*Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza.* **66:** 105–125, (2011).
ISSN: 0370-3207

# Sobre el problema clásico de Waring

Catalina Calderón

Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco. 48940 Bilbao

*Omnis integer numerus vel eft cubus; vel e duobus, tribus, 4, 5, 6, 7, 8, vel novem cubus compositus: eft etiam quadratoquadratus; vel e duobus, tribus etc. ufque adnovemdecim compositus et cc deinceps.*

in Meditationes Algebraicæ1770, pag. 204-5: (Edward Waring)

**Resumen**

El objetivo de estas páginas es mostrar el problema de Waring y su evolución en la resolución del mismo a través de las investigaciones de matemáticos como G.H. Hardy, J.E. Littlewood, I.M. Vinogradov y otros.

## 1. Euler y la función partición

Los problemas aditivos tratan de la posibilidad de representación de los enteros $n$ en sumandos de la forma

$$n = a_{1i_1} + a_{2i_2} + \cdots + a_{si_s}, \tag{1}$$

donde los $a_{jr_j}$ son enteros de unas sucesiones numéricas determinadas. El fundador de esta rama de la teoría de números es L. Euler(1707-1783). Sus investigaciones vienen expuestas en su memoria *"De partitionumerorum"*.

En el método empleado por Euler, las sucesiones $\{a_{jr}\}, j = 1, \ldots, s$ no negativas, se ponen en correspondencia con la serie de potencias $f_j(z) = \sum_{r=1}^{\infty} z^{a_{jr}}$ la cual es convergente para $|z| < 1$. El número de soluciones $A(n)$, de la ecuación (1), es igual al coeficiente de $z^n$ en la serie

$$F(z) = \prod_{j=1}^{s} f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) z^n, \tag{2}$$

y el problema se reduce al cálculo de ese coeficiente. En numerosos problemas, $s$ está acotado, pero puede ser infinito.

El método empleado por Euler ( método de las funciones generatrices ) había sido casi olvidado durante mas de cien años pues no se había conseguido hallar métodos efectivos para el cálculo de los coeficientes de la serie principal (2). A finales del siglo XIX, el matemático inglés J. Sylvester y otros, para la resolución de los problemas aditivos lineales, aplicaban la descomposición de $F$ en fracciones continuas, pero este método no servía para los problemas no lineales. Más tarde, grandes matemáticos como S. Ramanujan, G.H. Hardy, J.E. Littlewood, e I.M. Vinogradov, conservando la idea fundamental de Euler de aplicación de las series infinitas desarrollaron un método nuevo que actualmente sigue siendo de gran utilidad en la resolución de problemas aditivos.

La suma de la serie (2) cuyo coeficiente es $A(n)$, se llama función generatriz de $A(n)$. A Euler el estudio del número de formas en que un entero puede expresarse como suma de otros enteros era un problema que le fascinaba. En este caso, la función $A(n)$ se denota por $P(n)$ y se llama función partición.

La función partición se define precisamente, como el número de formas en que el entero positivo $n$ puede escribirse como una suma de enteros positivos. No se consideran distintas dos particiones si, difieren sólo en el orden de sus sumandos. Por ejemplo $P(4) = 5$ puesto que $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$. Definimos $P(0) = 1$. Euler descubrió numerosas identidades que relacionan diversos valores de $P(n)$. Tomando $P(0) = 1$ y $P(n) = 0$ para $n < 0$, Euler da una fórmula de recurrencia para $P(n)$, para todo $n \geq 1$

$$P(n) - P(n-1) - P(n-2) + P(n-5) + P(n-7) + \cdots = 0.$$

y obtiene también la función generatriz expresada en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** (Euler)([17]) *Para* $|z| < 1$ *tenemos*

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^m)} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^n. \tag{3}$$

La demostración se hace primero en el intervalo $0 \leq x < 1$ y se extiende al disco unidad por prolongación analítica.

Notar que

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+z^m), \prod_{m=1}^{\infty}(1-z^m)$$

son ambos uniformemente convergentes en un disco $|z| \leq \rho$, donde $\rho < 1$. Luego representan funciones analíticas que pueden desarrollarse en serie de Taylor para $|z| < 1$. Los productos señalados son no nulos en $|z| < 1$ y sus recíprocos son a su vez funciones analíticas en dicho disco.

Euler también considera las particiones de $n$ en sumandos impares y distintos o pares y distintos. Las funciones generatrices son respectivamente

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 + z^{2m-1}), \quad F(z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 + z^{2m}).$$

Los números pentagonales $1, 5, 12, 22, \ldots$ son las sumas parciales de los términos de la progresión aritmética

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 3n + 1, \ldots.$$

Si $T(n)$ denota la suma de los $n$ primeros términos de esta progresión, entonces

$$T(n) = \sum_{r=0}^{n-1}(3r + 1) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Para estos números, Euler comprueba que su función generatriz es

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1 - z^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z^{T(n)} + z^{T(-n)}), |z| < 1.$$

Es de notar también que la función partición crece muy rápidamente con $n$, por ejemplo $P(10) = 42$, $P(100) = 190569292$, $P(200) = 3972999029388$.

## 2. Análisis complejo en los problemas aditivos

G.H. Hardy (1877-1947) y S. Ramanujan (1887-1920), hicieron un estudio profundo de la función generatriz $F(x)$ para valores complejos de $x$ en las proximidades del círculo unidad de convergencia. Así que conservando la idea fundamental de L. Euler de aplicación de las series infinitas, estudiaron el problema de las particiones de un entero $n$, y en 1918, dieron una primera aproximación de lo que después conocemos como *método del círculo*. Ellos obtienen una fórmula asintótica para $P(n)$. El punto de partida es la fórmula de Euler (3) y el Análisis Complejo: Todo punto del círculo unidad $|z| = 1$ es punto singular esencial para la función $F(z)$ representada por el producto en el disco $|z| < 1$, aplicando la fórmula integral de Cauchy consiguen calcular los coeficientes $P(n)$ de la serie (3):

$$P(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{F(z)}{z^{n+1}}dz, \tag{4}$$

donde $\gamma_\rho$ es el círculo de centro 0, $|z| = \rho < 1$. Hardy y Ramanujan, grandes conocedores de las propiedades analíticas, observaron que al ser el punto $z = 1$ polo de cada término del producto infinito, la función $\frac{F(z)}{z^{n+1}}$debía crecer muy rápidamente cuando $z$ tiende hacia 1 a lo largo del eje real. Dividieron $\gamma_\rho$ en dos arcos $M_\alpha$ y $m_\alpha$, así la integral es

$$P(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{M_\alpha}\frac{F(z)}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{m_\alpha}\frac{F(z)}{z^{n+1}}dz$$

en el arco $M_\alpha$ dedujeron una aproximación para $\frac{F(z)}{z^{n+1}}$ y pudieron acotar la integral sobre $m_\alpha$ por una función de $\rho$, y $\alpha$ relativamente pequeña, con lo que consiguieron obtener una fórmula asintótica para $P(n)$. (Chandrasekharan [9] ).

