Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **61:** 7–46, (2006).

Geometría de órbitas de representaciones de grupos y álgebras promediables

José E. Galé

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Premio a la Investigación de la Academia 2006. Sección de Exactas

Dedicado a mis padres.

Resumen

Ciertas órbitas de semejanza de representaciones de grupos localmente compactos o álgebras de Banach (álgebras de operadores en particular) admiten una configuración geométrica como espacios homogéneos (de Banach) reductivos. Esto ocurre por ejemplo cuando ambos, grupos o álgebras, son promediables. El concepto de grupo promediable surge en relación con la teoría de la medida, mientras que la promediabilidad de álgebras de Banach aparece ligada a problemas de tipo homológico. Se da aquí una panorámica general acerca de la interdependencia de estas nociones, en un contexto geométrico. Más precisamente, se explica cómo puede obtenerse la estructura reductiva mediante la definición, usando operaciones promedio, de una esperanza condicional que juega el papel de 1-forma de conexión, así como el proceso que lleva (o llevó) de manera natural a la consideración de tal método. En la parte final de esta reseña se muestra algunos posibles desarrollos futuros de estas ideas.

2000 Mathematics Subject Classification 46H15, 47A67, 43A65, 43A07, 58B99

Introducción

Hay una ingente literatura matemática sobre análisis y geometría en grupos y álgebras de Lie modelados en espacios de Banach de dimensión infinita. Dos grandes áreas de estudio destacan en este sentido: el análisis armónico en grupos de Lie, sus espacios homogéneos y estructura, por un lado, y la geometría y teoría de representación de grupos de Lie, por el otro. Ambas disciplinas se han beneficiado por igual de los desarrollos en la teoría de representación inspirados en la física cuántica. Es de destacar, en particular, la aplicabilidad a la teoría de representaciones de métodos geométricos propios de las estructuras geométricas que, si se da el caso, poseen determinados conjuntos asociados a las representaciones. A continuación cito algunos ejemplos de mucho interés en análisis funcional, relativos a convexidad, geometría simplética, fibrados vectoriales.

Sea A un álgebra C^*, ó C^*-álgebra (cuando en la escritura venga detrás el objeto matemático así señalado), y $\mathcal{S}(A)$ el espacio de estados de A, débilmente* compacto y convexo. El método de construcción de representaciones de A en espacios de Hilbert, conocido como método GNS (de Gelfand-Naimark y Segal), establece una relación directa entre representaciones y estados, de modo que las representaciones GNS irreducibles se hallan en correspondencia biunívoca con los puntos extremos del compacto convexo $\mathcal{S}(A)$. Para grupos y álgebras de Lie, la relación entre convexidad, holomorfía y representaciones es profunda. El libro de K. H. Neeb [N] sobre la teoría de representación holomorfa (dimensión finita) es una extraordinaria fuente de información al respecto. Aunque mucho de lo incluido en [N] puede extenderse sin traumas a dimensión infinita, está por determinarse los precisos alcance y forma de una tal extensión.

El método de órbitas de Kirillov, Konstant y otros, tiene como objetivo ligar el análisis armónico de los grupos de Lie (y sus representaciones) con la geometría simplética. En concreto, el método consiste en utilizar la estructura simplética inherente a las órbitas de la representación co-adjunta del grupo de Lie (es decir, órbitas bajo la acción co-adjunta del grupo en cuestión sobre el espacio dual de su álgebra de Lie) como plataforma para construir representaciones unitarias irreducibles del grupo, inducidas por representaciones de subgrupos adecuados, véase [Ki1], [F]. Además de esto, se trata de establecer una especie de diccionario de ida y vuelta entre representaciones y órbitas, de modo que las propiedades de las representaciones unitarias se traduzcan en propiedades geométricas de las órbitas y viceversa. En dimensión infinita el método no es aplicable en todos sus detalles por razones obvias, pero admite variantes parciales. Recientemente se ha considerado el procedimiento GNS como sustituto de la vía simplética, y se ha probado que, de manera semejante a lo que ocurre en el proceso de inducción de representaciones, se puede apelar a fibrados vectoriales (vía el uso de núcleos reproductivos) para hallar modelizaciones geométricas de representaciones GNS restringidas a grupos unitarios de álgebras C^* ([BR2]).

Por otra parte, es clásica la relación entre la teoría de fibrados vectoriales y la de representaciones de grupos. En esa conjunción se encuentra uno de los ejemplos más resonantes de variedad infinito-dimensional. Supongamos dado un fibrado vectorial hermítico sobre una superficie de Riemann compacta. En su investigación acerca de las ecuaciones de Yang- Mills, Atiyah y Bott observaron que el espacio de conexiones $\mathcal{C}$ asociado al fibrado puede verse como variedad de Kähler (de dimensión infinita), con el grupo "gauge", o calibre, del fibrado actuando sobre $\mathcal{C}$ mediante isometrías. Este ejemplo ha sido de mucha influencia en posteriores desarrollos (enlazando en particular con la teoría de representación de grupos fundamentales de variedades khälerianas), y presenta elementos que podrían quizá generalizarse en el contexto que se describe en este trabajo. Para más casuística sobre variedades de dimensión infinita véase [GM], y el artículo de Corlette de [GM] para la anterior nota.

De hecho, abundan los ejemplos de espacios homogéneos (es decir, variedades sujetas a la acción transitiva de grupos de Lie) de dimensión infinita, cuya geometría diferencial es un problema básico en diversas áreas como las de teoría de representaciones ya mencionada (modelizaciones geométricas de representaciones, ...), teoría de operadores, geometría compleja, álgebras de operadores [B]. Los espacios homogéneos asociados de manera natural a un álgebra de operadores A suelen presentarse en forma de órbitas (bajo la acción de algún grupo de Lie infinito-dimensional) de objetos matemáticos de especial significación para A, tales como estados, proyecciones, esperanzas condicionales, ... , o representaciones. Estamos diciendo pues, y en particular, que las órbitas de representaciones no sólo guardan relación estrecha, como se ha indicado ya, con objetos geométricos exógenos, sino que *ellas mismas* poseen estructuras geométricas inherentes. Tal carácter geométrico es conocido de antiguo. (Como muestra, supongamos que G_f es un grupo finitamente generado, G_t un grupo topológico, y denotemos por $Hom(G_f; G_t)$ el conjunto de homomorfismos entre G_f y G_t. Entonces se tiene que $Hom(G_f; G_t)$ es una variedad algebraica, si G_t es grupo algebraico, y $Hom(G_f; G_t)$ es variedad de Lie si G_t es grupo de Lie.) El estudio de espacios de representaciones, contemplados éstos como variedades algebraicas o topológicas provistas de la topología ambiente adecuada a cada caso, es un área activa de investigación. Entre sus problemas de interés se cuenta el de la descripción de componentes conexas y clausura de órbitas ([GM]).

