Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **69:** 79–84, (2013).
ISSN: 0370-3207

Construcción de los Poliedros Regulares

Luis J. Boya y Cristian Rivera

Departamento de Física Teórica
Universidad de Zaragoza
5009 Zaragoza, Spain

Abstract

Se construyen directamente los cinco poliedros regulares, también llamados *sólidos platónicos* y se recuerdan y prueban algunas de sus propiedades.

1 Construcción

Los cinco sólidos platónicos son el Tetraedro T, el Octaedro O, el Hexaedro H, el Icosaedro I y el Dodecaedro D. Son conocidos en Matemáticas desde los tiempos de los griegos. Aquí damos unas recetas para poder construirlos explícitamente de un modo sencillo, y recordamos y probamos algunas de sus propiedades, ver [1, 2, 3].

Los poliedros regulares viven en tres dimensiones, y tienen, por definición, caras que son polígonos planos regulares de q lados, con el mismo número de caras por vértice (de hecho, veremos que ese número, p, es $p \geq 3$); veremos también que las caras, todas iguales por supuesto, sólo pueden ser triángulos, cuadrados o pentágonos, ($q = 3, 4, 5$) habiendo TRES poliedros regulares con caras triangulares (T, O e I), y DOS con caras cuadrada y pentagonal (H y D). Procedamos directamente a su construcción.

1.1 Tetraedro

Para el *tetraedro* T, partimos de un triángulo regular en el plano, con su centro P. Trazamos desde P la recta perpendicular al plano del triángulo. Un punto arbitrario de esa recta equidista de los tres vértices del triángulo. Por eso, uniendo esos tres vértices con un punto de esa recta, con una arista de longitud igual a la longitud de los lados del triángulo regular de la base, tenemos la construcción del Tetraedro, con sus seis (3+3) aristas iguales.

Resumimos el Tetraedro así: (Vértices $V = 4$, Aristas $A = 6$, Caras $C = 4$). Nótese que $V + C - A = 2$, igualdad que luego comentaremos. Nótese también la *agudeza* de los vértices, en el sentido que las tres caras triangulares de un vértice suman $60° \times 3 = 180°$, la mitad para que las caras "llenen" un plano ($360° = 180° \times 2$). La *agudeza* es, por definición, la diferencia de la suma de los ángulos adyacentes con $360°$ ($-180° + 360° = -180°$); para el tetraedro es, pues, $-180°$ y será la *mínima* entre los cinco poliedros regulares. Tal como la hemos definido, la *agudeza* será siempre *negativa* para los posibles poliedros.

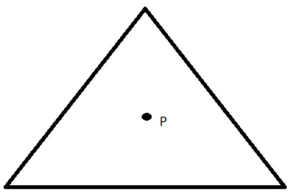

Fig. 1A
El Triángulo de partida, con su centro P

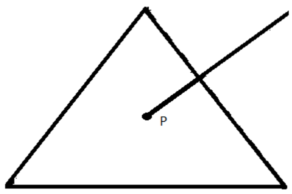

Fig. 1B
La Recta perpendicular desde P

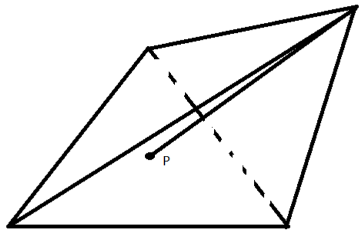

Fig. 1C
El Tetraedro T

1.2 Octaedro

A continuación construimos el Octaedro O. Partimos ahora de un *cuadrado* regular, en el plano (e.g. del papel) y procederemos como antes, construyendo la recta perpendicular desde el centro P del cuadrado, pero ahora en los dos sentidos (por arriba y por debajo de su plano), y tomando a continuación aristas (4+4=8) de longitud igual a las del cuadrado, desde los cuatro vértices del cuadrado a esas dos rectas perpendiculares, por arriba y por abajo, aparecen así los dos nuevos vértices y se completa el octaedro O, que tiene por tanto caras triangulares y aparecen claramente dos nuevos vértices sobre esa recta, uno por arriba y otro por abajo del plano del cuadrado de partida. Figs. $2A$, $2B$ y $2C$.

