento hiperbólico limitado por la hipérbola $xy = c$ y las rectas $y = 0$, $x = a\ (> 0)$ y $x = b\ (> 0)$, a valores en progresión geométrica de $b/a$ les correspondían valores en progresión aritmética de $s$. También un poco antes, GREGORY en 1667, había dado una regla para calcular las áreas de los segmentos hiperbólicos por medio de logaritmos decimales.

Calculadas las cuadraturas de los segmentos de las parábolas $y = x^n$ y las de los segmentos circulares hiperbólicos, los métodos de integración por partes y por cambios de variables, iniciados pos PASCAL, FERMAT, GREGORY y BARROW, permiten resolver un gran número de estos problemas por reducción a las cuadraturas elementales. Entre ellos es notable la integración de sec $x$ por GREGORY en 1668.

Isaac BARROW (1630-1677) a quien acabamos de citar, es una figura de singular importancia en la Matemática, porque además de los métodos que ideó para calcular áreas y trazar tangentes a curvas, que son esencialmente los problemas claves de los cálculos integral y diferencial, respectivamente, no puede haber duda alguna de la gran influencia que ejerció en la obra de su discípulo predilecto: NEWTON.

Las contribuciones de todos estos matemáticos preparan y allanan el camino, para que por obra de NEWTON y de LEIBNIZ, surja el cálculo infinitesimal como rama propia y autónoma de la Matemática.

Hemos visto ya que todos ellos habían resuelto numerosos problemas sobre diversas cuestiones infinitesimales, pero fuera de algunos vislumbres, a los precursores de NEWTON y LEIBNIZ, les faltó una noción clara de límite, que mostrase la unificación de sus métodos, los cuales carecían del rigor de las demostraciones de los geómetras griegos. En parte, esta etapa empírica de la evolución del análisis infinitesimal, queda superada por NEWTON y LEIBNIZ, los cuales volviendo un poco la espalda al pasado buscan principalmente la justificación de los nuevos métodos, no en las demostraciones, sino en la fecundidad y coherencia de los resultados.

Es preciso llegar hasta el siglo XIX, para que el análisis infinitesimal alcance un alto grado de rigor, e incluso entrar bastante en el XX para que los tres conceptos habituales de límite queden totalmente unificados. El rigor se ha logrado, pero a costa de dar un carácter potencial a los infinitésimos, en contraposición al carácter actual que se les dio en un principio. que era irreconciliable con el rigor matemático. Sin embargo, la coherencia lograda por los matemáticos del siglo XVII, hace pensar que si se considera en lugar de esos infinitésimos otras nociones rigurosas, se puede volver a dar un carácter actual al análisis infinitesimal, de manera que su aspecto formal sea el mismo. Efectivamente, como veremos, la teoría de la integración en espacios topológicos, puede desarrollarse dentro de esa aspiración con un carácter actual-potencial, mediante el concepto de *germen de medida*.

## EL SIGLO XVII: NEWTON Y LEIBNIZ

La contribución más original e importante de Isaac NEWTON (1642-1727) al cálculo infinitesimal, es su "*método de fluxiones*" que aunque fue publicado por primera vez en 1736 con el nombre de *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* había sido escrito en 1671. Sus "*fluentes*" son las funciones del tiempo y sus "*fluxiones*" son las derivadas respecto del mismo, que no es más que un parámetro universal en una forma ya imaginada por BARROW. El carácter general del método es destacado por el propio NEWTON. en una carta de 1672, al decir que puede aplicarse "no sólo al trazado de tangentes a cualquier curva, sea geométrica o mecánica..., sino también para resolver cualquier clase de problemas sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad, etc. ...", agregando que "ha entrelazado ese método, con aquel otro método que consiste en trabajar con las ecuaciones, reduciéndolas a series infinitas". Así las series, y entre ellas, la del binomio, aparecen en las obras de NEWTON como recurso para resolver ecuaciones y efectuar cuadraturas. También con el mismo objeto en su *Methodus differentialis* (1712), aparece la llamada *fórmula de interpolación de* NEWTON, que constituye el punto de partida de la teoría de las diferencias finitas.

En *De Analysi per aequationes*..., las cuadraturas de las potencias se realizan de acuerdo con la regla general dada por FERMAT y WALLIS, pero lo original y nuevo, es su descubrimiento sobre el carácter inverso del problema de la tangente y el de la cuadratura, quedando así desatado el nudo gordiano del nuevo análisis.

En NEWTON aparece la idea de límite funcional, aunque en forma un poco oscura, cuando con objeto de resolver las objeciones que se le hicieron, por su anulación de los incrementos, en la determinación de fluxiones, en su *Tractatus de quadratura curvarum (1706)*, hace "evanescer los incrementos de las variables" para obtener "la razón de los incrementos evanescentes".

Mientras en Inglaterra, NEWTON lograba dar unidad y autonomía al cálculo infinitesimal, en el continente por obra de Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716), tal unidad y autonomía se acentuaban. Si la obra de NEWTON, fue la de un filósofo natural, impulsado por sus inquietudes sobre la Mecánica, la de LEIBNIZ fue la de un fiilósofo y la de un algebrista. Su preocupación por la claridad de los conceptos y por el aspecto formal de la Matemática, le permitieron crear el simbolismo adecuado para los nuevos algoritmos.

LEIBNIZ, independientemente de NEWTON, reconoce el carácter inverso del problema de la tangente y el de la cuadratura, a donde llegó por consideraciones sobre el "triángulo característico", que dice haber tomado de PASCAL y que ya había sido considerado por BARROW.

La primera publicación de LEIBNIZ sobre el Cálculo diferencial es de 1684 en las *Actas Eruditorum* de Leipzig. aunque desde 1676 estaba ya en posesión de las reglas y fórmulas más simples de él. En este mismo escrito utiliza LEIBNIZ la notación $dx$ para la diferencial, de manera semejante que NEWTON había utilizado la notación $\dot{x}$ para la fluxión. Dos años después, en 1686, aparecen las primeras publicaciones de LEIBNIZ relativas al Cálculo integral, utilizando ya el signo integral. Antes había empleado con el mismo objeto la abreviatura "Omn".

La forma distinta de concebir la Matemática NEWTON y LEIBNIZ, se ve claramente en su correspondencia. Así cuando NEWTON, más analista que algebrista, anuncia en 1676 que sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales, por desarrollo de la solución en serie de potencias, LEIBNIZ responde que lo que se trata es por el contrario de obtener la solución en términos finitos, siempre que ello se pueda lograr. La idea de LEIBNIZ es pues bien clara, es lograr la algebrización del análisis infinitesimal mediante un cálculo operacional adecuado. Así, coincidiendo con Joham BERNOUILLI (1667-1748), efectúa entre 1702 y 1703 la integración de las funciones racionales, por descomposición en fracciones simples, aunque de una manera formal, sin tener en cuenta la circunstancia que acompaña a la presencia de raíces complejas del denominador. Estas consideraciones podían dar una idea un poco falsa, si no agregamos que tanto NEWTON como LEIBNIZ, intercambiando estos puntos de vista, se preocuparon e hicieron contribuciones en los campos opuestos.

