**ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA**

DE LA GEOMETRIA DE LOS ESPACIOS DE BANACH

AL ANALISIS CONVEXO Y GEOMETRICO

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JESUS BASTERO ELEIZALDE

*EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 9 DE NOVIEMBRE DEL AÑO 2.000*

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Ilmo. Sr. D. JOSE GARAY DE PABLO

ACADEMICO NUMERARIO

ZARAGOZA

2.000

Depósito legal: Z. 2.427 - 2000

Imprime:
Sdad. Coop. De Artes Gráficas
Librería General
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

DE LA GEOMETRIA DE LOS ESPACIOS DE BANACH

AL ANALISIS CONVEXO Y GEOMETRICO

POR EL

Ilmo. Sr. D. JESUS BASTERO ELEIZALDE

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores:

Es para mi un honor haber sido elegido para formar parte de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza. También lo es poder leer mi discurso de entrada a la misma en este año 2000, año que bajo los auspicios de la UNESCO ha sido designado por la IMU (Unión Internacional de los Matemáticos) como el año mundial de las Matemáticas.

Quiero expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a los miembros de esta Academia por haberme honrado con esta designación. Supongo que en la elección ha pesado más su benevolencia que mis reales méritos.

También es el momento de mencionar a mi familia: mi esposa Marisa y mis hijas Amaia y Maite, que son las personas que, por estar más cerca de mi durante estos años, han contribuido con su paciencia, comprensión y ayuda a que haya podido desarrollar mi trabajo en condiciones inmejorables. A mis padres y hermanos cuyo ejemplo siempre ha constituido un estímulo para mí. A mis profesores de la Licenciatura, algunos de los cuales están aquí presentes y que tan buena formación nos proporcionaron en una época tan diferente de la actual. A mi director de tesis, Bienvenido Cuartero, cuyo asesoramiento, aún hoy en día, sigue resultándome imprescindible. Asimismo a mis compañeros y amigos del área de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de Zaragoza; la atmósfera de trabajo, colaboración y entusiasmo científico que se respira en el pasillo me ha permitido realizar mis actividades docentes e investigadoras en un ambiente realmente deseable y fructífero. Y también a mis alumnos, de los cuales he aprendido más de lo que ellos pueden imaginarse.

Como es habitual en estos actos debo recordar en este discurso de entrada a mi predecesor en la medalla número 17 de esta Academia, a la cual opto. Esta norma lejos de ser una obligación protocolaria se convierte en este caso en un agradable tarea. Es siempre un placer recordar a las personas que por algún mérito particular han sido partícipes de esta distinción, pero más en este caso, dado que D. Juan Bautista Bastero Beguiristain fue tío mío.

Nacido en Zaragoza el 24 de Junio de 1897, fue hijo de Don Juan Bastero Lerga, catedrático de Medicina Legal y Toxicología de la Universidad de Zaragoza, miembro, a su vez, de la Real Academia de Medicina y miembro fundador de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales.

D. Juan Bautista Bastero fue profesor mercantil y licenciado en Ciencias Químicas. Se doctoró en 1921 con una tesis cuyo título fue "Investigaciones sobre el paladio coloidal". Obtuvo la cátedra de Física y Química en la Facultad de Veterinaria de la Universidad de Zaragoza el 9 de Junio de 1943. Nombrado académico electo de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza el 22 de Diciembre de 1931, pasó a ser académico numerario el 28 de Junio de 1945. Fue vicedecano de la Facultad de Veterinaria de 1944 hasta 1950 y con posterioridad decano, desde 1950 hasta 1964. Asimismo, fundó el Instituto Cultural Hispánico de Aragón, siendo su primer presidente.

Integrado en principio en el equipo de trabajo del profesor D. Antonio Rocasolano participó en intercambios científicos con las universidades de Toulouse, Montpellier y Barcelona en 1920.

Previo informe favorable de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Madrid, en 1922 fueron declarados de mérito para su carrera tres trabajos de investigación científica sobre el paladio coloidal.

En 1933 fue pensionado para realizar estudios en la escuela veterinaria de Lyon sobre la Química-Física coloidal de la leche con el profesor Dr. Porcher.

Publicó diferentes artículos de investigación sobre Química-Física coloidal y Bioquímica en la revista "Trabajos del laboratorio de Investigaciones Bioquímicas".

En 1964 pidió la excedencia en la Universidad de Zaragoza y se integró en el claustro de la Universidad de Deusto, donde contribuyó a la instauración de los estudios de Ciencias Químicas de aquella universidad, permaneciendo en ella hasta 1967. Murió en Zaragoza el 19 de Julio de 1975.

A sus dotes de investigador, cabe unir su condición de buen profesor y padre de familia. Como buen conversador que fue, era muy agradable asistir a sus tertulias, en las que le gustaba razonar y convencer. La vocación de enseñar le acompañó durante toda su vida.

1. Introducción

Pasaré ahora a desarrollar mi discurso, cuyo título es

"De la geometría de los espacios de Banach al análisis convexo y geométrico", con el que pretendo dar una ligera panorámica de la evolución de una parte del Análisis Funcional, la correspondiente a la geometría de los espacios de Banach, desde sus orígenes hasta la actualidad con su evolución hacia el análisis convexo y geométrico.

Haré especial énfasis en el teorema de Dvoretzky, núcleo central de la teoría local, que ha influenciado fuertemente mi formación y mi investigación. De esta forma y con el análisis pormenorizado de este teorema podré comentar los temas de investigación que he desarrollado durante las décadas de los 80 y de los 90 con mis colaboradores, dentro de la panorámica general de esta teoría.

2. Los orígenes

La Matemática, como ciencia, vive y crece con el intercambio de ideas entre los matemáticos, entre los matemáticos y otros científicos, y en general entre los matemáticos y otros cultivadores de las diferentes áreas del saber.

El Análisis Funcional, como parte del Análisis Matemático y en general de las Matemáticas, no es una excepción a esta regla. Utiliza ideas y técnicas de otros campos y a su vez proporciona recursos a otras disciplinas.

El Análisis Funcional aparece en el momento en que se consolida la siguiente idea fundamental: el estudio de los espacios abstractos permite incluir bajo este contexto conceptos, a priori complicados como por ejemplo las funciones, como puntos. En consecuencia, es posible aplicar nociones e intuiciones geométricas al estudio de los conjuntos de tales puntos. Es claro que para que tal planteamiento sea aprovechable debemos disponer de resultados ciertos en las situaciones abstractas, que luego sean aplicables a casos concretos.

Dentro de estas ideas, la teoría de los espacios de Banach comenzó "oficialmente" a consolidarse, como parte del Análisis Funcional, con la aparición del libro de Stefan Banach, "Théorie des opérations linéaires" (ver [4]) publicado en 1932 y, ya desde el momento de su nacimiento, ha guardado fuertes lazos de unión con el resto del Análisis Matemático y con otras disciplinas.

Merecen citarse, por su influencia sobre otras ramas, los siguientes resultados: la teoría de la dualidad de espacios y de operadores; el teorema de Hahn-Banach y los teoremas sobre separación en los espacios de dimensión infinita, así como las consecuencias del teorema de categoría de Baire, en especial, el principio de la acotación uniforme y los teoremas del gráfico cerrado y de la aplicación abierta.

Estas potentes herramientas eran bien conocidas y utilizadas por los matemáticos y por los físicos matemáticos en las décadas de los 40 y 50. A partir de esos años pareció que la teoría de los espacios de Banach era una etapa de las Matemáticas totalmente superada y de hecho fue casi olvidada por una gran parte de los investigadores, que no la consideraban como un objetivo primordial, dentro de su propia investigación.

En las siguientes décadas, especialmente a finales de los 60 y en los años 70 se produjo una erupción de intensa actividad en este campo y nuevos y potentes métodos aparecieron, influenciando esta parte de la investigación matemática. Como punto de arranque de esta nueva etapa podríamos situar la utilización sistemática de la teoría de la probabilidad como herramienta fundamental de trabajo, el redescubrimiento de resultados de A. Grothendieck que habían pasado inadvertidos (especialmente su teorema de factorización) y principalmente el teorema de A. Dvoretzky (cf. [16]) al que luego me referiré con detalle.

En su forma más reciente o moderna, *la geometría de los espacios de Banach* dió origen a lo que ahora se conoce como "teoría local de los espacios normados", que es una de las ramas del Análisis Funcional que más rápidamente se ha desarrollado en las décadas de los 70 y 80. Para resolver problemas que no tenían solución en aquellos momentos, fue necesario realizar estudios cuantitativos sobre los espacios normados de dimensión finita, n, cuando n tiende a infinito.

La teoría local, según Vitali Milman (ver [31]) "estudia las propiedades de la estructura de los espacios normados de dimensión finita y su comportamiento asintótico cuando su dimensión n tiende a infinito".

