Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **62:** 147–153, (2007).

El universalismo matemático del Profesor Rodríguez-Salinas

Bienvenido Cuartero, José Garay y Mariano Gasca

Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza

En este mismo volumen de la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza figura la necrológica del Profesor D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero, que falleció en Madrid el 14 de febrero de 2007. En una época en la que se tiende tanto a la superespecialización, puede decirse que era uno de los últimos matemáticos enciclopédicos. Sus trabajos de investigación recorren una gama amplísima dentro de las Matemáticas, con alguna incursión fuera de ellas. Publicó trabajos en Ecuaciones Diferenciales, Teoría de la Aproximación, Transformada de Laplace, Extensión de Aplicaciones Lineales, Teoría de la Medida y de la Integral, Análisis de Variable Compleja, Análisis Funcional, con algunos trabajos en lgebra, Geometría Proyectiva, Economía Matemática, Análisis de Fourier, Oceanografía, Física, Historia de la Ciencia, Filosofía y Teología. Estos aspectos han sido ya remarcados por algunos de sus discípulos de la Universidad de Madrid, Fernando Bombal Gordón y Pedro Jiménez Guerra, en obituarios escritos en varios medios a lo largo de 2007, y en particular, con muchos detalles técnicos, en la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.

Dirigió veintiuna tesis doctorales, las cinco primeras en la Universidad de Zaragoza y las restantes en Madrid, aunque varias de ellas fueron de discípulos zaragozanos que lo siguieron a aquella Universidad y una, la de Emiliano Aparicio, sobre aproximación de funciones mediante polinomios de coeficientes enteros, se leyó en la Universidad de Bilbao en 1973. La última de Zaragoza, de Bienvenido Cuartero, se leyó en 1972, cuando ya estaba trasladado a Madrid, casi simultáneamente con las primeras de aquella Universidad.

El primer doctor de Rodríguez-Salinas fue Diego Ramírez Duro en 1960, con el tema *Series Asintóticas Débiles*. Esta tesis fue publicada como volumen 2 de las Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano de Zaragoza.

Tras cuatro años en los que no tuvo doctorandos, en 1964 comenzó su gran época en este sentido, iniciada con la tesis doctoral de José Garay, leída en 1966, *Integración en espacios topológicos*. En la promoción zaragozana siguiente a Garay, la de 1965, estábamos entre otros Miguel San Miguel y Mariano Gasca, a quienes D. Baltasar nos llamó a su despacho y nos preguntó si queríamos hacer tesis doctoral. Al decir naturalmente que sí nos dejó anonadados al respondernos que en qué tema: Geometría Algebraica, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Teoría de la Probabilidad, Variable Compleja o Medida e Integración. Siempre nos hemos preguntado qué otro matemático en el mundo podía habernos ofrecido ese abanico de posibilidades. Miguel San Miguel eligió Probabilidad y Mariano Gasca Ecuaciones en Derivadas Parciales. Dos años más tarde le ofreció a Bienvenido Cuartero un tema de aproximación en espacios vectoriales, iniciando el cierre de sus tesis en la Universidad de Zaragoza.

El motivo de este escrito es mostrar el carácter enciclopédico de la obra y la mente de Rodríguez-Salinas a través de estas cuatro tesis. Estaba previsto escribirlo entre sus cuatro doctores del 66 al 72 pero el repentino fallecimiento de Miguel San Miguel el presente año nos ha obligado a hacerlo entre los otros tres. Perdónesenos, por tanto, si hay alguna imprecisión en la descripción de su tesis doctoral.

1 José Garay: Integración en espacios topológicos

Novak y Hewitt muestran espacios de Hausdorff regulares, no completamente regulares, en los que las únicas funciones reales continuas son las constantes. Esto hace que la conocida construcción de medidas sobre espacios localmente compactos a partir de funcionales lineales sobre el espacio de las funciones continuas no seaaquí válida.

Por otra parte Rodríguez-Salinas hace notar que la medida sobre espacios de Hausdorff localmente compactos no admite su definición en todos los subespacios ya que algunos de ellos no son localmente compactos. Para salvar estos inconvenientes, en su discurso de entrada en la Academia de Ciencias de Zaragoza, Rodríguez-Salinas introduce las que él llama medidas topológicas sobre espacios regulares. Y más tarde amplía el concepto con el de medidas exteriores topológicas, las cuales gozan de propiedades dependientes de la topología del espacio que ahora tiene un cierto carácter de compacidad local que generaliza el mismo concepto clásico.