En las vidas de NEWTON y LEIBNIZ existe también otro punto de contacto, pues una influencia parecida a la de BARROW sobre NEWTON es la ejercida por HUYGENS sobre LEIBNIZ. Christian HUYGENS (1629-1695), aunque era principalmente un físico, también era un matemático, como lo prueban sus importantes contribuciones al Análisis infinitesimal. Así que LEIBNIZ encontró un excelente maestro y guía en HUYGENS para manifestar su vocación matemática.

En la orientación algebraica del nuevo análisis, emprendida por LEIBNIZ. sobresaldrán después matemáticos tan famosos como Adrien Marie LEGENDRE (1752-1833), Niels Henrik ABEL (1802-1829) y Carl Gustav Jacob JACOBI (1804-1851) en la integración de funciones algebraicas. En nuestro siglo, esta orientación ha dado lugar a la creación del Algebra diferencial, que tiene por principal finalidad el estudio algebraico de las ecuaciones diferenciales. pero en ello no entramos porque nos apartaríamos demasiado de nuestro tema.

## EL SIGLO XIX

Volviendo a la evolución histórica del concepto de integral en el punto donde lo hemos dejado, la etapa sin duda más importante que aparece, es la iniciada por Agustin-Louis CAUCHY (1789-1857). CAUCHY define la integral, analíticamente, como límite de una suma y no como operación inversa de la derivación, lo cual representa un retorno a la noción de integral de la antigüedad y primera parte del siglo XVII. Así la integral definida, que durante mucho tiempo quedó en un lugar secundario, con CAUCHY vuelve a desempeñar un papel primordial.

Para asegurar la existencia de la integral, CAUCHY se limita a las funciones continuas, quedando de este modo relacionada por primera vez tal existencia con la continuidad, propiedad ésta que había sido considerada por Bernard BOLZANO (1781-1848), adelantándose a CAUCHY y a los demás analistas del siglo XVII. La demostración de CAUCHY naturalmente no es correcta, pues su método exigía aplicar el teorema de la continuidad uniforme establecido por Heinrich Eduard HEINE (1821-1881) en 1872.

En cuanto a la notación de integral definida, la adoptada por CAUCHY es la usual $\int_a^b f(x)\, dx$ que representa una notable simplificación sobre la $\int f(x)\, dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$ empleada por EULER.

El concepto de integral de CAUCHY, fue generalizado primeramente por Peter Gustav LEJEUNNE DIRICHLET (1805-1859) para las funciones cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto con un número finito de puntos de acumulación, utilizando para ello un artificio empleado ya por CAUCHY cuando los puntos de discontinuidad de la función son aislados. Para demostrar la existencia de funciones no integrables, DIRICHLET define su célebre función, igual a 1 para $x$ racional y a 0 para $x$ irracional, la cual está de acuerdo con su concepto general de función.

Una "pequeña modificación" en el concepto de integral de CAUCHY, permitió a Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826-1866) hacer sentir también la influencia de su genio matemático en la teoría de la integración, superando las integrales de Cauchy y de Dirichlet, así como también la que se obtiene por reiteración transfinita del proceso de CAUCHY-DIRICHLET para las funciones acotadas. La idea de RIEMANN es determinar cuando las "sumas de Riemann" de una función acotada $f$, en un intervalo finito $[a, b]$, convergen a un número real cuando la máxima longitud de los intervalos de la subdivisión tiende a cero. El problema es resuelto por RIEMANN bajo dos formas diferentes, una de las cuales viene expresada por la condición de que para cada par de números $\omega > 0$ y $\varepsilon > 0$, haya una subdivisión de $[a, b]$, tal que sea $< \varepsilon$ la suma de las longitudes de los intervalos de la misma en donde la oscilación de $f$ supere a $\omega$. De esta condición resulta inmediatamente que la función de Dirichlet tampoco es integrable Riemann, pero el primer ejemplo de función no integrable Riemann cuyo conjunto de puntos de discontinuidad sea no denso o raro fue dado por Henry John STEPHEN (1826-1883) en 1875. Este ejemplo tiene gran interés, porque deshace completamente la creencia de que toda función, cuyo conjunto de puntos de discontinuidad sea no denso, es integrable Riemann o Dirichlet, error en que según parece estuvo el mismo DIRICHLET.

En 1875 es cuando también aparece la memoria de Jean Gaston DARBOUX (1842-1917) sobre las funciones discontinuas, en donde hace sus importantes contribuciones a la teoría de la integral. En ella, además de lograr la primera demostración correcta, basada en el teorema de Heine, de la integrabilidad de una función continua en un intervalo $[a, b]$, DARBOUX precisa algunas cuestiones relativas a la integral de Riemann y da una condición de integrabilidad Riemann, mediante sus integrales superior e inferior.

Otra condición de integrabilidad Riemann, es la formulada por Paul D. G. DU BOIS REYMOND (1831-1889), que representa un paso intermedio entre la dada por RIEMANN y la que dará después LEBESGUE mediante su teoría de la medida.

Hemos llegado por fin a la época de la gran creación contoriana de la teoría de conjuntos. El número real ha sido definido mediante las cortaduras por Julius Wilhelm Richard DEDEKIND (1831-1916) y mediante las sucesiones de Cauchy por Charles MERAY (1835-1915) y Georg CANTOR (1845-1918), el mismo año 1872 que se publica la definición utilizada por WEIERSTRASS en sus lecciones de Berlín. Los matemáticos pueden disponer entonces de conceptos suficientemente claros y rigurosos de conjunto, función y número real, fundamentales para desarrollar de una manera general la teoría de la medida.

En este ambiente, surgen aproximadamente hacia 1884 los primeros intentos para definir la medida de una forma amplia por obra de STOLZ, HARNACK y CANTOR. Los dos primeros toman como medida de cada parte acotada $A$ de la recta real $R$, el extremo inferior de los números reales que se obtienen sumando las longitudes de un número finito de intervalos cuya reunión cubre a $A$, mientras que CANTOR, define como medida de cada conjunto acotado $A$ de $R^n$, el extremo inferior del "volumen" del conjunto $V(\rho)$ de los puntos cuya distancia a $A$ es $\leqslant \rho$ $(> 0)$. CANTOR reduce así la definición de medida de cualquier conjunto acotado $A$ de $R^n$ a la definición de "volumen" de los conjuntos cerrados $V(\rho)$ que no precisa, limitándose sólo a indicar que se puede calcular por una integral múltiple.

Estas definiciones, en esencia equivalentes, presentan la dificultad de que la reunión de dos conjuntos disjuntos $A$ y $B$, como los conjuntos de los puntos racionales e irracionales de un intervalo $[a, b]$, puede tener una medida menor que la suma de las medidas de $A$ y $B$. Para evitar este inconveniente, Giuseppe PEANO (1858-1932) y Camille JORDAN (1838-1922) introducen algunos años después junto a la "medida" de Cantor $\mu^*(A)$ de un conjunto acotado $A$, contenido en un intervalo $I$, su "medida interior" $\mu_*(A) = \mu^*(I) - \mu^*(I - A)$, que no depende de $I$, y llaman "medibles" a los conjuntos para los cuales estos dos números son iguales. De esta manera, con la restricción de limitarse a los conjuntos medibles en el sentido de PEANO-JORDAN, se ha logrado una cosa tan natural como que la medida de la reunión de dos conjuntos disjuntos $A$ y $B$ sea igual a la suma de las medidas de $A$ y $B$.