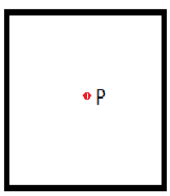

Fig 2A
El cuadrado,

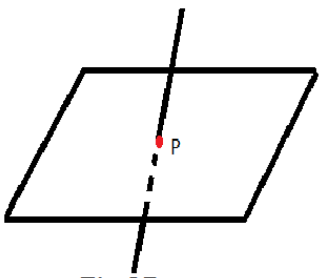

Fig 2B
El cuadrado y su perpendicular

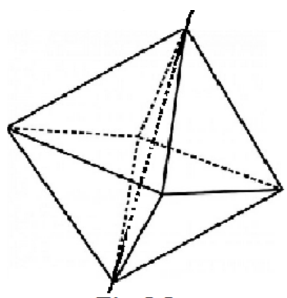

Fig 2C
El octaedro O

En vértices V, aristas A y caras C tenemos ahora, claramente ($V : 4 + 2 = 6$, $A : 4 + 4 + 4 = 12$ y $C : 4 + 4 = 8$, de nuevo $V + C - A = 2$). Nótese que del cuadrado original, quedan los cuatro vértices y las cuatro aristas, pero la cara ha desaparecido. . .: No se trata, pues, de dos pirámides opuestas de base cuadrangular. Nótese también la *agudeza* de los vértices, que es ahora *mayor* que antes ($-240° + 360° = -120°$: cuatro caras triangulares por vértice, así que $60 \times 4 = 240° < 360°$).

1.3 Hexaedro

El *Hexaedro* o cubo H es, en nuestra opinión, el poliedro más fácil de construir. Partimos de un cuadrado regular en el plano e.g. del papel, y en otro plano paralelo al original, digamos por detrás (ver Fig 3B), tomamos otro cuadrado idéntico al anterior. El cubo se completa trazando las cuatro aristas que unen los vértices correspondientes de los dos cuadrados, de longitud igual a la de los lados de los cuadrados. Esas cuatro aristas nuevas son perpendiculares a los planos de los dos cuadrados, y de longitud igual a un lado de cada cuadrado. Y así queda el cubo convencional, o hexaedro, que tiene obviamente $V = 8$, $A = 12$ y $C = 6$, de modo que, como antes $V + C - A = 2$. La *agudeza* del cubo es ahora, también algo *mayor* que antes ($90 \times 3 = 270°$; $270° - 360° = -90°$).

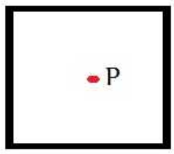

Fig 3A

El cuadrado,
con su centro P

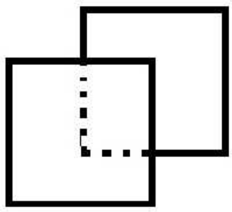

Fig 3B

El segundo cuadrado
detrás del primero.

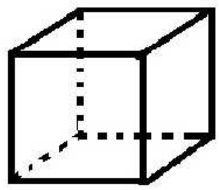

Fig 3C

El Hexaedro, ya
completo, uniendo
los vértices respectivos
de los dos cuadrados.

1.4 Icosaedro

Para la construcción del *Icosaedro* I, partimos de un *pentágono* regular que llamaremos N (Norte), puesto que tomaremos otro pentágono idéntico que llamaremos S (Sur). Tomamos ahora el centro P de un pentágono (digamos el N), y lo dividimos en cinco triágulos isósceles, uniendo ese centro con los cinco vértices del pentágono. Ahora imaginemos que el centro "se levanta" un poco (que es calculable), puesto que los cinco triángulos equivalen a $60° \times 5 = 300° < 360°$. La *agudeza* es ahora $-360° + 300° = -60°$, la *mayor* hasta ahora. Procedemos igualmente a dividir en triángulos isósceles el pentágono S, que ahora mirará un poco "hacia abajo", con la misma agudeza; puestos los dos pentágonos en situación antisimétrica, unimos finalmente con dos aristas (del pentágono N) por vértice (del pentágono S) los dos pentágonos, con longitud igual a los lados del pentágono, resultando las figuras $4A$, $4B$ y $4C$. Los pentágonos S y N están en situación antisimétrica, pues así se garantiza que la "unión" entre los dos se hace con dos aristas (e.g. del pentágono N) con un vértices del pentágono S.

Queda así la construcción $(V, A, C) = (6+6 = 12,\ 10+10+10 = 30,\ 5+5+10 = 20)$, con caras *triangulares*, con cinco por vértice, que definen el Icosaedro regular I.

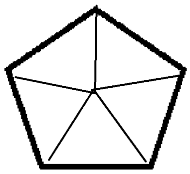

Fig. 4A
El pentágono N,
dividido en 5 triángulos.