En el presente artículo-reseña vamos a centrarnos en algunos aspectos de la geometría diferencial de órbitas de representaciones de grupos localmente compactos y/o álgebras de Banach. En determinados espacios homogéneos (de Banach) adscritos a las álgebras de operadores existen estructuras diferenciables de tipo simplético, o de tipo khäleriano ([B]). Aquí vamos a considerar la geometría diferencial ligada al concepto de conexión y sus nociones asociadas: estructura homogénea reductiva, desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc. No todo grupo (o álgebra) cumple que sus espacios de representaciones admitan una tal geometría. La noción clave a considerar va a ser entonces la de grupo (álgebra) promediable. (Utilizo "promediable" como la traducción aparentemente más airosa del término inglés "amenable", y siguiendo la pertinente sugerencia del profesor F. Bombal.)

Un grupo topológico (se admite la topología discreta) se llama promediable cuando admite una función promedio sobre él (véase la siguiente sección). La promediabilidad de grupos es un concepto clásico del análisis armónico abstracto que se remonta a los orígenes de la teoría moderna de la medida. F. Hausdorff planteó la cuestión de la existencia de una función definida sobre el conjunto de las partes de $\mathbb{R}^n$ que fuese finitamente aditiva, de medida uno sobre el cubo unidad, e *invariante* por isometrías. Para $n = 1$ y 2, S. Banach demostró que existe tal función, pero el propio Hausdorff probó que no existe si $n \geq 3$. Para entender justamente el porqué de ese comportamiento dispar conviene precisar que la cuestión de Hausdorff puede plantearse, en términos adecuados, para cualquier grupo, y que son los promediables los que dan respuesta positiva. A saber, un grupo discreto G es promediable si y sólo si existe una función finitamente aditiva de conjuntos μ sobre las partes de G, con $\mu(G) = 1$, invariante para la acción del grupo sobre los subconjuntos de G (si y sólo si G es no-paradójico), [Ru2]. El primero en considerar grupos promediables explícitamente fue J. von Neumann, pero fue M. M. Day quien les puso su nombre actual.

Es bastante más moderna la noción de álgebra de Banach promediable (me tomo la libertad de traducir así también la "amenability" de álgebras). El término y su significado fueron definidos por B. E. Johnson en clave de propiedades cohomológicas, y el mismo Johnson demostró que, dado un grupo localmente compacto $\mathfrak{G}$, entonces ocurre que $\mathfrak{G}$ es promediable como grupo si y sólo si el álgebra de grupo $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable como álgebra de Banach (de convolución) [J1]. Desde su introducción, las álgebras promediables han venido siendo objetos de investigación extremadamente interesantes, con presencia en el contexto de álgebras de operadores, en la moderna teoría de espacios de operadores, en análisis armónico, cohomología, etc.

A pesar de reflejar en principio mundos matemáticos aparentemente tan distantes, resulta que la geometría (reductiva) de representaciones y la promediabilidad en el sentido anterior son áreas con amplia intersección. Creo que este hecho, siendo de interés, no es muy conocido en general, por lo que merece la pena dar una idea del mismo.

Así pues, el objetivo del presente trabajo es proporcionar una vista de conjunto sobre la relación existente entre promediabilidad y geometría diferencial (de conexiones) de órbitas de representaciones. No voy a exponer (por razones de espacio, e intentando presentar un resumen que no resulte muy arduo de leer) una relación ni siquiera mínimamente exhaustiva de la casuística, muy variada, que se encuentra en derredor del tema. Más bien me centraré en cómo la existencia de funcionales promedio definen directamente secciones y formas de conexión, conceptos geométricos centrales de los que emana lo demás, sin prestar demasiada atención a fórmulas o resultados relativos a nociones asociadas. En lugar de proceder axiomáticamente, digamos, yendo de lo más general a lo particular, he preferido seguir el camino opuesto, ateniéndome a la, más o menos fiel, cronología de los avances realizados paulatinamente. De este modo, he intentado dotar a la exposición de una cierta frescura que haga factible la comprensión de las motivaciones y génesis de los trabajos [CG1], [CG2], así como de las implicaciones que tal punto de vista pueda tener en posteriores desarrollos (véase la sección 5).

Como se verá, la importancia de las contribuciones realizadas por la Escuela Argentina en este orden de ideas ha sido y es muy notable. Quisiera que esta breve memoria se viera también como un homenaje, en la medida de mis alcances, a mis amigos y colegas de dicha escuela.

Antes de entrar en materia (o más bien haciéndolo fugazmente) conviene señalar que siempre que se lea en el texto el símbolo $\langle \cdot , \cdot \rangle$ se debe interpretar que se hace referencia a algún tipo de dualidad (que estará clara en el contexto).

1 Escenario

Variedades de Banach. El contenido de esta reseña afecta por un lado a nociones, propiedades y resultados sobre variedades de Lie de dimensión infinita. Siendo ésta un área de las Matemáticas no tan familiar como puedan serlo otras, parece oportuno dar un mínimo de fundamentos que facilite la lectura del artículo, por lo menos a grandes rasgos. El material incluido está tomado de [Ru2], [U]. Es recomendable asimismo echar una ojeada a [R] y [B].

Trataremos con espacios vectoriales y álgebras sobre el cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si E y F son $\mathbb{K}$-espacios de Banach, denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ el espacio de aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales y continuas de E en F. Cuando $F = E$, abreviaremos poniendo $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E)$, y se suprimirá la letra $\mathbb{K}$ cuando el contexto deje claro de qué cuerpo $\mathbb{K}$ se trata. Sólo nos interesa la definición de variedad analítica (u holomorfa) y analítica-real. Tales variedades se modelan sobre espacios de Banach. La noción de holomorfía entre ellos es por supuesto la de diferenciabilidad *compleja* de Fréchet, en la que la diferencial en un punto es $\mathbb{C}$-lineal. Entonces una función entre (abiertos de) espacios de Banach reales es analítica real si es la restricción de una función holomorfa definida entre los espacios de Banach complexificados de los espacios de partida. Escribiré $\mathbb{K}$-analítico para referirme a la holomorfía o a la analiticidad real, según $\mathbb{K}$ sea $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, respectivamente.

Un ejemplo básico para nosotros es el siguiente. Sea A álgebra de Banach compleja y con unidad, y sea $G(A)$ el grupo de sus elementos inversibles. Entonces $G(A)$ es un conjunto abierto en A y la aplicación de toma de inversos $a \mapsto a^{-1}$, $G(A) \to G(A)$ es analítica. Más aún, su diferencial en $x \in G(A)$ viene dada por $y \mapsto -x^{-1}yx^{-1}$ ([B, p. 255]).

Sea Z espacio topológico regular y sea E espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. La definición de *atlas* y *carta* en Z con relación a E es enteramente análoga a la del caso clásico, en que E es de dimensión finita. Llamaremos *variedad de Banach* $\mathbb{K}$-analítica a todo espacio

Z, como el anterior, dotado de un atlas $\mathbb{K}$-analítico. Tampoco vamos a entrar en detalle sobre la descripción del espacio tangente $T_z(Z)$ a una variedad de Banach Z en un punto $z \in Z$. Ahora bien, nos interesa apuntar varias cosas:

(a) $T_z(Z)$, para cada $z \in Z$, es un espacio de Banach isomorfo a E, si Z está modelada sobre E.