**Teorema 2.** *Si $P(n)$ denota el número de particiones de $n$, entonces*

$$P(n) = \frac{e^{C\lambda(n)}}{4\sqrt{3}\lambda^2(n)} + O\left(\frac{e^{C\lambda(n)}}{\lambda^3(n)}\right)$$

*donde* $C = \pi\sqrt{2/3}$, $\lambda(n) = \sqrt{n-(1/24)}$.

Algunas propiedades notables de divisibilidad relativas a $P(n)$ descubiertas por Ramanujan son

$$P(5n+4) \equiv 0(\text{mód}5),\ P(7n+5) \equiv 0(\text{mód}7) \tag{5}$$

también da sin demostración las identidades siguientes

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(5n+4)x^n = 5\frac{f(x^5)^5}{f(x)^6} \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(7n+5)x^n = 7\frac{f(x^7)^3}{f(x)^4} + 49x\frac{f(x^7)^7}{f(x)^8}, \tag{7}$$

donde $f(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$. Pero dado que las funciones de la derecha de (6), (7) admiten desarrollos en serie de potencias con coeficientes enteros, se sigue que las identidades de Ramanujan implican a su vez las relaciones de congruencia (5).

### *2.1. Aplicación a los grupos abelianos finitos.*

Sea $a(n)$ la función aritmética que denota el número de grupos abelianos con $n$ elementos. Esta función es positiva de valores enteros y multiplicativa de forma que $a(1) = 1$ y para cada $p$ primo y cada entero $k \geq 1$, $a(p^k) = P(k)$, donde $P(k)$ es la función partición de $k$.

Por la teoría de series de Dirichlet y el teorema de Euler, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{p^{ks}}\right) = \prod_p \prod_{k=1}^{\infty} \left\{1 - p^{-ks}\right\}^{-1}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_p \left\{1 - p^{-ks}\right\}^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \zeta(ks), \quad Re\ s = \sigma > 1$$

donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann y $s = \sigma + it$. También podemos decir que $a(n)$ es igual al número de formas en las que $n$ puede ser expresado como $n = n_1 n_2^2 \ldots n_j^j \ldots$, donde $n_1, \ldots, n_j, \ldots$, son enteros positivos.

Es fácil calcular el valor de $a(p^k)$. Por ejemplo, para todo número natural $k = 1, 2, \ldots, 20$ sus valores son respectivamente:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627.$$

Es decir que para todo primo $p$ se cumple que $a(p) = 1$, $a(p^2) = 2$, $a(p^3) = 3$, $a(p^4) = 5$,$a(p^6) = 11$, $a(p^7) = 15$, $\ldots$, $a(p^{20}) = 627$. Como por otro lado si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ se cumple que $a(n) = a(p_1^{\alpha_1}) \ldots a(p_r^{\alpha_r})$ podemos conocer $a(n)$ para cada $n$.

Aplicando métodos del Análisis Complejo y acotaciones de la función zeta de Riemann, se pueden estudiar términos error para funciones obtenidas mediante convoluciones de Dirichlet en las que interviene precisamente $a(n)$. Así se demuestra -entre otras fórmulas asintóticas- que (véase [6])

$$\sum_{n \leq x} (a * a * a)(n)^2 = xP_8(\log x) + O_\epsilon(x^{2/3+\epsilon})(\forall \epsilon > 0)$$

siendo $P_8(t)$ un polinomio de grado 8 en $t$.

## 3. De Waring a Hilbert

Edward Waring nació en 1734[1] en Old Heath (cerca de Shrewsbury), Shrosphire (Inglaterra), hijo de granjeros, fue educado en la escuela de Shrewsbury.

Ingresó el 24 de Marzo de 1753 en el Magdalene College de Cambridge, la segunda Universidad más antigua de habla inglesa del mundo, fundada en 1209.

Figura 1.— Edward Waring (1734-1798). Retrato de Thomas Kerrich (1794)

Muy pronto destacó por su capacidad matemática. Su trabajo mas famoso es *Meditationes algebraicae*, remitió el primer capítulo de su trabajo a la Royal Society sin obtener

[1]The new enciclopaedia Britanica 15th edition, vol. 12 pag 487

contestación en los dos años siguientes. Cuando en 1759, Waring fue nombrado *Lucasian Chair of Mathematics* en Cambridge, el trabajo fue distribuido como *Miscellanea analytica* para probar que estaba cualificado para el puesto a pesar de su juventud. Se publicó como un trabajo completo en 1762 y a esta segunda edición, Waring la llamó *Meditationes algebraicae*, un importante trabajo que cubre tópicos entre los que se encuentra la teoría de números.

El 2 de Junio de 1763, Waring fue elegido *Fellow* de la Royal Society. Algunos de los miembros ilustres de la Royal Society fueron L. Euler (1747), J.L.M. Lagrange (1791), C.F. Gauss (1804), A.L. Cauchy (1832), I.M. Vinogradov (1942) y mas recientemente R.C. Vaugahn (1990) y D.R. Heath-Brown (1993).

Su obra *Miscellanea analytica* de 1762, fue la base de otras obras que publicaría posteriormente. *Proprietates algebraicarum curvarum*, sobre geometría publicada en 1772. Otro trabajo *Miscellanea analytica* apareció en 1776 y una nueva edición ampliada en 1785. *Meditationes algebraicæ*, cubriendo la teoría de ecuaciones y la teoría de números apareció en 1770, y una versión ampliada en 1782.

En *Meditationes algebraicae* prueba que todas las funciones simétricas racionales de las raíces de una ecuación, se pueden expresar como funciones racionales de los coeficientes. Dedujo un método para expresar polinomios simétricos e investigó la ecuación ciclotómica $x^n - 1 = 0$. Este trabajo hace de Waring uno de los investigadores mas tempranos en el desarrollo de la teoría de Galois.

