Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **65:** 99–118, (2010).

El discurrir de los médicos sobre algunos problemas clásicos de Cálculo de Probabilidades

Miguel Andériz López

Real Academia de Medicina de Zaragoza

1. Introducción

Ante todo, deseo manifestar dos cosas. En primer lugar decir que me siento muy honrado por la oportunidad que me brinda hoy la Real Academia de Ciencias de Zaragoza de exponer un tema ante la Corporación. También creo que debo expresar ante este docto auditorio la buena relación que me une a varios de sus miembros, algunos de los cuales han sido profesores míos de Ciencias Matemáticas. Entre ellos, mi emocionado recuerdo para el Profesor Miguel San Miguel, quien me dispensó una cordial y desinteresada amistad, inmerecidamente por mi parte, y cuya pérdida lamentamos todos nosotros.

Lo que voy a exponer son algo más de media docena de situaciones, recopiladas de mi experiencia de más de treinta años de mi vida, una de cuyas facetas ha sido el intento de enseñar nociones de cálculo de probabilidades y de estadística a profesionales de ciencias de la salud, particularmente médicos. En dichas situaciones he podido comprobar cómo la aguda inteligencia de algunos de ellos ha dado solución a problemas que, en condiciones ordinarias, requieren conocimientos de la carrera de matemáticas.

He podido recoger una decena de casos semejantes, parte de los cuales vamos a presentar aquí. Si bien al final haremos un breve comentario, en principio no parece que sea exigible la condición previa de ser médico, pero sí la de poseer unos mínimos conocimientos matemáticos, que muy bien pueden haber sido recibidos en la enseñanza media. Aparte de ello, está claro que los interesados tenían afición a las matemáticas, un nivel elevado de cultura y que, aunque suene a perífrasis, han aplicado su sentido común, el menos común de los sentidos, para las soluciones que han proporcionado.

El valor didáctico que tienen estas aportaciones, tanto por los recursos elementales que han manejado cuanto por la forma de manifestarlos, además de abrir procedimientos originales que se salen de los habituales algoritmos de solución, nos permiten realizar una serie de consideraciones semióticas, útiles para la docencia.

Para ir entrando en materia, voy a salirme excepcionalmente del ámbito médico para exponer el caso de un estudiante de diez años que, en los inicios de la década de los cuarenta, solucionó satisfactoriamente un problema que creo será conocido de la mayoría de mis lectores y que nos sirve de excelente introducción al resto de las situaciones que expondremos.

2. El problema de las gallinas y de los conejos

A un grupo de muchachos, que habían superado el entonces examen de ingreso en el bachillerato, se les propuso (juntamente con otras pruebas) el siguiente problema, con la idea de otorgar las posibles matrículas de honor.

En un corral hay gallinas y conejos, con un total de 85 cabezas y 240 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?

Las cantidades apuntadas no creo que correspondan a las que en aquel examen se propusieron, pero ello no quita fuerza al razonamiento que sigue. Hay que hacer constar que este tipo de problemas se resuelve ordinariamente mediante el álgebra elemental, asignatura que se impartía en tercero y cuarto cursos de enseñanza media, cuando los alumnos tenían 13 ó más años de edad.

Uno de los muchachos, de nueve o diez años, razonó de la siguiente manera:

Le quito una pata a cada animal, con lo que me quedan 85 cabezas y 155 patas, pero ahora las gallinas tienen sólo una pata y los conejos tres. Vuelvo a quitar una pata a cada animal, y me quedan 85 cabezas y 70 patas, pero ahora las gallinas no tienen ninguna pata, mientras que cada conejo aún tiene dos patas. Por consiguiente, el número de conejos que hay es igual a 70 dividido por dos, o sea 35 conejos. En consecuencia, el número de gallinas es de 85 menos 35, es decir 50.

La prueba de que el problema está correctamente resuelto es obvia. Si mal no recuerdo, una de las dos matrículas de honor fue para este estudiante y la otra para el que hizo el mejor ejercicio de redacción, en lengua castellana entonces.

Comentario.- Se trata, evidentemente, de lo que llamamos un *experimento mental.* Sólo le faltó a nuestro protagonista añadir a cada animal las dos patas que le había quitado para dejar las cosas como estaban, a satisfacción de las sociedades protectoras, pero ello no le quita mérito ni mucho menos.

Es claro que lo que aplicó el laureado alumno es lo que llamamos el *método de reducción* para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en este caso dos ecuaciones con otras tantas incógnitas. Tres años más tarde, el mismo muchacho hubiera planteado este sistema en la consabida forma:

Sea x el número de conejos, y sea y el de gallinas. Podemos escribir ahora:

$$x + y = 85,$$
$$4x + 2y = 240.$$

Si ahora multiplicamos por dos ambos miembros de la primera ecuación, tenemos:

$$2x + 2y = 170.$$

Y restando esta última ecuación de la segunda, eliminamos la incógnita y:

$$2x = 70,$$

lo que implica que $x = 35$, y automáticamente $y = 50$. Solución acertada de fácil comprobación.

Es obligada ahora una reflexión para el docente: a veces nos aferramos de manera excesiva a determinados algoritmos, olvidando echar mano de nuestro *sentido común*. Esto sucede, sobre todo, cuando manejamos recursos informáticos para resolver cuestiones de estadística, y también cuando incurrimos en lo que se denominan *falsas heurísticas*. ¿No será más propio de una carrera universitaria aprender a manejar el razonamiento además de saber manejar ordenadores? Ciertamente que ambas cosas son complementarias a nuestro juicio.