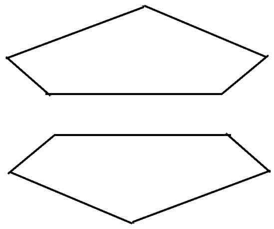

Fig. 4B
Otro pentágono (Sur).

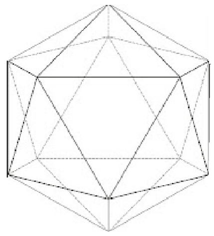

Fig. 4C
Nuevas aristas, desde
los dos casquetes
triangulares.

1.5 Dodecaedro

El poliedro regular más difícil de construir es, de nuevo en nuestra opinión, el *Dodecaedro D*. También partimos de dos pentágonos regulares, N y S. Para cada uno, se prolongan sus cinco vértices con nuevas aristas, hacia afuera de longitud la del lado del pentágono. Se completan cinco pentágonos más rodeando el original (Fig $5A$ y $5B$; pentágono N, luego el S en situación antisimétrica, como en el Icosaedro. Se agregan *dos* lados por pentágono a construir. Nótese que, de momento, hay dos o tres aristas por vértice, por lo que se completa la construcción lanzando una tercera arista desde el pentágono inferior a los pentágonos que rodean el N. Queda así la figura $5C$. La "esfericidad" está asegurada, pues (el ángulo entre dos lados de un pentágono regular es de 108°) $108° \times 3 = 324°$, todavía $< 360°$, por eso el Dodecaedro D recuerda el que más a una esfera (o un balón de fútbol). Para este Dodecaedro D tenemos ahora V, A, C = $(20, 30, 12)$. La *agudeza* es la máxima $324° - 360° = -36°$).

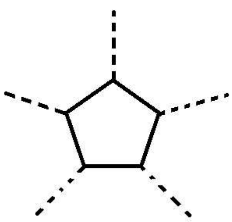

Fig. 5A
El pentágono regular,
con 3 vértices por
arista.

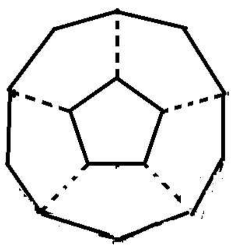

Fig. 5B
Los pentágonos nuevos, N

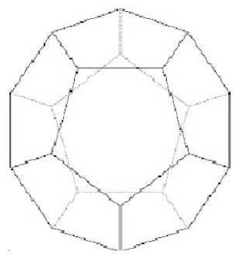

Fig. 5C
Dodecaedro D,
visto desde S .

Como resumen, la construcción explícita de los cinco sólidos platónicos es fácil y directa. El más sencillo parece ser el cubo H, el más difícil el dodecaedro D. En las referencias pueden verse muchas otras construcciones, así como en "Google".

2 Propiedades

En esta sección justificaremos algunos de los resultados anteriores, y expondremos algunos más; como referencias generales citemos [2] y [4].

En primer lugar, tiene que haber tres o más caras por vértice, para formar una figura tridimensional: con solo dos caras con una arista común NO se puede.

La *agudeza* de un poliedro podemos definirla como la suma de los ángulos en un vértice menos 360°, como hemos indicado en el texto. Si ϕ es el ángulo entre dos aristas contiguas de un polígono regular, para que eventualmente varios polígonos del mismo tipo cierren en una figura de casquete esférico, es decir, NO en un plano, la *agudeza* debe ser negativa; si hay m aristas por vértice, la condición es, obviamente

$$m\,\phi < 360^\circ$$

Para triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos regulares tenemos ϕ=(60°, 90°, 108° y 120°): se sigue por tanto que sólo triángulos (con tres, cuatro o cinco por vértice), cuadrados o pentágonos (con tres sólo por vértice) son posibles. En particular, los hexágonos están excluidos, aunque ellos pueden "teselar" (cubrir de modo regular) el plano, que también puede ser cubierto por cuadrados (de cuatro en cuatro) y por triángulos (de seis en seis), como es bien conocido. Como resultado, resultan precisamente los cinco poliedros regulares, con sus miles de años de antigüedad... No deja de ser notable que la condición de existencia sea necesaria y suficiente... los griegos asociaban los cuatro primeros poliedros a los "elementos" aire, agua, fuego y tierra; al quinto o Dodecaedro D corresponde a la quinta-esencia de los alquimistas medievales ([1, p. 149]).