El amplio desarrollo de esta parte no es accidental. Los matemáticos de principio de siglo no fijaban su atención, desde el punto de vista geométrico y de estructura, en los espacios de dimensión grande. La geometría (geometría convexa) se dedicaba al estudio de las dimensiones dos y tres. Desde luego, algunos de estos resultados se extendían automáticamente a dimensión n, pero conservando siempre su carácter de baja dimensión. Por otra parte los problemas de dimensión infinita eran tratados de otra manera y las técnicas propias del análisis funcional seguían otro curso y parecía que eran definitivas en el tratamiento de todos los problemas.

Se tenía la idea de que los espacios de dimensión grande eran modelizados por los espacios de dimensión infinita. El teorema de Dvoretzky dió la confirmación concluyente de que este hecho era rotundamente falso. Los espacios de dimensión infinita no daban de hecho casi ninguna información relevante sobre los espacios de dimensión alta.

Este descubrimiento impulsó, fundamentalmente, el desarrolo de la teoría local. Los espacios de dimensión grande, que eran imprescindibles para el estudio de la estructura y la clasificación de los espacios de Banach eran unos objetos matemáticos perfectamente diferenciados de los espacios de dimensión baja y de los de dimensión infinita.

Dado que la bola unidad cerrada de un espacio normado de dimensión finita es un conjunto simétrico, convexo, compacto con interior no vacío y que, recíprocamente, la función de Minkowski o calibre de uno de esos conjuntos en $\mathbb{R}^n$ es la bola unidad cerrada de una norma, la conexión entre la convexidad y la teoría local es íntima.

Las desigualdades geométricas clásicas han sido utilizadas muy abundantemente como poderosas herramientas para obtener resultados en la teoría local. Recíprocamente, el estudio de problemas de carácter geométrico, desde el punto de vista del análisis funcional, ha permitido que esta rama, con sus poderosas herramientas, haya incidido y de hecho haya permitido resolver algunos de los problemas clásicos de la teoría de los cuerpos convexos, por ejemplo, las desigualdades inversas de Blaschke-Santaló y Brunn-Minkowski, el problema de Busseman-Petty, diferentes reformulaciones del problema del hiperplano, etc.. Los problemas isométricos de la teoría de la convexidad se han convertido en problemas isomorfos, con estimaciones de las constantes de isomorfía en términos de la dimensión.

Como resultado de la interacción profunda entre los métodos de la teoría local y la geometría de los cuerpos convexos ha surgido, en la década de los 90, lo que Vitali Milman denomina análisis funcional y geométrico (*geometric and functional analysis*) o también análisis convexo geométrico (*convex geometric analysis*), (ver [32] y [19]).

3. El teorema de Dvoretzky

El teorema de Dvoreztky fue establecido por A. Dvoretzky en 1961 (ver [16]) y mejorado en 1971 por Vitali Milman (cf. [29]). Puede ser formulado de muchas maneras y en particular admite una presentación infinito-dimensional. En este contexto, asegura que:

Teorema de Dvoretzky (caso infinito-dimensional). *El espacio ℓ^2 (espacio de Hilbert separable de dimensión numerable) es finitamente representable en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita.*

En consecuencia, dentro de cualquier espacio normado de dimensión infinita podemos encontrar subespacios de cualquier dimensión, finita, casi isométricos a los correspondientes subespacios de dimensión finita del espacio ℓ^2, es decir, espacios euclídeos finito dimensionales. Sin embargo, dado que hay muchos espacios de Banach clásicos que no contienen ningún subespacio isomorfo al espacio de Hilbert, ¡no podemos "pegar" estos subespacios euclídeos de cualquier dimensión finita para obtener un espacio de Hilbert separable dentro de un espacio normado cualquiera de dimensión infinita!

La formulación finito dimensional del teorema de Dvoretzky sería la siguiente:

Teorema de Dvoretzky (caso finito-dimensional). *Dado $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(\varepsilon)$, tal que se verifica lo siguiente, en cualquier espacio normado E de dimensión N, podemos encontrar (o mejor dicho existe) un subespacio F del espacio E, de dimensión n, con $n \geq C(\varepsilon) \log N$, en el que la bola unidad dista de un elipsoide menos que ε, en* *otros términos, la distancia de Banach-Mazur de F al correspondiente espacio euclídeo es menor que* $1 + \varepsilon$.

En un lenguaje menos formal y quizá más transparente podemos decir que, en todo espacio normado de dimensión finita N hay subespacios casi euclídeos, de dimensión $\log N$, y que además hay muchos; casi todos en un sentido probabilístico.

En términos de conjuntos convexos, compactos y simétricos respecto del origen, es decir cuerpos convexos simétricos, podemos asegurar que dado un conjunto de estas características en $\mathbb{R}^N$, podemos darle un corte, o mejor dicho muchos, de dimensión aproximadamente igual a $\log N$ cuyas secciones son casi elipsoides, esferas deformadas por una aplicación lineal (ver figura 1).

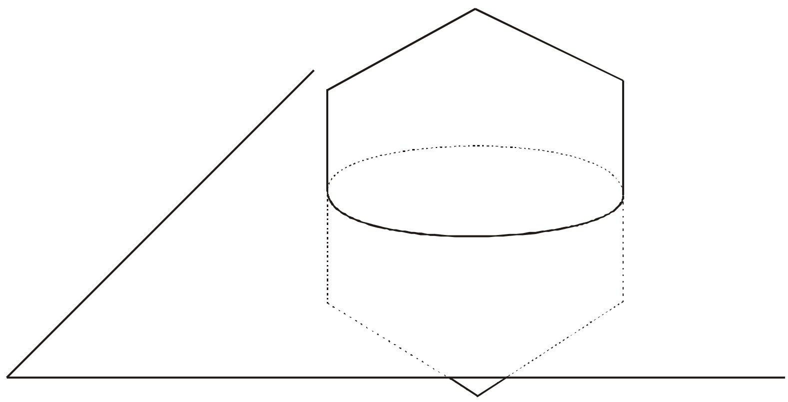

Figura 1.—Sección casi euclídea de un cuerpo convexo

Hay diferentes demostraciones de este resultado y todas ellas son de carácter no constructivo, pues tienen una formulación aleatoria. Simplificando, lo que este hecho significa puede expresarse de la siguiente manera: definimos un espacio de sucesos adaptado al problema en cuestión y se demuestra que lo que buscamos sucede con probabilidad positiva. No sólo eso, la probabilidad de que lo que queremos es muy grande, de hecho tan próxima a 1 como queramos, forzando las constantes del isomorfismo. Este hecho, que se repite muy a menudo en la teoría local, se resume diciendo que el resultado se verifica para subespacios aleatorios.

Citaremos entre las demostraciones que más influencia han tenido en el posterior desarrollo de la teoría local las de Milman (cf. [29]) y Figiel, Lindenstrauss y Milman (ver [17]), que utilizan la desigualdad isoperimétrica sobre la superficie esférica, la de Maurey-Pisier (cf. [38], [40]), basada en desigualdades de desviación gaussianas y la de Gordon (cf. [21]) también de carácter gaussiano, pero usando las desigualdades de Slepian.

Me quiero referir aquí por su trascendencia e influencia en mis trabajos a las primeras, es decir, a las basadas en la desigualdad isoperimétrica y en las desviaciones gaussianas, que siguen un recorrido paralelo.

La idea muy sucinta del argumento se basa en tres ingredientes fundamentales: en primer lugar se elige una buena representación del espacio E en $\mathbb{R}^N$, usando el teorema del elipsoide de John asociado a la bola unidad de E. Este teorema proporciona una estructura euclídea adaptada al problema, al dar una buena representación del espacio. La norma del espacio E define sobre la superficie esférica S^{N-1} una función continua, que, gracias al fenómeno de la concentración de la medida (consecuencia de la desigualdad isoperimétrica en S^{N-1} o de la concentración de la medida de las densidades gaussianas en $\mathbb{R}^N$), es casi constante en alguna zona esférica de una anchura ε de S^{N-1}, o respectivamente en una corona esférica de $\mathbb{R}^N$. Por último la selección de una apropiada red de puntos en la frontera de la bola euclídea de $\mathbb{R}^n$, con $n \geq C(\varepsilon) \log N$, permite obtener la inmersión aleatoria del subespacio F que buscamos, isomorfo a $\mathbb{R}^n$, que está a distancia de Banach-Mazur menor o igual que $1+\varepsilon$.

A continuación comentaré la influencia que las tres etapas de este teorema, antes mencionadas, han ejercido sobre mi trabajo. Comenzaré por la teoría local no lineal, para luego seguir con el teorema del elipsoide de John y con el fenómeno de la concentración de la medida.

