

Nuevo modelo de renovación para la recurrencia de terremotos en una falla

Nico L. Abadías¹, Álvaro González², Javier B. Gómez²
y Amalio F. Pacheco¹

(1) Departamento de Física Teórica

(2) Departamento de Ciencias de la Tierra

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza. España.

Resumen

A new probability distribution, discrete and with only one parameter, is introduced. It is devised to describe the frequency distribution of the duration of seismic cycles (time intervals between large earthquakes in a fault) when the sequence of cycles has an aperiodicity between $\simeq 0,47$ and 1. This distribution results from a renewal model which is based on a reduction of states (coarse-graining type) of the so-called Box Model [González *et al.* (2005): The occupation of a box as a toy model for the seismic cycle of a fault. *Am. J. Phys.*, 73 (10), 946–952]. The new probability distribution is formed by a difference between two geometrical distributions, and solves the inability of the Box Model to describe sequences of cycles with aperiodicity larger than $\simeq 0,47$.

1. Introducción

La mayor parte de los terremotos que se generan en la parte superior, frágil, de la corteza terrestre tienen su origen en el desplazamiento brusco de un bloque de corteza respecto a otro a lo largo de una fractura denominada *falla*. Este mecanismo de generación esporádica de terremotos se explica, desde hace casi un siglo, por la *teoría del rebote elástico*, formulada por Harry F. Reid [1] tras analizar el origen del gran terremoto de San Francisco de 1906. Según esta teoría, fuerzas tectónicas deforman lentamente los bloques de roca separados por una falla, y cuando se alcanza un cierto umbral de resistencia en ésta, los bloques se mueven rápidamente uno con respecto a otro a lo largo de la falla, reduciéndose así la energía elástica acumulada en ella. Las vibraciones producidas, por este

movimiento brusco, en el medio que rodea a la falla son las ondas sísmicas que registran los sismómetros.

El proceso descrito se repite cíclicamente, y se denomina *ciclo sísmico* al intervalo de tiempo transcurrido entre dos grandes terremotos generados por una misma falla [2]. Pese a su ciclicidad, este fenómeno no es periódico: los ciclos sísmicos de una falla tienen diferentes duraciones unos de otros. La aperiodicidad de una serie de estos ciclos suele cuantificarse [3, 4, 5, 6] con el llamado *coeficiente de variación*: la desviación estándar de la duración de los ciclos, dividida por la duración media. Este coeficiente adimensional es nulo si la serie es perfectamente periódica; entre cero y uno si es cuasiperiódica; la unidad si aquélla es puramente aleatoria (esto es, generada por un proceso de Poisson); y más de uno si los eventos suceden en grupos temporales que a su vez están separados entre sí por intervalos mucho más largos [6]. El coeficiente de variación de las series de ciclos sísmicos en fallas reales suele ser inferior a uno, y, de hecho menor que 0.5 en la mayoría de los casos [3, 5].

Todavía no se conoce bien cuál es la distribución de probabilidad de duración del ciclo sísmico en cada falla (la función que indica cuán frecuentes son los ciclos sísmicos de distintas duraciones). Esta ignorancia se debe a que, para cualquier falla concreta, sólo se tiene registro (histórico o geológico) de los últimos pocos ciclos, generalmente no más de diez [7]. Este es un número demasiado pequeño como para caracterizar en detalle la distribución empírica de probabilidad, así que lo habitual es ajustar alguna distribución teórica a los datos disponibles acerca de la duración de los ciclos reales. Toda distribución que se utilice tendría que poseer las siguientes propiedades, observadas habitualmente en las series de ciclos sísmicos reales [8]:

1. Obviamente, *el tiempo transcurrido entre terremotos es una cantidad positiva*, así que la distribución sólo debiera existir para valores positivos de las abscisas. Esto no ocurre, por ejemplo, en la distribución Gaussiana [8].
2. *Los ciclos muy breves, comparados con la media de la serie, son escasos o inexistentes*. sta es la causa de que las series de ciclos sísmicos reales suelen tener aperiodicidades bajas [4, 5]. La explicación física de esta escasez de ciclos breves es que, según la teoría del rebote elástico, se necesita un tiempo mínimo para que la falla, por lenta deformación tectónica, acumule suficiente energía elástica como para generar un nuevo gran terremoto. A este hecho se le denomina en ocasiones *sombra de esfuerzo* (*stress shadow* [9]), y supone que el momento en el que ocurre un gran terremoto depende de cuándo ocurrió el previo. Debido a esta dependencia, es probable que los ciclos sísmicos de las fallas no resulten de un proceso de Poisson [4, 10], puesto que en éste los eventos son independientes entre sí.
3. *La probabilidad es siempre decreciente para duraciones mucho mayores que la du-*

ración media. Existen bastantes ciclos de duración mayor que la típica, aunque son más escasos cuanto mayor sea la duración que se considere.