Estas medidas fueron posteriormente utilizadas por el propio Rodríguez-Salinas en trabajos conjuntos con Jiménez Guerra. En los dos primeros capítulos de la tesis de J. Garay se hace la construcción de estas medidas a partir de un funcional real sobre la familia de las funciones no negativas inferiormente semicontinuas. Luego se define la integral sobre las funciones reales no negativas y de aquí se introduce la medida exterior buscada integrando sobre las funciones características de los conjuntos. Se estudian propiedades de esta medida, indicando por una parte cierta semejanza con una construcción hecha por Bourbaki, pero no estando completamente de acuerdo con una afirmación de este autor sobre la universalidad de estas construcciones.

En los capítulos tercero al quinto se ve que toda medida exterior sobre un conjunto puede ser convertida en una medida exterior topológica mediante la introducción de una apropiada topología. Esto se hace a partir de una cierta familia de funciones reales no negativas. Se prueba que toda medida exterior topológica puede ser generada por este procedimiento y además se demuestra la unicidad del funcional correspondiente.

En el capítulo VI y último de la tesis se extiende el concepto de espacio completamente regular al de espacio completamente regular respecto de una medida exterior topológica y de una familia de funciones no negativas inferiormente semicontinuas.

Para ello se recuerda que un espacio regular es completamente regular si, y solo si, los valores de las medidas exteriores topológicas quedan determinados por sus valores sobre las funciones continuas. Sustituyendo adecuadamente la familia de las funciones continuas por una familia de funciones no negativas inferiormente continuas se establece el nuevo concepto.

Se ve el caso especialmente interesante de que las funciones inferiormente continuas elegidas tomen solo un número finito de valores.

Se completa el capítulo estudiando ampliamente este nuevo concepto y en particular diversas propiedades necesarias y suficientes para la existencia de estos espacios.

La tesis se publicó íntegramente en 1967 en el tomo XXII de la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.

2 Miguel San Miguel: Funciones aleatorias periódicas

El objetivo de esta tesis era el estudio de las funciones aleatorias periódicas. por su interés en el estudio de fenómenos naturales de tipo periódico. En particular se pretendía generalizar resultados aparecidos en la revista Collectanea Mathematica en 1957, de F. A. Sales Vallés, catedrático de la Universidad de Barcelona, especialista en Probabilidad y con quien Rodríguez-Salinas compartía una buena amistad. Quizás el trabajo era la tesis doctoral de Sales Vallés, quien luego además formaría parte del tribunal de la tesis de San Miguel.

Consta de seis capítulos y comienza dando una nueva forma al concepto de funciones aleatorias periódicas y sus consecuencias para las propiedades de éstas a lo largo de los dos primeros. En el capítulo siguiente se estudia la continuidad de las funciones aleatorias y en el cuarto capítulo se establece para una media E el producto escalar de dos variables aleatorias, la norma asociada, se da la definición de función aleatoria $X(t)$ continua en norma y se demuestra la equivalencia de este tipo de continuidad con la continuidad de la función covarianza de $X(t)$.

El quinto capítulo trata fundamentalmente de la integral de una función aleatoria y se estudia en él el importante concepto de función aleatoria de clase nula. También se da un matiz nuevo al concepto de función aleatoria separable mediante la definición de función aleatoria esencialmente separable.

El sexto y último capítulo es el más importante y trata del desarrollo en serie de Fourier de las funciones aleatorias periódicas. Consta en esencia de tres partes. En la primera se obtienen como resultados más importantes los siguientes:

– *Una función aleatoria periódica $X(t)$, medible y con la integral del cuadrado de su norma entre $-$ y finita, puede descomponerse, de manera única, como suma de una función aleatoria esencialmente separable $Xs(t)$ y una función aleatoria de clase nula $Xo(t)$, ortogonales entre sí.*

– *Una función aleatoria periódica $X(t)$, medible y con la integral de su norma entre $-$ y finita, puede descomponerse, de manera única salvo para un conjunto de medida nula, como suma de una función aleatoria esencialmente separable $Xs(t)$ y una función aleatoria de clase nula $Xo(t)$, ortogonales entre sí para casi todo t.*

En la segunda y tercera partes de este último capítulo, tras definir la integral de Dirichlet $Sn(t)$ y la integral de Fejer $Sn1(t)$ de una función aleatoria periódica $X(t)$ se dan criterios de convergencia de las sumas $(C, 0)$ y $(C, 1)$ de la serie de Fourier correspondiente. Entre otros resultados cabe destacar que la integral de Dirichlet $Sn(t)$ de una función aleatoria periódica de variación acotada $X(t)$ converge hacia $X(t)$ en todo punto y que la integral de Fejer de $X(t)$ converge también a $X(t)$ para casi todo t.

La tesis se publicó íntegra como volumen 11 de las Publicaciones del Seminario Matemático *García de Galdeano* de Zaragoza.