4. Teoría local no lineal

Una de las claves fundamentales para encontrar buenos subespacios dentro de un espacio E, como se ha citado en la demostración del teorema de Dvoretzky, consiste en realizar la elección de una red de puntos adecuada en la superficie esférica, para realizar la inmersión. Es decir, es suficiente encontrar una familia finita de puntos del espacio E, cuyas distancias relativas sean aproximadamente iguales, excepto por el factor $(1+\epsilon)$, a las distancias relativas entre los puntos de una $\delta(\epsilon)$-red del espacio que se quiere imitar (el espacio euclídeo en el teorema de Dvoretzky).

Estas son posiblemente las raíces del estudio de lo que modernamente se ha conocido como la *teoría local no lineal*, que trata de las propiedades de inmersión de los espacios métricos de cardinal finito y su comportamiento asintótico.

La primera vez en la que un enunciado sobre espacios métricos finitos aparece en este contexto es en un trabajo de Marcus y Pisier de 1984 (cf. [27]), donde se demuestra que una contracción, definida sobre un subconjunto finito T de L^p con valores en un espacio de Hilbert, posee una extensión a todo L^p, con una modificación pequeña de su norma

$$c_p[\log(\text{cardinal } T)]^{1/p-1/2}.$$

Es, pues, un teorema relativo a la propiedad de extensión para aplicaciones lipschitzianas con valores en el espacio L^p.

Otro trabajo importante dentro de esta teoría no lineal es el de Bourgain-Milman-Wolfson de 1986 ([15]) en el que se introduce el concepto de tipo Rademacher para espacios métricos finitos y prueban un teorema del tipo del de Maurey-Pisier lineal, encontrando ℓ_p^n-cubos dentro de los espacios métricos finitos. También estudian las relaciones de inclusión casi-isométrica entre los diferentes ℓ_p^n-cubos.

En un trabajo de Johnson y Lindenstrauss de 1984 (ver [23]) se demuestra el hecho de que si T es un subconjunto finito de un espacio de Hilbert de cardinal $N = |T|$, podemos encontrar una copia $(1+\epsilon)$-isométrica de este conjunto en el espacio euclídeo de dimensión n, siempre que

$$n \geq \frac{C}{\epsilon^2} \log N,$$

siendo esta estimación asintótica óptima.

En un trabajo posterior Schehctman (ver [41]) estudia este problema para el rango de valores de p, $1 \leq p < 2$ y obtiene resultados análogos, aunque con estimaciones peores y desde luego, no óptimas.

En un trabajo en colaboración con Julio Bernués y Nigel Kalton (ver [7]), utilizando el método de la distribución empírica y las desigualdades de desviación para procesos binomiales, estudiamos el problema de la inclusión $(1+\epsilon)$-isométrica del cubo ℓ_∞^n, en espacios normados de dimensión finita con base 1-subsimétrica. Este problema es de carácter local no lineal. Las estimaciones que obtenemos son óptimas, es decir,

$$\mathrm{dim} X \geq \frac{C}{\epsilon^2} n,$$

mejorando, por ejemplo, las que aparecen en el trabajo de Bourgain, Milman y Wolfson antes citado, respecto de las inclusiones del cubo ℓ_∞^n en los cubos ℓ_p^n (ver [15]). El caso $1 \leq p \leq 2$ podría deducirse del teorema de Johnson y Lindenstrauss ya citado anteriormente (cf. [23]), pero para el resto de valores de p el resultado es nuevo.

Como extensión del resultado anterior pudimos probar, en colaboración con Julio Bernués, que la estimación también es cierta para otras clases de espacios de dimensión finita, por ejemplo: espacios isomorfos a espacios de Orlicz y de Lorentz; para los espacios de matrices $\ell_p^n(\ell_q^m)$ con norma mixta que poseen base incondicional no subsimétrica, e incluso para los espacios de cotipo débil 2 (ver [5]).

En otro trabajo continuación de los anteriores (ver [6]) hemos mejorado algunos de los resultados dados por Schechtman (cf. [41]) relativos a la inclusión de subconjuntos finitos de L^p, $(0 < p < 2)$, en espacios de baja dimensión.

Concretamente, hemos demostrado que si T es un subconjunto de L^p formado por funciones con soporte mutuamente disjunto, dado $\epsilon > 0$ existe un subconjunto $T' \subset \ell_p^N$, tal que $d(T,T') \leq 1+\epsilon$, siempre que

$$\log N \geq \frac{C}{\varepsilon^p} (\log |T|)^{p/p'} ,$$

siendo esta estimación mejor que la dada por Schechtman en [41].

En resumen, el problema general que hemos pretendido abordar dentro de la teoría local no lineal, se puede formular de la siguiente manera:

Problema. *Dados un espacio métrico finito (T,d) y $\epsilon > 0$ ¿en qué espacios normados E de dimensión finita podemos encontrar un subconjunto $T_\epsilon \subset E$ de tal forma que $T \overset{(1+\epsilon)}{=} T_\epsilon$?*

Este problema en su máxima generalidad parece de difícil solución. Sin embargo algunos casos casos concretos ya se han estudiado, como hemos manifestado en los comentarios anteriores.

De más fácil tratamiento parece el problema si el conjunto T es un subconjunto de un espacio de Hilbert. En el caso de que T sea un subconjunto de L^p, no parece aventurado (Schechtman lo conjetura así en [41]) mejorar las estimaciones que aparecen en su trabajo [41] y más aún si imponemos alguna condición extra al subconjunto T (ya hemos obtenido algún resultado, como se comenta en el punto anterior).

Caso especial que merece una investigación más profunda es el de la inclusión del cubo ℓ_∞^n en espacios normados generales. Aplicaciones del teorema de Dvoreztky aseguran la existencia de tales cubos en cualquier espacio E con dimensión suficientemente grande, por ejemplo, si

$$\dim(E) \geq C(\epsilon) \exp n.$$

En [5] ya hemos obtenido mejores estimaciones si imponemos alguna condición extra al espacio, pero queda abierto el problema en general.

La conjetura que permanece aún sin decidirse es la siguiente:

Conjetura. *Dado $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(\varepsilon) > 0$ tal que cualquiera que sea la dimensión n y cualquiera que sea el espacio normado E de dimensión n, podemos encontrar N puntos $x_1, \ldots, x_N \in E$, con $\log N > C(\varepsilon)n$, tal que*

$$1-\varepsilon \leq \|x_i - x_j\| \leq 1+\varepsilon,$$

siempre que $1 \leq i < j \leq N$.

Para espacios que no poseen estructura incondicional y resolviendo una cuestión planteada por Alexander Pelczynski, en una serie de dos trabajos conjuntos con Ana Peña y Gideon Schechtman (ver [9] y [10]), probamos que la conjetura es cierta para las clases de Schatten de operadores finito-dimensionales, sobre un espacio con base 1-simétrica o sobre ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$, es decir, espacios ℓ_p no conmutativos y conmutativos de dimensión n.

La solución que ofrecemos en los dos trabajos es diferente. En el primero hacemos la inmersión sobre las proyecciones ortogonales de dimensión k, para un k adecuadamente elegido y en el segundo encontramos los correspondientes puntos en las órbitas de cada operador bajo la acción del grupo especial ortogonal, es decir, dentro del conjunto $\{UT; U \in SO(n)\}$.

Recientemente Juan Arias, Keith Ball y Rafael Villa (ver [1]) han estudiado la conjetura bajo otro punto de vista, estudiando la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\|x-y\|$, cuando x, y recorren la bola unidad de un espacio normado n-dimensional con la probabilidad uniforme, y dan las estimaciones pertinentes.

5. El teorema del elipsoide de John

El teorema de John es un resultado clásico de convexidad de los años 40 y caracteriza el elipsoide de volumen mínimo D que contiene a un cuerpo convexo K en $\mathbb{R}^n$. Lowner había asegurado la existencia de ese elipsoide de volumen mínimo, pero fue John, quien con su contribución capital hizo la caracterización.

No sólamente eso, lo que Fritz John probó mediante el cálculo de variaciones, en su célebre trabajo de homenaje a Courant en 1949, fue que se podían encontrar unos puntos $\{x_i\}_1^N$, puntos de contacto entre las superficies del convexo y del elipsoide y unos pesos $\lambda_i > 0$ sobre esos puntos, cumpliéndose que el centro de masas del convexo K, del elipsoide D y de la distribución de los puntos x_i con sus pesos coincidía, es decir,

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} = x_K = x_D.$$

Además estos puntos actúan como una pseudobase ortogonal, con origen en x_G, en el sentido de que, dado cualquier vector x de $\mathbb{R}^n$, el vector $x - x_G$ se puede escribir como la suma de sus proyecciones sobre los vectores $x_i - x_G$, con los pesos correspondientes; es decir,

$$x = x_G + \sum_1^N \lambda_i \langle x - x_G, x_i - x_G \rangle x_i,$$

donde las proyecciones se toman respecto del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ asociado al elipsoide D.