(b) Si $f : Z_1 \to Z_2$ es una aplicación $\mathbb{K}$-analítica entonces existe, unívoca, la diferencial df_z de f en $z \in Z_1$ y $df_z \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(T_z(Z_1), T_{f(z)}(Z))$.

(c) Si Z es un espacio de Banach entonces puede modelarse sobre si mismo y la identificación, para cada $z \in Z$, entre Z y $T_z(Z)$ viene dada por $w \mapsto X_w, Z \to T_z(Z)$ siendo $X_w(f) = (d/dt)f(z+tw)_{t=0}$, para toda función f $\mathbb{K}$-analítica en z.

Sea ahora W un subconjunto (no vacío) de una variedad Z. Diremos que W es una *subvariedad* (de Banach) de Z si para cada $w \in W$ existe una carta (U, ϕ), con $w \in U$, y un subespacio F complementado topológicamente en E tales que $\phi(W \cap U) = F \cap \phi(U)$.

LLamamos *grupo de Banach-Lie* a todo grupo topológico G (con identidad e) que además es una variedad de Banach, y para el cual las aplicaciones

$$(u, v) \mapsto u\ v,\ G \times G \to G; \quad u \mapsto u^{-1}, G \to G$$

son $\mathbb{K}$-analíticas. En ese caso, un subgrupo de G se llama *subgrupo de Banach-Lie* de G si es subvariedad de G.

Como ejemplo muy importante de grupo de Banach-Lie tenemos el grupo $G(A)$ de un álgebra de Banach A con unidad e. Su espacio tangente es $T_e(G(A)) \equiv A$. En este caso la identificación entre ambos espacios viene dada por $a \equiv X_a = [(d/dt)e^{ta}]_{t=0}$, siendo $e^{(\ \cdot\ )}$ la aplicación exponencial en A.

Dados un grupo de Banach-Lie G y una variedad de Banach Z se dice que G *actúa* ($\mathbb{K}$-analíticamente) sobre Z si existe una aplicación $(u, z) \mapsto u \cdot z,\ G \times Z \to Z$, llamada *acción* de G sobre Z, $\mathbb{K}$-analítica, tal que $(u\ v) \cdot z = u \cdot (v \cdot z)$ para todos $u, v \in G$, y todo $z \in Z$. Dada una tal acción, se define su órbita $O(z)$ en $z \in Z$ mediante $O(z) := \{u \cdot z : u \in G\}$. Escribiremos τ_z para referirnos a la aplicación $\mathbb{K}$-analítica $\tau_z : G \to O(z)$, y denotaremos como G_z el subgrupo de G estabilizador de z, es decir, $G_z := \{u \in G : \tau_z(u) = z\}$, $(z \in Z)$. Claramente, $O(z)$ y el cociente G/G_z son conjuntos isomorfos para todo $z \in Z$.

Una acción como la anterior se llama *transitiva* si para todo $w, z \in Z$ existe $u \in G$ tal que $w = u \cdot z$. O sea, la acción es transitiva si y sólo si Z es una órbita.

Definición 1.1. *Sea $G \times Z \to Z$ acción K-analítica transitiva. Decimos que Z es un espacio homogéneo de Banach si existe $z \in Z$ tal que*

(i) $\ker(d\tau_z)_e$ es complementado (topológicamente) en $T_e(G)$.

(ii) $(d\tau_z)_e : T_e(G) \to T_z(Z)$ es suprayectiva.

Las condiciones (i) y (ii) de la definición significan que τ_z es una *submersión* $\mathbb{K}$-analítica en e ([U]). De hecho, si (i) y (ii) se cumplen para algún $z \in Z$ entonces se cumplen para todo $w \in Z$ ([R]).

Los espacios homogéneos pueden presentarse, equivalentemente, como espacios cociente provistos de la topología cociente: Si $O(z)$ es un espacio homogéneo de Banach entonces el estabilizador G_z es un subgrupo de Banach-Lie de G, el espacio cociente G/G_z con su topología es un espacio homogéneo, y G/G_z, $O(z)$ son isomorfos como variedades. Recíprocamente, todo cociente de un grupo de Banach-Lie por un subgrupo de Banach-Lie es, con su topología canónica, espacio homogéneo de Banach (véase [U, pp. 123, 136], [B, p. 102]). Así pues, $G \to O(z)$ es un *fibrado principal* (para la definición y teoría de fibrados principales y vectoriales usamos [KN], cuya exposición, aunque hecha en dimensión finita, sirve en general, con ligeras precisiones).

En este trabajo estamos interesados en espacios homogéneos que se originan a partir de los siguientes datos. Sean A, B álgebras de Banach complejas con unidad e, y B subálgebra cerrada de A. Suponemos que existe una *cuasi-esperanza* de A en B, es decir, una aplicación $\mathcal{E} : A \to B$, tal que $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(A, B)$, $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}(e) = e$, y $\mathcal{E}(bac) = b\mathcal{E}(a)c$ para todo $b, c \in B$. Si A y B, como antes, son además álgebras C^* se llama *esperanza condicional* de A en B a toda aplicación $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(A, B)$ que sea proyección de norma 1. Un celebrado teorema de Tomiyama enuncia que toda esperanza condicional es una cuasi-esperanza.

En las condiciones precedentes, el grupo $G(B)$ es subgrupo de Banach-Lie de $G(A)$. Más aún, la aplicación cociente $\tau : G(A) \to Z := G(A)/G(B)$ es un fibrado principal. En efecto, sea $\Omega := \{u \in G(A) : \|e-u^{-1}\| < (\|\mathcal{E}\|)^{-1}\}$. Si $u \in \Omega$ tenemos que $\mathcal{E}(u^{-1}) \in G(B)$. Tomemos $\mathcal{W} := \Omega G(B)$ entorno de $G(B)$ en $G(A)/G(B)$ y $\mathcal{U} := \tau^{-1}(\mathcal{W})$ abierto de e en $G(A)$. La aplicación $\sigma : \mathcal{W} \to G(A)$ dada por $\sigma(uG(B)) := u\mathcal{E}(u^{-1})$, $(u \in \Omega)$, no depende del representante de la clase $uG(B)$ (pues $\mathcal{E}$ conmuta con $G(B)$) y además $(\tau \circ \sigma)G(B) = \tau(u\mathcal{E}(u^{-1})) = u\mathcal{E}(u^{-1})G(B) = uG(B)$; por tanto σ está bien definida y es de hecho una sección (holomorfa) sobre $\mathcal{W}$. No es dificil probar entonces que la aplicación

$$u \mapsto (\tau(u), \mathcal{E}(u^{-1})^{-1}),\ \mathcal{U} \to \mathcal{W} \times G(B)$$

establece un homeomorfismo entre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \times G(B)$, con aplicación inversa dada por

$$(uG(B), v) \mapsto u\mathcal{E}(u^{-1})v,\ \mathcal{W} \times G(B) \to \mathcal{U}.$$

Para un genérico $u_0 \neq e$ basta trasladar. La expresión de la sección correspondiente será $\sigma_0(u_0uG(B)) = u_0u\mathcal{E}(u^{-1})$, $(u \in \Omega)$.