3 Mariano Gasca: Resolución del problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales totalmente hiperbólicas

L. Fantappiè fue un analista matemático italiano muy conocido de la primera mitad del siglo XX, distinguido discípulo de Vito Volterra. Fue el creador de la teoría de los funcionales analíticos, precursora de la teoría de distribuciones, pensada para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. En los años cuarenta impartió una serie de conferencias en el Seminario Matemático de la Universidad de Barcelona que fueron recopiladas más tarde por Rafael Rodríguez Vidal y que dieron lugar a las tesis doctorales de R. Aguiló, J. Augé, J. Casulleras y J. Teixidor, publicadas entre 1948 y 1955 en Collectanea Mathematica. Se abordaba el problema de Cauchy para varios tipos particulares de ecuaciones en derivadas parciales totalmente hiperbólicas usando la técnica de los funcionales analíticos. Una situación así era un desafío para una mente tan hábil para sintetizar y generalizar como la de Rodríguez-Salinas. Esa fue pues la propuesta por su parte para la tesis doctoral de M. Gasca en 1965, titulada *Resolución del problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales totalmente hiperbólicas.*

Se parte de una formulación general del problema planteando una ecuación en derivadas parciales de orden m con tres variables independientes, lineal, irreducible, homogénea repecto al orden de derivación y con coeficientes reales constantes. A ella puede reducirse cualquier otra análoga de orden m en dos variables que no sea homogénea respecto al orden de derivación. Se plantea su problema de Cauchy en el primer capítulo de la tesis y se la resuelve mediante el método de Fantappiè. La fórmula final requiere para su cálculo efectivo el estudio de una cierta función algebraica $J(X, Y)$ determinada por la ecuación de partida.

En el siguiente capítulo se realiza un estudio local de esa función, que presenta m determinaciones cuando m es el orden de la ecuación, para lo cual fue decisivo el uso de resultantes. Fue un paso necesario para realizar el estudio global de la función $J(X, Y)$. Para ello se introdujo la noción de traza. A través de ella se ve la no influencia de los puntos singulares de $1/J$ imaginarios en el cálculo de la solución del problema planteado obtenida en el capítulo 1. Se estudian las propiedades fundamentales de las determinaciones de J que se anulan en un punto real de la curva $P = 0$ cuya expresión tangencial es dada directamente por la ecuación que se está resolviendo y se ven las propiedades de las tangentes a esta curva.

En el último capítulo se elabora la expresión final de la solución de la ecuación, viéndose claramente la influencia de las tangentes múltiples reales de la curva $P = 0$.

En el tribunal de esta tesis participó como Presidente el profesor D. Juan Augé Farreras, autor de uno de los trabajos generalizados en ella y también amigo de Rodríguez-Salinas y Rodríguez Vidal. Prueba del aprecio con que fue recibida esta tesis por los colegas de la Universidad de Barcelona es que se publicó casi íntegra en el volumen 21 de Collectanea Mathematica de 1970, ocupando 84 páginas de dicho volumen. Junto con la Revista Matemática Hispano-Americana eran las dos revistas más consideradas de España e incluso en aquella época Collectanea aún lo era más.

4 Bienvenido Cuartero: Teoría de la aproximación en espacios vectoriales sobre cuerpos valorados. Generalización del teorema de Kakutani-Stone para funciones con valores en $\mathbb{R}^n$

"No se han dado cuenta de que esto se puede hacer mucho más general", era una de las frases que D. Baltasar repetía en múltiples ocasiones. Tal parece que Goethe hubiese pensado en él cuando afirmaba

> *Los matemáticos son como los franceses: cualquier cosa que se diga lo traducen a su propia lengua, e inmediatamente se convierte en algo completamente distinto.*

En el caso que nos ocupa, 'lo que se le dijo' (el referente directo) era la monografía de

L. Nachbin "Elements of Approximation Theory". Poco antes de su publicación, D. Baltasar poseía unas notas 'mimeografiadas' —que le había enviado el propio Nachbin, según creo. ¿Cómo las 'tradujo'? La personalísima lectura que de ellas hizo le llevó primero a iniciar una teoría de la aproximación en espacios vectoriales topológicos, sustituyendo el cuerpo de los números reales por cuerpos valorados, arquimedianos y no arquimedianos, no necesariamente conmutativos.

El primer capítulo de esta tesis está dedicado a dicha teoría y a los prolegómenos necesarios para plantearla. Al parecer, D. Baltasar no había publicado antes ni publicó después ningún trabajo específicamente en Análisis no arquimediano. En cualquier caso, conocía muy bien los capítulos sobre cuerpos valorados de los textos de lgebra de Jacobson y van der Waerden. Así mismo, había escrito un trabajo en colaboración con J. Garay "Sobre los cuerpos no conmutativos de rango cuatro respecto de su centro". Posiblemente por esa época estaba ya trabajando en su memoria "El problema de la medida", en la que dedica un capítulo al problema de la extensión de homomorfismos entre módulos normados, al final del cual hace referencia a teoremas de extensión de aplicaciones lineales entre espacios normados no arquimedianos. También había publicado, en 1959, "Aproximación uniforme de una función continua por un conjunto convexo de funciones continuas".