En particular, como resultado se obtiene que el elipsoide es único, salvo transformaciones ortogonales y que se verifica

$$K \subseteq D \subseteq nK$$

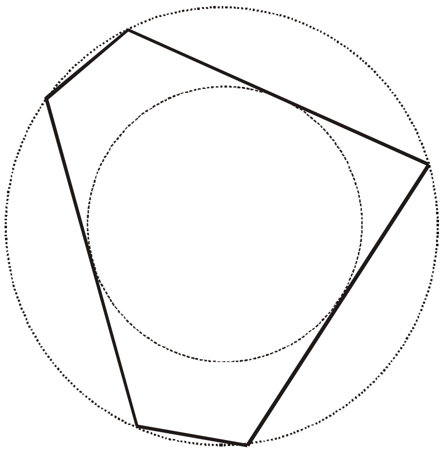

Figura 2.—La bola euclídea es el elipsoide de John del cuerpo K

Cuando K es un cuerpo convexo y simétrico (con respecto a su centro de masas), entonces los puntos $\{x_i\}$ están distribuidos simétricamente sobre la superficie y además se puede ajustar la relación de contenidos anterior, dado que ahora se tiene

$$K \subseteq D \subseteq \sqrt{n}K.$$

Es claro que en este caso K es la bola unidad de un espacio normado de dimensión n y D es la correspondiente bola unidad del espacio euclídeo, que está a distancia de Banach-Mazur menor o igual que $\sqrt{n}$ de K. Como consecuencia de este resultado se tiene que el diámetro del compacto formado por todos los espacios normados de dimensión n, con la distancia de Banach-Mazur (compacto de Minkowski), es menor o igual que n.

Ver el tamaño exacto del diámetro fue un problema arduo. Aunque como consecuencia del teorema de John se obtenía n, en todos los casos conocidos la distancia entre dos espacios era siempre menor o igual que $\sqrt{n}$. En 1981 Gluskin, en un trabajo capital, donde introdujo los espacios aleatorios, probó que asintóticamente la estimación correcta era n. Los espacios a distancia más separadas son elecciones aleatorias de proyecciones ortogonales de dimensión n, correspondientes a la norma cuya bola unidad es el octaedro $2n$ dimensional.

El espacio euclídeo de dimensión n es un centro del compacto, aunque no el único (hay otros espacios de dimensión n que también están a distancia menor o igual que $\sqrt{n}$ de los demás elementos del compacto).

Es un problema natural sustituir la bola euclídea por cualquier cuerpo convexo y entonces, el mismo problema resuelto por John puede plantearse entre dos cuerpos convexos y, más generalmente, entre dos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos que K_1 y K_2 son dos compactos en $\mathbb{R}^n$, con las siguientes restricciones iniciales, por otra parte totalmente lógicas, de acuerdo con la naturaleza del problema que se pretende tratar: que el volumen de K_1 sea positivo y que K_2 tenga interior no vacío.

No es difícil comprobar que existe alguna transformación afín, que mueve al conjunto K_2 hasta que adopte una posición $\widetilde{K_2}$, de modo que

$$K_1 \subseteq \widetilde{K_2}$$

y que el volumen de $\widetilde{K_2}$ sea mínimo entre todas las posiciones de K_2, que contienen a K_1, o equivalentemente, existe alguna transformación afín, que mueve al conjunto K_1 hasta que adopte una posición $\widetilde{K_1}$, de modo que

$$\widetilde{K_1} \subseteq K_2$$

y que el volumen de $\widetilde{K_1}$ sea máximo entre todas las posiciones de K_1, contenidas en K_2.

El problema que se plantea es: ¿cómo se puede caracterizar esa posición?, ¿hay unicidad?

Con respecto a la unicidad la pregunta tiene una respuesta negativa. En general esa posición no es única. Por ejemplo, si consideramos en el plano un cuadrado, es claro que hay infinitos triángulos de área máxima contenidos en ese cuadrado (ver Figura 3)

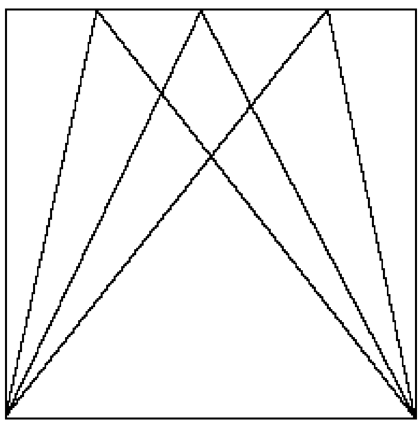

Figura 3.—Existen infinitos triángulos de área máxima inscritos en un cuadrado

Sin embargo, sí se puede dar una descripción en algunos casos. Por ejemplo Vitali Milman consideró el caso en que K_1 y K_2 eran cuerpos convexos simétricos. Recientemente Giannopoulos, Perisinakis y Tsolomitis ([20]) han considerado el caso de dos cuerpos convexos no simétricos con frontera regular, utilizando el cálculo de variaciones.

En un trabajo con Miguel Romance (ver [11]), hemos extendido este resultado, eliminando las condiciones de regularidad en la frontera y la convexidad del primer conjunto. En efecto consideramos el caso en que K_1 sea un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto y conexo con volumen positivo (sin suponer ninguna condición más) y K_2 cualquier cuerpo convexo.

Nuestra aproximación al problema es diferente de la dada por los autores antes citados y utiliza los teoremas de separación y los hiperplanos soportes. Tanto en nuestro trabajo como en el de los autores antes mencionados, se consigue dar una descomposición similar a la que aparece en la obra de Fritz John, con las modificaciones correspondientes.

Más aún, hemos conseguido dar un teorema de unicidad, si sólo consideramos transformaciones afines dadas por matrices simétricas definidas positivas (lo que invalida el contraejemplo anterior, dado que no podemos deformar de esta manera un triangulo conservando la base sin deformar la altura). De este resultado todavía no sabemos que conclusiones pueden extraerse y en él seguimos trabajando.

6. Desigualdades geométricas y el problema de la concentración de la medida.

Si consideramos un espacio métrico y una probabilidad definida sobre los borelianos de ese espacio métrico, (X, d, μ), diremos que X verifica *el fenómeno de concentración de la medida*, si dado cualquier boreliano A, de medida como mínimo la mitad, $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, entonces pequeñas dilataciones del conjunto tienen medida muy próxima a 1, es decir,

$$\mu(A_\varepsilon) > 1 - f(\varepsilon),$$

donde por A_ε denotamos el conjunto de puntos de X que distan de A menos que ε y $f(\varepsilon)$ es una función que depende sólo de ε.

El prototipo de espacios verificando esta propiedad es la superficie esférica S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$, cuando consideramos la distancia geodésica d y la medida de Lebesgue normalizada μ, es decir, la medida de Haar invariante bajo la acción del grupo ortogonal $O(n)$.

Si A es un subconjunto de S^{n-1} y su medida es $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, entonces

$$\mu(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{n}\right).$$

Esta desigualdad es una consecuencia de la desigualdad isoperimétrica sobre S^{n-1}, que dice:

Desigualdad isoperimétrica en S^{n-1}. *Entre todos los conjuntos de la misma medida en S^{n-1}, son los casquetes esféricos los que tienen menores sus dilataciones.*

P. Levy en 1938 cuantificó esa desigualdad, cuya consecuencia es la fórmula anterior, que puede ser resumida diciendo que toda la medida en S^{n-1} se concentra alrededor del ecuador. Cuando dilatamos las esferas en $\mathbb{R}^n$ esta desigualdad tiene como consecuencia en el límite, cuando el radio tiende a infinito, una desigualdad isoperimétrica para las medidas gaussianas, que es una observación atribuida a Poincaré. Es éste un ejemplo de las profundas relaciones existentes en esta teoría y es también un modo de ilustrar el hecho de que la medida de Wiener puede ser entendida como una distribución uniforme, sobre una esfera de dimensión infinita y con radio la raíz cuadrada de infinito.

Otro ejemplo de espacio verificando el fenómeno de concentración de la medida es el cubo de Haming o hipercubo, es decir, el espacio $\{-1,1\}^n$ con la distancia dada por la norma $\|\cdot\|_1$, o sea, la distancia entre dos elementos x y y es el número de coordenadas distintas y con la probabilidad uniforme. Mediante una técnica de martingalas puede mostrarse, bastante sencillamente, la desigualdad de desviación necesaria para probar el fenómeno de concentración de la medida en esta situación.

También importante es el caso, descubierto por C. Borel en 1975, de los cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$, con la medida Lebesgue normalizada (ver [13]). Concretamente, si denotamos por μ_K la medida Lebesgue normalizada en K, es decir

$$\mu(A) = \frac{|A \cap K|}{|K|},$$

entonces

$$\mu\left((tA)^c\right) \leq (\sqrt{2})^{-t},$$

siempre que A sea un convexo simétrico de medida

$$\mu(A) \geq \frac{2}{3}$$

y $t > 1$. Esta desigualdad puede ser interpretada como una extensión de las clásicas desigualdades de Khinchine-Kahane, sustituyendo el cubo $[-1,1]^n$ por el cuerpo convexo K.