Una idea que no hemos tocado aun es la de *dualidad*, un concepto importante. Imaginemos que tomamos, en un cubo, los centros de las seis caras, como vértices y los unimos con dos aristas por (nuevo) vértice: sigue quedando un poliedro regular Π, pero con caras y vértices intercambiado respecto del cubo original: es el llamado "poliedro" dual $\Pi^\star$. Tenemos que el tetraedro $T(\,V, A, C = 4, 6, 4)$ es autodual ($T = T^\star$), pero los otro cuatro poliedros no, en particular ($H^\star = O$) y ($I^\star = D$).

¿Por qué, en todos los casos, $V + C - A = 2$? Es el número de Euler-Poincaré de la esfera, concepto que nos llevaría tiempo desarrollar en detalle; véase, por ejemplo [5].

"Teselar" es cubrir un espacio con politopos: si el espacio es $\mathbb{R}$, sólo cabe un "politopo" unidimensional, con vértices equidistantes. Si es $\mathbb{R}^2$, o sea el plano, éste se puede cubrir con triángulos, cuadrados o hexágonos, como hemos señalado y es bien conocido.

Existe una notación *standard* para politopos, debida al suizo L. Schläfli; para polígonos regulares, basta $\{m\}$, el número de lados; para poliedros, $\{p, q\}$ donde p es el número de lados del polígono y q el número de polígonos por vértice: para los cinco sólidos platónicos, la notación de Schläfli es $T\{3,3\}$; $O\{3,4\}$ $H\{4,3\}$; $I\{3,5\}$ y $D\{5,3\}$. Se ve inmediatamente que el dual de $\{p, q\}$ es $\{q, p\}$; eventualmente, la notación de Schläfli no se limita a politopos regulares...

References

[1] H.S.M. Coxeter, "Introduction to Geometry". Second Edition, J. Wiley 1969, ch. 10, en particular pág. 151.

[2] H.S.M. Coxeter, "Regular Polytopes", Mc Millan, $3^{\underline{a}}$ ed., Dover 1973.

[3] H.S.M. Coxeter, "The Beauty of Geometry", 12 essays. Southern Illinois U.P. 1968.- Dover ed., 1999. $N^{\underline{o}}$ s 1, 3 and 5.

[4] C. Quesada, "Los sólidos platónicos", Historia, Propiedades y Arte (en la web, 20/12/2006).

[5] L.J. Boya and C. Rivera, "On Regular Polytopes", Rep. Math. Phys. 71, 149-161 (2013).

[6] S. Goldberg, "Curvarture and Homology". Dover 1982, pág. 60.

ACTIVIDADES DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2014

Sesiones:

En el año 2014 la Real Academia de Ciencias de Zaragoza celebró seis sesiones. En las dos primeras, celebradas los días 12 de marzo y 24 de abril de 2014, para proceder a la lectura de uno de los trabajos que recibieron los Premios de Investigación de la Academia 2013, actos que, por razones de agenda, habían quedado aplazados para el año 2014.

Las restantes sesiones tuvieron lugar los días 7 mayo, 11 de junio, 20 de octubre y 26 de noviembre. En la de 20 de octubre, el Académico Electo D. Manuel Silva Suárez, presentó su discurso de ingreso, respondiéndole en nombre de la Academia el Ilmo. Sr. D. Alberto Elduque Palomo.

También se colaboró con la Facultad de Ciencias y el Departamento de Física Aplicada en la organización una sesión obituario por el fallecido Profesor Manuel Quintanilla Montón, quien fue durante muchos años Tesorero de la Academia.

La Real Academia de Ciencias de Zaragoza participó el miércoles 5 de noviembre en la Sesión Solemne de Apertura Conjunta de curso de las Academias de Aragón en el Paraninfo de la Universidad, que fue organizada por la Academia Aragonesa de Jurisprudencia y Legislación. La lección inaugural fue impartida por el Excmo. Sr. Dr. D. Agustín Luna Serrano y tuvo por título "Acerca de las verdades oficiales del Derecho: el caso de las verdades fiduciarias". La contestación corrió a cargo del Presidente de la Academia Aragonesa de Jurisprudencia y Legislación, Excmo. Sr. Dr. D. Eduardo Montull Lavilla.

Altas y bajas de Académicos Numerarios:

- En la sesión de 20 de octubre, el Académico Electo D. Manuel Silva Suárez, presentó su discurso de ingreso con el título: "De discretos y fluidos, entre fidelidad y complejidad", recibiendo la medalla Nº 19.

- El Ilmo. Sr. D. Javier Sesma Bienzobas, medalla Nº 3, causa baja a petición propia como Académico (Sección de Físicas), siendo aceptada su solicitud en la sesión celebrada el 7 de mayo.