Hay varias distribuciones estadísticas con las tres características mencionadas. Las tres más comúnmente usadas para describir la distribución de ciclos sísmicos son la lognormal, gamma y Weibull [3, 8, 11, 12]. Recientemente se han propuesto otras, que se derivan de modelos físicos numéricos muy idealizados de cómo se acumula la energía elástica en una falla y se relaja en forma de terremotos. Estos modelos son el de *Brownian Passage Time* [3, 4, 8, 10, 13], el *Modelo Minimalista* [12, 14, 15, 16, 17], y el *Modelo de Caja (Box Model o BM)* [18, 19]. Todas estas distribuciones son capaces de ajustarse razonablemente bien a los datos disponibles sobre la duración de los ciclos reales.

Estas funciones de distribución de la duración de los ciclos se pueden emplear para estimar cómo varía con el tiempo la probabilidad de que se produzca el nuevo gran terremoto en la falla. Este método consiste en considerar que estos eventos siguen un *proceso de renovación* [11, 20, 21], de manera que la duración de cada ciclo es una variable aleatoria, independiente de los ciclos anteriores, y distribuída según la función considerada. Cada distribución proporciona una estimación de probabilidad diferente, de ahí la importancia de seguir contrastando estas distribuciones y buscando otras nuevas.

En este artículo nos proponemos paliar una limitación que presenta el BM: este modelo no es apto para series de ciclos sísmicos relativamente aperiódicas (con coeficiente de variación mayor que $\simeq 0,47$). En el BM [18] la energía (o deformación) elástica acumulada en una falla se idealiza mediante una variable de estado adimensional. Al comienzo de un ciclo, el valor de esta variable es cero. A lo largo del ciclo, la variable va aumentando hasta un valor umbral constante N , que es el único parámetro del modelo. Cuando esto ocurre, se genera un terremoto, que reduce la variable a su valor inicial nulo, dando comienzo a un nuevo ciclo. El proceso de aumento paulatino de esa variable de estado a lo largo del ciclo es aleatorio, lo que causa que la duración de los ciclos varíe de uno a otro. Este modelo se puede describir también como el proceso de llenado estocástico de una caja (de ahí su nombre [18]), con N huecos, donde la variable de estado representa el número de huecos ocupados. En el BM, el tiempo transcurre de forma discreta (es decir, en pasos), y la media y la aperiodicidad (coeficiente de variación) de la serie de ciclos dependen exclusivamente de N . Tras cada terremoto, en el modelo hay una sombra de esfuerzo de $N - 1$ pasos temporales, en la cual no se puede generar un terremoto nuevo. Esta duración, relativamente grande, de la sombra de esfuerzo, causa que la aperiodicidad de la distribución de ciclos sea como mucho $\simeq 0,47$. Por ello el modelo sólo es adecuado para describir series de ciclos poco aperiódicas.

En este artículo presentamos una simplificación del BM, a la que llamaremos *modelo de caja miniaturizado (mini-Box Model, o m-BM)*. El m-BM también tiene como único

parámetro a N , pero la sombra de esfuerzo siempre dura dos pasos temporales, por lo que es relativamente más breve que en el BM para cualquier $N > 3$. De este modo, la aperiodicidad de la distribución estadística de la duración de los ciclos es mayor en el m-BM (entre $\simeq 0,47$ y uno). Esta distribución, además, cumple los tres requisitos arriba mencionados. Estas propiedades la podrían hacer interesante para tratar de describir la distribución de ciclos sísmicos en una falla real y estimar la probabilidad de que ocurra el siguiente gran terremoto en ésta.

En la siguiente sección del artículo describiremos el m-BM mediante su matriz de Markov, que determina cuáles son las probabilidades de transición entre los distintos estados del modelo. En la sección tercera se deducirá analíticamente la distribución estadística de la duración de los ciclos en el m-BM. La media, desviación estándar y aperiodicidad de esta distribución se deducirán en la sección cuarta. La función de riesgo, importante para el cálculo de la probabilidad condicional si el m-BM se emplea como modelo de renovación, se trata en la sección quinta. El artículo finaliza con un resumen y discusión de los resultados obtenidos.