A conclusiones semejantes a las de PEANO y JORDAN, podía haber llegado fácilmente RIEMANN si, considerando funciones análogas a la de DIRICHLET, hubiera definido la medida de un conjunto $A$, contenido en un intervalo finito $[a, b]$, mediante la integral $\int_a^b \varphi_A(x)\, dx$ de la función característica $\varphi_A$ de $A$ ($\varphi_A(x) = 1$ para $x \in A$, $\varphi_A(x) = 0$ para $x \notin A$) bajo la restricción de que $\varphi_A$ fuese integrable en el sentido por él adoptado.

Conviene agregar, que el concepto de medida de PEANO-JORDAN equivale, para el plano $R^2$, al proceso natural de tomar como medida de un conjunto acotado $A$ de $R^2$, el número real que resulta haciendo tender $\varepsilon$ a 0 en la suma de las áreas de los cuadrados de un $\varepsilon$ — reticulado, que tienen algún punto común con $A$, con tal que la diferencia entre esa suma y la suma de las áreas de los cuadrados del mismo reticulado, contenidos en $A$, tienda a 0 con $\varepsilon$.

A la vista de consideraciones semejantes más intuitivas y más al alcance de cualquier hombre, se destaca que la principal contribución de PEANO y JORDAN, se debe a que en lugar de tomar la medida como una cosa hecha y dada, dentro del espíritu de la Matemática definen la medida con precisión de modo que cumplan las condiciones deseables.

Tanto la medida de PEANO-JORDAN como la integral de RIEMANN presentaban dificultades que hacían conveniente extender los conceptos de medida e integral. Efectivamente, ni el conjunto de los puntos racionales de un intervalo $[a, b]$ era medible según PEANO-JORDAN, ni la función de Dirichlet era integrable Riemann. Aunque estas dificultades no fueran las que llevaran, directamente, el nacimiento de la nueva teoría de la medida, que surge en el último decenio del siglo, lo cierto es que en la nueva teoría dichas dificultades quedaran eliminadas, si no completamente, por lo menos en los casos sencillos.

## FINALES DEL SIGLO XIX Y SIGLO XX

No creemos que se haya dado mucho el caso de que un profesor destacado haya logrado tener cuatro discípulos de primera categoría. Esto es el caso de JORDAN y sus discípulos BOREL, BAIRE, LEBESGUE y FRÉCHET, de los que iremos sucesivamente viendo sus contribuciones relacionadas con la teoría de la medida e integración.

Emile BOREL (1871-19?) es el que tiene el mérito de iniciar la nueva teoría de la medida, impulsado por el estudio de ciertas series de funciones racionales. El punto de partida de BOREL es la definición de medida de un abierto acotado $G$ en $R$. Con este objeto, en lugar de utilizar cubrimientos finitos de $G$, formados por intervalos, como se procedía antes, BOREL propone tomar como medida de $G$ la suma de la serie de las longitudes de los intervalos componentes, basándose en un resultado conocido desde CANTOR, según el cual todo abierto $G$ en $R$ es reunión numerable de intervalos abiertos y disjuntos. El concepto de medida lo extiende BOREL a la clase de los conjuntos por él llamados "medibles" y después llamados por otros "borelianos", que se pueden obtener a partir de los abiertos por iteración indefinida de las operaciones de *reunión numerable* y *diferencia de conjuntos*. La propiedad fundamental, completamente nueva, de la medida de Borel es la *aditividad completa:* La medida de la reunión de una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos es igual a la suma de las medidas de estos conjuntos.

Creemos importante destacar que en la teoría de la medida de Borel, tiene un papel fundamental el conocido teorema de Heine-Borel, demostrado por BOREL en su tesis, según el cual, todo conjunto cerrado y acotado de la recta real es numerablemente compacto en el sentido actualmente adoptado. Otra propiedad utilizada por BOREL, que ha pasado casi desapercibida, no obstante su importancia, es: Para cada número $\varepsilon > 0$ existe una serie de números positivos cuya suma es no superior a $\varepsilon$.

Estas ideas de BOREL inauguran una nueva era en el análisis, pues además de servir de base para la generalización del concepto de integral, llevada a cabo por LEBESGUE en los primeros años de este siglo, son el punto de partida, junto con los trabajos de BAIRE, de una serie de investigaciones sobre la clasificación de los conjuntos y de las funciones, desde un punto de vista puramente topológico.

René BAIRE (1874-1932), procediendo de manera semejante que BOREL, para definir los conjuntos borelianos, define las llamadas *funciones de* BAIRE, como aquellas funciones que se pueden obtener a partir de las funciones continuas, por iteración indefinida de la operación de límite de sucesiones funcionales, sirviéndose del mismo proceso para clasificar dichas funciones. Otros conceptos importantes que se deben también a BAIRE, son el de *semicontinuidad* y el de *conjunto de primera categoría*, éste último introducido para la caracterización de las funciones que son límite de una sucesión de funciones continuas.

Estas investigaciones de naturaleza topológica de BOREL y BAIRE, en unión de una famosa memoria de LEBESGUE de 1905 sobre las "*funciones representables analíticamente*", en donde quedaron identificadas éstas con las funciones de Baire y con los medibles B (o de Borel), y del descubrimiento hecho por M. SOUSLIN en 1917 de que la imagen continua de un boreliano puede no serlo, fueron el origen de la *teoría de conjuntos analíticos* tan íntimamente ligada a N. LUSIN y a un grupo de matemáticos polacos entre los que figura W. SIERPINSKI.

El nombre de Henry LEBESGUE (1875-1941) estará siempre unido a la teoría de la medida y de la integración. Efectivamente, LEBESGUE, en su transcendental tesis doctoral *Intégrale, longuer, aire* (1902) completa las ideas de Borel, modificando ligeramente el método de PEANO-JORDAN, mediante la utilización de cubrimientos numerables de intervalos o de abiertos, así define la "medida exterior" de un conjunto acotado $A \subset R$, como el extremo inferior de la medida de los abiertos que contienen a $A$, y después la "medida interior" de $A$, si $I$ es un intervalo que contiene a $A$, como la diferencia de las medidas exteriores de $I$ y de $I - A$. Un conjunto $A$ es medible según LEBESGUE, si estas medidas son iguales; entonces resulta que la clase de los conjuntos medibles (L), o según LEBESGUE, es más amplia que la formada por los medibles (B) y tal que para cada conjunto medible (L), existen dos conjuntos $B_1$ y $B_2$ medibles (B), con igual medida, que le limitan por dentro y por fuera: $B_1 \subset A \subset B_2$. Esta definición se extiende inmediatamente a los espacios $R^n$, así la antigua concepción de integral definida $\int^b_a f(x)$ de una función acotada $f \geqq 0$, como área del conjunto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, da una generalización inmediata, de la integral de Riemann para todas las funciones para las cuales dicho conjunto es medible (L).

Pero el genial analista, guiado por su símil del comerciante ordenado, sigue también otro método para definir la integral de una función acotada $f$, que consiste en subdividir el intervalo que tiene por extremos los de la función dada, mediante un número finito de puntos $y_i$, y considerar los conjunto $E_i$, de los puntos que satisfacen $y_{i-1} \leqq f(x) < y_i$, para formar las sumas $S = \Sigma\, \overline{y}_i\, \mu(E_i)$, donde $\overline{y}_i$ es cualquier número comprendido entre

$y_{i-1}$ e $y_i$ y $\mu(E_i)$ es la medida de $E_i$, en el supuesto de que todos estos conjuntos sean medibles, es decir, que $f$ sea medible. Nos hemos referido a funciones no acotadas, pero LEBESGUE define también la integral para funciones no acotadas, utilizando con este fin series en lugar de sumas finitas.