Sin entrar en los detalles, este primer capítulo de la tesis de B. Cuartero proporciona un tratamiento unificado de la teoría de espacios localmente convexos sobre cuerpos arquimedianos y no arquimedianos, con una noción de convexidad no arquimediana distinta de la habitual, que se utiliza luego en la obtención de resultados generales sobre la aproximación mediante combinaciones lineales y mediante combinaciones lineales convexas, que incluyen los que aparecen en la monografía de Nachbin.

El capítulo segundo se ocupa de la aproximación en el espacio de las funciones continuas de un espacio topológico en un cuerpo valorado mediante funciones de un ideal: es la versión en términos de aproximación de la teoría de ideales cerrados en espacios de funciones continuas, bien conocida para funciones reales. De nuevo se consigue un tratamiento unificado de todos los casos, ahora gracias a una de esas ideas que Rodríguez-Salinas parecía sacar de la nada. Una propiedad diferente relacionada con ella figura en un artículo de Kaplansky de 1946, que D. Baltasar nunca utilizó, lo que refuerza la idea de que poseía un 'instinto mágico' que le permitía ver con una profundidad inusual los detalles verdaderamente relevantes de cualquier situación matemática y llevar cualquier técnica hasta sus últimas consecuencias.

Lo mismo puede decirse respecto de su definición de K-espacio de Urysohn para un cuerpo valorado K, que equivale a la de espacio normal cuando K es el cuerpo de los números reales y a la de espacio cero-dimensional cuando K es un cuerpo valorado no arquimediano. En este capítulo se refleja de manera clara la familiaridad que D. Baltasar tenía ya entonces con todo tipo de espacios topológicos.

El capítulo tercero y último, inspirado en la versión del teorema de Kakutani-Stone que aparece en la monografía de Nachbin, cambia de registro. El propósito era obtener un resultado para funciones continuas con valores en espacios normados reales que incluyera dicho teorema como caso particular. Para ello era necesario inventar "retículos de funciones con valores vectoriales" (los *U—semirretículos vectoriales*) y estudiar algunas propiedades de carácter geométrico sobre cubrimientos por semiesferas abiertas de la esfera S_{n-1}, donde la intuición de D. Baltasar se desenvolvía con toda su brillantez. Así se pudo atacar después el problema de determinar cuándo la aproximación por funciones continuas vectoriales en un número finito p de puntos implicaba la aproximación uniforme en compactos, y en el caso de espacios normados de dimensión finita, acotaciones de p en función de la dimensión y de la naturaleza del conjunto U.

En el acto de exposición y defensa de la tesis (seguido, por cierto, de la ocupación de la Facultad por los estudiantes, año 1972), el Profesor Enrique Linés, miembro del tribunal, refiriéndose a la variedad de técnicas empleadas, comentó: "Esto no es una tesis, esto son tres tesis."

Estas notas sobre cada una de las tesis de Rodríguez-Salinas en Zaragoza pueden servir como ejemplo de la forma de trabajar de uno de los matemáticos españoles más dominadores del universo matemático en el siglo XX. Finalizamos con una anécdota muy ilustrativa de su capacidad.

En el año 1967, cuando aún los espacios vectoriales topológicos reales o complejos eran temas muy especializados de tercer ciclo, el Profesor Henri Mascart, de la Universidad de Toulouse, vino invitado por el Profesor Viviente a impartir unas conferencias sobre módulos topológicos. Esta noción, considerablemente más general que la anterior, había sido introducida y estudiada en sus trabajos más recientes por el propio Profesor Mascart. En la primera charla, a poco de comenzar su exposición, D. Baltasar le interrumpió con un "José Luis, dile que no", dirigido al Profesor Viviente, que nos dejó sorprendidos a todos los asistentes. Hubo un intercambio de comentarios, que los novicios contemplábamos entre admirados y escandalizados, y a continuación se terminó la sesión. ("¡Se creía que en Zaragoza no había nadie que entendiera de esto!", nos comentó a sus alumnos con su sonrisa picarona de niño travieso.)

En la charla siguiente, el conferenciante comenzó explicando que Rodríguez-Salinas tenía razón en sus objeciones y que no había podido contrastar la corrección que le había entregado la tarde anterior, "Mais je le fais confiance", concluyó el Profesor Mascart, continuando sus charlas con una cierta deferencia, no apreciable en su comienzo. Dicho sea de paso, las conferencias fueron publicadas (suponemos que con las correcciones) por la Academia de Ciencias (*Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2)* **22**, 1967, pp. 189–203).