La desigualdad de Borel está basada en la de Brunn-Minkowski. Otras varias desigualdades importantes pueden obtenerse también a partir de ésta última. En particular la isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$, que es una de las desigualdades clásicas más importantes y que la podemos enunciar del modo siguiente:

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$. *Si A es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$ y B es el dilatado de la bola euclídea que tiene el mismo volumen que A, entonces la medida de Hausdorff $(n-1)$ dimensional de la frontera de A, $|\partial A|_{n-1}$, es mayor o igual que $|\partial B|_{n-1}$.*

De otra manera, podemos decir que entre los conjuntos del mismo volumen es la bola euclídea el conjunto que tiene menor superficie. Este hecho explica, como es bien sabido, por qué las pompas de jabón son esféricas.

En el plano, por ejemplo, si el área de un conjunto A es 1, entonces su perímetro es

$$|\partial A| \geq 2\sqrt{\pi},$$

o recíprocamente, si un conjunto A tiene perímetro 1 entonces su área es menor o igual que $1/(4\pi)$

$$|A| \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Como ya he comentado, se puede dar una demostración elemental de la desigualdad isoperimétrica para conjuntos convexos (y de muchas otras) utilizando una desigualdad clásica en la teoría de la convexidad y que tiene sus orígenes en el estudio de los volúmenes de las secciones por hiperplanos de un cuerpo convexo. Es la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Brunn a finales del siglo pasado se dió cuenta de que si tenemos un convexo en el plano, las longitudes de las secciones paralelas al eje OY definen una función cóncava. Para tener una situación similar en el espacio, debemos tomar la raiz cuadrada del área de las secciones de un convexo por un plano paralelo al plano OXZ.

En general, sean A y B dos convexos $(n-1)$-dimensionales que los suponemos sumergidos en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, en los hiperplanos $x_n = 0$ y $x_n = 1$, respectivamente. Representémoslos por $\hat{A}$, $\hat{B}$. Definamos

$$f(\lambda) = \left|\left(1-\lambda)\hat{A} + \lambda\hat{B}\right) \cap \{x_n = \lambda\}\right|_{n-1}^{1/(n-1)},$$

entonces la función f es cóncava cuando λ recorre el intervalo $[0,1]$.

Este resultado fue abstraído, reformulado y demostrado para $n \geq 3$ por Minkowski, quien lo enunció de un modo más general mediante la siguiente expresión

Desigualdad de Brunn-Minkowski. *Si A, B son dos cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$|(1-\lambda)A + \lambda B|^{1/n} \geq (1-\lambda)|A|^{1/n} + \lambda|B|^{1/n}$$

donde λ es cualquier escalar en el intervalo $[0,1]$.

Esta desigualdad también se puede enunciar de una manera equivalente mediante una expresión, que no depende de la dimensión, de la forma siguiente

$$|(1-\lambda)A + \lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda},$$

donde λ es cualquier escalar en el intervalo $[0,1]$ (cf. [42])

Más adelante, en 1935, Lusternik ([26]) pudo extender el resultado a cualquier par de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, A y B, sin otra condición mas que el conjunto $A+B$ sea también medible, tomando esta forma general

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

La desigualdad de Brunn-Minkowski se convierte en igualdad sólamente cuando A y B se obtienen el uno del otro a través de una homotecia.

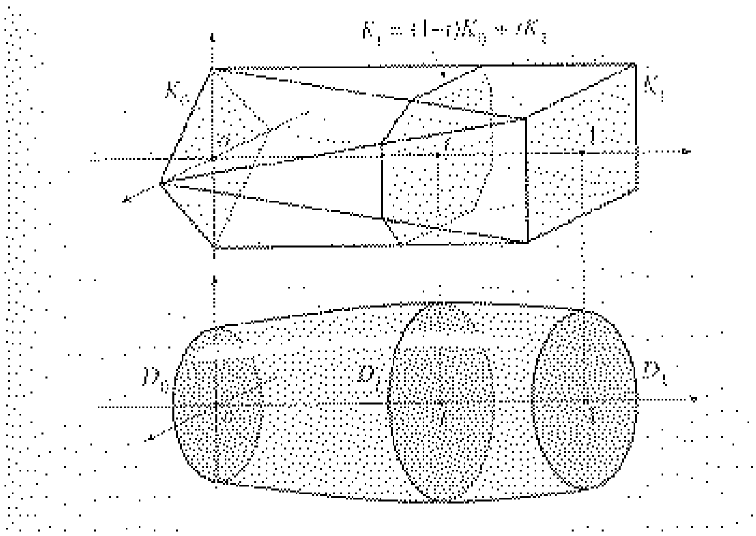

Figura 4.—Desigualdad de Brunn-Minkowski

Más aún, simplemente considerando ejemplos elementales, no puede pretenderse que la desigualdad de Brunn-Minkowski se pueda invertir, ni siquiera modificada por una constante que pueda depender de la dimensión. Es decir, no existe ninguna función $\varphi(n)$ tal que

$$|A+B|^{1/n} \leq \varphi(n)\left(|A|^{1/n}+|B|^{1/n}\right),$$

para todo par de cuerpos convexos A y B de $\mathbb{R}^n$.

Sin embargo Vitali Milman, en 1986, pudo establecer un resultado sorprendente y muy profundo, que dio origen a la llamada "perestroika convexa" (haciendo un inciso, pensemos que Vitali Milman es un matemático judio de origen ruso, emigrado a Israel. En aquella época 1985-86 se estaba produciendo en la antigua Unión Soviética la "perestroika", impulsada por Mihail Gorbachev, que tan importantes consecuencias tuvo para la situación política de bloques en el mundo).

Salvando las distancias, Milman pudo reformular y demostrar una desigualdad inversa de Brunn-Minkowski, usando lo que él llamo la "cirujía convexa". La idea fundamental de Milman fue darse cuenta de que lo que había que hacer era deformar linealmente (conservando el volumen) uno de los dos conjuntos para poder invertir la desigualdad, dando antes los cortes convenientes por rodajas aleatorias. El resultado de Milman se enuncia de la siguiente forma:

Desigualdad inversa de Brunn-Minkowski. *Existe una constante universal C tal que, dados cualquier par de cuerpos convexos A y B de la misma dimensión (cualquiera que ésta sea), se puede encontrar alguna deformación afín T, de determinante igual a* 1 *(es decir, conservando el volumen), de forma que se verifica la siguiente desigualdad:*

$$|T(A) + B|^{1/n} \leq C \left(|A|^{1/n} + |B|^{1/n} \right).$$

Todavía no se conoce el valor de la constante absoluta, pero 120 puede ser suficiente. El resultado de V. Milman es de los más profundos de la teoría local y es de naturaleza no constructiva. Gilles Pisier en 1989, usando la teoría de interpolación de operadores en lugar de la cirugía convexa, pudo dar otra demostración del mismo hecho.

La aportación de Gilles Pisier también es capital, pues fue capaz de desentrañar los razonamientos de Milman y poner en claro que la idea fundamental residía en asociar a cada cuerpo convexo un elipsoide, que juegue el mismo papel que el cuerpo convexo en las mediciones de entropía. Pisier llamó a este elipsoide, *elipsoide de Milman asociado al cuerpo convexo*.

No se ha caracterizado todavía el elipsoide de Milman de un convexo, ni su unicidad. Se ha conjeturado que quizá el elipsoide de Legendre o de inercia de un cuerpo convexo podría hacer ese papel.

La desigualdad inversa probada por Milman implica, entre otros, dos de los resultados más profundos de la teoría local.

El primero de ellos es la llamada "desigualdad inversa de Blaschke-Santaló", que había sido probada un poco antes y de otra manera por el mismo V. Milman, junto con el medalla Fields Jean Bourgain. Primero Blaschke en 1916 y 1923 para las dimensiones 2 y 3 y luego Santaló en 1949, para cualquier dimensión, habían probado que si A es un cuerpo convexo de $\mathbb{R}^n$ y A° su polar, entonces se cumple que

$$|A|^{1/n}|A^\circ|^{1/n} \leq |B_2^n|^{2/n}$$

es decir, el producto volumétrico

$$|A|^{1/n}|A^\circ|^{1/n}$$

posee un máximo absoluto, alcanzado por la bola euclídea (en este caso su polar es la misma bola euclídea). En 1939 Mahler había probado que el producto volúmico estaba acotado inferiormente y había conjeturado que el mínimo absoluto debía ser alcanzado por $A = B_1^n$ (el octaedro n-dimensional), siendo en este caso su polar el cubo n-dimensional B_∞^n.

Se había demostrado que para ciertos conjuntos, por ejemplo los zonoides, la conjetura era correcta. Lo que Bourgain y Milman demostraron en 1985 fue que la conjetura de Mahler era correcta en un sentido isomorfo.