3. La alumna del instituto

Una alumna quinceañera, en los últimos cursos de la enseñanza secundaria, en Zaragoza, consultó con su abuelo, médico mayor ya, sobre un problema que le habían puesto como lección de casa y que tenía que llevar solucionado al día siguiente. Este problema, un clásico del cálculo de probabilidades, que hemos visto reproducido en varios textos en diversas versiones, venía a decir así:

Un señor soltero y muy amante de las plantas, que vivía en un chalet con jardín tenía un precioso rosal y vivía allí también un anciano jardinero. El rosal era muy delicado, ya que si se le regaba a diario su probabilidad de prosperar era de 1/2, pero si no se le regaba esa probabilidad quedaba reducida a 1/4. El jardinero tenía mala memoria, ya que se olvidaba cumplimentar dos encargos de cada tres que recibía.

En cierta ocasión, el señor tuvo que hacer un viaje de negocios de un mes, y encargó al jardinero que regase el rosal. Cuando volvió de su viaje, se encontró con que el arbusto estaba seco. ¿Qué probabilidad hay de que el jardinero se hubiera olvidado de regarlo?

No es ahora el momento de discutir si se le había enseñado a la alumna el Teorema de Bayes, que permite una fácil solución del problema propuesto. Lo que creemos improbable es que el abuelo conociese tal teorema. El caso es que éste se fue a la cama dándole vueltas a su cabeza, y que a la mañana siguiente presentó a su nieta una solución que podemos calificar como la *cuenta de la vieja*, llena de buen discurrir y de sentido común. Hela aquí.

A la larga, de cada seis veces que el jardinero recibiera el encargo de regar la planta, la regaría tan sólo dos veces, según el enunciado del problema. De esas dos veces, también *a la larga*, una vez se secaría el rosal. De las cuatro veces que no lo regara, tres acabaría también seco, siempre según el mismo enunciado.

Luego, de cada *cuatro* veces que el árbol apareciera seco, *tres* sería por no haberlo regado, y una a pesar de haberlo regado. Por consiguiente, la probabilidad pedida era de $3/4$ o sea del $75\,\%$.

No necesitamos decir aquí que la correcta aplicación del Teorema de Bayes conduce al mismo resultado. ¿Qué nos llama la atención del razonamiento del médico? Ciertamente que varias cosas:

1ª .- La expresión "a la larga". ¿Qué idea podría tener el abuelo de la muchacha de las *leyes de los grandes números*? Porque estas leyes es sabido que constituyen un sólido fundamento del cálculo de probabilidades. De todas formas no era este señor una excepción dentro de los médicos, como señalaremos al final.

2ª .- Ese *seis* que aparece al principio de su razonamiento y al que no encontramos otra explicación que el ser un mínimo común múltiplo de las cantidades que vamos a manejar en este problema, elegido *para que salieran números enteros en las cuentas*, sin duda. A un resultado satisfactorio hubiéramos llegado empleando *doce* en lugar de seis, mediante un razonamiento paralelo.

3ª .- La *vuelta* que le da al problema para presentarlo desde la perspectiva de la situación de *rosal seco* como base del razonamiento. Esto constituye un reconocimiento implícito de las probabilidades *a priori* y de la *verosimilitud*.

4ª .- La presentación de la probabilidad final en *tantos por ciento*, cosa usual todavía en los tiempos actuales, y explicable entonces porque las escasas nociones de probabilidades que se enseñaban estaban fundamentadas en la proporcionalidad (regla de tres) y en el empleo de porcentajes. Obsérvese la aproximación de este razonamiento a la clásica fórmula de Laplace.

No llegué a enterarme de la calificación que mereció la nieta del médico al corregirse el problema en el instituto, y lo siento. De haber estado a mi alcance, hubiera mantenido una conversación con el profesor, pero desgraciadamente ya no es posible. Lo que puedo afirmar es que no he encontrado esta manera de enfocar la resolución de este tipo de problemas por *la cuenta de la vieja* en los textos que he consultado. Puede que figure en alguno de los que no han llegado a mis manos.

4. El problema del cumpleaños

Es éste otro de los clásicos, incluído entre otras obras en el texto de Sixto Ríos "Métodos estadísticos" que se utiliza en el tercer curso de Ciencias Matemáticas en muchas universidades de nuestro país. El enunciado viene a ser éste:

¿Cuál es el número mínimo de personas que deben asistir a una reunión para que haya una probabilidad mayor de 0.5 de que al menos en dos de ellas coincida el día de su cumpleaños?

La solución, que podemos ver en "Cálculo de probabilidades - I", de Víctor Hernández, entre otros libros, hace uso de una fórmula inspirada en la de Stirling:

$$1 - p = \exp\left(\frac{-n(n-1)}{2N}\right),$$

en la que p es la probabilidad solicitada, n el número de personas, y N el número de días del año. De ahí, con los datos del problema, se deduce con facilidad:

$$n = \sqrt{2N\ln(1/(1-p))} = \sqrt{2N\ln 2} = 22{,}5,$$

resultado que, al obligarnos a redondear, se sitúa en 23 personas.

Un compañero nuestro, médico relativamente joven y aficionado a estos temas, discurrió de manera más elemental pero igualmente eficiente. Veamos cómo.

Es suceso *seguro* que uno de los asistentes a la reunión, que vamos a llamar el *asistente número uno*, cumple años algún día del año (de Pero Grullo). La probabilidad de que el *número dos* no los cumpla el mismo día es evidentemente de 364/365, atribuyendo 365 días al año. De la misma manera, la probabilidad de que el cumpleaños del *número tres* no coincida en día con ninguno de los otros dos, es de 363/365, y así sucesivamente.

Ahora bien, estos sucesos que estamos tratando son *independientes*, por lo que su probabilidad conjunta será el producto de las probabilidades individuales, o sea

$$1 - p = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365} \leq 0{,}5$$

¿Cuándo parar estos productos? Pues, evidentemente, cuando alcancemos un valor *menor que* 0.5, cosa fácil de ejecutar si vamos utilizando una calculadora. Basta contar después los factores para obtener el resultado de *23 personas*, como es automático comprobar.

También ahora nos llaman la atención algunos hechos:

1º .- El médico, al igual que su colega el del rosal seco, *le ha dado la vuelta* al planteamiento, calculando probabilidades *de no coincidencia*, que resultan ser evidentemente complementarias de la de coincidencia de dos cumpleaños en el mismo día del año. De ahí el $1-p$, y la exigencia de que este $1-p \leq 0{,}5$.