2. Descripción del modelo y su matriz de Markov

El m-BM aquí presentado resulta de una simplificación tipo *coarse graining* del BM [18, 19]. sta consiste en reducir el número de estados posibles a tres, frente al máximo de N que presentaba el modelo original. Como se ha mencionado antes, el BM está completamente descrito por la evolución de una única variable de estado, a la que se denomina ν [19], y que idealiza la energía (o deformación) elástica acumulada en una falla. Esta variable es discreta, y toma valores enteros en el rango $0, 1, 2 \dots N$. El modelo evoluciona en pasos de tiempo discretos según las reglas siguientes: 1) Al comienzo, $\nu = 0$; 2) en cada paso temporal, ν aumenta una unidad con probabilidad $1 - \nu/N$, y permanece estable con probabilidad ν/N ; 3) al llegar al valor umbral $\nu = N$, el sistema se relaja instantáneamente hasta su estado inicial $\nu = 0$. Esta relajación es análoga a un terremoto. El ciclo sísmico es, por tanto, el intervalo de tiempo entre dos relajaciones en el modelo.

El BM tiene N estados estables, con $\nu = 0, 1, 2 \dots (N - 1)$, respectivamente. El estado $\nu = N$ no es estable, puesto que el modelo no permanece ningún paso temporal en él. El aumento de ν a lo largo del ciclo muestra semejanzas cualitativas con el aumento de la deformación elástica acumulada en una falla a lo largo del tiempo [18].

El m-BM tiene a N como único parámetro ajustable, al igual que ocurre en el BM. Sin embargo, en el m-BM, con independencia del valor de N , supondremos que sólo existen tres estados (configuraciones) estables. Uno, que denotaremos A , en que $\nu = 0$; uno segundo, intermedio, que denotaremos I ; y otro, denotado C , en el que $\nu = N - 1$. El estado I aglutinará así a las $N - 2$ configuraciones intermedias que existían en el BM. De

esta manera, en el m-BM se pierde el detalle de cómo evoluciona el valor de ν a lo largo del ciclo.

Las probabilidades de transición entre los estados estables del BM se pueden tabular en una matriz de Markov. sta es una matriz cuadrada con un número de filas (y columnas) igual al número de estados estables en el sistema. Cada elemento $\mathbf{M}_N(i, j)$ de la matriz denota la probabilidad de transición, en un sólo paso, del estado i al estado j . Para una discusión general de los procesos de Markov puede consultarse la referencia [22]. En el BM, puesto que hay N estados estables, la matriz de Markov es de tamaño $N \times N$, mientras que en el m-BM será siempre de tamaño 3×3 para cualquier sistema con $N \geq 3$. Además cuando $N = 3$, el BM y el m-BM son estrictamente el mismo modelo. Los tres estados del m-BM constituyen una cadena de Markov, irreducible y aperiódica, con una única distribución estacionaria [22]. Los elementos de la matriz de Markov para un m-BM con parámetro N son simplemente:

$$\begin{aligned} A \rightarrow A &= 0 & A \rightarrow I &= 1 & A \rightarrow C &= 0 \\ I \rightarrow A &= 0 & I \rightarrow I &= \eta & I \rightarrow C &= 1 - \eta \\ C \rightarrow A &= \frac{1}{N} & C \rightarrow I &= 0 & C \rightarrow C &= 1 - \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (1)$$

de manera que la matriz de Markov tiene la forma:

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 - \eta \\ \frac{1}{N} & 0 & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde el valor de $\eta \leq 1$ es desconocido y será calculado imponiendo que la probabilidad de residencia estacionaria (tiempo medio de permanencia) del sistema en la configuración I , π_I , coincida con la suma de las probabilidades de residencia estacionarias del BM en todas las configuraciones intermedias representadas por I .

Para deducir η , y así determinar por completo la matriz de Markov, resulta conveniente definir el siguiente factor de normalización:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}, \quad (3)$$

$$S \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma + \ln N + \frac{1}{2N}, \quad (4)$$

siendo $\gamma \simeq 0,5772157$ la constante de Euler.

A partir de la matriz de Markov del BM [19] se puede calcular [22] que las probabilidades estacionarias de encontrar al sistema con $\nu = 0$ ó $\nu = N - 1$ son, respectivamente

$$\pi_A = \frac{1}{NS}, \text{ y} \quad (5)$$

$$\pi_C = \frac{1}{S}. \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que la suma de probabilidades de residencia estacionarias debe ser igual a 1, obtenemos que

$$\pi_I = 1 - (\pi_A + \pi_C) = 1 - \frac{1 + N}{NS}. \quad (7)$$

A su vez, mediante el cálculo explícito de π_I a partir de \mathbf{M}_N (aplicando el método correspondiente [22] a la Ec. 2) resulta

$$\pi_I = \frac{1 - \eta}{(1 - \eta)(1 + N) + 1}. \quad (8)$$

Igualando las ecuaciones (7) y (8) obtenemos

$$\eta = \frac{N(S - 1) - 2}{N(S - 1) - 1}, \quad (9)$$

con lo que la matriz de Markov \mathbf{M}_N queda completamente determinada.