Otros conceptos de integral equivalentes al de LEBESGUE se deben a W. H. YOUNG (1910), F. RIESZ, LA VALLÉE POUSSIN, REY PASTOR, TONELLI, etcétera.

Conviene destacar que la originalidad de LEBESGUE, no reside tanto en la idea de generalizar el concepto de integral, como en el descubrimiento del teorema fundamental de paso al límite, válido para la integral (L), que no es más que una consecuencia de la aditividad completa de la medida.

Aunque no es nuestro propósito detenernos a describir aquí las innumerables aplicaciones que encuentra la teoría de la integral de Lebesgue en todo el Análisis, nos parece obligatorio recordar los grandes progresos que se han logrado con ella en los conceptos de longitud de curvas y área de superficies curvas, en las series de Fourier y en los espacios de Hilbert junto con la definición de los espacios $L^p$.

Por su extraordinario interés, dedicaremos más atención al problema de hallar la relación entre los conceptos de integral indefinida y primitiva, en el que también LEBESGUE hizo importantes contribuciones. Este problema se plantea ya con la integral de Riemann, puesto que es fácil dar ejemplos de funciones integrables Riemann con la propiedad de que su integral indefinida carezca de derivada en algunos puntos. Recíprocamente, según demostró VOLTERRA en 1881, una función continua puede tener derivada acotada en un intervalo $I$, pero no ser integrable Riemann. Estos resultados se pueden precisar más, cuando se trata de la integral de Lebesgue. En efecto, si $F$ es la integral indefinida de una función $f$, integrable (L) en $I = [a, b]$, se tiene $F'(x) = f(x)$ en casi todo $I$ según probó LEBESGUE. Análogamente, si $F$ es derivable en $I$ y su derivada $F' = f$ es acotada, $f$ es integrable y se puede aplicar la regla de Barrow. En el caso en que $f$ no sea acotada el problema es más complejo, pero LEBESGUE lo abordó también caracterizando las funciones continuas $F$ para las cuales existe $F'$ en casi todo $I$ y es integrable. De manera semejante a como se logró esto mediante el concepto de variación acotada, las integrales indefinidas fueron también caracterizadas por LEBESGUE por la propiedad de ser absolutamente continuas.

La existencia de funciones con derivada no integrable (L) ha conducido a una nueva generalización, llamada *totalización* y debida a DENJOY, del concepto de integral indefinida, que consiste en una reiteración transfinita de ciertas operaciones, logrando así que el concepto de integral indefinida comprenda al de primitiva. Para restablecer la equivalencia que había entre estos conceptos cuando las funciones eran continuas, DENJOY y KHINTCHINE han introducido el concepto de *derivada aproximativa*.

En todos estos procesos el cálculo de la primitiva se efectúa recurriendo a la integral indefinida, pero PERRON, en 1914, invirtió el método, utilizando la primitiva para obtener la integral indefinida. Como toda función se-puede acotar entre otras dos, llamadas *mayorante y minorante de* LA VALLÉE-POUSSIN, que sean derivadas inferior y superior, en el sentido de DINI, de sendas funciones nulas en el origen, cuando éstas tengan el mismo valor en $x$, se adopta la función resultante como integral (P), o mejor primitiva (P), de la función dada. Esta integral de PERRON resulta así idéntica a la integral de Lebesgue para funciones acotadas, pero existen funciones integrables (P) que no lo son (L). Finalmente, HAKE y ALEXANDROFF, RIDDER y BURKILL, mediante sendas generalizaciones de la integral (P), han logrado la equivalencia de ésta con las integrales restringida y generalizada de DENJOY.

En 1894, T. STIELTJES en su transcendental memoria *Récherches sur les fractions continues*, considera por vez primera integrales del tipo $\int_1^b f(x)\, dg(x)$, en donde $f$ es una función continua y $g$ es no decreciente. De esta forma, el concepto de "distribución de una masa", familiar desde hace bastante tiempo en la Física, se introduce también en la Matemática. Sin embargo, han de pasar algunos años hasta que este concepto vuelva a atraer la atención. Es con motivo de resolver un problema propuesto por HADAMARD, años antes, cuando F. RIESZ demuestra en 1909 que las funcionales lineales continuas sobre el espacio de las funciones reales continuas en $[a, b]$, dotado de la topología uniforme, se pueden expresar por una integral de Stieltjes: $f \to \int_a^b f\, d\varphi$. Estas ideas encuentran acogida en J. RADON quien en 1913, combinando las ideas de RIESZ y LEBESGUE, define la llamada *integral de Lebesgue-Stieltjes* a partir de una función completamente aditiva de conjunto. Esta memoria de RADON y la marcada orientación hacia lo abstracto de comienzos de este siglo, señalan el tránsito a la teoría de la integración sobre espacios abstractos. Es M. FRÉCHET quien observa que todos los resultados de este trabajo, pueden extenderse al caso en el que la función completamente aditiva de conjunto esté definida para ciertas partes de un conjunto abstracto $E$, en lugar de estarlo para las partes medibles de $R^n$.

La clase de los conjuntos medibles (L) de $R$, aunque más amplia que la clase de los conjuntos de Borel, no coincide con la formada por todas las partes de $R$, como se conoce desde 1905 por obra de G. VITALI. No obstante, según probó S. BANACH en 1923, existe una medida finitamente aditiva (o extensión) sobre $R$ o $R^2$ que coincide con la medida de Lebesgue para todo conjunto medible y que además es invariante por cualquier congruencia o movimiento. Pero tampoco esto es posible para $R^n$, si $n \geqq 3$, según demostró antes HAUSDORFF en 1913 mediante una notable descomposición de la superficie esférica en cuatro partes, tres de ellas congruentes entre sí y la otra numerable. Más sorprendente que este resultado es la llamada *paradoja de Banach-Tarski* (1924) según la cual, dos esferas de $R^n$ radios distintos se pueden descomponer para $n \geqq 3$, en un número finito de partes respectivamente congruentes. Desde un punto de vista puramente abstracto, tal descomposición no debe considerarse como una paradoja sino semejante a lo que ocurre con la correspondencia $n \Longleftrightarrow 2n$ entre los números naturales y sus duplos, independientemente de que se aplique o no el axioma de la elección. Sin embargo, la paradoja surge de manera manifiesta en el momento que se identifican las partes del espacio $R^3$ con las del "espacio intuitivo real" y, por ejemplo, esas dos esferas con el Sol y un guisante.

En nuestra opinión, solamente las importantes aplicaciones que ha encontrado la teoría de la integración de BOREL y LEBESGUE en toda la Matemática y, en particular, en los espacios funcionales, pueden explicarse que no se haya prestado la atención debida a los citados resultados de BANACH, HAUSDORFF y TARSKI. Efectivamente, la importancia que tienen éstos, es sin duda grande, tanto en los fundamentos de la teoría de la medida, como en la contribución que suponen en el viejo problema de asignar una medida a "toda parte" del plano y del espacio, de modo que sea invariante respecto del grupo de movimientos y que queden conservadas las áreas y volúmenes de las "figuras elementales".