- En la sesión de 11 de junio fueron elegidos miembros de la Academia los Profesores D. Ricardo Ibarra García por la Sección de Físicas, quien recibirá la medalla Nº 20 y D. Fernando J. Lahoz Díaz, por la Sección de Químicas, quién recibirá la medalla Nº 2.

Altas y bajas de Académicos Correspondientes:

- D. Javier Sesma Bienzobas, que ha causado baja como Académico Numerario de la sección de Físicas, ha pasado a ser Académico Correspondiente por la misma sección.

Publicaciones de la Academia:

La Academia ha publicado el volumen 69 de la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.

Organización de Congresos y Conferencias:

La Academia ha organizado en 2014, entre otros, los siguientes eventos:

- El día 21 de mayo la Academia convocó y desarrolló la *Jornada de Homenaje al ilustrado aragonés Ignacio Jordán de Asso en el bicentenario de su muerte.* Se sumó así a otros actos de homenaje promovidos por la Universidad de Zaragoza, la Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País y el Ateneo de Zaragoza. La asistencia fue muy reducida, pero altamente valiosa, y las ponencias serán publicadas en una Monografía de la Academia de Ciencias.

  El Vicepresidente D. Juan P. Martínez-Rica fue el responsable de la organización de la mencionada Jornada.

- Colaboración en la organización conjunta con la Facultad de Ciencias de los Ciclos de Conferencias *Cita con la Ciencia* y *Espacio Facultad 2013-2014*, así como en la del *IX Premio de divulgación científica José María Savirón.*

Por último, dentro de la habitual participación de Académicos en numerosos congresos nacionales e internacionales, y en conferencias en el ámbito de la difusión de la ciencia, cabe destacar las siguientes actuaciones:

- El Académico Alberto Elduque ha sido conferenciante invitado en los congresos internacionales *Enveloping Algebras and Representation Theory (EART2014)*, en St. Johns (Canadá), *Geometric Methods in Representation Theory*, en Lancaster (Inglaterra) y en *XII Jornadas de Álgebra No Conmutativa*, en Málaga, siendo miembro del Comité Científico de dicho Congreso.

- El Académico Enrique Artal presentó ponencias invitadas en los Congresos Internacionales *Workshop on Singularities in geometry, topology, foliations and dynamics*, en Mérida (Méjico) y en el *Symposium on Singularities and their Topology* en Hannover, así como en *International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society* en Alba Iulia (Rumanía) y en *Algebra and Geometry and Topology of Singularities. On the occasion of the 60th birthday of I. Luengo* en Miraflores de la Sierra.

- El Académico Luis Oro ha participado en actividades de las Academias Nacionales de Ciencias de Alemania y Francia, de las que es miembro. Ha sido conferenciante invitado en la *40th International Conference on Coordimnation Chemistry* (Singapur, Julio de 2014) y en el *Europe-Japan Joint Forum in Chemistry* (Estrasburgo, Octubre 2014) así como en el *23th Annual Saudi-Japan Symposium* (Dhahran, Arabia Saudita, Diciembre de 2014). Impartió la Conferencia de clausura del ciclo *75 Aniversario CSIC*, en Zaragoza (diciembre 2014).

- La Académica María Teresa Lozano Imízcoz impartió la conferencia inaugural del *Tercer Encuentro Conjunto RSME-SMM* que se celebró en Zacatacas, (México).

- El Académico Antonio Elipe ha sido presidente del Comité Científico de las *XIV Jornadas de Mecánica Celeste* que tuvieron lugar en Ribadeo en el mes de julio, y presidente del Comité Organizador del *II Congreso Nacional de i+d en Defensa y Seguridad* celebrado en Zaragoza en noviembre.

- El Académico Manuel Silva presentó una conferencia invitada en el *Colloquium UPMC-Sorbonne*, en París.

- El Secretario José F. Cariñena formó parte del Comité Organizador de los *XVI Encuentros de Invierno Mecánica, Geometría y Teoría de control*, 31 de enero, y 1 de febrero y en el *Thematic Day: Discrete Mechanics and Geometric Integrators*, el 30 de enero, en Zaragoza. Presentó conferencias invitadas en los Congresos internacionales *10th AIMS Conf. on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications* en Madrid, *II Meeting on Lie systems, generalisations, and applications*, en el Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences en Varsovia (Polonia) y en el Congreso *Symmetries, special functions and superintegrability*, en Valladolid, en el que fue también miembro del Comité Científico del Congreso.

Varios Académicos han colaborado en cursos propios en la Universidad de la Experiencia que organiza la Universidad de Zaragoza.