3. Distribución estadística de la duración de los ciclos

A partir de la matriz de Markov, calculada mediante las Ec. (2) y (9), se puede obtener la función de distribución de probabilidad de la duración de los ciclos en el m-BM. Para ello emplearemos el método algebraico explicado para el BM en [19], previamente utilizado también para el Modelo Minimalista ([14], y con más detalle en [15]). Esta función de distribución de probabilidad se ha venido denotando en otros modelos [14, 15, 18, 19] como $P_N(n)$, y define la probabilidad de que, para un modelo con parámetro N , el ciclo dure n pasos temporales. A lo largo del ciclo, el m-BM cambia en $n - 1$ pasos desde el estado A al I , y de éste al C , sin regresar al estado A en ningún momento dentro del ciclo. Por último, en el paso n se produce la transición desde el estado C al A . Para calcular $P_N(n)$ deduciremos entonces en primer lugar la probabilidad de que el sistema pase en $n - 1$ pasos desde A a C , sin haber pasado por A en el camino. Después multiplicaremos esa probabilidad por la correspondiente a pasar de C a A en el paso n . Con este propósito [22] se ha de construir una nueva matriz a partir de \mathbf{M}_N , en la que se anula la probabilidad de pasar directamente de C a A , esto es, el elemento $\mathbf{M}_N(1, 3)$, quedando la nueva matriz como

$$\mathbf{M}'_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 - \eta \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

y ahora esta matriz debe elevarse a la potencia $n - 1$ (véase [22]). El elemento $[\mathbf{M}'_N]^{n-1}(1, 3)$ indicará la probabilidad de pasar en $n - 1$ pasos desde A a C , sin haber pasado por A en

el camino. Como la probabilidad de pasar de C a A en un sólo paso es $1/N$, entonces la distribución de probabilidad del m-BM será

$$P_N(n) = \frac{1}{N} [\mathbf{M}'_N]^{n-1} (1, 3). \quad (11)$$

La potenciación de la matriz \mathbf{M}'_N se realiza mediante la descomposición de Jordan,

$$[\mathbf{M}'_N]^{n-1} = \mathbf{X}_N \cdot \mathbf{\Lambda}_N^{n-1} \cdot \mathbf{Y}_N, \quad (12)$$

siendo \mathbf{X}_N , $\mathbf{\Lambda}_N$ e \mathbf{Y}_N las matrices

$$\mathbf{X}_N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\eta} & P \\ 0 & 1 & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\eta} & R \\ 0 & 1 & -Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Las funciones P , Q y R han sido introducidas con el único propósito de aliviar la notación en el cálculo matricial, y se definen como

$$P \equiv \frac{N^2(\eta - 1)}{(N - 1)(1 - N + \eta N)}, \quad (14)$$

$$Q \equiv \frac{N(\eta - 1)}{1 - N + \eta N}, \quad (15)$$

$$R \equiv \frac{-Q}{\eta} - P. \quad (16)$$

Efectuando las operaciones mencionadas anteriormente, la distribución estadística de la duración del ciclo en el modelo es

$$P_N(n) = K (\beta^{n-2} - \eta^{n-2}), \quad (17)$$

que está definida para $n \geq 2$. K y β se han introducido para simplificar la notación, y se definen como

$$K \equiv \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1}, \text{ y} \quad (18)$$

$$\beta \equiv 1 - \frac{1}{N}. \quad (19)$$

Nótese que K siempre es negativa.

Puede observarse que $P_N(n)$ es la diferencia de dos distribuciones geométricas. Dos casos particulares de esta distribución, para dos valores diferentes de N , se muestran, respectivamente, en las Figuras 1 y 2, donde se los compara con distribuciones resultantes de un BM de igual N .