También *Meditationes algebraicae*, capítulo 4, contiene resultados como : *$k$ ecuaciones con $k$ incognitas se pueden reducir a una ecuación con una incognita.* Su resultado: *el producto de los grados de las ecuaciones originales es el grado de la ecuación reducida* es conocido como Teorema Generalizado de Bezout. El resto del libro se ocupa de la Teoría de números, un tema en el cual Waring hizo interesantes avances.

Presentaba una serie de proposiciones nuevas relativas a la descomposición de un número como suma de otros números y sugería un método (no probado) para la descomposición de todo número par en suma de dos números primos.

Este resultado es conocido como Conjetura de Goldbach. *( Cada entero par (a partir de* 4*) es suma de dos primos, y cada entero impar (a partir de* 7*) es o primo o suma de tres primos*,(ver [24]) ). Aunque Goldbach propuso esta cuestión a Euler en una carta mucho antes de que Waring publicara su *Meditationes algebraicæ*, la versión de Waring fue la primera en publicarse. Waring lo publicó en 1770 y la carta de Christian Goldbach (1690-1764), a Leonhar Euler (1707-1783) de 30 de Junio 1742 no fue publicada hasta 1843.

Entre los resultados también se encontraba el teorema que universalmente se conoce con el nombre de John Wilson (1741-1793). Wilson enuncia, sin demostración, el teorema siguiente: *Para cada número primo p,* $(p-1)! \equiv -1 \text{ mód } p$. Fué Lagrange en 1773, el que dió una demostración de esta propiedad.

Se le concedió en 1784 la Medalla Copley, un reconocimiento a su trabajo científico. La medalla es considerada como la más prestigiosa atribuida al trabajo científico, en cualquiera de sus campos y otorgada por la Royal Society. Es también la mas antigua, la primera se concedió en 1731. En 2006 se le concedió a Stephen Hawking (especialidad: física teórica), a Roger Penrose (especialidad: física matemática) se la otorgaron en 2008. En 2009 a Sir Martin John Evans (Stroud, Inglaterra, 1 de enero de 1941); genetista y bioquímico británico. La Medalla Copley 2011 se otorgó a Dan Peter McKenzie, Professor de la University of Cambridge.

En 1794 publica un ensayo filosófico *Essay on the principles of human knowledge*. Durante toda su carrera, los problemas de comunicación impidieron que el mérito de Waring fuera realmente reconocido. Al final de su vida entró en una profunda melancolía. Quizá por eso dimitió de la Society en 1795.

Posiblemente la más acertada afirmación acerca de Waring fue hecha por Thomas Thomsom: *Waring fue uno de los más profundos matemáticos del siglo dieciocho, pero la poca elegancia y oscuridad de sus escritos evitaron que él obtuviera esa reputación a la cual le dieron derecho.*

Waring estudió también el problema de la convergencia de series infinitas y enunció el criterio del cociente, atribuido a Cauchy (1789-1857). El 15 de Agosto de de 1798 Edward Waring murió en Pontesbury.

### *3.1. Existencia de solución en el problema de Waring*

E. Waring en *Meditationes Algebraicae* de 1770, ( pág. 203-204) y en su edición posterior de 1782 (pp. 349-350) [41] [42] [43], afirma (sin demostrar), que cada número entero o bien es un cubo o la suma de $2, 3, 4 \dots, 8$, o 9 cubos; análogamente cada entero es o una cuarta potencia o la suma de $2, 3, \dots, 19$ cuartas potencias de enteros no negativos y así sucesivamente. De otra: para cada $k \geq 2$ existe un $s \geq 1$ tal que cada número natural es la suma de a lo mas $s$ potencias $k$-ésimas.

En este caso vemos que $\{a_{jr}\}, j = 1, 2, \dots, s$ es la sucesión de las $k$-potencias de enteros no negativos.

El problema general denominado como problema de Waring, consiste en demostrar que para cualquier entero $k \geq 2$ existe un entero $s$ dependiendo sólo de $k$, tal que todo entero positivo $n$ pueda expresarse como la suma de a lo más $s$ $k$-ésimas potencias de enteros no negativos:

$$n = x_1^k + \cdots + x_s^k. \tag{8}$$

Se denota por $g(k)$ al mínimo $s$ que verifica la condición anterior. David Hilbert (1862-1943), en 1909 resolvió el problema de la **existencia** de $g(k) < \infty$, para todo $k$.

**Teorema 3.** (Hilbert) *Para cualquier número natural $k$, existe un $s$ que solo depende de $k$, tal que para todo número natural $n$, la ecuación (8) admite solución mediante números enteros no negativos $x_1, \ldots, x_s$.*

Su demostración se basa en la identidad siguiente: Dados $k \geq 1$, $n \geq 1$, sea $N = \binom{2k+n-1}{2k}$. Existen $N$ números racionales $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ y enteros $a_{1i,}, \ldots, a_{ni}, \quad i = 1, \ldots, N$ tales que

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^k = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (a_{1i}x_1 + \cdots + a_{ni}x_n)^{2k}$$

para todos los enteros $x_1, \ldots, x_n$. Así que la respuesta al problema de Waring es afirmativa, pero Hilbert **no determinó** el valor numérico de $g(k)$ para cualquier $k$. La demostración de Hilbert fue publicada en *Göttinger Nachrichten (1909) 17-36 y Math. Annalen 67 (1909), 281-305.*

*Cota inferior de g(k).* La pregunta natural que surge es ¿cómo es de grande $g(k)$? o si se puede determinar el valor de $g(k)$ para cada $k$. J.A. Euler (1734-1800) ( hijo de L. Euler ver Ribenboim [24]), hace la siguiente observación: Para $k \geq 2$, sea $3^k = q2^k + r$, donde $1 \leq r < 2^k$ y $q = [(3/2)^k]$, como el entero $n = 2^k q - 1 < 3^k$, solo puede ser representado por potencias $k$-ésimas de 1 y 2, y el menor número de estas es $[(3/2)^k] - 1$ potencias $k$-ésimas de 2 y $2^k - 1$ potencias $k$-ésimas de 1 esto es, $n = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k$, así que se requieren $2^k + q - 2$ potencias $k$-ésimas, por lo tanto se tiene que