Por tanto se cumple la trivialidad local, y obtenemos que $G(A) \to G(B)$ es un fibrado principal (con grupo estructura G(B)), véase [KN I].

Evidentemente, el razonamiento anterior funciona siempre que $G(A)/G(B)$ porte la topología cociente. El siguiente teorema da condiciones suficientes sobre topología de normas. Es importante por su particular aplicabilidad a espacios de representaciones.

Teorema 1.2. *([R]) Sea A álgebra de Banach con unidad e. Supongamos que $G(A)$ actúa holomórficamente sobre un espacio de Banach E de modo que, para algún $y \in E$, existe $x \in O(y)$ verificando*

(a) $\ker(d\tau_x)_e$ *es complementado en* $T_e(G(A))$.

(b) $\operatorname{ran}(d\tau_x)_e$ *es complementado en* E.

(c) $\tau_x : G(A) \to O(y)$ *es abierta.*

Entonces la órbita $O(y)$ es subvariedad (holomorfa) de E y también es espacio homogéneo de Banach, con $T_xO(y) \equiv \operatorname{ran}(d\tau_x)_e$.

Nuestro objetivo es dar ejemplos de espacios homogéneos con estructura reductiva. Restringimos la definición al caso de acciones de inversibles de un álgebra de Banach.

Definición 1.3. *Sea A álgebra de Banach compleja con unidad y Z espacio homogéneo bajo la acción del grupo $G(A)$. Decimos que Z, o el fibrado $\tau : G(A) \to Z$, admite estructura homogénea (holomorfa) reductiva si para todo u en $G(A)$ existe subespacio vectorial cerrado H^u de A tal que*

(1) H^u es complementado topológicamente en A, esto es, existe subespacio vectorial cerrado V^u de A tal que $H^u \oplus V^u = A$.

(2) $vH^uv^{-1} = H^u$, para todo $v \in G(A)_{\tau(u)}$.

(3) La distribución $u \mapsto H^u$ es holomorfa, en el sentido de que si $P_u : A \to H^u$ es la proyección correspondiente a la descomposición del punto (1) entonces $u \mapsto P_u$, $G(A) \to \mathcal{L}(A)$ es holomorfa.

Una estructura reductiva define una *conexión*, a saber, la correspondencia $u \mapsto H^u$, o equivalentemente una *forma de conexión*, en nuestro caso $A \to V^u$. Y la conexión lleva asociadas las nociones de levantamiento y desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc., véase [KN]. Por ello la notación anterior no es casual; A es visto como el espacio tangente a $G(A)$ en u y entonces H^u hace referencia al conjunto de vectores horizontales de A, mientras que V^u es el correspondiente conjunto de vectores verticales en A. Por tanto V^u puede, y aún debe, verse como el álgebra de Lie del grupo $G(A)_z$ si $\tau(u) = z$. Ésa es la idea acerca de una conexión en $\tau : G(A) \to Z$: “levantar”, mediante isomorfismo, el espacio tangente en cada z del espacio base Z, de manera que éste pueda ser considerado como un subespacio de vectores horizontales de A que se va trasladando en correspondencia con las variaciones (analíticas) de z a lo largo de Z. Evidentemente, tal proceso se corresponde con la bien conocida noción de “desplazamiento paralelo”.

También, alternativamente, se puede definir una conexión si se dispone de una 1-forma equivariante $z \mapsto \mathcal{K}_z : T_z(Z) \to A$ tal que $\mathcal{K}_{\tau(e)}$ sea inverso a derecha de $(d\tau)_e$. En este caso los subespacios horizontales se obtienen como $H^u := \mathcal{K}_{\tau(u)}(T_{\tau(u)}Z)u$, $u \in G(A)$. Éste es el punto de vista adoptado en [MR], trabajo que tomo como referencia básica para espacios reductivos en dimensión infinita.

NOTA.- La definición de estructura reductiva también tiene sentido para la acción $\mathbb{K}$-analítica de un grupo G_0, subgrupo de Banach-Lie $\mathbb{K}$-analítico de $G(A)$, sobre alguna variedad $\mathbb{K}$-analítica Z. Todo es análogo, teniendo que sustituir holomorfo por $\mathbb{K}$-analítico y subespacio vectorial por subespacio $\mathbb{K}$-lineal, aparte de que, en la descomposición de (1), A debe cambiarse por el espacio tangente a G_0 en u, si $\tau(u) = z$. Estoy pensando en el caso en que A sea una C^*-álgebra y $G_0 = U(A)$, su grupo de elementos unitarios. Entonces se tiene que $T_u(U(A)) = \{ua \in A : a^* = -a\}$.

En los ejemplos que nos van a aparecer de espacios reductivos la forma de conexión estará asociada a una cuasi-esperanza $\mathcal{E}$, de modo que los vectores horizontales vendrán dados por $\ker(\mathcal{E})$. Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, el método de trabajo responderá sencillamente al esquema: 1) disponer de cuasi-esperanzas E; 2) comprobar que la sección asociada $u \mapsto u\mathcal{E}(u^{-1})$ es continua respecto a la topología específica de la órbita dada. Por tanto, la forma de definir u obtener esas esperanzas es la clave. En ésto interviene la promediabilidad de grupos y álgebras.

Grupos y álgebras promediables. Sea $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto, y $L^\infty(\mathfrak{G})$ el espacio de funciones complejas y esencialmente acotadas sobre $\mathfrak{G}$ respecto a su medida de Haar. Sea E subespacio vectorial de $L^\infty(\mathfrak{G})$ conteniendo las funciones constantes. Llamamos funcional *promedio*, o promedio, o simplemente *media*, sobre $\mathfrak{G}$ a todo funcional $m \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ tal que $m(1) = 1$. Si además E es cerrado para la conjugación compleja entonces m es automáticamente positiva, es decir, $m(\varphi) \geq 0$ si $\varphi \geq 0$. El espacio E se llama invariante a izquierda si $\varphi(u\,\cdot\,) \in E$ para todo $u \in \mathfrak{G}$, $\varphi \in E$. Y en este caso una media m sobre $\mathfrak{G}$ se llama *invariante a izquierda* si $m(\varphi(u\,\cdot\,)) = m(\varphi)$, para todo $u \in \mathfrak{G}$, $\varphi \in E$.