2º .- El discernimiento de nuestro compañero para etiquetar correctamente como *sucesos independientes* las *no coincidencias* de fecha. A ello, une el conocimiento de que la probabilidad conjunta es el producto de probabilidades. Este conocimiento no es extraordinario en estudiantes universitarios de ciencias de la salud que han cursado estadística, asignatura en la que es sabido que se imparten también nociones de cálculo de probabilidades.

3º .- Si el médico en cuestión hubiera trabajado con probabilidades de coincidencia, se hubiera seguramente *hecho un lío*, y no hubiera llegado a resultados convincentes. Este procedimiento de "dar la vuelta" al problema y aplicarle luego (siempre que sea posible) la regla de la probabilidad conjunta de sucesos independientes, es muy útil para resolver multitud de situaciones en medicina.

4º .- El número de días del año influye poco en el resultado. Con 366 días, tendríamos también la misma probabilidad, contrariamente a lo que hemos oído y leído a algunos matemáticos.

5. La distribución de Pascal

Otro de los *clásicos* del cálculo de probabilidades se puede enunciar en su forma general de la siguiente manera:

En una urna hay n bolas blancas y una bola negra, iguales en todo excepto en el color. Se efectúan a ciegas extracciones de una en una con reposición. ¿Cuál es el número medio de bolas blancas extraídas antes de que aparezca la negra?

Esta cuestión presenta varios casos similares: número medio de lanzamientos de un dado antes de que aparezca un *seis*; ídem de una moneda antes de que salga *una cara*; ídem de cartas de la baraja antes de *obtener un rey*; etc.

La solución habitual hace uso de la distribución geométrica o de Pascal. Si k es el número de extracciones con reposición, $k = 0, 1, 2, \ldots$ se demuestra que el valor medio de k es igual a $(1-p)/p$, siendo p la probabilidad de sacar la bola negra. En el enunciado original, esta probabilidad es claramente $1/(n+1)$, de donde la media de extracciones antes de bola negra, sería n como es fácil deducir.

El compañero hizo tres intentos. Primeramente probó con los lanzamientos de moneda, por parecerle más fácil el problema, pero como vulgarmente se dice *se hizo un lío* y no llegó a una solución. Después imaginó un dado y acertó la solución correcta. En un tercer paso, trató de generalizar la situación. Nos interesa ahora, sobre todo, el razonamiento seguido con el dado.

Si el número de lanzamientos del dado, suponiéndolo no trucado, es lo suficientemente grande, o sea que *tiende a infinito*, designando por N este número de lanzamientos, el número n de seises que obtendríamos es $n = N/6$. Ante cada uno de los *seises* obtenidos habría k lanzamientos con un resultado de "no seis", pudiendo variar k entre cero y un número posiblemente muy grande, pero la media aritmética de k sería ciertamente igual a 5 *a la larga*, expresión que ya hemos encontrado antes.

La generalización no ofrece dificultades. Si en la urna hay n bolas, incluída una negra (y el resto, blancas), el número medio de extracciones a ciegas con reposición antes de sacar la negra sería de $n-1$ bolas blancas. Si hay $n+1$ bolas, incluída una negra, es decir en las condiciones del enunciado, el número medio de extracciones antes de sacar la bola negra sería de $n+1-1=n$.

Este proceder es válido en todo caso. Ya lo hemos aplicado al dado, pero en el caso de la moneda es evidente que $k = 1$, o dicho de otra manera, a la larga habría tantas *caras* como *cruces*, lo cual es totalmente plausible. Lo que ya no podemos afirmar es si nuestro protagonista conocía la distribución de Pascal y la expresión de su media, ya que en el razonamiento seguido no la había nombrado siquiera.

Cabe preguntarse si estos temas que hemos comentado hasta aquí salen alguna vez en la práctica de la medicina y ciencias afines. En general, podemos decir que no, pero tampoco salen problemas de *probabilidad geométrica* que son los que vamos a tratar en lo que sigue. Lo cierto es que todos ellos se proponen como ejercicio en los textos a disposición de los médicos, y no digamos de las clases que éstos reciben, con mucha frecuencia impartidas por profesionales de las matemáticas.

En todo caso son buenos para discurrir y ayudan a captar los conceptos que posteriormente habrán de ser de aplicación en ciencias de la salud. No son escasos ciertamente los médicos aficionados a estas cuestiones, así como a algunos de los problemas que se proponen en la probabilidad geométrica, en los que han dado pruebas de indudable acierto como veremos. Habría que añadir que varios de ellos han recibido cursos complementarios de matemáticas, por lo común ofertados por la UNED.

6. La Probabilidad Geométrica

En sesiones de seminarios y talleres de estadística se proponen a veces cuestiones en relación con la llamada *Probabilidad Geométrica*. El hecho de que este tipo de temas tenga más interés para estudiantes de matemáticas, no deja de tener su importancia a la hora de estimular el discurrir de personas que se enfrentan a problemas de estadística. De hecho los vemos en textos, clases y actividades docentes dedicados a estudiantes y profesionales de ciencias de la salud.

La probabilidad geométrica tiene un carácter más abstracto que la ordinaria, debido al hecho de que los espacios en que se desenvuelve están regidos por leyes formales propias. Los subespacios suelen ser infinitos en cuanto a las unidades que los integran, puntos por ejemplo, cuyo conjunto es no numerable. De aquí que, por ejemplo, un pequeño segmento de una recta de longitud infinita tenga *tantos puntos* como la totalidad de dicha recta, lo cual hace que el punto no sea una unidad adecuada para la medida en este caso. Aun más, el número de puntos del radio de una circunferencia es del mismo cardinal que el de puntos del círculo correspondiente.