**Teorema 4.** *Si $q = [(3/2)^k]$, y $k \geq 2$ se verifica la desigualdad*

$$g(k) \geq 2^k + q - 2. \tag{9}$$

Se sigue que para $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$ resultan las cotas (Hardy-Wright [17] y Vaughan[32])

$$g(k) \geq 4, 9, 19, 37, 73, 143, 279, 548, \ldots.$$

Pero es probable que se verifique siempre la igualdad. Supongamos que $k \neq 4$. Sabemos que si

$$2^k\{(3/2)^k\} + [(3/2)^k] \leq 2^k, \tag{10}$$

entonces

$$g(k) = 2^k + q - 2, \qquad q = [(3/2)^k]. \tag{11}$$

Pero cuando $2^k\{(3/2)^k\} + [(3/2)^k] > 2^k$ entonces se verifica una de las dos igualdades siguientes

$$g(k) = 2^k + [(3/2)^k] + [(4/3)^k] - 2, \qquad g(k) = 2^k + [(3/2)^k] + [(4/3)^k] - 3$$

según que $[(4/3)^k][(3/2)^k] + [(4/3)^k] + [(3/2)^k]$ sea igual a $2^k$ o mayor. En 1957, Mahler[22] demostró que si existen valores de $k$ para los cuales (10) es falsa entonces solo pueden ser un número finito. Posteriormente Stemmler (1964) verificó, en ordenador, que (10) y (11) se cumplen para $k \leq 200000$ [25]. En 1990, Kubina y Wunderlich[19] ya lo habían extendido a $k \leq 471600000$.

Determinado casi en su totalidad $g(k)$, la siguiente pregunta que nos hacemos es: ¿Es posible que si prescindimos de ciertas excepciones resulte que, el número de potencias que precisamos para representar los números, como suma de esas potencias, sea menor? y la respuesta es afirmativa, aunque en raras excepciones se da la igualdad. Para estudiar este caso denotamos por $G(k)$ al menor entero positivo $s$ tal que todo entero suficientemente grande pueda ser representado como suma de a lo más $s$ potencias $k$-ésimas. Está claro que $G(k) \leq g(k)$. De nuevo nos planteamos el problema de calcular el valor exacto de $G(k)$ o, al menos, determinar cotas superiores e inferiores.

**Teorema 5.** (Maillet-1908)[17] *Si $k \geq 2$, entonces se verifica la desigualdad $G(k) \geq k+1$.*

Esto signifca que existen números naturales arbitrariamente grandes que no son suma de $k$- ésimas potencias. Así que para todo $k \geq 2$ se verifican las desigualdades

$$k + 1 \leq G(k) \leq g(k).$$

En 139 años, desde que Waring plantea el problema hasta las investigaciones de Hilbert, el problema se resolvió solo para algunos casos especiales (y no del todo) como $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$.

### *3.2. Casos $k = 2$ , $k = 3$*

*Sumas de cuadrados.* El caso de la suma de potencias cuadrados y, que conocemos como *teorema de los cuatro cuadrados*, había sido establecido por Bachet en 1621 a consecuencia de una observación hecha por Diofanto, y posteriormente en 1640 por Fermat, quién afirmaba haber demostrado un teorema general que implicaba la veracidad de la conjetura de Bachet y prometía publicarlo pero murió antes de revelar su demostración. Fué resuelto finalmente por Lagrange en 1770, (ver Chandrasekharan [8]).

**Teorema 6.** ( Lagrange )*Todo entero positivo es una suma de cuatro cuadrados.*

Según este teorema $g(2) = 4$, luego ya sabemos que al menos es $G(2) \leq 4$.

Respecto del módulo 8 tenemos que $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ de lo que se deduce $x^2 + y^2 + z^2 \not\equiv 7 \pmod{8}$. Esto nos lleva a que ningún entero de la forma $8n + 7$ se puede expresar como suma de solo tres cuadrados, por lo tanto $G(2) \geq 4$.

Tenemos así que, por el teorema de Lagrange de los cuatro cuadrados $g(2) = 4$ donde 4 puede reducirse a 3 salvo para los números de la forma $4^r(8n+7)$, como demostró Legendre (ver Hardy 1999, pág. 12, [18]), y estos son los únicos enteros que no son expresables como suma de tres cuadrados.

Como $G(2) \geq 4$ y $G(2) \leq g(2) = 4$, resulta entonces que si $k = 2$,

$$G(2) = g(2) = 4$$

y el problema de Waring está completamente resuelto para este caso.

*Representación por sumas de cubos.* Para el caso $k = 3$, se tiene según la desigualdad de J.A. Euler que $g(3) \geq 9$ y en 1909 A. Wieferich[65] demostró que $g(3) \leq 9$. Sin embargo, el valor preciso de $G(3)$ no se conoce. En 1909, E. Landau (1877-1938) da la acotación $G(3) \leq 8$ y en 1939 Dickson prueba que los únicos números que requieren nueve cubos son $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$, y $239 = 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3$.

Luego cada número es representable por 9 ó menos cubos, salvo los números 23, 239. Es decir que aunque $g(3) = 9$, resulta que solo dos números necesitan 9 cubos.

En 1949, Yu V. Linnik[21], demostró que $G(3) \leq 7$. Su demostración requiere algunos resultados profundos sobre la representación de números por formas cuadráticas ternarias. Sin embargo, para el caso de sumas de cubos, debemos recordar que el ingenioso uso de identidades polinomiales ha jugado un gran papel, como demostró en 1951 G.L. Watson en su elegante demostración también de la cota $G(3) \leq 7$. Utiliza además una estimación para el número de primos en una progresión aritmética, ver[64].

Aplicando el teorema de Maillet vemos que $G(3) \geq 4$, por lo que $G(3)$ solo puede tomar los valores $4, 5, 6$ ó 7. Así para $k = 3$ es

$$g(3) = 9, \quad 4 \leq G(3) \leq 7$$

aunque los cálculos numéricos sugieren que $G(3) = 4$.

## 4. Hardy y Littlewood

Las ideas subyacentes al problema de las particiones de Hardy y Ramanujan fueron desarrolladas por G.H. Hardy y J.E. Littlewood (1885-1977) en una serie de trabajos publicados entre 1920 y 1928 bajo el título general *"Some problems of partitio numerorum"*. Aplicaron con cierto éxito el método al problema de Waring y la conjetura de Goldbach.