Definición 1.4. *El grupo $\mathfrak{G}$ se dice promediable si existe una media invariante a izquierda en $L^\infty(\mathfrak{G})$.*

Los grupos abelianos y compactos son grupos promediables, así como lo son las clausuras topológicas de uniones contables de grupos promediables. En el lado opuesto, si un grupo $\mathfrak{G}$ contiene una copia, como subgrupo cerrado, del grupo libre de dos generadores entonces $\mathfrak{G}$ no es promediable.

La invariación a derecha de una media sobre un grupo puede definirse en análogos términos que a la izquierda, y se tiene que un grupo es promediable en el sentido de la Definición 1.4 si y sólo si posee media invariante a derecha. *Más aún*, un grupo es promediable si y sólo si posee una media simultáneamente invariante a izquierda y a derecha. Por último, en la definición y propiedades anteriores puede sustituirse (equivalentemente) el espacio $L^\infty(\mathfrak{G})$ por ciertos subespacios E de $L^\infty(\mathfrak{G})$, invariantes a izquierda, que resultan en la práctica más manejables, según las circunstancias.

Para éstas y otras propiedades de grupos promediables véase [Ru2].

Definición 1.5. *([J1]) Un álgebra de Banach compleja $\mathfrak{A}$ se llama promediable si toda derivación acotada de $\mathfrak{A}$ en un $\mathfrak{A}$-bimódulo E de Banach es interna; es decir, para cada $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, E)$ verificando $D(ab) = a \cdot (Db) + (Da) \cdot b$ existe $x \in E$ para el cual $D(a) = a \cdot x - x \cdot a$ $(a \in \mathfrak{A})$.*

Como se ha indicado antes, $\mathfrak{G}$ es promediable como grupo si y sólo si $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable como álgebra [J1]. Otros ejemplos importantes de álgebras de Banach promediables son $C(K)$, álgebra de las funciones continuas sobre un compacto de Hausdorff K, ó $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, álgebra de los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

La definición 1.5 es de carácter homológico y ha resultado muy útil tal cual. Sin embargo, aquí va a tener más relieve una caracterización de la promediabilidad basada en funciones de promedio, las cuales evocan las medias de los grupos promediables. Recordemos que, si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach, el producto tensorial proyectivo $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ es un $\mathfrak{A}$-bimódulo de Banach respecto a las operaciones definidas por $a \cdot (b \otimes c) := (ab) \otimes c$ y $(b \otimes c) \cdot a := b \otimes (ca)$, $a, b, c \in \mathfrak{A}$. Por dualidad, los espacios dual $(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^*$ y bidual $(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^{**}$ devienen asimismo $\mathfrak{A}$-bimódulos de Banach. Se llama *diagonal virtual* de $\mathfrak{A}$ a todo elemento M de $(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^{**}$ que cumpla $M \cdot a = a \cdot M$ y $\gamma^{**}(M) \cdot a = a$ para todo $a \in \mathfrak{A}$, siendo γ la multiplicación de $\mathfrak{A}$, i.e., $\gamma : a \otimes b \mapsto ab$. De forma semejante, se llama *diagonal aproximada* de $\mathfrak{A}$ a toda red acotada $(m_j)_j$ en $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ tal que $\lim_j(m_j \cdot a - a \cdot m_j) = 0$ y $\lim_j(\gamma m_j) \cdot a = a$ para todo $a \in \mathfrak{A}$.

Proposición 1.6. *Un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ es promediable si y sólo si posee diagonal virtual, si y sólo si posee diagonal aproximada.*

Para un álgebra de Banach promediable se puede fijar M, $(m_j)_j$ de manera que M sea punto de acumulación de la red $(m_j)_j$ en la topología débil* de $(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^{**}$.

Hay un formalismo, debido a E. Effros ([E]), muy útil para tratar con diagonales virtuales. Si $\Phi \in (\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^*$ y $\Lambda \in (\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^{**}$, pongamos

$$\langle \Lambda, \Phi \rangle := \int_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}} \Phi(a, b)\ d\Lambda(a, b).$$

Con esta notación las propiedades que definen una diagonal virtual pueden leerse respectivamente como $\int_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}} \Phi(ab, c)\ dM(b, c) = \int_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}} \Phi(b, ca)\ dM(b, c)$, y $\int_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}} bc\ dM(b, c) = e$, ésta última en el sentido de que $\int_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}} bc\ dM(b,c) \in \mathfrak{A}^*$ y $\langle \int_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}} bc\ dM(b,c), \varphi\rangle = \langle e, \varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ ([CG1, p. 90]).

El concepto de álgebra de Banach promediable es de relevancia asimismo en el terreno de las álgebras de operadores. Recordemos que una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach dotada de una involución $a \mapsto a^*$ tal que $\|aa^*\| = \|a\|^2$ $(a \in \mathfrak{A})$. Dadas dos C^*-álgebras $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{B}$ tomemos el producto tensorial algebraico $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}$ y tratemos de dotarle de una norma C^*. Resulta que no hay una forma canónica de hacer ésto, y por tanto tiene sentido la siguiente importante definición. Se dice que una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ es *nuclear* cuando todas las posibles normas C^* en $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}$ son equivalentes, para toda C^*-álgebra $\mathcal{B}$. Pues bien, una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ es nuclear si y sólo si $\mathfrak{A}$ es promediable. La demostración de este teorema no es sencilla ([Ru2, p. 187]).

Entre las álgebras C^*, la clase más importante es la formada por las *álgebras de von Neumann.* Una tal álgebra $\mathcal{M}$ se caracteriza por ser dual topológico de algún (único, a posteriori) espacio de Banach, digamos $\mathcal{M}_*$ [Ru2, p. 109]. Pero en este terreno las cosas cambian un poco. Las álgebras de von Neumann promediables no son muchas, por lo que se precisa una noción de promediabilidad *ad hoc.* Afortunadamente la noción requerida existe.

Un $\mathcal{M}$-bimódulo dual (de Banach) E se llama *normal* si las aplicaciones $a \mapsto a \cdot x$ y $a \mapsto x \cdot a$, de $\mathcal{M}$ en E son débilmente* continuas, para cada $x \in E$.

Definición 1.7. *Un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ se llama promediable en el sentido de Connes, o Connes-promediable, para abreviar, si toda derivación acotada y débilmente* continua de $\mathcal{M}$ en un $\mathcal{M}$-bimódulo normal es interna.*

De modo semejante a lo que ocurre con álgebras promediables, un álgebra de von Neumann es Connes-promediable si y solamente si posee una *diagonal virtual normal* M. La definición de tal M es análoga a la del caso nuclear, pero ahora exigiendo que M pertenezca al dual $\mathcal{L}^2_{w^*}(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$, siendo $\mathcal{L}^2_{w^*}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ el espacio de aplicaciones bilineales de $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{M}$ en $\mathbb{C}$ (o sea, de las aplicaciones lineales de $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{M}$ en $\mathbb{C}$) que son débilmente* continuas por separado. Y también, como en el caso promediable = nuclear, existen diversas e importantes caracterizaciones de las álgebras Connes-promediables. Por ejemplo, se dice que un álgebra de von Neumann, actuante en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es *inyectiva* si existe una cuasi-esperanza $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}'$, siendo $\mathcal{M}'$ la sub-álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ conmutante de $\mathcal{M}$.