De aquí se deducen algunas consecuencias, válidas también en ciencias de la salud. Una de ellas es que la intuición nos puede engañar si la aplicamos de forma irreflexiva a la solución de problemas en este campo, de aquí que se originen heurísticas, muchas de ellas falsas. Comparando esto a un vuelo en avión, no cabe duda de que juegan un papel más importante los instrumentos que la vista del piloto, sin olvidar el imprescindible papel de ésta a la hora de tomar decisiones vitales.

Otra peculiaridad es que ha habido ocasiones en que el discurrir de los médicos no ha sido totalmente autosuficiente, en el sentido de que a veces ha sido preciso proporcionarles algún tipo de ayuda, como veremos en los comentarios que siguen. Esto no quita para que los razonamientos expuestos tengan un gran interés didáctico. Siempre hay que contar también con la afición de nuestros protagonistas a las ciencias matemáticas, sin la cual no serían posibles los resultados que vamos a ver.

Expondremos unos casos reales de entre los pocos que en estos años hemos podido recoger. Todos ellos proceden de clases o de sesiones de estadística (y cálculo de probabilidades) a profesionales (no a estudiantes) de ciencias de la salud.

6.1. El segmento trisecado al azar

Es conocido el problema que ahora presentamos: *Si dividimos en tres partes un segmento de recta, mediante dos puntos situados al azar sobre él, ¿Qué probabilidad hay de que se pueda formar un triángulo con los tres segmentos resultantes?*

Es sabida la condición para que tres segmentos, a, b, c puedan formar un triángulo: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

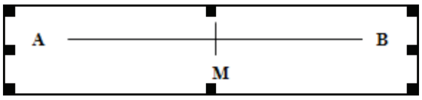

Figura 1.—

Este problema se suele resolver echando mano de la probabilidad condicionada, pero en la ocasión que estamos comentando se resolvió por simple razonamiento. Intentaremos reproducir la argumentación del médico.

Sea **M** el punto que marca la mitad del segmento **AB**. (Ver figura 1). Al elegir al azar los dos puntos que han de producir los tres segmentos, pueden darse dos posibilidades:

a) Ambos puntos "caen"[1] sobre la misma mitad. Entonces, evidentemente, no hay posibilidad de formar triángulo, ya que uno de los subsegmentos es más largo que la mitad del segmento AB. La probabilidad de que, al azar, ambos puntos corten la misma mitad de AB es claramente 0.5

b) Ambos puntos "caen" en mitades diferentes. En este caso, la probabilidad de que se produzca este evento es también 0.5, pero aquí hemos de distinguir otras dos subposibilidades:

   b.1) La distancia entre los dos puntos de corte es mayor que AB / 2. En este caso, por la misma razón que en a), no se puede formar triángulo. Probabilidad de este hecho = 0.25

   b.2) Esa misma distancia es menor que AB / 2. La probabilidad en este caso es también 0.25. Únicamente en este supuesto, se puede formar triángulo.

Dado que estas tres posibilidades, a), b.1), b.2), son mutuamente incompatibles, la probabilidad de no poder formar triángulo es igual a a) + b.1) = 0.5 + 0.25 = 0.75, por lo que la probabilidad de formar triángulo es, por tanto igual a la de b.2) = 0.25

El razonamiento "hay que saberlo ver", pero es impecable. La persona que resolvió este problema dio la solución correcta a otros dos, como comentaremos. Surgen ahora unas consideraciones de indudable interés:

1. Tanto todo el segmento AB como cualquiera de sus partes, por ínfimas que sean, tienen el mismo cardinal en cuanto a puntos. Hablando vulgarmente tienen el mismo número (no numerable) de puntos, una medida que podríamos utilizar en este supuesto sería la longitud de los subsegmentos que consideremos. Lo del corte en determinados puntos al azar tiene valor conceptual.

2. La probabilidad de que uno cualquiera de los cortes coincida con el punto M es igual a cero, por lo que no tiene sentido el empleo de signos como el $\leq$ o el $\geq$ para

[1]El médico emplea la palabra *caen*, en lugar de *"se encuentran"* u otra equivalente.

establecer las relaciones entre uno de los lados del posible triángulo y la suma de los otros dos lados.

3. No obstante las consideraciones antedichas, tiene sentido decir que la distribución de los puntos elegidos al azar sobre el segmento B es una distribución uniforme, en la que por definición todos los puntos del segmento AB tienen la misma probabilidad de ser "elegidos". ¡Probabilidad cero!

4. La distribución uniforme, que como es sabido nos sirve para generar toda clase de números y distribuciones aleatorias (simulación, etc), posee por decirlo de alguna manera propiedades de oro en cuanto a equiprobabilidad se refiere. También lo comprobaremos en otro de los casos que hemos de comentar.

5. No olvidemos que, si consideramos la línea recta como un conjunto no numerable de puntos, equipotente a cada segmento contenido en ella, estamos tratando con una situación igual (homeomorfa) a la de la llamada recta real. Incluso la propia probabilidad, de la que tanto hablamos, es también por definición un número real, contenido en el intervalo cerrado [0 , 1]

6.2. Triángulos inscritos en una circunferencia

Aunque no es, ni mucho menos, igual que el anterior, presentamos un problema muy similar. De hecho, fue resuelto por el mismo médico. Su enunciado es muy simple.

Se señalan, al azar, tres puntos sobre una circunferencia. ¿Qué probabilidad hay de que el triángulo así formado sea obtusángulo?