En el problema de Waring, Hardy y Littlewood se interesaron por dos cuestiones: 1) de cuantas formas es posible una representación en enteros (8) y 2) hallar una fórmula asintótica para el número de tales representaciones.

Sea $A = \{a_m\}$ una sucesión cualquiera de enteros no negativos y la función

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{a_m}, \quad |z| < 1.$$

Se tiene entonces que

$$F^s(z) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=0}^{\infty} z^{a_{m_1}+\cdots+a_{m_s}} \tag{12}$$

haciendo ahora $n = a_{m_1} + \cdots + a_{m_s}$, se deduce que

$$F^s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_s(n, A) z^n \tag{13}$$

donde $r_s(n, A)$ es el número de representaciones de $n$ como suma de $s$ elementos de $A$. De aquí se deduce como en (4) que

$$r_s(n, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{F^s(z)}{z^{n+1}} dz$$

Su principal mejora consistió en tomar en esta integral, varios arcos mayores y varios arcos menores, en lugar de uno sólo de cada clase. Pero su método seguía teniendo el defecto de tener que trabajar con series infinitas. Considerando la sucesión $A_k$ de las potencias $k$-ésimas de enteros, demuestran el teorema siguiente

**Teorema 7.** *Si $s > (k-2)2^{k-1} + 5$, entonces el número $r_s(n, A_k)$ de soluciones de la ecuación $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$, en enteros positivos verifica*

$$r_s(n, A_k) = \sigma_s(n) \frac{\Gamma^s(1 + (1/k))}{\Gamma(s/k)} n^{\frac{s}{k}-1} + o(n^{\frac{s}{k}-1}). \tag{14}$$

$\Gamma$ es la función Gamma de Euler, y $\sigma_s(n)$ es una función aritmética (que se llama serie singular y por lo general bastante complicada), que verifica: existen dos constantes $c_1(k, s), c_2(k, s)$ tal que $0 < c_1 \leq \sigma_s(n) \leq c_2$, para todo $n$.

Si se considera $k \geq 3$, entonces la condición $s \geq k2^{k-1} + 1$ será suficiente.

Calcularon los valores de las constantes $c_1, c_2$ para varios exponentes $k$. El resultado anterior implica que existe una constante $n_0(k)$ tal que si $s \geq k2^k + 1$ y $n > n_0(k)$, entonces $r_s(n, A_k) > 0$.

*Cotas generales para G(k).* Asociado con la validez de la fórmula asintótica, está el problema de hallar $G(k)$. Hardy y Littlewood [14], [15], [16] abordaron este problema y obtuvieron que para cada $k \geq 2$,

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-1} + 5$$

y que mejoran posteriormente a

$$G(k) \leq k2^{k-2}h(k)$$

donde $h(k) \to 1$ cuando $k \to \infty$.

Conjeturaron que $G(k) \leq 2k+1$, salvo cuando $k = 2^m, m > 1$, en cuyo caso $G(k) = 4k$. Cuando $k = 2$ ya sabemos que $G(2) = 4$.

Para casos especiales de $k$ se pueden especificar mejores cotas que la de Maillet.

**Teorema 8.** *1) Si $m \geq 2$, entonces $G(2^m) \geq 2^{m+2}$.*

*2) Para todo primo $p > 2$ y todo $m \geq 0$ se verifican las desigualdades*

*a) $G(p^m(p-1)) \geq p^{m+1}$,*

*b) $G(\frac{1}{2}p^m(p-1)) \geq \frac{1}{2}(p^{m+1} - 1)$.*

La propiedad 1) se debe a Kempner y la 2) a Hardy-Littlewood. (see[17]) Ejemplo de estas cotas son $G(6) \geq 9$, $G(9) \geq 13$, $G(10) \geq 12$. Para $G(8)$ la cota de Maillet dice que $G(8) \geq 9$, pero la de Kempner nos dice que $G(8) \geq 32$.

## 5. Vinogradov y las sumas trigonométricas

I.M. Vinogradov (1891-1983) alrededor de 1924, al estudiar el problema de Waring, propuso sustituir las series infinitas (2) por sumas finitas ( sumas trigonométricas):

$$S_j(\theta, n) = \sum_{a_{jr} \leq n} e^{2\pi i \theta a_{jr}}$$

y la integral (4) por

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^{s} S_j(\theta, n) e^{-2\pi i \theta a_{jr}} d\theta.$$

Vinogradov observó que el método podía aplicarse con sumas finitas, puesto que en la representación de $n$ como suma de potencias $k$-ésimas el mayor entero que puede tomar cada $x_i$ en (8) es a lo más $[n^{1/k}] = N$, de forma que (12) es ahora

$$F_N^s(z) = \sum_{x_1=1}^{N} \cdots \sum_{x_s=1}^{N} z^{x_1^k+\cdots+x_s^k}$$

pero ahora sin problemas de convergencia y puede considerar la integral en el círculo unidad $|z| = 1$. Entonces: *si $r_s(n, A_k)$ denota el número de soluciones de la ecuación $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$, en enteros positivos, resulta que*

$$r_s(n, A_k) = \int_0^1 \left( \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i x^k \theta} \right)^s e^{-2\pi i n\theta} d\theta.$$

La modificación introducida por Vinogradov de este método tiene la gran ventaja de que admite una extensa aplicación a otros problemas de Teoría Aditiva de Números.

Con la terminología de Vinogradov, los puntos del segmento $[0, 1]$ se dividen en dos clases. Pertenecen a la primera clase los números que admiten una buena aproximación mediante fracciones racionales. Estos son los números para los cuales existe una fracción racional $a/q$, con un denominador pequeño respecto de $n$ y tal que $|\theta - (a/q)|$ es considerablemente menor que $q^{-2}$. Todos los demás puntos del segmento $[0, 1]$ pertenecen a la segunda clase.

Observó que, para tener buenas acotaciones de la integral sobre puntos de la primera clase, necesitaba mejores estimaciones de las sumas trigonométricas-interiores a la integral-que las obtenidas por H. Weyl. Por ello en los años posteriores estudia las sumas trigonométricas e introduce técnicas muy refinadas para obtener acotaciones de las sumas anteriores y en general del tipo

$$\sum_{x=P}^{P+Q} e^{2\pi i f(x)\theta}$$

donde $f(x)$ puede ser por ejemplo un polinomio u otra función con determinadas condiciones. Para el estudio de las sumas trigonométricas y método del círculo se puede consultar N.M. Korobov [20] y R.C. Vaughan [32], se recomienda la segunda edición por que en esta se ha incluido un refinamiento de Wooley del teorema del valor medio de la integral de Vinogradov-muy importante en muchos problemas de la Teoría de Números- además de la cota superior de $G(k)$ obtenida por Wooley. (Una generalización de la suma exponencial en la que se introducen caracteres de Dirichlet como coeficientes, es estudiada en [7].)