En particular demostraron que existe una constante absoluta, C, independiente de la dimensión, tal que el producto volúmico está acotado inferiormente por el producto volúmico del octaedro y el cubo de dimensión n, salvo la constante absoluta

$$|A|^{1/n}|A^\circ|^{1/n} \geq C|B_1^n|^{1/n}|B_\infty^n|^{1/n}.$$

Por tanto, la conjetura de Mähler está establecida salvo una constante. Este resultado ha tenido importantes consecuencias en la geometría de los números.

El otro resultado importante que se deduce de la desigualdad inversa de Brunn-Minkowski, probada por Milman, es su famoso "teorema QS de Milman", que, en cierto modo, es la versión dual del teorema de Dvoretzky. Este, el teorema de Dvoretzky, como ya he comentado, trata sobre la existencia de secciones casi euclídeas en todo espacio normado. Lo que dice el teorema QS es que cada espacio normado de dimensión finita n posee un subespacio de un cociente de dimensión proporcional a n, casi isométrico al espacio euclídeo.

Estos teoremas son en cierto modo duales, dado que el dual de un subespacio es un cociente. La diferencia entre los dos radica en la dimensión de la sección o del cociente, $\log n$ en el teorema de Dvoretzky o proporcional a n en el teorema QS.

Enunciando estos dos teoremas de modo conjunto para cuerpos convexos simétricos en $\mathbb{R}^n$, podemos decir que

Todo cuerpo convexo y simétrico en $\mathbb{R}^n$ posee una sección, de dimensión al menos $\log n$ y una sección de una proyección ortogonal (también llamada sección de una sombra en tomografía geométrica) de dimensión proporcional a n, que son casi esféricas.

Keith Ball en 1991 siguiendo la idea fundamental de Milman probó una desigualdad inversa de la desigualdad isoperimétrica (ver [2]). Concretamente demostró que a expensas de una transformación afín, los cubos, en el caso simétrico, y los símplices en el no simétrico, son los que tienen mayor superficie. Concretamente probó que

Desigualdad isoperimétrica inversa. *Dado un cuerpo convexo simétrico o no, existe un transformado afín del mismo que tiene una superficie menor o igual que la correspondiente al cubo o simplex (respectivamente) del mismo volumen.*

En 1996 en un trabajo conjunto con mis compañeros Julio Bernués y Ana Peña (ver [8]) conseguimos extender la desigualdad inversa de Brunn-Minkowski, demostrada por Milman a conjuntos más generales, de la misma forma que Lusternik extendió la desigualdad de Brunn-Minkowski a conjuntos generales.

Para ello nos vimos forzados a considerar solamente subconjuntos compactos con interior no vacío en $\mathbb{R}^n$ e introducir un índice $p \in (0, 1]$ asociado a cada uno de estos conjuntos. Por ejemplo, los conjuntos convexos tienen índice 1.

Pudimos demostrar la existencia de un elipsoide de Milman asociado a cada uno de estos conjuntos, que permitía hacer las sustituciones del conjunto en las estimaciones de la entropía (salvo una costante dependiente sólamente del índice) y demostrar, por consiguiente, una desigualdad inversa

Desigualdad inversa de Brunn-Minkowski general. *Para cada índice $p \in (0,1]$ existe una constante $C = C(p)$ (dependiendo sólo de p) para la cual, dados cualquier par de compactos con índice p en $\mathbb{R}^n$, A y B se verifica*

$$|T(A) + B|^{1/n} \leq C \left(|A|^{1/n} + |B|^{1/n} \right),$$

para alguna deformación afín T de determinante igual a 1.

Debo mencionar que recientemente, en 1998, Litvak (ver [25]) ha estudiado el comportamiento de la constante en función de p, dando su estimación asintótica exacta cuando p tiende a 0, siendo de orden exponencial en $1/p$,

$$C_1^{1/p} \leq C(p) \leq C_2^{(1/p)\log(2/p)}.$$

La idea fundamental de nuestra contribución es usar interpolación, es decir el método desarrollado por Pisier (de hecho no supimos hacer cirugía no convexa de índice p). Con ese método alternativo conseguimos asociar un elipsoide de Milman a cada cuerpo A, con índice no nulo.

Para ello, dado un conjunto compacto A en $\mathbb{R}^n$, que tenga índice p, se parte de su envolvente convexa $C(A)$, que es un cuerpo convexo. Se asocia a $C(A)$ el elipsoide de Milman D_0. La distancia en términos de la entropía entre A y D_0 (es decir, la raiz n-ésima de los correspondientes números de cubrimiento) es menor o igual que

$$n^{1/p-1/2}.$$

Interpolamos entre este elipsoide (de índice 2) y el cuerpo A (de índice p) eligiendo un parámetro de interpolación $\theta \in (0,1)$, de forma que el número q definido por la ecuación

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{2}$$

sea mayor que 1.

Entonces el interpolado $(A, D_0)_\theta = A_1$ será, salvo una constante, un cuerpo convexo por un teorema de Kalton (ver [24]). A continuación le asociamos su correspondiente elipsoide D_1, que estará a distancia menor que

$$C^{1-\theta} n^{(1/p-1/2)\theta/2} \leq C n^{(1/p-1/2)\theta}$$

de A_1. Volvemos a interpolar este nuevo elipsoide D_1 con el cuerpo inicial A usando el mismo parámetro θ. De esta forma conseguimos otro cuerpo convexo A_2 y su elipsoide D_2 que estará a distancia de A menor o igual que

$$Cn^{(1/p-1/2)\theta^2} \ .$$

Repitiendo este procedimiento un número finito, m, de veces (que depende de A y de n) podremos rebajar la distancia final entre A y el m-ésimo elipsoide hasta conseguir que

$$Cn^{(1/p-1/2)\theta^m} < C_p \ .$$

Finalmente obtendremos un elipsoide de Milman asociado al cuerpo inicial, que podrá ser utilizado en lugar del cuerpo A, para las mediciones de entropía, pagando, eso sí, la penalización de una constante absoluta, pero independiente de la dimensión y por supuesto de los compactos.

Hecho esto, la desigualdad de Brunn-Minkowski inversa se verifica, salvo una constante absoluta y una deformación afín, que es la que aparece en la correspondiente expresión, pues, si el elipsoide de Milman asociado a A es

$$T_A(\lambda_A D) \sim A$$

y el asociado a B es

$$T_B(\lambda_B D) \sim B$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} |T_B \circ T_A^{-1}(A) + B|^{1/n} &= |T_A^{-1}(A) + T_B^{-1}(B)|^{1/n} \sim |\lambda_A D + \lambda_B D|^{1/n} \\ &= (\lambda_A + \lambda_B)|D|^{1/n} = \lambda_A |D|^{1/n} + \lambda_B |D|^{1/n} \\ &= |\lambda_A D|^{1/n} + |\lambda_B D|^{1/n} \sim |A|^{1/n} + |B|^{1/n} \end{aligned}$$

7. Posiciones isotrópicas

Quisiera finalizar mi discurso haciendo algunos comentarios sobre una de las partes de la teoría de los cuerpos convexos que más actividad presenta y en la que estoy especialmente interesado en la actualidad. Podríamos resumirla diciendo que se trata del estudio y cálculo de los volúmenes de las secciones y proyecciones de los cuerpos convexos.

El célebre argumento de Aristóteles, según el cual, la tierra debería ser redonda, porque sus sombras sobre la luna en los eclipses lunares, eran redondas, está en la base de toda esta teoría.

Nos podemos formular la siguiente pregunta: ¿Es posible recuperar el tamaño de un cuerpo convexo conociendo el de sus proyecciones?, o ¿el de sus secciones?

La tomografía geométrica, se ocupa muy recientemente de problemas relacionados con estas situaciones (ver [18]). Es la parte de las matemáticas que trata sobre la obtención de información acerca de los objetos geométricos, a través de sus secciones, proyecciones o ambas cosas. Es claro que las aplicaciones médicas en la técnica del scanner, según la cual la imagen de una sección de un ser humano puede ser reconstruida por rayos X, es una fuente de problemas para esta materia. Los rayos X paralelos de un cuerpo llevan más información que sus proyecciones y Peter McMullen junto con Richard Gardner probaron en 1980 que con sólo 4 direcciones adecuadas, los rayos X paralelos son suficientes para determinar la forma de un cuerpo convexo.

Un problema recientemente resuelto es el de Busseman-Petty, que podemos formular así.