Por último, la distribución de probabilidad acumulada para $n \geq 2$ es

$$A_N(n) = K \left(\frac{1 - \beta^{n-1}}{1 - \beta} - \frac{1 - \eta^{n-1}}{1 - \eta} \right). \quad (20)$$

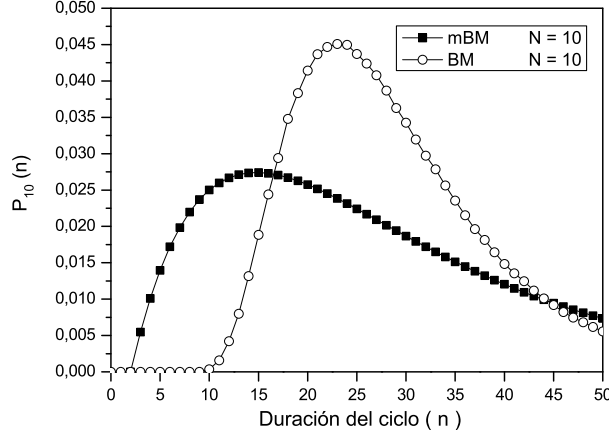


Figura 1.— Distribución $P_N(n)$ para $N = 10$ en el BM y m-BM.

4. Media, desviación estándar y aperiodicidad

En este apartado deduciremos los dos primeros momentos de la distribución $P_N(n)$: la media (número medio de pasos por ciclo, $\langle n \rangle_N$) y la desviación estándar (σ_N). A partir de ellos es inmediato calcular la aperiodicidad (coeficiente de variación), definida como el cociente

$$\alpha_N \equiv \frac{\sigma_N}{\langle n \rangle_N}. \quad (21)$$

La media de $P_N(n)$, expresada en función de K y β [Ecs. (18) y (19)], es

$$\langle n \rangle_N = K \sum_{n=2}^{\infty} n (\beta^{n-2} - \eta^{n-2}). \quad (22)$$

Dada la forma de la Ec. 22, lo único que resta por calcular es la suma

$$B \equiv \sum_{n=2}^{\infty} n \beta^n = 2\beta^2 + 3\beta^3 + 4\beta^4 + \dots. \quad (23)$$

Para ello empleamos la función

$$P \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \beta^n = \frac{\beta^2}{1-\beta}. \quad (24)$$

La derivada de P con respecto a β es

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\beta} &= \frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)^2} = 2\beta + 3\beta^2 + 4\beta^3 + \dots \\ &= \frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)^2} - (\beta^2 + \beta^3 + \dots) + (\beta^2 + \beta^3 + \dots) \\ &= 2\beta + B + \frac{\beta^2}{1-\beta}, \end{aligned} \quad (25)$$

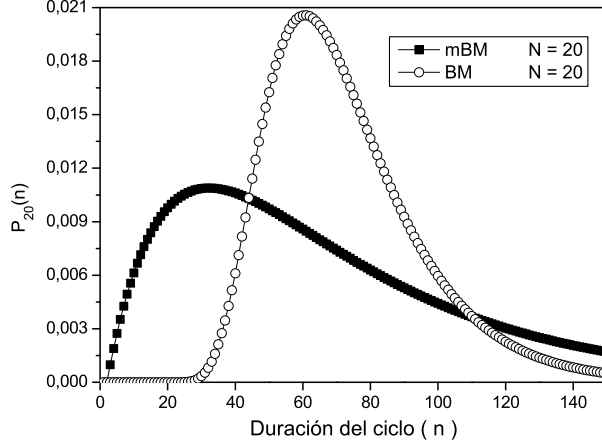


Figura 2.— Distribución $P_N(n)$ para $N = 20$ en el BM y m-BM.

por lo que B es

$$B = \frac{\beta^2(2 - \beta)}{(1 - \beta)^2}. \quad (26)$$

Sustituyendo la Ec. (26) en la Ec. (22) obtenemos la media

$$\langle n \rangle_N = \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1} \left(\frac{2 - \beta}{(1 - \beta)^2} + \frac{2 - \eta}{(1 - \eta)^2} \right). \quad (27)$$

Procedemos ahora a calcular la varianza, que viene dada por la expresión

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P_N(n) - \langle n \rangle_N^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle_N^2. \quad (28)$$

Para ello lo único nuevo que resta calcular es la función D , definida como

$$D \equiv \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \beta^n = 2^2 \beta^2 + 3^2 \beta^3 + 4^2 \beta^4 + \dots. \quad (29)$$