Vinogradov hizo algunas precisiones en la fórmula asintótica de Hardy y Littlewood, demostrando el siguiente teorema:

**Teorema 9.** *Si $k \geq 12$ y $s \geq [10k^2 \log k]$, entonces la fórmula (12) se verifica con un* *término error*

$$O(n^{\frac{s}{k}-1-\frac{1}{k^2}}).$$

Luego existe una constante $n_0(k)$ tal que si $n > n_0(k)$ entonces

$$r_s(n, A_k) > 0.$$

## 6. Algunas cotas para $g(k)$ y $G(k)$

*Representación de enteros por cuartas potencias.* El problema de Waring para cuartas potencias dice que: *cada número natural es la suma de a lo más 19 cuartas potencias.*

Para $k = 4$ de (9) se deduce que $g(4) \geq 19$. Por otro lado, en 1986, Balasubramanian-Desouillers-Dress[3] obtienen la cota $g(4) \leq 19$. En su demostración usan el método del círculo para demostrar la propiedad para cada entero $\geq 10^{367}$, además de este resultado asintótico dan un resultado numérico según el cual todo $n \leq 10^{367}$ es una suma de a lo más 19 cuartas potencias.

Por lo que se tiene $g(4) = 19$, y el problema de Waring para cuartas potencias está resuelto.

En 1912, A. J. Kempner (ver Dickson Volumen II, [12]) ya había obtenido la cota $G(4) \geq 16$ y Davenport (1939) demostró que $G(4) \leq 16$, (ver [11]). Se tiene entonces $G(4) = 16$. Es decir que para $k = 4$,

$$g(4) = 19, \quad G(4) = 16$$

y el problema en este caso, está totalmente resuelto.

*Representación de enteros por quintas potencias.* Para $k = 5$, J.R. Chen en 1964 [10], obtiene $g(5) \leq 37$ que es la mejor cota posible para este caso, teniendo en cuenta (9) resulta que $g(5) \geq 37$, luego $g(5) = 37$. En 1990 Brüdern [4] obtiene la cota $G(5) \leq 18$ R.C. Vaughan, T.D. Wooley obtienen-entre otras-las siguientes cotas $G(5) \leq 17$ [36] que mejora la de Brüdern. Con la cota de Maillet tendríamos $6 \leq G(5) \leq 17$. Así que

$$g(5) = 37, \quad 6 \leq G(5) \leq 17.$$

No se conoce por ahora el valor exacto de $G(5)$. La conjetura es que $G(5) = 6$

*Representación de enteros por sextas potencias.* Pillai [23] obtuvo en 1940 la cota $g(6) \leq 73$. Vaughan y Wooley obtienen $G(6) \leq 24$ (ver [36]), y por el teorema 8 sabemos que $G(6) \geq 9$. Es decir si $k = 6$ tenemos

$$g(6) = 73, \quad 9 \leq G(6) \leq 24.$$

No se conoce por ahora el valor exacto de $G(6)$. Se conjetura que $G(6) = 9$.

Para potencias superiores tenemos, en el caso $k = 7$, según lo comprobado por Stemmler, [25] resulta que $g(7) = 143$. Vaughan y Wooley obtienen la cota $G(7) \leq 33$ (ver [36]) así con la cota de Maillet tenemos

$$8 \leq G(7) \leq 33, \quad g(7) = 143.$$

Tampoco se conoce por ahora el valor exacto de $G(7)$. La conjetura es que $G(7) = 8$.

Para $k = 8$ tenemos $g(8) = 279$[25] y $G(8) \leq 42$ (ver [37] ). Teniendo en cuenta el teorema 8 resulta que $32 \leq G(8) \leq 42$. Esto es

$$g(8) = 279, \quad 32 \leq G(8) \leq 42.$$

La conjetura es que $G(8) = 32$.

Cuando $k = 9$ el valor de $g(9)$ aumenta considerablemente $g(9) = 548$[25] sin embargo $G(9) \leq 50$ (vease [38]), entonces $13 \leq G(9) \leq 50$. Así que

$$g(9) = 548, \quad 13 \leq G(9) \leq 50.$$

La conjetura es que $G(9) = 13$.

R.C. Vaughan, T.D. Wooley [37], [38] obtienen-entre otras-las siguientes cotas para $10 \leq k \leq 20$

$$G(k) \leq \left[\frac{157}{19}k - 23\right].$$

Para $k = 10$ se tiene $g(10) = 1079$. Pero $G(10)$ se reduce considerablemente pues de las desigualdades de Vaughan-Wooley y de Hardy-Litllewood resulta que $12 \leq G(10) \leq 59$. Se conjetura que $G(10) = 12$.

I.M. Vinogradov (Ann. Math. 36, 1935,395), obtuvo la cota

$$G(k) < 6k \log k + (4 + \log 216)k$$

que mejoró posteriormente

$$G(k) < k(3 \log k + 11)$$

y en 1959[39] demostró mediante su famoso método de sumas trigonométricas que

$$G(k) < k(2 \log k + 4 \log \log k + 2 \log \log \log k + 13)$$

para todo $k$ suficienteeente grande. En particular uno de los lemas precisa que $k > 170000$. Thanigasalam [26], [27], [28] obtiene cotas para $G(k)$ cuando $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. En cada caso el método de Davenport, junto con el método del círculo, son ingredientes esenciales en la obtención de los resultados. R.C. Vaughan consigue mejorar el método del círculo. Su método iterativo en el problema de Waring, ha resultado ser de gran importancia en la mejora de las cotas, [32] y [33].

D.T. Wooley [66], obtiene para valores grandes de $k$, la cota

$$G(k) \leq k(\log k + \log\log k + O(1)).$$

## 7. Extensiones del problema de Waring

Solo mencionaré las alguna de las extensiones más notables del problema de Waring que son:

*1.-Problema de Waring -Goldbach.* Se trata del problema clásico de Waring pero ahora los enteros $x_i$ son números primos. Esto es, en el problema de Waring -Goldbach nos preguntamos por la posibilidad de expresar números naturales como suma de $k$-ésimas potencias de primos, con un número acotado de sumandos: $n = p_1^k + \cdots + p_s^k$.