Sea la Figura 2. Fijamos sobre la circunferencia un punto cualquiera, A, por ejemplo. Por este punto trazamos el diámetro AM, que contiene al centro O. Siguiendo un razonamiento análogo al del problema anterior, podemos enunciar respecto de los otros dos puntos, B y C, las siguientes posibilidades:

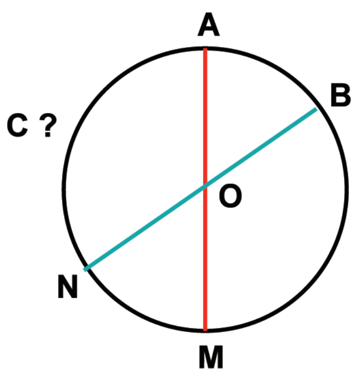

Figura 2.—

a) B y C "caen" en la misma semicircunferencia. En este caso el triángulo ABC es obtusángulo.

b) Si lo anterior no sucede, pueden darse a su vez otras dos posibilidades:

b.1) La “distancia” que separa B y C es mayor de 180 grados, en cuyo caso el triángulo formado es también obtusángulo.

b.2) Esta “distancia” es menor de 180 grados, lo que traduce que no hay ningún ángulo inscrito en la circunferencia cuya medida sea superior a 180 grados, o sea que el triangulo es acutángulo (no obtusángulo).

Asignemos ahora probabilidades a estos sucesos mutuamente excluyentes:

$$P(a) = 0{,}5, \qquad P(b1) = 0{,}25, \qquad P(b2) = 0{,}25,$$

de donde $P(\text{obtusángulo}) = P(a) + P(b1) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$.

Observación.- Hemos presentado este caso similar al anterior, pero no igual. En efecto, aquí podemos considerar al punto A como punto de corte, y “estirando” después la circunferencia la transformaríamos en un segmento de recta sobre el que sería válida hasta cierto punto la argumentación anterior. En otras palabras, no podemos hablar de una verdadera homotopía, no siendo por consiguiente “superponibles” ambos casos.

6.3. La aguja de Buffon

Este problema es otro de los “grandes clásicos” del cálculo de probabilidades. Podemos enunciarlo de la siguiente manera:

Disponemos de un conjunto de líneas paralelas separadas por la misma distancia d. Sobre ellas se arroja, al azar, una aguja de longitud a. ¿Qué probabilidad hay de que corte a alguna línea?

Vemos en la Figura 3 una disposición útil de las líneas paralelas y de la aguja, ésta en dos posiciones diferentes, en una de las cuales no corta a ninguna línea y en la otra sí. Se especifica también la distancia d entre las paralelas, todas ellas equidistantes entre sí dos a dos.

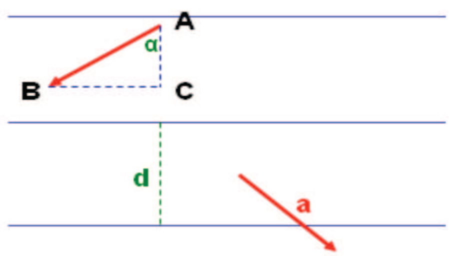

Figura 3.—

Una de las soluciones usuales, para la que precisa considerar un espacio producto, se puede ver en el texto de Sixto Ríos[2]. Una fórmula más general obtenida haciendo $x = a/d$, si $a > d$, es la siguiente:

$$P(x) = \frac{2}{\pi}\left(x - \sqrt{x^2 - 1} + \sec^{-1} x\right).$$

[2] Sixto Ríos. Métodos Estadísticos. 2ª edición. Página 140. Ediciones Del Castillo. Madrid. 1985.

El razonamiento seguido por el médico de turno fue en este caso el siguiente:

La probabilidad P estará en razón directa de la longitud a de la aguja, y en razón inversa de la distancia d entre paralelas. Podemos escribir: $P = ka/d$ donde k es una constante de proporcionalidad, que hay que determinar.

Para ello consideramos el triángulo rectángulo ABC, donde se cumple, en virtud de conocimientos elementales, que $AC = AB \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \alpha$, donde α puede tomar cualquier valor angular. Ahora es cuando el médico necesitó ayuda. ¿Cuál es el valor medio de $\operatorname{sen} \alpha$ entre 0 y $\pi/2$ radianes o en cualquier intervalo múltiplo del anterior? Este valor es $2/\pi$, con lo que la respuesta definitiva es

$$P = \frac{2}{\pi}\frac{a}{d},$$

que puede comprobarse que coincide totalmente con la que vemos en Sixto Ríos. Hay que hacer notar que la intuición del médico no fue pequeña por cierto, y que la buena parte de heurística que empleó estuvo acertada. En su honor diré que, si bien hubo que decirle cuál era el valor medio de $\operatorname{sen} \alpha$, él mismo pensó que no era el seno de $\pi/4$ radianes, o sea de 45 grados, ángulo "media" entre los 0 y los 90 grados, ya que la función *seno*, si bien es continua, no varía de manera uniforme.

Ésta, como hemos señalado, no es de todas formas una solución general del problema de la *aguja de Buffon*, pero entrar en dicha cuestión, además de apartarnos de los fines de estas líneas, no procedería ya que no hemos encontrado ningún profesional de ciencias de la salud interesado en ella.

6.4. La cuerda mayor que el radio

Éste es un tema que permite "atisbar" la paradoja de Bertrand, de la que tendremos que hablar por haber sido tratada por médicos, al menos en parte. De hecho la discusión de la paradoja fue iniciada a partir de este problema.

Se traza al azar una cuerda sobre una circunferencia. ¿Qué probabilidad hay de que su longitud sea mayor que el radio de la misma?

Existen varias construcciones para la búsqueda de una solución, pero aquí seguiremos el discurrir del facultativo que trató de darle una respuesta, el mismo a quien antes hicimos referencia.

Elegimos sobre la circunferencia un punto cualquiera, A, y trazamos por él la tangente AT. Después, con vértice en A y sobre la línea AT, vamos construyendo ángulos al azar, que irán desde el ángulo de medida cero hasta el de 90 grados. Este último es TAD, cuyos lados son la misma tangente AT y el diámetro AD. (Figura 4).

Como el lado del hexágono AB es igual al radio, y en este caso el ángulo TAB mide 30 grados, cualquier ángulo mayor, por ejemplo el TAC, dará lugar a una cuerda mayor que el radio. Dado que, evidentemente, el arco ABCD mide 180 grados y el arco AOB mide 60 grados, la probabilidad de que la longitud de una cuerda trazada al azar sea mayor que la del radio es igual a (180 - 60) / 180, o sea 2/3. Igual resultado se obtiene considerando que TAD mide 90 grados y TAB mide 30 grados.