Problema de Busseman-Petty. *Sean A y B dos cuerpos convexos y simétricos en $\mathbb{R}^n$ para los cuales el volumen de las secciones por hiperplanos centrales cumplen*

$$|A \cap H|_{n-1} \leq |B \cap H|_{n-1}$$

para todo hiperplano H, ¿es cierto que entonces el volumen de A es menor o igual que el volumen de B,

$$|A|_n \leq |B|_n?$$

Este problema fue planteado en 1956 y la historia de su solución es larga, habiendo contribuido a ella muchos autores. Para $n \geq 5$ la respuesta es negativa y esto fue demostrado en una serie de trabajos: por Larman y Rogers en 1975, para $n \geq 12$; por K. Ball para $n \geq 10$, en 1988; Giannopoulos y Bourgain para $n \geq 7$, en 1990-91; Papadimitrakis, Gardner, Zhang bajaron hasta $n \geq 5$, entre 1992 y 1994. Un poco más tarde Gardner, también en 1994, probó que para $n = 3$ la respuesta es afirmativa (el caso $n = 2$ es trivial y la respuesta también es afirmativa), finalmente en 1997 Koldobsky y Zhang cerraron el problema probando que la solución es afirmativa también si $n = 4$.

En conclusión la respuesta es afirmativa únicamente en el caso de dimensiones menores o iguales que 4.

La versión isomorfa de este problema, aún sin resolver, es la que ahora se conoce como *el problema del hiperplano*, del cual hablaré a continuación en términos de la isotropía.

Hay diferentes formas de asociar a un cuerpo convexo un elipsoide. Por ejemplo, el elipsoide de John, ya mencionado, que fija una estructura euclidiana muy conveniente para hacer teoría local y también, con motivo de la desigualdad inversa de Brunn-Minkowski, un elipsoide que es equivalente al cuerpo en las mediciones de entropía, el elipsoide de Milman, como ya hemos citado.

Otra forma, ligada a la mecánica del sólido rígido, es el elipsoide de Legendre o de inercia de un cuerpo A. Este elipsoide viene asociado a la matriz de inercia del cuerpo. Como es bien conocido, todo sólido rígido define una matriz de inercia respecto de un sistema de referencia, que es una forma cuadrática definida positiva. Dado que puede diagonalizarse utilizando sus valores propios, obtenemos el elipsoide de inercia que por una deformación afín se transforma en la bola euclídea D. El elipsoide de Legendre es el único elipsoide que tiene la misma matriz de inercia que el cuerpo A. Usando esa deformación, modificamos el cuerpo y obtenemos una posición diferente del mismo, que es lo que ahora se denomina posición isotrópica. Esta posición isotrópica es única salvo transformaciones ortogonales.

Así pues, decimos que un subconjunto compacto A de $\mathbb{R}^n$ está en posición isotrópica si su tensor de inercia, con respecto a sus ejes principales que pasan por su centro de masas es un múltiplo de la matriz identidad, es decir,

$$M = LI_n$$

M es la matriz de inercia de A, I_n es la matriz identidad y L es una constante.

Podemos introducir una relación de equivalencia en la clase de todos los compactos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es equivalente a B, $A \sim B$ si tienen una misma posición de isotropía. En cada clase de equivalencia hay un cuerpo isotrópico y sólo uno de volumen 1, excepto transformaciones ortogonales. A la constante L de ese representante canónico se le denomina constante de isotropía del compacto y se representa por L_A (ver, [33]).

La constante de isotropía puede introducirse mediante una fórmula que resume lo anterior y es la siguiente. Dada A un compacto en $\mathbb{R}^n$, llamamos

$$L_A = \inf \frac{1}{\sqrt{n}|A|^{1/n}} \sqrt{\frac{1}{|A|} \int_A \|Tu\|_2^2 du}$$

donde $|A|$ representa el volumen de A y T recorre todas las transformaciones afines con determinante igual a 1.

No es difícil probar que L_A es una función continua, más aún, Lipschitz, con respecto a la distancia de Banach-Mazur.

Asimismo, un simple cálculo permite demostrar que existe una constante numérica, positiva (independiente de la dimensión) que acota inferiormente a la constante de isotropía de cualquier compacto con interior no vacío. Jean Bourgain en 1991 ([14]) ha demostrado que hay una acotación superior de la constante isotropía de todos los cuerpos convexos y simétricos en $\mathbb{R}^n$. Concretamente ha probado que

$$L_A \leq Cn^{1/4} \log n,$$

conjeturando que puede rebajarse la acotación anterior, hasta quitar la dependencia de n. Esto es lo que actualmente se denomina *la conjetura del hiperplano.*

El nombre es debido a que esta conjetura es equivalente, o tiene reformulaciones equivalentes, que pueden enunciarse de la siguiente forma

Conjetura del hiperplano. *Existe una constante, independiente de la dimensión, tal que cualquier cuerpo convexo que esté en posición isotrópica tiene las secciones por hiperplanos que pasen por el centro, del mismo tamaño (salvo esa constante).*

o también para todos los convexos

Conjetura del hiperplano reformulada. *Existe una constante, independiente de la dimensión, tal que cualquier cuerpo convexo de volumen* 1*, tiene alguna sección por algún hiperplano de volumen mayor o igual que esa constante.*

Por ejemplo en el plano, la fórmula de integración en polares permite asegurar que si un cuerpo convexo tiene área 1, entonces alguna de sus cuerdas tiene longitud mayor o igual que $1/\sqrt{\pi}$. En cada dimensión el resultado es cierto, como demostraron Bourgain en el caso simétrico y Paouris, muy recientemente (ver [36]), en el no simétrico. La extrema dificultad aparece al conjeturar que la constante no depende de la dimensión.

Para la clase de conjuntos isotrópicos, Vaaler en 1975 (cf. [45]) había formulado una conjetura más fuerte, que es lo que ahora se conoce como

Conjetura de Vaaler *Si K es un cuerpo convexo simétrico e isotrópico en $\mathbb{R}^n$ y E es cualquier subespacio vectorial de dimensión k, con $1 \leq k \leq n$, entonces*

$$|K \cap E|_k^{1/k} \geq |K|_n^{1/n}.$$

Vaaler estudió este problema en relación con la geometría de los números ([35]). Lo que Vaaler probó fue que el resultado era cierto para el cubo n-dimensional B_∞^n. Meyer y Pajor, en 1988, ([28]) extendieron el resultado para el resto de bolas B_p^n en el rango $2 \leq p \leq \infty$ y para $p = 1$, quedando la conjetura desconocida en el intervalo $1 < p < 2$.

K. Ball en 1991 ([3]) consideró el caso de las bolas cuyo elipsoide de máximo volumen inscrito fuera la bola euclídea, probando la conjetura para las secciones 1-dimensionales.

Recientemente en un trabajo con Fernando Galve, Ana Peña y Miguel Romance (ver [12]) hemos podido aportar algún resultado al caso de las bolas B_p^n en el intervalo desconocido $1 < p < 2$. Concretamente hemos visto que la conjetura es cierta para las secciones $n-1$ dimensionales y para las secciones k-dimensionales, siempre que $1 \leq k \leq (n-1)/2$, quedando aún toda una familia de secciones para las que se desconoce el resultado.

8. A modo de epílogo

Para finalizar mi discurso y entroncando con el principio del mismo, querría terminarlo volviéndome a hacer eco de la celebración del Año Internacional de las Matemáticas.

Permítanme leer, como conclusión, el principio de la epístola que Pedro Roiz, clérigo valenciano del siglo XVI, escribió en el año 1575 al muy illustre señor Don Pedro Luys Galceran de Borja, Maestre de Montesa y Marqués de Navarres y que aparece al principio del "Libro de Reloges Solares", escrito por el citado clérigo y dirigido al señor de Borja, con motivo de la edición del libro (reproducido en una edición facsimil por el Senado, con motivo del Año Internacional de las Matemáticas)

Los Griegos, aunque géte Ydolatra, Muy Illustre Señor, pero zelosos del bien y paz de su República, consultaron a Apollo, en la ysla Delos, quando tendrian fin las dissensiones y guerras civiles que entre ellos auia: El Demonio les respondio enigmaticamente, como solia, que entonces cessarian, quando le doblassen el ara donde le sacrificauan. Esta ara, era un altar grande de bronzo, de seys superficies quadradas, de la forma de un dado. Pensaron los Griegos, que con hazer otra ara, y juntarla con la primera, aurian cúplido con la respuesta: y quedaron frustrados, sin conseguir lo que desseauan. Consultaron segunda vez, y respondioles, que no auian obedecido. Fueron a saber de Platon, como se auia de doblar aquella ara; y dixo, que auia de ser de manera, q́ quedasse con la misma figura cubica y proporcion, que tenia: y que esto era muy difficultoso, ni se podia hazer sin mucho estudio de Arithmetica y Geometria, con las cuales sciencias se alcança noticia para saber acrecétar y disminuyr qualquier cuerpo, quedandose con la misma figura y proporcion. Y assi, que la intencion y voluntad de Apollo era, que se diessen al estudio de las Mathematicas: pues con ellas, y no de otra manera, podian poner por obra lo que les auia declarado. Escriuen los Historiadores, que lo hizieron, y despues viuieron con mucha paz. (...)