*2.- El problema de Hilbert-Kamke.* En este caso, se estudia la representación simultanea de los números naturales $N_1, \ldots, N_n$ por sumas de un número finito de sumandos naturales de la forma $x, x^2, \ldots, x^n$, esto equivale a estudiar la resolubilidad del siguiente sistema de ecuaciones diofánticas

$$x_1^r + \cdots + x_s^r = N_r, r = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Este problema fue propuesto por Hilbert en el año 1900. La existencia de soluciones para $s = s(n)$ suficientemente grande fue demostrada por E. Kamke en 1921 mediante una generalización del método usado por Hilbert en el problema de Waring.

*3.- Problema de Prouhet-Tarry.* Otra cuestión, consecuencia de las anteriores es la resolubilidad de sistemas de ecuaciones del tipo

$$x_1^r + \cdots + x_k^r - x_{k+1}^r - \cdots - x_{2b}^r = 0; \quad r = 1, \ldots, n \tag{16}$$

donde cada $x_j$, independientemente unos de otros, recorre los valores enteros entre 1 a P. Su generalización es la resolubilidad del sistema de ecuaciones no homogéneo siguiente:

$$x_1^r + \cdots + x_k^r - x_{k+1}^r - \cdots - x_{2b}^r = \lambda_r; \quad r = 1, \ldots, n \tag{17}$$

donde como en el caso anterior, cada $x_j$ independientemente unos de otros recorren los valores enteros de 1 a P.

*4.- Problema de Waring con potencias mixtas.* El problema en este caso es el estudio de la representación de un entero positivo $n$ como

$$n = x_1^{k_1} + \cdots + x_s^{k_s}, \quad (2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s), \tag{18}$$

donde los $x_i$ y $k_i$ son enteros positivos.

*5.- Problema de Waring con exponentes no enteros.* La representación de enteros en este caso como suma de potencias se realiza ahora con sumandos del tipo $[x^c]$ donde $c$ es un número positivo no entero. Asíque la pregunta ahora es 1) ¿para qué valores de $c$ y de $s$ es resoluble la equación

$$n = [x_1^c] + \cdots + [x_s^c]? \tag{19}$$

2) ¿Cuál es el número de soluciones?

Si $c > 12$ es un número no entero y $s > 22c^2(\log c + 4)$, Arhipov y Zhitkov [1] prueban que el número de soluciones $W_{s,c}(n)$ de esta ecuación en enteros positivos $x_1, \ldots, x_s$ verifica la relación asintótica siguiente

$$W_{s,c}(n) = \Gamma^s\left(1 + \frac{1}{c}\right)\Gamma^{-s}\left(\frac{s}{c}\right)n^{\frac{s}{c}-1} + o(n^{\frac{s}{c}-1})$$

*6.- Problema de Waring sobre enteros llenos de cuadrados.* Un entero $n$ se dice que es lleno de cuadrados cuando verifica que: si $p$ divide a $n$ entonces $p^2$ también lo divide. En este caso se trata de estudiar el número de soluciones de la ecuación diofántica (8) cuando $x_1, \cdots x_s$ son enteros llenos de cuadrados. Denotando por $J_{s,k}(n)$ a dicho número de soluciones se demuestra que se verifica la siguiente fórmula asintótica (vease [5]

$$J_{s,k}(n) = \sigma\Gamma^s\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2k}\right)P^{\frac{s}{2}-k} + O\left(P^{\frac{s}{2}-k-\frac{1}{120k}} + P^{\frac{s}{2}-\frac{c_2 s}{2k^2\log k}}\right)$$

donde $\sigma$ es la serie singular y $P = [n^{1/k}]$.

## Referencias


[1] G.I. Arhipov y A.N. Zhitkov, *Waring problem with non integral exponent.* Izv. Acad. NHauk. Ser. Mat. 48, (1984), 6, 1138-1150.

[2] R. Balasubramanian. *On Waring problem's.* Hardy Ramanujan 8 (1985), 1-40

[3] R. Balasubramanian- J.M. Desouillers- F. Dress, *Probléme de Waring pour les bicarré.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303,85-88 y 161-163,(1986).

[4] J. Brüderns, *On Waring problem's for fifth powers and some related topics.* Proc. London Math. Soc. (3) 61, (1990), 3, 457-479.

[5] C. Calderón. ; M. J. de Velasco. *Waring's problem on squarefull integers.* An. Univ. Bucuresti, Mat. 44 (1995), 3?12.

[6] C. Calderón, *Asymptotic estimates on finite abelian groups.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 74(88) (2003), 57?70.

[7] C. Calderón, M.J. de Velasco, M.J. Zárate, *An explicit formula for the fourth moment of certain exponential sums.* Acta Math. Hungar., 130 (3) (2011), 203-222.

[8] K.Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968.

[9] K. Chandrasekharan, *Arithmetical functions.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.

[10] J.-R. Chen, *Waring's Problem for* $g(5) = 37$.Sci. Sinica 13, 1547-1568, 1964. Also appeared as Chinese Math Acta 6, 105-127, (1965).

[11] H. Davenport,*On Waring's Problem for Fourth Powers.*Ann. Math. 40, 731-747, (1939).

[12] L. E. Dickson, *Waring's Problem and Related Results: Ch. 25 de History of the Theory of Numbers, Vol. 2: Diophantine Analysis.*New York: Chelsea, pp. 717-729, (1952).

[13] W.J. Ellison, *Waring′s problem.* (1971), 10-36.

[14] G.H. Hardy, J.E. Littlewood *A new solution of Waring′s problem.* Quart. J. Math, Oxford , 48, 272-293 (1922)

[15] G.H. Hardy, J.E. Littlewood *Some problems of "partitio numerorum": I A new solution of Waring′s problem.* Göttingen Nachrichten, 33-54, (1920).

[16] G.H. Hardy, J.E. Littlewood *Some problems of "partitio numerorum": IV The singular series in Waring′s problem and the value of number* $G(k)$.Math. Z. 12, 161-188, (1922).

[17] G.H. Hardy , E.M. Wright, *An introduction to the theory on numbers.* Oxford, Oxford University Press, (1979).

[18] G. H. Hardy, *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work,*3rd ed. New York: Chelsea, 1999.