## INVESTIGACIONES PROPIAS

Desde hace unos tres años nuestras investigaciones se han dirigido hacia estas cuestiones, tratando primero de dar condiciones suficientes para que para toda medida finitamente aditiva (en abreviatura: f. ad.) o extensión $\mu$, definida sobre un anillo $\mathcal{S}$ de partes de un conjunto $E$ e invariante por un grupo $G$ de permutaciones de $E$, exista una extensión $\mu$, definida sobre la clase $\overline{\mathcal{S}}$ de las partes de los conjuntos perteneciente a $\mathcal{S}$, tal que sea una prolongación de $\mu$ y también invariante por el grupo $G$. Estas propiedades justifican que llamemos a esta extensión $\mu$ una prolongación ultracompleta de $\mu$ invariante por $G$.

El problema a que nos acabamos de referir, fue el que dio origen, primero a un trabajo en el que dimos una generalización para A-módulos del *teorema de Hahn-Banach* y después a otro donde, desde un nuevo punto de vista, hicimos un estudio general del problema abstracto de la extensión que trata, dado un grupo $G$ de permutaciones de un conjunto y una extensión $\mu$ $(\neq 0)$, definida sobre un anillo de partes de $E$ y relativamente invariante por $G$, de averiguar si existe una prolongación ultracompleta $\mu$ de $\mu$ relativamente invariante por $G$. Aunque no podemos entrar mucho en detalles sobre el papel que desempeña la estructura del grupo $G$ en este problema, vamos a exponer algunas de las aplicaciones concretas de los resultados a que llegamos en estos trabajos:

1) Para el plano euclídeo, se puede mejorar el teorema de Banach afirmando que existe una prolongación ultracompleta de la medida de Lebesgue, relativamente invariante por el grupo de las semejanzas.

2) En el plano no euclídeo (hiperbólico o elíptico) no existe ninguna prolongación ultracompleta del área de las figuras elementales que sea invariante por el grupo de los movimientos.

3) Cualquiera que sea la extensión ultracompleta $\mu$ sobre una superficie esférica $E$ con $\mu(E) = 1$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $S \subset E$ y una rotación $\alpha$, cuyo eje pasa por el centro de $E$, con la propiedad de que $\mu(S) < \varepsilon$ y $\mu(\alpha S) > 1 - \varepsilon$.

El primero de estos resultados se obtiene inmediatamente del citado teorema de Banach aplicando el siguiente teorema de carácter general: Sea $\mu$ una extensión, definida sobre $\mathcal{S}$, relativamente invariante por el grupo $G$ de permutaciones de $E$, y $k$ el correspondiente multiplicador, es decir, $\mu(\alpha S) = k(\alpha)\, \mu(S)$ para cada $\alpha \in G$ y $S \in \mathcal{S}$. Entonces, si existe una prolongación ultracompleta $\mu_1$ de $\mu$ invariante por el grupo $G_1 = k^{-1}(1) = \{\alpha | \alpha \in G,\ k(\alpha) = 1\}$, se puede asegurar que existe también una prolongación ultracompleta $\bar{\mu}$ de $\mu$ relativamente invariante por $G$.

Respecto al resultado expuesto en segundo lugar, conviene agregar que lo hemos probado directamente, mediante un método general que hemos ideado, sin recurrir a ninguna descomposición de dos conjuntos en un número finito de partes respectivamente congruentes, lo cual, por otra parte, en particular, en el caso del plano hiperbólico nos parece difícil conseguir siguiendo el camino de Banach-Tarski.

No obstante, esta cuestión fue la que nos indujo por primera vez a la conjetura de que dos círculos cualesquiera del plano hiperbólico, se podían descomponer en un número finito de partes respectivamente congruentes. Esto lo hemos logrado probar en nuestros últimos trabajos, todavía no publicados, en donde simultáneamente ponemos de manifiesto, la íntima relación que hay entre el problema de la extensión o de la medida y la descomposición de dos conjuntos en un número finito de partes respectivamente congruentes, relación en cierto modo latente desde la antigüedad y sobre todo después de los trabajos de Banach, Hausdorff, Tarski y continuadores.

Finalmente, el tercero de los resultados anteriores, que se puede considerar como una nueva "paradoja", semejante a la de Banach-Tarski, tiene el interés de contener en germen una de las ideas originales más importantes de nuestro trabajo sobre el problema de la extensión.

Veamos ahora las últimas investigaciones que hemos realizado con motivo de este discurso, sobre las que conviene añadir que han sido grandemente impulsadas por la revisión histórica que nos sentimos obligados a hacer. Estas investigaciones las podemos clasificar en tres apartados:

1) Investigaciones sobre una nueva fundamentación de la teoría de la medida.

2) Investigaciones sobre las medidas topológicas, esto es, sobre aquellas medidas de un espacio topológico $E$ que están íntimamente unidas a la estructura de $E$.

3) Investigaciones sobre la teoría de series divergentes de las que no trataremos porque, aunque han sido motivadas por la revisión histórica que hemos hecho, se salen del tema elegido.

Hasta ahora no se ha conseguido dar un concepto de cantidad, lo suficientemente preciso y general, para poderlo manejar con el rigor que se requiere en la Matemática, puesto que a lo más, lo que se hace es identificarlo con el concepto de número real.

Sean $\mathcal{A}$ un retículo de partes de un conjunto $E$ y $\rho$ una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$ tales que:

*a*) Cualquiera que sea la familia finita $\{A_i | i \in I\}$ de conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$, existe otra $\{A_i' | i \in I\}$ de conjuntos $A_i' \in \mathcal{A}$ y disjuntos de modo que $A_i \, \rho \, A_i'$ para todo $i \in I$ y $\bigcup_i A_i'$ sea disjunto con $\bigcup_i A_i$.

*b*) Si las sumas $\sum_i A_i$ y $\sum_i A_i'$ $(i \in I)$ están definidas, es decir, si los conjuntos $A_i$ $(\in \mathcal{A})$ son disjuntos y también los $A_i$ $(\in \mathcal{A})$, y si además $A_i \, \rho \, A_i'$ para todo $i \in I$ se tiene

$$\sum_i A_i \, \rho \, \sum_i A_i'$$

Entonces, definimos como cantidad $a$ de $A$, respecto de $\rho$, a la clase $[A]$ de los conjuntos $A' \in \mathcal{A}$ que están en la relación $\rho$ con $A$.

Si $a$ y $b$ son dos cantidades respecto de $\rho$ se pueden encontrar, en virtud de *a*), dos conjuntos $A$ y $B$ de manera que

$$a = [A], \qquad b = [B] \quad \text{y} \quad A \cap B = \emptyset$$

En este caso, como según *b*) $[A + B]$ es independiente de los conjuntos $A$ y $B$ elegidos, se puede definir

$$a + b = [A + B].$$

De forma semejante se define directamente la suma $\sum_i a_i$ de un número finito de cantidades.

El conjunto $S$ de estas cantidades con la suma así definida es un semigrupo conmutativo, con elemento neutro $0 = [\emptyset]$ en donde, en general no es válida la ley de simplificación o cancelativa. En este semigrupo se puede definir, de manera natural, la desigualdad escribiendo $a \leqq b$ cuando existe una cantidad $c$ tal que $a + c = b$. Entonces, esta ordenación tiene las propiedades siguientes:

1) $a \leqq a$.