(...) *Porque realmente, entre todas las Sciencias humanas, las que ennoblecen y illustran los hombres, y entre otros a los Principes y personas preeminentes, son las Mathematicas: las quales con su variedad, no solamente deleytan el entendimiento, pero aún entretienen los sentidos.* (...)

STRISSIMO Y REVERENDISSIMO SEÑOR DON

Pedro Luys Galceran de Borja, Maestre de Montesa, Marques de Nauarres:

Epistola del Auctor.

LOS Griegos, aunque gẽte Ydolatra, Muy Illustre Señor, pero zelosos del bien y paz de su Republica, consultaron a Apollo, en la ysla Delos, quando tendrian fin las dissensiones y guerras ciuiles que entre ellos auia: El Demonio les respondio enigmaticamente, como solia, que entonces cessarian, quando le doblassen el ara donde le sacrificauan. Esta ara, era vn altar grande de bronzo, de seys superficies quadradas, de la forma de vn dado. Pensaron los Griegos, que con hazer otra ara, y juntarla con la primera, aurian cũplido con la respuesta: y quedaron frustrados, sin conseguir lo que desseauan. Consultaron segunda vez, y respondioseles, que nõ auian obedecido. Fueron a saber de Platon, como se auia de doblar aquella ara, y dixo, que auia de ser de manera, q̃ quedasse con la misma figura cubica y proporcion, que tenia: y que esto era muy difficultoso, ni se podia hazer sin mucho estudio de Arithmetica y Geometria, con las quales sciencias se alcança noticia para saber acrecẽtar y diminuyr qualquier cuerpo, quedandose con la misma figura y proporcion. Y assi, que la intencion y voluntad de Apollo era, que se diessen al estudio de las Mathematicas: pues con ellas, y no de otra manera, podian poner por obra lo que les auia declarado. Escriuen los Historiadores, que lo hizieron, y despues viuieron con mucha paz. No dudo yo que esto pudiesse passar assi, y que el Demonio, aunque padre de mẽtira, por mejor engañarlos y tenerlos por suyos, muchas vezes les dixesse y respondiesse cosas que les conuenian, como la de que tratamos. Porque realmente, entre todas las Sciencias humanas, las que mas ennoblecen y illustran los hombres, y entre otros a los Principes y personas preeminentes, son las Mathematicas: las quales con su variedad, no solamente deleytan el entendimiento, pero aun entretienen los sentidos. Que cosa mas gustosa para el entendimiento humano, que vna linda demonstracion Mathematica? Que entretenimiento se puede comparar al de vn Geometra, Cosmografo, o Geografo? Que cosa mas suaue para no echar de ver la prolixidad del tiempo, q̃ tener entre manos vno destos exercicios? Pues que dire de otras cosas, en lo que toca a la nauegaciõ, guerra por mar, o por tierra,

Referencias

[1] J. Arias, K. Ball y R. Villa,*Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces.* Mathematika 45 (2), (1998), 245-252.

[2] K. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality.* J. London Math. Soc. 44(2), (1991), 351-359.

[3] K. Ball, *Shadows of convex bodies.* Transactions of AMS, 327 (1991), 891-901.

[4] S. Banach, *Théorie des opérations lineaires*, Varsovia (1932).

[5] J. Bastero y J. Bernués, *Applications of deviation inequalities on finite metric sets*, Math. Nach. 153 (1991), 33-41.

[6] J. Bastero y J. Bernués, *Embedding ℓ_r^n into p-Banach spaces ($0 < p < r < 2$).* Journal of Math. Anal. and Appl. 178(2), (1993), 363-380.

[7] J. Bastero, J. Bernués y N. Kalton, *Embedding ℓ_∞^n -cubes in finite dimensional 1-subsymmetric spaces.* Rev. Mat. U. Complutense, Madrid, 2, (1989), 47-52.

[8] J. Bastero, J. Bernués y A. Peña, *An extension of Miman's reverse Brunn-Minkowski inequality.* Geom. and Func. Anal. 5(3), (1995), 572-581.

[9] J. Bastero, A. Peña y G. Schechtman, *Embedding ℓ_∞^n-cubes in low dimensional Schatten classes.* Operator Theory. Advances and Applications 77 (1995), 5-11. Seminar.

[10] J. Bastero, A. Peña y G. Schechtman, *Embedding ℓ_∞^n-cubes in the orbit of an element in conmutative and non conmutative ℓ_p^n-spaces.* Colloquium An. Mat. 1993-94. Unv. Complutense. 1-8.

[11] J. Bastero y M. Romance, *John's decomposition of the identity in the non-convex case*, (aparecerá en Positivity).

[12] J. Bastero F. Galve, Ana Peña y M. Romance *Inequalities for the Gamma function and estimates for the volume of sections of B_p^n* (aparecerá en Proceedings AMS).

[13] C. Borel, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss spaces.* Inventiones Math. 30 (1975), 207-216.

[14] J. Bourgain, *On the distributions of polynomials on high dimensional convex sets.* Lecture Notes in Math., Springer, 1469 (1991), 127-137.

[15] J. Bourgain, V. Milman y H. Wolfson, *On type of metric spaces.* Transactions of A.M.S. 249 (1), (1986), 295-317.

[16] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces.* En Proceedings of Symp. on Linear Spaces, Jerusalem. (1961), 123-160.

[17] T. Figiel, J. Lindenstrauss y V. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*. Acta Math. 139 (1977), 53-94

[18] R. Gardner, *Geometric Tomography*. Encyclopedia of Mathematics and its applications, (1995), Cambridge Univ. Press

[19] A. Giannopoulos y V. Milman, *Euclidean structure in finite dimensional normed spaces* (prepublicación).

[20] A. Giannopoulos, I. Perissinaki y A. Tsolomitis, *John's Theorem for an arbitrary pair of convex bodies*. (prepublicación).

[21] Y. Gordon, *Some inequalities for Gaussian processes and applications*. Israel J. Math. 50, (1985), 265-289.

[22] F. John, *Extremun problem with inequalities as subsidiary conditions*. Courant Anniversaire Volume, Interscience, (1948), 187-204.

[23] W. Johnson y J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space* Contemp. Math. 26 (1984), 189-206.

[24] N. Kalton, *Convexity type and the three space problem*. Studia Math. 69 (1980-81), 247-287.

[25] Litvak, *On the constant in the reverse Brunn-Minkowski inequality for p-convex balls*. Convex Geom. Anal. MSRI Pub. 34, (1998), 129-138.

[26] L.A. Lusternik, *Die Brunn-Minkowski Ungleichung für beliebige messbare Mengen*. C.R. Acad. Sc. URSS 8, (1935), 55-58.

[27] M. Marcus, G. Pisier *Characterizations of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes*, Acta Math. 152 (3-4), (1984), 245-301.

[28] M. Meyer y A. Pajor, *Sections of the unit ball of* ℓ_p^n. Journal of Func. Anal. 80 (1), (1988), 109-123.

[29] V. Milman,*A new proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies*. Func. Anal. Appli. 5, (1971), 28-37.

[30] V. Milman, *Inegalité de Brunn-Minkowski inverse et applications a la theorie local des espaces normés*. C:R.A.Sc. Paris, 302, ser I, (1986), 25-28.

[31] V. Milman, *Spaces of large dimension; some counter-intuitive results*. En Centre for Math. Anal. Australian Nat. Univ. 20, 1988.

[32] V. Milman, *Randomness and pattern in convex geometric analysis*, en Proceedings of ICM, Berlin 1998, vol II, 665-678.

[33] V. Milman y A. Pajor, *Isotropic positions and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*. Lecture Notes in Math., Springer, 1376, (1989), 64-104.

[34] V. Milman y G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*. Lecture Notes in Mathematics 1200. Springer (1986)

[35] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*. Tebner, Leipzig (1910).

[36] G. Paouris, *On the isotropic constant of the non-symmetric convex bodies*, (prepublicación).

[37] G. Pisier, *On the dimension of the* ℓ_p^n*-subspaces of Banach spaces,* $1 \leq p < 2$. Transactions of AMS 276 (1983), 201-211.

[38] G. Pisier, *Probabilistic methods in the Geometry of Banach spaces*. En Lecture Notes in Mathematics 1206, Springer, (1986), 167-241.

[39] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*. Journal reine angew. Math. 393, (1989), 115-131.

[40] G. Pisier, *Volume of convex bodies*. Cambridge Univ. Press (1989).

[41] G. Schechtman, *More on embedding subspaces of* L^p *in* ℓ^r. Compositio Math. 61, (1987), 159-169.

[42] R. Schneider, *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its applications (1993), Cambridge Univ. Press

[43] A. Szankowski, *On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies*. Israel J. Math. 17, (1974), 325-338.

[44] N. Tomczak-Jaegerman, *Banach-Mazur distances and finite dimensional operator ideals*. Pitman Monogr. (1989)

[45] J.D. Vaaler, *A geometric inequality with applications to linear forms*. Pacific J. of Math. 83, (1979), 543-553.