[19] J.F. Kubina- M-V. Wunderlich,*Extending Waring′s conjecture to 471600000.* Math. Comp. 55, (1990), 815-820.

[20] N.M. Korobov, *Las sumas trigonométricas y sus aplicaciones.* Servicio Editorial de la UPV/EHU, Bilbao, 1993.

[21] Yu V. Linnik, *An elementary solution of a problem of Waring by Schnirelman′s method.* Math. Sbornik 12, (54), (1943), 225-230.

[22] K. Mahler, *On the fractional parts of the powers of rational number II.* Mathematika, 4, 122-4.

[23] S.S. Pillai, *On Waring′s problem* $g(6) = 73$.Proc. Indian Acad. Sci. Sect A, 12, (1940) 30-40.

[24] P. Ribenboim, *The book of prime number records.* Second edition, Springer-Verlag 1989. And : *The new book of prime number records.*Springer-Verlag 1996.

[25] R.M. Stemmler, *The ideal Waring theorem for exponents 401-200000.* Math. Comp. 18, (1964), 144-146.

[26] K. Thanigasalam, *Improvement on Davemport′s iterative methods and new results in aditive number theory I.* Acta Arithm. 46 (1985), no.1, 1-31.

[27] K. Thanigasalam, *Improvement on Davemport′s iterative methods and new results in aditive number theory II.* Acta Arithm. 46 (1986) , no.2, 91-112.

[28] K. Thanigasalam, *Improvement on Davemport′s iterative methods and new results in aditive number theory III.* Acta Arithm. 48 (1987), no.2, 97-116.

[29] R.C. Vaughan, *On Waring′s problem for smaller exponents* Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), no.3, 445-463.

[30] R.C. Vaughan, *On Waring′s problem for sixth powers.* J. London Math. Soc. (2) 33 (1986) , no.2, 227-236.

[31] R.C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method.* Second Edition, Cambridge University Press 1997.

[32] R.C. Vaughan, *A new iterative method in Waring′s problem.* Acta Math. 162 (1989), no. 1-2, 1-71.

[33] R.C. Vaughan, *A new iterative method in Waring′s problem II.* J. London Math. Soc. (2),39 (1989), 219-230.

[34] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring′s problem.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 345 (1993) no. 1676, 385-396.

[35] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring′s problem.* Acta Math., 174 (1995), 147-240.

[36] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring′s problem.II* Duke Math. J. 76 (1994) no. 3, 683-710.

[37] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring′s problem III. Eighth powers.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A345 (1993) no. 1676,385-396.

[38] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem IV. Higher powers.* Acta Arith. 94 (2000), no 3, 203-285.

[39] I.M. Vinogradov, *On an upper bound for $G(n)$* Izv. Acad. Nauk,Ser. Mat, 23, (1959), 637-642.

[40] I.M. Vinogradov, *Select works (traducido del ruso),* Springer-Verlag, Berlin (1985)

[41] E. Waring,*Meditationes algebraicae.*Cambridge, England. pp. 204-205, 1770.

[42] E. Waring, *Meditationes algebraicae,*3rd ed. Cambridge, England. pp. 349-350, 1782.

[43] E. Waring, *Meditationes Algebraicae.* An English Translation of the Work of Edward Waring. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.

[44] E. Waring, *Miscellanea analytica de AEquationibus Algebraicis, Curvanum Proprietatibus, Fluxionibus et Serierum Summatione.* Bentham, Cambridge, 1759.

[45] E. Waring, *A letter to the Reverand Dr. Powell, Fellow of St. John's College, Cambridge, in a answer to his observations on the first chapter of a book called Miscellanea analytica and his defence of those observations.* J. Bentham, Cambridge, 1760.

[46] E. Waring, *A reply to a pamphlet entitles Observations on the first chapter of a book called Miscellanea analytica.* J. Bentham, Cambridge, 1760.

[47] E. Waring, *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis, et curvanum proprietatibus.* Bentham, Cambridge, 1762.

[48] E. Waring, *Problems (latin text).* Philosophical Transactions of the Royal Society, LIII:294-298, 1763.

[49] E. Waring, *Some new properties in conic sections (latin text).* Philosophical Transactions of the Royal Society, LIV:193-197, 1764.

[50] E. Waring, *Two theorems (latin text).* Philosophical Transactions of the Royal Society, LV:143-145, 1765.

[51] E. Waring, *Proprietates Algebraicarum Curvarum.* Archdeacon, Cambridge, 1772.

[52] E. Waring, *On the General Resolution of Algebraical Equations.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXIX:86-104, 1779.

[53] E. Waring, *Problems concerning interpolations.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXIX:59-67, 1779.

[54] E. Waring, *On the summation of a series, whose general term is a determinate function of z the distance from the first term of the series.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXIV:385-415, 1784.

[55] E. Waring, *Analyticæ. Editio secunda.* Archdeacon, Cambridge, 1785.

[56] E. Waring, *On infinite series.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXVI:81-117, 1786.

[57] E. Waring, *On finding the Values of Algebraical Quantities by converging Serieses, and demonstrating and extending Propositions given by Pappus and others.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXVII:71-83, 1787.

[58] E. Waring, *On centripetal forces.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXVIII:67-102, 1788.

[59] E. Waring, *On the method of correspondent values.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXIX:166-84, 1789.

[60] E. Waring, *On the resolution of attractive powers.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXIX:185-98, 1789.

[61] E. Waring, *On infinite series.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXXI:146-72, 1791.

[62] E. Waring, *On the Principles of Translating Algebraic Quantities Into Probable Relations and Annuities.* Archdeacon, Cambridge, 1792.

[63] E. Waring, *Essay on the Principles of Human Knowledge.* Archdeacon, Cambridge, 1794.

[64] G.L. Watson,*A proof of the seven cube theorem.* J. London Math. Soc. 26 (1951), 153-156.

[65] A. Wieferich, *Beweis des Satzes, dass sich eine jede ganze zahl als summe von höchstens neun positiven kuben darstellent.* Math. Annalen 66, (1909), 99-101. Corregido por A.J. Kempner, en (1912), 72, 387-397, y simplificada por Schlz (Jber Deutsch. Math. Ver. 58, (1955), Abt. 1, 45-48.

[66] T.D. Wooley, *Large improvements in Waring's problem.* Ann. of Math. (2) 135 (1992), no. 1, 131-164.