Usando argumentos similares a los empleados en el cálculo de $\langle n \rangle_N$, obtenemos

$$D = \frac{dB}{d\beta} - 4\beta - 2B - \frac{\beta^2}{1 - \beta}, \quad (30)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{dB}{d\beta} - 4\beta - 2B - \frac{\beta^2}{1 - \beta} \right] \right\} - \\ &- \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1} \left\{ \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{dA}{d\eta} - 4\eta - 2A - \frac{\eta^2}{1 - \eta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

siendo A la expresión análoga a B (Ec. 26) pero sustituyendo η por β , es decir

$$A \equiv \frac{\eta^2(2 - \eta)}{(1 - \eta^2)}. \quad (32)$$

La Ec. (31), junto con la Ec. (27), permiten obtener explícitamente la desviación estándar (raíz cuadrada de σ_N^2) en función de N . La aperiodicidad de la distribución se puede calcular con la Ec. (21). La media y desviación estándar de $P_N(n)$ en el BM y m-BM se comparan en la figura 3, mientras que en la figura 4 se hace lo propio con la aperiodicidad. Se deduce analíticamente que, en el m-BM, α_N tiende a la unidad cuando N tiende a infinito.

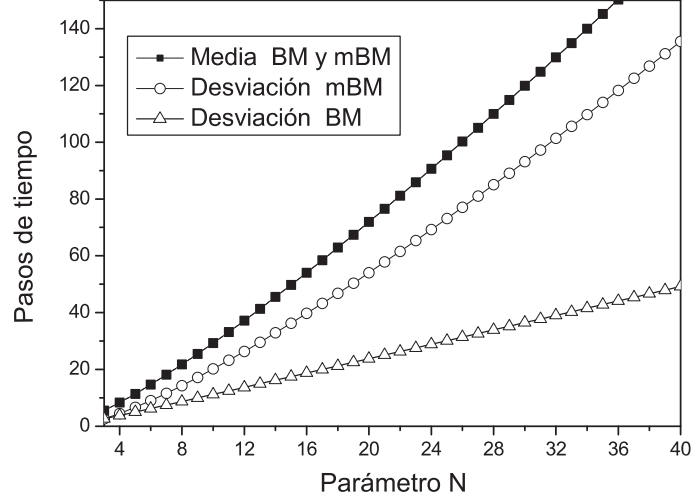


Figura 3.— Media y desviación estándar de $P_N(n)$ del BM y m-BM para varios valores de N . Nótese como la media es idéntica para un mismo N en ambos modelos, mientras que la desviación estándar es diferente (siempre mayor en el m-BM), salvo cuando $N = 3$, valor para el cual ambos modelos son idénticos.

5. Función de riesgo

En todo modelo de renovación desempeña un papel importante la función de riesgo. Esta se define como la probabilidad instantánea de que finalice el ciclo, siempre que no haya finalizado ya. En modelos discretos como el que nos ocupa, es la probabilidad de que el ciclo finalice en un paso dado (n), si llegado ese paso no ha finalizado aún [23]. La función de riesgo es por tanto

$$h_N(n) \equiv \frac{P_N(n)}{\sum_n P_N(n)}. \quad (33)$$

En el m-BM esta función es siempre creciente, pero tiende a un valor constante positivo cuando el ciclo es muy largo:

$$h_N(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\eta^{n-2}}{\frac{\eta^{n-2}}{1-\eta}} = 1 - \eta = \frac{1}{N(S-1)-1}. \quad (34)$$

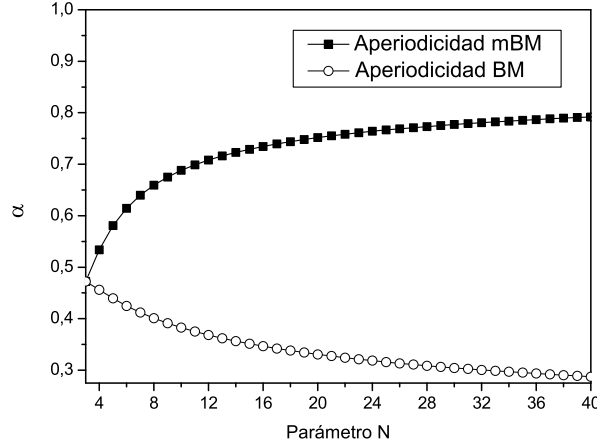


Figura 4.— Aperiodicidad de $P_N(n)$ del BM y m-BM para varios valores de N . Cuando $N \rightarrow \infty$, la aperiodicidad tiende a cero en el BM, mientras que tiende a la unidad en el m-BM.