Proposición 1.8. *Un álgebra de von Neumann es Connes-promediable si y sólo si es inyectiva.*

Tampoco es sencilla la prueba de este resultado, véase [Ru2, pp. 186, 152].

La existencia de la cuasi-esperanza $\mathcal{Q}$ en álgebras inyectivas sugiere pensar en formas de conexión. Efectivamente, ahí está el punto de enlace entre promediabilidad y órbitas de representaciones.

2 Preludio y surgimiento

Órbitas de proyecciones. Dada un álgebra de Banach A, designamos el subconjunto de sus proyecciones (o idempotentes) mediante $\mathcal{P}(A) := \{p = p^2 \in A\}$. Este conjunto ha sido estudiado profusamente y desde diversos enfoques. En el artículo [PR] se resalta el carácter que $\mathcal{P}(A)$ posee de variedad grasmaniana. En él se presenta una lista de propiedades sobre idempotentes que sus propios autores habían aplicado en otras investigaciones suyas (v.g. en la teoría de Morse para fibrados, o en la clasificación de conexiones lineales). Precisamente, para dar un teorema de clasificación de fibrados con conexión, se puede tomar el conjunto $\{(p, x) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}(E)) \times E : p(x) = x\}$ como una suerte de fibrado universal. (Clásicamente, los fibrados universales tautológicos se definen, o construyen, a partir de variedades grasmanianas [KN]). Me ha parecido adecuado elegir el trabajo [PR] como un primer escalón en la exposición subsiguiente, de manera que se puede decir que nuestro punto de partida va a ser una variedad grasmaniana.

Decimos que dos idempotentes p, q de $\mathcal{P}(A)$ son equivalentes cuando $pq = q$ y $qp = p$. Sea $Gr(A)$ el conjunto correspondiente de clases de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$. Se tiene que dos idempotentes de $\mathcal{L}(E)$ son equivalentes si y sólo si $p(E) = q(E)$, de modo que $Gr(\mathcal{L}(E))$, y más generalmente $Gr(A)$, es una noción plausible de variedad grasmaniana asociada a A, generalización del caso clásico. (De hecho, $Gr(M_n(\mathbb{R})) = \bigcup_{0\leq k\leq n} G_{n-k,n}$ siendo $G_{n-k,n}$ la subvariedad grasmaniana de subespacios k-dimensionales de $\mathbb{R}^n$, y $A = M_n(\mathbb{R})$, álgebra de matrices reales $n \times n$.)

En [PR] se establecen algunas propiedades geométricas interesantes de $\mathcal{P}(A)$ y $Gr(A)$. Como muestra, la aplicación cociente $\mathcal{P}(A) \to Gr(A)$ es una equivalencia homotópica. Por otro lado, el grupo $G(A)$ actúa sobre $\mathcal{P}(A)$ por automorfismos internos, lo que induce la aplicación

$$\tau_p : u \mapsto upu^{-1},\ G(A) \to \mathcal{P}(A),$$

donde $p \in \mathcal{P}(A)$ está fijado. Se demuestra en [PR] que, si C es una componente conexa de $\mathcal{P}(A)$ y $G(A)_C$ es el subgrupo de G(A) que deja invariante C, entonces la restricción $u \mapsto upu^{-1}$, $G(A)_C \to C$ es un fibrado principal con grupo de estructura $(G(A)_C)_p$. Análogamente, si $Gr(C)$ denota la imagen de la componente C en $Gr(A)$ se obtiene que la aplicación $G(A)_C \to C \to Gr(C)$ es un fibrado principal.

El artículo [PR] no toma en consideración estructuras reductivas (ni formas de conexión por tanto), pero dedica una parte considerable de espacio a tratar el interesante problema de elevación o levantamiento de curvas de $\mathcal{P}(A)$ a $G(A)$, lo que es de relevancia para una teoría de conexiones. Termino este breve resumen de [PR] reflejando una formulación del levantamiento mencionado. Si $\gamma : [0,1] \to \mathcal{P}(A)$ es una curva de clase $C^{(1)}$ entonces puede expresarse como $\gamma(t) = \Gamma(t)\gamma(0)\Gamma(t)^{-1}$, $(t \in [0,1])$, en donde $\Gamma : [0,1] \to G(A)$ es una curva de clase $C^{(1)}$, solución única de la ecuación $\dot{\Gamma} = (\dot{\gamma}\gamma - \gamma\dot{\gamma})\Gamma$, con valor inicial $\Gamma(0) = 1$.

En el artículo [CPR] se amplía el estudio de órbitas de proyecciones a sistemas (n-tuplas) de proyecciones, presentando además un desarrollo sistemático y explícito de la geometría diferencial de tales sistemas. Si A es como antes y n es un número natural, designemos por

$$\mathcal{P}_n(A) := \{(p_1, \ldots, p_n) : p_i \in \mathcal{P}(A), p_i p_j = 0 \ (i \neq j), \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

la familia de todas las *descomposiciones de la identidad* formadas por n idempotentes de A. Tal conjunto es un modelo universal para los elementos algebraicos simples de A de grado n. Se le llama también variedad "flag"; p. ej., en [MS].

Como en el caso $n = 1$ ya comentado, la acción de $G(A)$ sobre $\mathcal{P}_n(A)$,

$$(u, p) = (u, (p_1, \ldots, p_n)) \mapsto u \cdot p := (up_1u^{-1}, \ldots, up_nu^{-1}), \ G(A) \times \mathcal{P}_n(A) \to \mathcal{P}_n(A),$$

da lugar a una estructura de variedad diferenciable en $\mathcal{P}_n(A)$. Si $O(p)$ es la órbita de p bajo tal acción, la aplicación $\tau_p : u \mapsto u \cdot p$, $G(A) \to O(p)$ es un fibrado principal para el cual la expresión $\sigma_p(q) = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i$, proporciona una sección local (en e), $O(p)$ es un espacio homogéneo de Banach, y $\mathcal{P}_n(A)$ es la unión discreta de las órbitas $O(p)$, $p = (p_1, \ldots, p_1) \in \mathcal{P}_n(A)$. Además cada órbita $O(p)$ admite una estructura reductiva, inducida por la forma de conexión

$$\mathcal{E}_p : a \mapsto \sum_{i=1}^{n} p_i a p_i, \ A = T_e(G(A)) \to V_e = \{x \in A : xp_i = p_i x\}$$

Nótese que bajo la identificación de $q = u \cdot p$ con $uG(A)_p$ se comprueba fácilmente que $\sigma_p(q) = u\mathcal{E}_p(u^{-1})$, según el modelo "sección $\leftrightarrow$ cuasi-esperanza" dado previamente al Teorema 1.4.