2) Si $a \leqq b$ y $b \leqq c$ es $a \leqq c$.

3) Si $a_i \leqq b_i$ para todo $i \in I$ se verifica $\sum_i a_i \leqq \sum_i b_i$.

Un ejemplo sencillo, en donde se cumplen las condiciones *a*) y *b*), se obtiene cuando $\mathcal{A}$ es la clase de las partes acotadas de $R^n$ y $\rho$ es la relación de equivalencia definida poniendo $A \, \rho \, B$ cuando $A$ y $B$ son dos partes acotadas de $R^n$ descomponibles en un número finito de partes respectivamente congruentes.

Sin embargo, en otros casos aparece la dificultad de que $\mathcal{A}$ y $\rho$ no cumplen las condiciones *a*) y *b*). Un ejemplo de ello se tiene cuando $\mathcal{A}$ es la clase de las partes de una superficie esférica $E$ y $\rho$ es la relación de equivalencia definida escribiendo $A \rho B$ cuando $A$ y $B$ son congruentes. Entonces, se plantea el problema de eliminar estas dificultades.

Si se cumple la condición *a)* pero no la *b)*, la cuestión es trivial pues basta considerar en lugar de $\rho$ la relación $\rho'$ definida poniendo $A \rho' B$ cuando $A$ y $B$ son descomponibles en un número finito de partes $A_i$ y $B_i$ $(i \in I)$ respectivamente $\rho$-equivalentes. La dificultad es más seria cuando no se cumple la condición *a)*, pero también se puede eliminar construyendo un retículo $\mathcal{A}^*$ que contenga a $\mathcal{A}$ y una relación de equivalencia $\rho^*$ en $\mathcal{A}^*$ de modo que su restricción en $\mathcal{A}$ sea la relación $\rho'$ antes construida. De manera más explícita procedemos así:

Para cada entero $n \geqq 0$ sean $\mathcal{A}_n$ el retículo de las partes $A_n = A \times \{n\}$ del conjunto $E_n = E \times \{n\}$, $E^* = \bigcup\limits_{0}^{\infty} E_n$ y $\sigma_n$ el isomorfismo $A_n = A \times \{n\} \rightarrow A$ de $\mathcal{A}_n$ en $\mathcal{A}$. Entonces, si $\mathcal{A}^*$ es el retículo formado por las uniones $\bigcup A_i$ de un número finito de conjuntos $A_i \subset E_i$ y $\rho_0{}^*$ es la mínima relación de equivalencia que contiene a las relaciones $\sigma_m^{-1}\, \rho\, \sigma_n$ resulta que $\mathcal{A}^*$ y $\rho_0{}^*$ cumplen *a)* de donde, por lo tanto, si se procede como antes se obtiene una relación $\rho^*$ tal que $\mathcal{A}^*$ y $\rho^*$ cumplen *a)* y *b)*, así como también las demás condiciones si se identifican $\mathcal{A}_0$ y $\rho_0$ con $\mathcal{A}$ y $\rho$.

Este proceso se puede ilustrar en el caso antes considerado de la superficie esférica $E$ tomando:

1) $E^*$ igual a la unión de las superficies esféricas $E_n \subset R^3$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ de radio $r$ igual al de $E$ y de centro $(na,\ 0,\ 0)$ con $a > 2r$.

2) $\mathcal{A}^*$ igual a la clase de las partes de $E^*$ contenidas en la unión de un número finito de superficies $E_n$.

3) $\rho^*$ la mínima relación de equivalencia que contiene a las relaciones $\sigma^m\, \rho_0\, \sigma^n$ en donde $m$ y $n$ son enteros cualesquiera, $\sigma$ la traslación $x' = x + a$, $y' = y$, $z' = z$ y $\rho_0$ es la relación de equivalencia en $\mathcal{A}^*$ definida poniendo $A \rho_0 B$ cuando $A - E_0 = B - E_0$ y $A \cap E_0$ y $B \cap E_0$ son descomponibles en un número finito de partes respectivamente congruentes.

La razón de que desde nuestro punto de vista, hayan sido eliminadas las dificultades que surgen cuando $\mathcal{A}$ y $\rho$ no cumplen las condiciones *a)* y *b)*, se debe a que toda extensión sobre $\mathcal{A}$ invariante por $\rho$ se puede prolongar en otra $\mu^*$ sobre $\mathcal{A}^* \supset \mathcal{A}$ que es invariante por $\rho^* \supset \rho$.

Supongamos ahora, igualmente que antes, que $\mathcal{A}$ y $\rho$ cumplen *a)* y *b)*. Entonces, si $\mu$ es una extensión sobre $\mathcal{A}$ invariante por $\rho$, poniendo $\mu(a) = \mu(A)$ cuando sea $a = [A]$, queda definida una nueva función $\mu$ sobre el semigrupo $S$ de las cantidades que satisfacen las condiciones:

1) $\mu$ es una función real definida sobre $S$ con valores finitos o infinitos.

2) $\mu\left(\sum\limits_i a_i\right) = \sum\limits_i \mu\,(a_i)$.

3) Si $a \leqq b$ es $\mu(a) \leqq \mu(b)$.

Además $E_0$ es un conjunto perteneciente a $\mathcal{A}$ tal que $\mu(E_0) = 1$ se tiene:

4) $\mu(e) = 1$ para una determinada cantidad $e$ $(= [E_0])$ llamada *unidad de medida (f. ad.)* o *unidad de extensión*.

Recíprocamente, si $\mu$ es una función sobre $S$ que cumple las condiciones precedentes, la función de conjunto $\mu$, definida poniendo $\mu(A) = \mu(a)$ cuando $[A] = a$, es una extensión invariante por $\rho$ que satisface $\mu(E_0) = 1$ si $[E_0] = e$.

Se puede comprender ahora la importancia que puede tener el siguiente:

Teorema de la unidad de medida. — Una condición necesaria y suficiente para que una cantidad $e \in S$ sea una unidad de medida para alguna medida finitamente aditiva (o extensión) $\mu$ sobre $S$ es que, cualesquiera que sean los enteros $m$ y $n$, de $me \leqq ne$ se siga $m \leqq n$.

En el caso que $\mathcal{A}$ sea un anillo de partes de un conjunto $E$ que cumpla la condición $a)$ y $\rho$ sea la relación de equivalencia definida en $\mathcal{A}$ por la descomposición finita en partes respectivamente congruentes respecto de un grupo $G$ de permutaciones de $E$, este teorema se traduce en el siguiente:

Corolario. — Para que $e = [E_0]$ sea una unidad de medida para alguna medida f. ad. $\mu$ sobre $S$, es necesario y suficiente que siempre que $\{E_i\}_1^m$, y $\{E_i'\}_1^n$, sean dos familias finitas de conjuntos disjuntos, pertenecientes a $\mathcal{A}$, y $\rho$-equivalentes a $E_0$, tales que $\bigcup_1^m E_i$ sea $\rho$-equivalente a una parte de $\bigcup_1^n E_i'$, resulte $m \leqq n$.