Para sistemas grandes ($N \rightarrow \infty$), este valor asintótico de la función de riesgo tiende a cero, de la forma

$$h_N(n) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N \ln N}. \quad (35)$$

6. Conclusiones

Hemos presentado una nueva función de distribución de probabilidad, discreta y de un sólo parámetro, basada en un modelo de renovación que hemos denominado modelo de caja miniaturizado (*mini-Box Model*, m-BM). Este modelo resulta a su vez de una reducción de estados del llamado Modelo de Caja (*Box Model*, BM) [18, 19]. El único parámetro, común a ambos modelos, es N . En el BM había N estados posibles, definidos por otros tantos valores de una variable de estado, $\nu = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$. En el m-BM existen sólo tres estados estables, uno en el que $\nu = 0$, otro en el que $\nu = N - 1$, y uno intermedio entre ambos que aglutina a los $N - 2$ estados intermedios que existían en el BM. El nuevo modelo se define (Ec. 2) obligando a que el estado intermedio tenga la misma duración promedio que el conjunto de los estados intermedios del BM a los que agrupa. Así, para un mismo N , la duración media de los ciclos es idéntica en ambos modelos (Fig. 3). Además, para $N = 3$ ambos modelos son estricta y trivialmente idénticos.

En el BM, ν era nula al comienzo del ciclo, y podía incrementarse como mucho en una unidad por cada paso de tiempo transcurrido. El ciclo terminaba cuando $\nu = N$, momento en el que el sistema se relajaba instantáneamente hasta el estado estable $\nu = 0$. Un ciclo del BM duraba por tanto un mínimo de N pasos temporales (Figs. 1 y 2). En el m-BM, al tener sólo los tres estados mencionados, la duración mínima de los ciclos es de tres pasos

temporales, independientemente de N (Figs. 1 y 2). Para $N > 3$, esta duración mínima es más corta en el m-BM que en el BM. Puesto que las distribuciones de ambos modelos tienen igual media para un mismo N , la diferencia mencionada causa una distribución más ancha en el m-BM que en el BM correspondiente (Figs. 1 y 2). Así, la desviación estándar y la aperiodicidad son mayores en la distribución del m-BM que en la del BM para cualquier $N > 3$ (Figs. 3 y 4). Mientras que la aperiodicidad (coeficiente de variación) de la distribución del BM se podía encontrar, en función de N , entre 0 y $\simeq 0,47$, la del m-BM puede ser desde este último valor hasta la unidad. Podría decirse así que ambas familias de distribuciones (del BM y del m-BM) son en cierta forma complementarias.

Precisando, la distribución de probabilidad del m-BM es una diferencia de dos distribuciones geométricas, que resulta nula para ciclos de dos pasos temporales, siendo no nula para ciclos de tres pasos temporales o más de duración. Para ciclos muy largos la distribución de probabilidad está dominada por un puro decaimiento geométrico, por lo que la función de riesgo tiende a una constante mayor que cero. Esto último también ocurre en otros modelos de renovación inspirados en el proceso de recurrencia de terremotos en fallas: el Brownian Passage Time [4], el Modelo Minimalista [16], y el BM [18, 19], aunque los valores asintóticos de la función de riesgo son diferentes para cada modelo.

Consideramos que el m-BM podría ser interesante para describir la distribución de probabilidad de duración de los ciclos sísmicos de una falla, si la aperiodicidad de la serie de ciclos está entre $\simeq 0,47$ y 1, análogamente a lo que ocurriría con el BM para aperiodicidades inferiores [18]. Esta propuesta se basa, por una parte, en que el m-BM está derivado a partir del BM, cuya variable de estado sigue una evolución semejante a la de la deformación elástica acumulada en una falla [18]. También, la tendencia creciente de la función de riesgo a lo largo del ciclo es consistente con la teoría del rebote elástico: conforme el ciclo avanza, la energía elástica acumulada en la falla es mayor, y por tanto existe más riesgo de que se produzca un nuevo terremoto. Asimismo, la distribución de probabilidad de duración del ciclo en el m-BM cumple los tres requisitos que las series de ciclos sísmicos reales sugieren, a saber: 1) está definida sólo para valores positivos de la duración de los ciclos; 2) tiene sombra de esfuerzo: los ciclos muy breves (de menos de tres pasos temporales) son inexistentes (cabe recordar que en el BM [18, 19] y en el Modelo Minimalista [14, 15, 16] la duración de esta sombra de esfuerzo era $N - 1$ pasos); y 3) la probabilidad es siempre decreciente para duraciones del ciclo mucho mayores que la duración media.