También se describe en [CPR] los invariantes definidos por la conexión en el fibrado principal y en el fibrado tangente asociado. En este caso los levantamientos horizontales de curvas $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de clase $C^{(1)}$ en $\mathcal{P}_n(A)$ a curvas $C^{(1)}$ en $G(A)$ son las soluciones (únicas para cada ecuación) de la ecuación $\dot{\Gamma} = (\sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}_i \gamma_i)\Gamma$, $\Gamma(0) = 1$. Es decir, son las soluciones de la ecuación de transporte de Daleckii, Krein y Kato (ver comentarios en [CPR]).

Los elementos de $\mathcal{P}_n(A)$ son descomposiciones de la identidad discretas pero también se puede hacer entrar en el juego descomposiciones de la identidad continuas o descomposiciones espectrales generales. Veamos.

Supongamos ahora que A es específicamente un álgebra de von Neumann, Ω un conjunto no vacío, y Σ una álgebra de subconjuntos de Ω. De acuerdo con [ARS], llamaremos aquí *medida espectral* sobre Σ, valorada en A, a toda aplicación $\mu : \Sigma \to A$ que satisfaga:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$.

(ii) $\mu(\omega_1 \cap \omega_2) = \mu(\omega_1)\mu(\omega_2)$, para cada $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma$.

(iii) $\mu(\omega_1 \cup \omega_2) = \mu(\omega_1) + \mu(\omega_2)$, si $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$

(iv) $\sup\{\|\mu(\omega)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$.

Sea $M(\Sigma)$ el conjunto de todas tales medidas espectrales sobre Σ. No es complicado comprobar que el grupo de inversibles $G(A)$ actúa sobre $M(\Sigma)$ mediante automorfismos internos y da lugar por tanto a los correspondientes fibrados sobre cada órbita. En [ARS] se extienden a $M(\Sigma)$ todos los resultados sobre la geometría diferencial mencionados arriba para $\mathcal{P}_n(A)$. Aunque el medio ambiente es continuo, el método de trabajo toma $\mathcal{P}_n(A)$ como modelo (mediante particiones) y luego procede por paso al límite. Por ejemplo y en concreto, la cuasi-esperanza que define la conexión se construye de la siguiente manera.

Tomamos una partición finita $\beta = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ de Ω. Si $\mu \in M(\Sigma)$, ponemos

$$\mathcal{E}_{\mu,\beta}(a) := \sum_{\omega\in\beta} \mu(\omega) a \mu(\omega), \qquad (a \in A)$$

Entonces $\mathcal{E}_{\mu,\beta}$ es una cuasi-esperanza, y es de hacer notar que lo es del tipo visto líneas arriba, por cuanto podemos identificar $\{\mu(\omega) : \omega \in \beta\}$ con un elemento de $\mathcal{P}_n(A)$. Pasemos al límite.

Primeramente $\mathcal{E}_{\mu,\beta}$ verifica la acotación (uniforme en β) $\|\mathcal{E}_{\mu,\beta}(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$. Pensemos en el conjunto de todas las particiones β como conjunto ordenado, dirigido como es usual, y tomemos un punto de acumulación de $\{\mathcal{E}_{\mu,\beta}(a)\}_\beta$ en la topología débil* de A,

$$\mathcal{E}_\mu(a) := \lim_\beta \sum_{\omega\in\beta} \mu(\omega) a \mu(\omega).$$

Entonces $\mathcal{E}_\mu$, dada por la fórmula anterior, es la forma de conexión buscada. De manera análoga al caso discreto la sección $u\mathcal{E}_\mu(u^{-1})$ corresponde a $\sigma_\mu(\nu) = \lim_\beta \sum_{\omega\in\beta} \nu(\omega)\mu(\omega)$.

Representaciones de grupos y álgebras. Aunque a primera vista pueda no resultar muy claro, los casos anteriores son ejemplos de representaciones de grupos. A saber, el espacio $\mathcal{P}_n(A)$ coincide con el de representaciones $Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ del grupo finito abeliano $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, ..., n-1\}$ en A. En efecto, sea ξ la raiz n-ésima de la unidad $\xi = e^{-(2\pi i)/n}$. Para $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}) \in \mathcal{P}_n(A)$, la fórmula $\pi(k) := \sum_{j=0}^{n-1} \xi^j p_j$ define una representación $\pi : \mathbb{Z}_n \to A$. Recíprocamente, dada una representación $\pi : \mathbb{Z}_n \to A$, si ponemos $p_j = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \xi^{-kj}\pi(k)$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, entonces $(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}) \in \mathcal{P}_n(A)$. Estas dos correspondencias son inversas una de la otra, y así obtenemos que $\mathcal{P}_n(A) \equiv Rep(\mathbb{Z}_n, A)$. (Esta observación parece deberse a M. Martin, véase [M], [MS].) Vía la biyección anterior

$\mathcal{P}_n(A)$ transfiere a $Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ la estructura de unión discreta de espacios homogéneos reductivos.

Es natural entonces pensar en conjuntos de representaciones de grupos como candidatos a espacios homogéneos. Siendo $\mathbb{Z}_n$ finito, las fórmulas que dan los invariantes de la geometría pueden ser expresadas cómodamente mediante sumas. Para grupos compactos, también la situación es cómoda, gracias a la medida (finita) de Haar.

Sea $\mathfrak{G}$ un grupo compacto con medida de Haar (a izquierda) normalizada ds y A un álgebra de Banach con unidad. Con el símbolo $Rep_c(\mathfrak{G}, A)$ denotamos el conjunto de representaciones $\pi : \mathfrak{G} \to G(A) \subset A$ continuas en norma. Si $u \in G(A)$ y $\pi \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$, entonces $u\pi u^{-1} \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$, sobreentendiendo que $u\pi u^{-1}(s) = u\pi(s)u^{-1}$ para todo $s \in \mathfrak{G}$ y toda $\pi \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$. Esta acción infiere en $Rep_c(\mathfrak{G}, A)$ una estructura diferenciable como unión discreta de los espacios homogéneos reductivos $O(\pi) := \{u\pi u^{-1} : u \in G(A)\}$, $\pi \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$. La forma de conexión en el fibrado principal $G(A) \to O(\pi)$ viene definida por la cuasi-esperanza

$$\mathcal{E}_\pi(a) := \int_{\mathfrak{G}} \pi(s)\ a\ \pi(s)^{-1}\ ds, \qquad (a \in A),$$

que tiene por sección correspondiente la dada como $\sigma(\rho) = \int_{\mathfrak{G}} \rho(s)\pi(s)^{-1}\ ds$, sobre el abierto $\{\rho : \sup_{\mathfrak{G}} \|\rho(s) - \pi(s)\| < 1\}$.

Los detalles pueden verse en [M], [MS], [MR].