Aplicando este corolario no es difícil probar, por ejemplo, que dos círculos cualesquiera del plano no euclídeo son descomponibles en un número finito de partes respectivamente congruentes.

Vamos a comprobar ahora estas concepciones con las de los geómetras griegos dentro de lo posible, ya que el semigrupo de las cantidades manejado por los griegos es isomorfo al formado por los números reales positivos, mientras que en nuestra teoría de la cantidad, dos cantidades $a$ y $b$ pueden no ser comparables, es decir, que no se verifiquen ninguna de las desigualdades $a \leqq b$ y $b \leqq a$. Igualmente, puede ocurrir que de $a \leqq b$ y $b \leqq a$ no se siga necesariamente $a = b$.

Comparando las Nociones comunes de los Elementos de Euclides se ve, aunque de una manera no muy clara por la poca precisión con la que están formuladas:

1. Que en las nociones 1) y 7) está implícita la condición de que sea $\mu(A) = \mu(B)$ cuando $A \rho B$.

2. Que en la Noción 2) se exige implícitamente la compatibilidad de la igualdad o de la relación de equivalencia respecto de la suma de conjuntos, es decir, la condición $b)$. Sin embargo en ella no se dice nada respecto de que si a un conjunto, se puede sumar otro equivalente a uno dado. Esto solamente parece que se exige en la noción 5) para el caso en que éste último conjunto coincida con el primero.

3. La noción 3) no se cumple en general en nuestra teoría de la cantidad, puesto que en ésta, puede ocurrir eventualmente que $A \supset B$ y $\mu(A) < \mu(B)$. No obstante, en el caso que $A \supset B$ y $A - B \in \mathcal{A}$ se verifica $\mu(A) \geqq \mu(B)$.

4. La noción 4) no se cumple tampoco, en general, en nuestra teoría pues puede ocurrir que $a + c = b + c$ y sin embargo $a \neq b$, por no valer, en general, la simplificación en $S$.

El postulado de Arquímedes no es válido siempre en todo semigrupo $S$ de cantidades, pues, incluso puede suceder que $n\,a \leq b$ para todo entero $n > 0$ y existir una medida $\mu$ tal que $\mu\,(a) > 0$.

Es interesante hacer notar que para establecer los dos teoremas anteriores hemos seguido en algunas partes de ambas demostraciones un camino parecido al de Eudoxio, cuando en el caso que $n\,b \leq m\,a$, exige que $n\,\mu(b) \leq m\,\mu(a)$, con la diferencia que por no valer en nuestro caso la simplificación en $S$ tenemos que considerar también desigualdades del tipo $n\,b + m'\,a \leq m\,a + n'\,b$ con $m < m'$ y exigir entonces que $(n - n')\,\mu\,(b) \leq (m - m')\,\mu\,(a)$ a menos que $\mu\,(b) = +\infty$.

Hasta ahora solamente hemos considerado sumas de cantidades en número finito, pero la teoría se puede generalizar para sumas numerables e incluso para sumas $\Sigma\, a_i$ de una familia de cantidades en número menor que un cierto cardinal transfinito.

Ahora bien, con objeto de no recurrir al concepto de número cardinal, hemos dado un paso más exigiendo sólo que la clase $\mathcal{J}$ de los conjuntos indiciales cumplan las propiedades imprescindibles para desarrollar la teoría, las cuales son:

1. Si $I \in \mathcal{J}$, $I$ es no vacío.
2. Existe un $I \in \mathcal{J}$ que contiene más de un elemento.
3. Si $I \in \mathcal{J}$ y $J$ es una parte no vacía de $I$, $J \in \mathcal{J}$.
4. Si $I \in \mathcal{J}$ y $J_i \in \mathcal{J}$ para todo $i \in I$, se sigue que $\cup\,\{J_i | i \in I\} \in \mathcal{J}$.
5. Si $I$ y $J$ están en $\mathcal{J}$, $I \times J \in \mathcal{J}$.

Esto lo hemos hecho con varios motivos, entre ellos el de eliminar todo círculo vicioso cuando al tomar por $\rho$ la relación de equivalencia en la clase $\mathcal{A}$ de las partes de un conjunto $E$, se obtienen en particular como cantidades respecto de $\rho$ los números cardinales de las partes de $E$. Entonces, ningún número cardinal transfinito $a \in S$ se puede tomar como unidad de medida por ser $a + a = a$. En resumen, el concepto de cantidad comprende al de número cardinal de Cantor.

La teoría de la medida se desarrolla en la actualidad desde dos puntos de vista, definiendo la medida como función real de conjunto o bien como funcional sobre un espacio $F$ de funciones definidas en un mismo conjunto $E$. Pues bien, desde nuestro punto de vista, ambas concepciones quedan unificadas, porque para la primera basta tomar como relación de equivalencia $\rho$ la identidad y para la segunda basta identificar cada función no negativa $f$ de $F$ con la cantidad asociada a un conjunto $A$ de $E \times R$, de forma que la recta paralela al eje $R$ trazada por cada punto $(x, 0)$ de $\underline{E \times R}$ corte a $A$ en un conjunto lineal de medida $f(x)$, aplicando así, de cierto modo, el principio de Cavalieri. Por esto último se prevee el interés que ha de tener el estudio de los semigrupos reticulados de cantidades.

Independientemente, de las investigaciones sobre la medida, ya citadas, hemos realizado otras sobre los conceptos de medida y topología. El problema que nos planteamos, era buscar las condiciones que debían ligar la noción de medida sobre un espacio topológico $E$ con la estructura de éste, para poder hablar con propiedad de medidas topológicas.

En general, una medida exterior de Borel sobre $E$, es decir, una medida exterior $\mu^*$ tal que los conjuntos de Borel sean $\mu^*$-medibles, no merece que se la llame medida topológica, pues dicha propiedad no implica que la medida de la unión de una familia cualquiera de abiertos disjuntos sea igual a la suma de las medidas. No obstante, el punto de partida de estas investigaciones, tuvieron lugar principalmente por una cuestión al parecer intranscendente, motivada por la observación de que si la teoría de la medida sobre espacios topológicos se restringe a los espacios localmente compactos no se podría llamar, por lo menos de manera natural, medida a la restricción de una medida de Radon sobre una parte cualquiera de $E$. La cosa es más profunda, pues hemos visto que no conviene limitarse a considerar sólo medidas de Radon sobre un espacio topológico localmente compacto, en contra de la opinión de BOURBAKI quien sostiene, de cierto modo, que estas medidas son las más generales que se pueden lograr. Una idea feliz nos ha ayudado en nuestro propósito, que consiste en la introducción del concepto de conjunto $\mu^*$-compacto. Un conjunto $A$ de un espacio topológico $\mathbf{E}$ se dice $\mu^*$-compacto cuando para cada $\varepsilon > 0$, y para todo cubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de $\mathbf{E}$, se puede extraer un número finito de abiertos $G_k \in \mathcal{G}_0$ de forma que $\mu^* (A - \bigcup_1^n G_k) < \varepsilon$. Ahora podemos ya definir las *medidas topológicas* sobre un espacio regular $\mathbf{E}$, como aquellas medidas que satisfacen las condiciones:

1. $\mu^*$ es una medida exterior de Borel localmente finita.

2. Todo abierto de medida finita es $\mu^*$-compacto.

3. Si $G$ es un abierto de medida infinita, para todo entero $n$ existe un abierto $G_n \subset G$ tal que $n \leqq \mu^* (G_n) < \infty$.