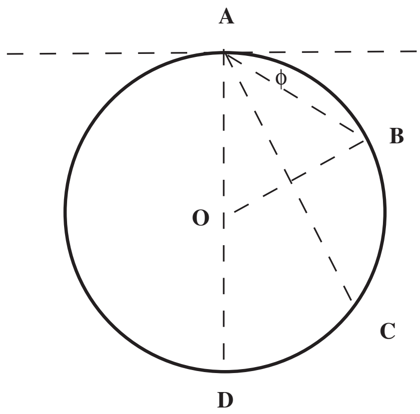

Figura 4.—

Hasta aquí podremos estar o no de acuerdo con el razonamiento expuesto, pero el mismo médico nos va a sacar de dudas, ya que no quedó muy convencido del resultado que había obtenido. Según él recapacitaba, para igualar la longitud del radio había bastando un ángulo ? de 30 grados, con lo que el arco construido abarcaba el tercio de la semicircunferencia. Para duplicar la longitud de la cuerda eran precisos 60 grados más, o sea el triple. El "reparto" de longitudes de la cuerda no "era proporcional" para él, lo que ponía en duda el resultado, juzgándolo fruto de una heurística errónea.

En este punto se le proporcionó parte de la ayuda que necesitó. Se le indicó, y lo comprendió en seguida puesto que recordó pronto sus estudios de enseñanza media, que, procediendo así, la longitud de la cuerda es igual a la del diámetro multiplicada por el seno del ángulo de giro? Por tanto, la distribución de la longitud de la cuerda no es uniforme, ya que sigue un grafico sinusoidal, o sea que no es lineal, vulnerando de esta forma el principio de uniformidad y equiprobabilidad antes establecida.

Se le sugirió otro enfoque del tema que salvaba este inconveniente: ya que la longitud de la cuerda viene unívocamente determinada por su distancia al centro, distancia que dicho sea de paso tampoco es lineal, pero que puede construirse sobre el radio perpendicular a la cuerda, elegimos este punto al azar **sobre el radio** mencionado, quedando garantizada de esta manera la distribución uniforme.

El cálculo del *punto de corte* que separa las cuerdas menores que el radio de las mayores, es el que corresponde a la cuerda igual al radio. Con la ayuda de la figura 5, podemos comprobar que este punto M corresponde al segmento OM cuya longitud es igual a $\sqrt{3}/2 = 0{,}866\ldots$, suponiendo el radio unidad.

En efecto, supongamos que la longitud de la cuerda AB es igual a la del radio. Las cuerdas perpendiculares al radio OC situadas por encima serán de menor longitud y las situadas por debajo tendrán una longitud mayor que el radio. De la consideración de que en el triángulo rectángulo AMO el lado AO es igual al radio y el AM es la mitad del radio, suponiendo como decíamos un radio unidad, la Figura 5 longitud del lado OM es la que acabamos de apuntar arriba. De ahí se deduce que la probabilidad pedida es 0.8666. . . , y no la que habíamos hallado primeramente.

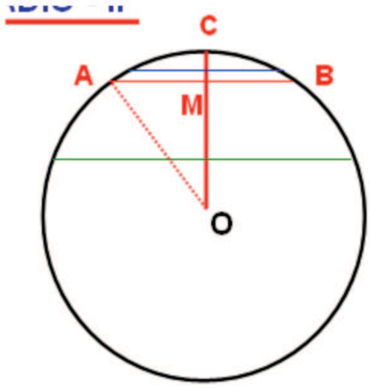

Figura 5.—

El médico aún quedó más satisfecho cuando se le informó sobre la llamada *Paradoja de Bertrand*, que en realidad no es otra cosa que lo que acabamos de comprobar: soluciones diferentes a un mismo problema, al parecer obtenidas con razonamientos correctos, cosa que no es así como hemos podido ver.

7. La paradoja de Bertrand

Fueron varios los médicos interesados en este tema, a los que se sumaron otros profesionales: un biofísico, una psicóloga y un biólogo. El verdadero enunciado del problema que dio lugar a la paradoja es el siguiente.

Si se traza completamente al azar una cuerda sobre una circunferencia, ¿qué probabilidad hay de que su longitud sea mayor que la del lado del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia?

En la Figura 6 puede verse el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia. Es fácil comprobar que el radio OR perpendicular a uno de los lados, BC, queda dividido por éste en dos partes iguales OM y MR. El lado del triángulo resulta pues ser tangente a la circunferencia de radio mitad. Todas las cuerdas que corten a esta circunferencia serán de mayor longitud que el lado del triángulo, y las que no la corten serán menores.

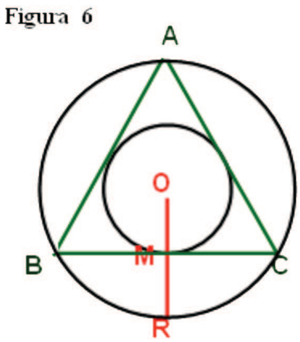

Figura 6.—

Se han presentado tres soluciones a este problema, que conducen a resultados diferentes, que evidentemente no pueden ser ciertos todos ellos. Sin entrar en detalles innecesarios, las enumeraremos brevemente.

1ª .– Elegir un punto cualquiera en la circunferencia y actuar como en el caso anterior. Ello da lugar a una probabilidad igual a 1/3.

2ª .– Elegir un punto al azar sobre el radio. Procediendo como antes hemos visto, obtenemos una probabilidad igual a 1/2.

3ª .– Elegir un punto al azar dentro del círculo y trazar la cuerda que sea perpendicular al radio que pasa por ese punto. Dado que el área dentro del círculo total es cuádruple que la del círculo de radio mitad, la probabilidad resulta ser 1/4.