Para ajustar la distribución del m-BM a una serie de ciclos sísmicos reales debiera seguirse el procedimiento utilizado con otros modelos [12, 16, 18], detallado en [18]: 1) Calcular la aperiodicidad de la serie real; 2) hallar el valor de N para el cual la distribución del m-BM tiene esa misma aperiodicidad; 3) calcular el factor de proporcionalidad entre la media de la serie real y la del m-BM, con lo que se determina cuál es el tiempo real al

que corresponde un paso de tiempo adimensional del modelo.

Referencias

- [1] Reid, H. F.: 1910, “The mechanics of the earthquake”, En: *The California Earthquake of April 18, 1906, Report of the State Earthquake Investigation Comission*, Carnegie Institution (Washington, USA), Vol. 2, pp. 1–192.
- [2] Scholz, C. H.: 2002, *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*, segunda edición. Cambridge University Press (Cambridge, UK), 496 pp.
- [3] Ellsworth, W. L.; Matthews, M. V.; Nadeau, R. M.; Nishenko, S. P.; Reasenber, P. A. & Simpson, R. W.: 1999, *A Physically-Based Earthquake Recurrence Model for Estimation of Long-Term Earthquake Probabilities*. United States Geological Survey Open-File Report 99–552 (Menlo Park, California, USA), 22 pp.
- [4] Matthews, M. V.; Ellsworth, W. L. & Reasenber, P. A.: 2002, “A Brownian model for recurrent earthquakes”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **92** (6), 2233–2250.
- [5] Lindh, A. G.: 2003, “Long-term earthquake forecasts in the San Francisco Bay area: A contrarian perspective”. *Eos, Transactions, American Geophysical Union*, **84** (46), abstract NG41C-0069.
- [6] Zöller, G.; Hainzl, S.; Ben-Zion, Y. & Holschneider, M.: 2006, “Earthquake activity related to seismic cycles in a model for a heterogeneous strike-slip fault”. *Tectonophysics*, **423** (1–4), 137–145.
- [7] Savage, J. C.: 1994, “Empirical earthquake probabilities from observed recurrence intervals”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **84** (1), 219–221.
- [8] Michael, A. J.: 2005, “Viscoelasticity, postseismic slip, fault interactions, and the recurrence of large earthquakes”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **95** (5), 1594–1603.
- [9] Harris, R. A.: 2000, “Earthquake stress triggers, stress shadows, and seismic hazard”. *Current Science*, **79** (9), 1215–1225.
- [10] Working Group on California Earthquake Probabilities: 2003, *Earthquake Probabilities in the San Francisco Bay Region: 2002–2031*. United States Geological Survey Open-File Report 03-214 (Menlo Park, California, USA), 234 pp.
- [11] Utsu, T.: 1984, “Estimation of parameters for recurrent models of earthquakes”, *Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo*, **59**, 53–66.
- [12] González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2006, “Updating seismic hazard at Parkfield”, *Journal of Seismology*, **10** (2), 131–135.

- [13] Kagan, Y. Y. & Knopoff, L.: 1987, “Random stress and earthquake statistics: time dependence”, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **88** (3), 723–731.
- [14] Vázquez-Prada, M.; González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2002, “A minimalist model of characteristic earthquakes”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, **9** (5–6), 513–519.
- [15] Vázquez-Prada, M.; González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2003, “Forecasting characteristic earthquakes in a minimalist model”. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **10** (3), 565–571.
- [16] Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2004, “The minimalist model of characteristic earthquakes as a useful tool for description of the recurrence of large earthquakes”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **94** (5), 1960–1967.
- [17] González, Á.; Vázquez-Prada, M.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2006, “A way to synchronize models with seismic faults for earthquake forecasting: Insights from a simple stochastic model”, *Tectonophysics*, en prensa.
- [18] González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2005, “The occupation of a box as a toy model for the seismic cycle of a fault”, *American Journal of Physics*, **73** (10), 946–952.
- [19] González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2006, “Appendix to: The occupation of a box as a toy model for the seismic cycle of a fault”, *arXiv.org e-print archive*, <http://arxiv.org/abs/physics/0502048>
- [20] Vere-Jones, D.: 1970, “Stochastic model for earthquake occurrence”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, **32** (1), 1–62.
- [21] Çinlar, E.: 1975, *Introduction to Stochastic Processes*, Ed. Prentice Hall (New York, USA), 402 pp.
- [22] Durrett, R.: 1999, *Essentials of Stochastic Processes*. Ed. Springer Verlag (Berlin, Alemania), 281 pp.
- [23] Shaked, M.; Shanthikumar, J. G. & Valdez-Torres, J. B.: 1995, “Discrete hazard rate functions”, *Computers & Operations Research*, **22** (4), 391–402.