4. Si $\mu^* (X) < \infty$ existe un abierto $G \supset X$ de medida finita y un conjunto de Borel $B \supset X$ tal que $\mu^*(B) = \mu^*(X)$.

En otra parte demostraremos que estas medidas pueden llamarse, topológicas, debido a que en ellas están estrechamente relacionadas las estructuras de medida y topología. Así, por ejemplo, si $\{G_i | i \in I\}$ es una familia cualquiera, no necesariamente numerable, de abiertos, filtrante por la relación $\subset$, resulta $\mu (\bigcup_i G_i) = \sup_i . \mu (G_i)$.

Es curioso hacer notar que esta propiedad no es válida para conjuntos $G_i$ cualesquiera porque toda suma $\Sigma_i \varepsilon_i < \infty$ de números reales $\varepsilon_i \geqq 0$ implica $\varepsilon_i = 0$ salvo para un conjunto contable de índices.

También como consecuencia de las propiedades exigidas para una medida topológica, resulta que la condición necesaria y suficiente para que un conjunto $X \subset \mathbf{E}$ sea $\mu^*$-compacto es que sea de medida exterior finita. Por tanto, para el caso particular de la medida exterior $\mu^*$ de Lebesgue en

$R^n$ se tiene que la clase de los conjuntos $\mu^*$-compactos es mucho más amplia que la formada por los compactos.

Si E no es unión numerable de conjuntos de medida exterior finita, conviene definir una nueva medida $\mu^*$ llamada *medida exterior esencial*, por $\mu^*(X) = \sup. \{\mu^*(X \cap G) | G \in \mathcal{G}_0\}$ siendo $\mathcal{G}_0$ la clase de los abiertos de medida $\mu^*(G) < \infty$.

Toda medida exterior esencial $\bar{\mu}^*$ queda caracterizada por las propiedades.

1. $\bar{\mu}^*$ es una medida exterior de Borel localmente finita.

2. Todo conjunto $X$ de medida exterior $\bar{\mu}^*(X) < \infty$ es $\mu^*$ — compacto.

3. Si $\bar{\mu}^*(X) = \infty$, para cada entero $n$ existe un conjunto $X_n \subset X$ tal que $n \leq \bar{\mu}^*(X_n) < \infty$.

4. Si $X$ está contenido en un abierto $G$ de medida $\bar{\mu}^*(G) < \infty$, existe un conjunto de Borel $B \supset X$ tal que $\bar{\mu}^*(B) = \bar{\mu}^*(X)$.

De estas propiedades se deduce que la medida exterior $\mu^*$ definida por $\mu^*(X) = \inf. \{\mu^*(G) \mid X \subset G \in \mathcal{G}\}$, siendo $\mathcal{G}$ la clase de los abiertos, es una medida exterior topológica tal que su medida exterior esencial es, precisamente, $\bar{\mu}^*$.

En el caso que E sea unión numerable de conjuntos $X_n$ de medida exterior $\mu^*(X_n)$ finita, ambas medidas $\mu^*$ y $\bar{\mu}^*$ son iguales.

Aunque nosotros hemos desarrollado todo esto considerando las medidas como funciones reales de conjunto, siguiendo un camino semejante a CARATHÉODORY y HALMOS, se puede desarrollar también la teoría de la medida en espacios topológicos definiendo una medida como funcional sobre el espacio de las funciones, no negativas, semi-continuas inferiormente; pero el proceso seguido corrientemente definiendo una medida como funcional sobre un espacio de funciones continuas no es válido, dentro de la generalidad que exigimos, puesto que existen espacios topológicos regulares tales que toda función real continua es una constante. Naturalmente, también cabe la posibilidad de desarrollar la teoría de la medida en espacios topológicos mediante el concepto de cantidad.

Para algunas aplicaciones de la teoría de la medida, especialmente para el Cálculo de Probabilidades, interesa hacer notar que para ciertas funciones aditivas $\varphi$ de conjunto, definidas en un anillo $\mathcal{S}$ de partes de un conjunto $E$, se puede dotar a $E$ de una topología $\mathcal{G}$ de manera que $\mathcal{S}$ sea una base del espacio topológico $\mathbf{E} = (E, \mathcal{G})$ y exista una y sólo una medida exterior topológica $\mu^* = \mu^*_\varphi$ sobre $E$ que sea una prolongación de $\varphi$. Efectivamente, para ello basta que además de $\cup \mathcal{S} = E$ se verifiquen:

1. $0 \leq \varphi(S) < \infty$ para todo $S \in \mathcal{S}$.

2. $\varphi(S_1 \cup S_2) = \varphi(S_1) + \varphi(S_2)$ para cada par $(S_1, S_2)$ de conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$.

3. Para todo cubrimiento $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ de cada conjunto $S \in \mathscr{S}$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de conjuntos $S_i \in \mathscr{S}_0$ que satisfacen $\varphi(S - \bigcup_1^m S_i) < \varepsilon$.

Finalmente, estas investigaciones sobre la medida en espacios topológicos, junto con el hecho de que la integral $\int_A f\, d\mu$ sobre un abierto $A$, cuando $\mu$ es una medida topológica, depende sólo de $f$ y de la restricción de $\mu$ en un entorno $V_x$ de cada $x \in A$, nos ha llevado a interpretar $d\mu(x)$ como el *germen* de medida definido por $\mu$ en $x$. Es claro que así nos situamos en un punto de vista muy próximo, pero riguroso, al de los primeros tiempos del Cálculo infinitesimal.

## MEDIDA DE HAAR

Aunque no nos parece muy oportuno hablar aquí de la integración de funciones con valores en un espacio vectorial, nos creemos obligados a mencionar los trabajos de Bochner, Gelfand, Dunford y Pettis sobre tal cuestion. Más importancia tiene dentro del tema de este discurso, la medida e integración en grupos topológicos en donde A. Haar en 1933 dio un paso decisivo al probar la existencia de medidas invariantes para los grupos localmente compactos con base numerable de abiertos.

Como consecuencia de este resultado J. von Neumann resolvió, para los grupos compactos, el famoso 5.° problema de Hilbert sobre la caracterización de los grupos de Lie por propiedades puramente topológicas. La unicidad de la medida de Haar fue probada primeramente por von Neumann en 1934 y 1936 y por A. Weil en 1940, quien, simultáneamente, además de extender el mencionado resultado de Haar a los grupos localmente compactos generales, obtuvo la condición de existencia de una medida relativamente invariante sobre un espacio homogéneo, localmente compacto, y demostró en fin que la existencia de una medida, con ciertas propiedades, sobre un grupo topológico implica *ipso facto* que el grupo es localmente precompacto. No obstante, la importancia de estas conclusiones y de otras últimamente logradas con el concepto de medidas casi invariantes, creemos que todavía se podrán obtener algunos resultados de interés sobre la teoría general de la medida de Haar, estudiando las medidas topológicas invariantes por una relación de equivalencia en un espacio regular.

Nos hemos referido a las medidas localmente finitas, pero también sería interesante estudiar las medidas no localmente finitas invariantes por un grupo o una relación de equivalencia, lo cual comprendería tanto el área de las superficies curvas como las llamadas medidas de Hausdorff.

He dicho.