¿Con cuál nos quedamos? Antes de exponer los razonamientos de nuestros facultativos, debemos decir que este problema parece definitivamente resuelto por Jaynes[3], quien demuestra que la solución número 2 es la correcta, lo cual coincide con lo que en el apartado anterior exponíamos.

¿Cuál fue la opinión de nuestros profesionales? Desde luego la primera solución quedaba rechazada en virtud de lo que señalábamos en el comentario al anterior problema. En cuanto a la tercera, hubo de todo como en breve diremos, pero la mayoría también la rechazaron, ya que la elección de ese punto “al azar” daba clara preferencia al área exterior al círculo pequeño, nada menos que de **3/4** sobre **1**, lo cual a la luz de la crítica médica era trabajar sobre datos sesgados de antemano. Aunque el razonamiento no peca de exceso de lógica matemática, no deja de ser estimable.

La cosa hubiera terminado aquí si no fuera porque uno de los presentes, que había hecho con provecho un curso por correspondencia de estadística y probabilidades en la UNED, nos planteó *en defensa* de las áreas lo que llamó *utilidad* de las mismas para resolver casos de probabilidad geométrica, aportando un ejemplo tomado del curso referido. Dado que su razonamiento no era trivial ni banal, aparte de que su argumentación es ampliamente empleada en este tipo de problemas, creo que debemos dedicar unas líneas a su discusión, en las que se verá que para convencer hay que comenzar por razonar en la medida de lo posible.

7.1. Utilidad de las áreas

Consideremos un último problema clásico, que ya se nos presentó con la solución en la mano, cuyo enunciado puede muy bien ser el que a continuación presentamos, ya que del original no pude disponer entonces.

[3] Jaynes, E.T. The well-Possed Problem. Found. of Physics. 1973. 3, (477 - 493).

Sea dada la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$, con b, c incluidos aleatoriamente en el intervalo cerrado [0 , 1]. ¿Qué probabilidad hay en estas condiciones de que las raíces de la ecuación sean reales?

El problema era procedente para estudiantes no matemáticos, ya que este tipo de ecuaciones se estudia en la enseñanza media. Sabemos, además, que para que las raíces sean reales el discriminante de esta ecuación, b^2-4c, no puede ser negativo.

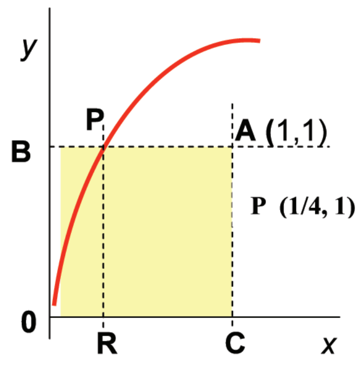

Figura 7.—

En la Figura 7 podemos ver una representación de los datos. La curva en trazo grueso, cuya ecuación es $y = 2\sqrt{x}$, se obtiene haciendo $y = b$, $x = c$. El cuadrado ABOC representa el intervalo [0,1] × [0,1]. Todo punto de este intervalo situado bajo la curva hace negativo el discriminante de la ecuación, la cual sólo tendrá raíces reales para la zona OPBO y raíces complejas para la zona OPACRO. El cálculo de estas áreas es ya una tarea automática.

En efecto, podemos ahora escribir:

$$\text{Área } OPR = \int_0^{1/4} 2\sqrt{x}\, dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/4} = \frac{1}{6},$$

y puesto que el área de OCAB es igual a 1, y el área de OBPR es igual a $1/4$ tenemos:

$$\text{Área } OPR = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

De aquí que la probabilidad de que sean reales las raíces de la ecuación es igual a $1/12$.

Y ahora viene la pregunta: ¿por qué este empleo adecuado de las áreas no sirve en la tercera solución de la paradoja de Bertrand? La respuesta no fue proporcionada por los médicos, aunque caben varias conjeturas que no vamos a comentar. Tan sólo haremos notar lo que en el seminario se apuntó: si, en lugar de emplear coordenadas cartesianas para la elección del punto en dicha opción, se hubieran utilizado coordenadas polares, el problema hubiese quedado reducido a designar aleatoriamente un solo punto sobre el radio polar, lo que nos habría abocado a la segunda solución.

7.2. Los caminos del razonar médico

No es cierto que los profesionales de ciencias de la salud tengan aversión a las matemáticas, si bien esto sucede en bastantes casos, pero en modo alguno es aplicable a la generalidad de nuestros colegas. Vamos ahora a referir sumariamente lo sucedido en un seminario de estadística, hace algunos años ya, en el que se comentaban los algoritmos empleados en el análisis de la varianza (de una vía) cuando los ordenadores estaban en sus balbuceos en cuanto a este tipo de aplicaciones.

Sabido es que se consideran en este procedimiento dos tipos de *sumas de cuadrados*: las parciales, de cada uno de los grupos que entran en el análisis, y la total considerando como muestra única el conjunto de todos los datos. La pregunta que se suscitó fue el por qué nunca la suma de las *sumas parciales de cuadrados* era mayor que la *suma de cuadrados total.* $SCT \geq$ *Suma de SCP.*

Para la contestación podíamos ciertamente haber hecho uso de conocidas desigualdades del análisis funcional y de la teoría de la medida, pero ante la necesidad de que fuera comprendido por todos se prefirió seguir un desarrollo elemental en el que no faltase fundamento matemático.

Es de justicia señalar que algunos de los asistentes ya se habían planteado esta pregunta anteriormente, y que en cierto modo la habían resuelto poniendo en juego dos recursos que no carecen de ingenio: los contraejemplos y la convicción. En cuanto al primero no habían hallado ningún caso que contradijera (y, por tanto, invalidara) la desigualdad de arriba. Respecto del segundo, argumentaban con razón que en las tablas de Fisher-Snédecor no había números negativos. Faltaba sólo una demostración directa.

Esta demostración se les facilitó, a petición propia, en cinco pasos, clásicos en los teoremas de matemáticas:[4]

1 - Axiomática. Por ejemplo: el cuadrado de un número real no es nunca negativo.

2 - Demostración de un lema:

$$\frac{(a+b)^2}{(m+n)} \leq \frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n}.$$

3 - Proposición. Aplicación al caso de dos grupos en el análisis de la varianza.

4 - Teorema. Generalizando la proposición a k grupos.

5 - Corolarios. En este caso fueron la deducción de la fórmula de la suma de cuadrados factorial para el caso de dos subgrupos:

$$SCF = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{n_1^{-1} + n_2^{-1}}$$

y la comprobación de que $t_{g.l=n} = \sqrt{F_{g.l=1,n}}$, identidad muy conocida en estadística, siendo comprendida la explicación por la totalidad de los asistentes.

La duda que nos queda, imposible de resolver por razones obvias, es si actualmente, en

[4]Andériz, M. Didáctica de la Estadística a Profesionales de Ciencias de la Salud. Tesis Doctoral. 2005.

plena era del uso de la informática para estos menesteres, se hubieran planteado nuestros alumnos esa misma cuestión, así como el interés por resolverla.

8. Los médicos y las Leyes de los Grandes Números

Terminaremos esta exposición comentando las respuestas obtenidas a partir de un cuestionario de 60 items, de los que 16 eran ilustrativos y 44 activos, y que contestaron 129 médicos. Nos vamos aquí a limitar tan sólo a dos preguntas, intuitivas y "abstractas", sobre la cuestión de los *grandes números* y en las que sorprende la relativamente elevada proporción de aciertos. Había que optar por la respuesta más conforme a los conocimientos del actuante.

28.- Suponemos *infinitos* lanzamientos de un dado no trucado. ¿Cuál es la probabilidad que hay de obtener *en algún momento* una racha de 50 seises seguidos?

a) 0, b) 1/50, c) 6/50, d) 1/2, e) 1.

31.- *¿Cuántas veces* hay que lanzar una moneda normal para tener la **seguridad absoluta** de obtener *al menos una cara*?

a) 2 veces, b) 24 = 16 veces, c) 210 = 1024 veces, d) infinitas veces, e) ninguna es cierta.

Es claro que la contestación correcta al primero de estos ítems es la opción **e)**, y al segundo la opción **d)**. He aquí los resultados.

Resultados: (Sobre los 44 ítems) % global de aciertos = 16. 91 íd actual = 25.6

Preg. 28 15 aciertos 12. 2 % de aciertos

Preg. 31 48 aciertos 39. 0 % de aciertos

El porcentaje global se refiere a la totalidad del cuestionario, el actual a las dos preguntas que aparecen arriba. Resulta un tanto pintoresco que en la primera de estas cuestiones la opción *más votada* fue la a), cuando la probabilidad *casi seguro* de obtener *en algún momento* de una serie infinita una racha de 50 seises seguidos es igual a uno. Aquí falla la heurística fácil. No sucede lo mismo en la segunda pregunta, en la que para los no matemáticos juegan un papel importante la intuición y el concepto de lo abstracto. Este "olfato" de las leyes de los grandes números lo hemos detectado bastantes veces. Recordemos las expresiones "a la larga" que hemos visto en estas líneas, y que suponen cierto nivel cultural y una dosis apreciable de *sentido común*.

Da lugar a no pocas reflexiones el hecho de que, estadísticamente, se pudo probar que quienes más respuestas correctas dieron a la totalidad del cuestionario reunían varias de las siguientes características:

1. Terminación de la carrera hace cinco años o menos.

2. Haber publicado más de tres artículos científicos.

3. Dedicar una hora al día o más al uso del ordenador.

4. Conocimientos de cierto nivel de lengua inglesa.

5. Afición manifestada a las matemáticas.

Los comentarios que esto pudiera suscitar no creo que interesen en este momento, pero todos ellos más o menos admiten razones lógicas en el contexto de la organización actual de la enseñanza de la medicina y de la estadística.

9. Epílogo

Antes de finalizar nuestra exposición consideramos obligado exponer unas breves consideraciones.

1 — La cronología en que hemos ido captando lo aquí expuesto no coincide evidentemente con el orden que hemos seguido. Aún nos quedan por comentar no más de tres o cuatro problemas de cálculo de probabilidades resueltos por profesionales de ciencias de la salud, pero creemos que ya es suficiente con este muestrario.

2 — Como habrá observado el lector, la mayoría de los casos que hemos expuesto no fueron apercibidos en el momento de producirse, en otras palabras: "no caímos en la cuenta entonces", hecho explicable dada la rareza de los mismos, cuyo promedio ha sido alrededor de un caso cada dos años y medio, con una dispersión muy acusada.

3 — El hecho de que las soluciones que hemos ofrecido hayan sido elaboradas por médicos en su casi totalidad, no supone en modo alguno que en otras profesiones no se hayan dado casos similares, inclinándonos a suponer que se han producido en casi todas las careras universitarias en mayor o menor medida. Lo cierto es que el marco de nuestro estudio ha comprendido a los médicos sobre todo.

4 — Hemos pretendido, como anunciábamos al principio, asimilar la mentalidad e incluso el lenguaje de los protagonistas de nuestros relatos. Es evidente que el matemático que esto lea hallará defectos de forma, pero también es cierto que al docente interesado se le ofrece una buena ocasión para analizar las respuestas bajo el punto de vista de la semiótica y para detectar nuevos recursos didácticos para la enseñanza de estas materias a nuestros profesionales y estudiantes.

5 — Es verdaderamente difícil trazar una frontera nítida que "separe" los conocimientos del médico, o del profesional de ciencias de la salud, de los del matemático. Incluso dentro del ámbito en que nos hemos desenvuelto en esta exposición. Pese a que ambos

tipos de estudios son absolutamente diferentes, en modo alguno pueden considerarse disjuntos, habiendo puntos conceptuales y epistemológicos comunes, que indudablemente es útil conocer.