OBSERVACIÓN.- Ciertamente, la expresión de $\mathcal{E}_\pi$ recuerda a la de $\mathcal{E}_p$ en el caso de la variedad $\mathcal{P}_n(A)$, pero éstas *no* se corresponden de hecho, pues p_i en $\mathcal{E}_p$ no es ningún elemento de la forma $\pi(i)$. Para entender la aplicación $\mathcal{E}_p$ actuando directamente en el ambiente $Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ debemos expresarla mediante representaciones.

Dados $a \in A$, $p_i \in Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ $(i = 1, \ldots, n)$, definimos como antes $(\pi a)(j) := \pi(j)a$ $(j \in \mathbb{Z}_n)$. Si tenemos en cuenta que $(1/n)\sum_{j=0}^{n-1}$ es la medida de Haar en $\mathbb{Z}_n$, resulta claro que $p_k = (1/n)\sum_{j=0}^{n-1} e^{-(2\pi i/n)jk}\pi(j)$ es la transformada de Fourier (vectorial) $\hat{\pi}(k)$ de π en k. Por ser $\mathbb{Z}_n$ finito (bastaría con que sólo fuese compacto) las funciones πa y π están en el álgebra de grupo $l^1(\mathbb{Z}_n)$, y se tiene que $((\pi a) * \pi)\hat{\ } = (\pi a)\hat{\ }\hat{\pi}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(a) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} p_k a p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\pi}(k) a \hat{\pi}(k) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (\pi a)\hat{\ }(k)\ \hat{\pi}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} ((\pi a) * \pi)\hat{\ }(k) \\ &= (\pi a * \pi)(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \pi(-j) a \pi(j) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \pi(l) a \pi(-l) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$, que es exactamente la expresión de $\mathcal{E}_\pi$ dada antes para grupos compactos (la quinta igualdad en la cadena previa es el teorema de inversión de la transformada de Fourier, válido, a pesar de referirse a valores vectoriales, por ser $\mathbb{Z}_n$ finito).

Análogamente, para medidas espectrales se tiene

$$\mathcal{E}_\mu(a) := \lim_\beta \frac{1}{|\beta|} \sum_{\omega \in \beta} \pi_\mu(\omega)\ a \pi_\mu(\omega),$$

etc.

En las situaciones justamente descritas la promediabilidad de los grupos considerados no aparece todavía explícitamente, pero está subyacente: los grupos abelianos y los compactos son promediables como sabemos, y más aún, la medida de Haar en un grupo compacto es una *media* sobre él mismo. Su uso formal para definir la cuasi-esperanza $\mathcal{E}_\pi$ va a servir igualmente, en situaciones bastante más generales. Este hecho es observado y utilizado en [ACS1], artículo que sin exagerar puede considerarse como piedra angular en el tema. Voy a comentarlo brevemente.

Hasta el fin de esta sección $\mathfrak{A}$ denotará un álgebra C^* con unidad y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Recuérdese que el álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un álgebra C^* respecto a la involución definida por la operación de paso al operador adjunto. El grupo de inversibles de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lo denotaremos como $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$, y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ servirá para designar el subgrupo de unitarios de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$. Sea $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ el conjunto de homomorfismos acotados π de $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que son no-degenerados, esto es, $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{H}$. En paralelo, $\mathcal{M}$ denotará un álgebra de von Neumann, y $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ será el subconjunto de $Rep(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ formado por los homomorfismos débilmente* continuos de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Llamaremos representación a cualquier homomorfismo de los conjuntos anteriores. Recordemos que una $*$-representación π verifica, por definición, $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, para a en $\mathfrak{A}$ o en $\mathcal{M}$ indistintamente.

El grupo $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ actúa sobre $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ mediante automorfismos internos. Denotamos por $O(\pi)$ la órbita de esa acción, del homomorfismo o representación π de $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Del mismo modo, tenemos que $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ actúa sobre $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. La órbita de $\pi \in Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ se designará como $O^w(\pi)$. Entenderemos aqui por $*$-órbita a toda aquella órbita que contenga una $*$-representación.

El siguiente teorema recopila dos resultados realmente notables.

Teorema 2.1. *([ACS1])*

(i) $\mathfrak{A}$ *es nuclear si y solamente si toda* $*$*-órbita* $O(\pi)$ *es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, subvariedad de* $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$*, y con estructura reductiva, para todo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*.*

(ii) $\mathcal{M}$ *es inyectiva si y solamente si toda* $*$*-órbita* $O^w(\pi)$ *es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, subvariedad de* $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$*, con estructura reductiva, para todo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*.*

La demostración del teorema en [ACS1] es un tanto laboriosa. Voy a dar una idea somera acerca de la misma, comenzando por las condiciones necesarias.

En primer lugar se aborda el caso von Neumann. Hay que probar que el fibrado $\mathcal{G}l(\mathcal{H}) \to O^w(\pi)$ es principal, y para ello se debe construir secciones locales. Esto se consigue en varias etapas: 1) obtención de una sección en clave finito-dimensional, para $*$-representaciones; 2) empleando un argumento de aproximación, se demuestra que la acción anterior es localmente transitiva; 3) finalmente, puesto que $\pi(\mathcal{M})'$, conmutador de $\mathcal{M}$, es un álgebra inyectiva, existe al menos una esperanza condicional de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en $\pi(\mathcal{M})'$, y su uso combinado con la transitividad local permite obtener la sección requerida.

Una vez probado que tenemos un fibrado principal la estructura reductiva se consigue mediante la definición de una esperanza condicional $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \pi(\mathcal{M})'$ de formulación muy concreta, cómoda para describir los invariantes de la conexión asociada:

Puesto que $\mathcal{M}$ es inyectiva existe una proyección central P tal que $P\mathcal{M} = \overline{\bigcup_n \mathcal{M}_n}$ en la topología débil* o ultradébil, en donde $(\mathcal{M}_n)_n$ es una sucesión creciente de $*$-subálgebras de $\mathcal{M}$ de dimensión finita. Sea $\mathcal{U}_n$ el grupo de elementos unitarios de $\mathcal{M}_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Entonces cada $\mathcal{U}_n$ es un grupo promediable y por consiguiente lo es tambien $\mathcal{U}_0 := \bigcup_n \mathcal{U}_n$. Fijemos una media m sobre $\mathcal{U}_0$. Para cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se define, por dualidad,

$$\langle \mathcal{E}_\pi(T)\xi, \eta\rangle := \int_{\mathcal{U}_0} \langle \pi(u)\ T\ \pi(u)^{-1}\xi,\ \eta\rangle\ dm(u) \equiv m(\langle \pi(\ \cdot\ )\ T\ \pi(\ \cdot\ )^{-1}\xi, \eta\rangle),$$

que, abreviadamente, se escribe $\int_{\mathcal{U}_0} \pi(u)\ T\ \pi(u)^{-1}\ dm(u)$. Entonces $\mathcal{E}_\pi(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; de hecho, $\mathcal{E}_\pi(T)$ pertenece al conmutador $\pi(\mathcal{M})'$ de $\pi(\mathcal{M})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. La similitud formal del operador $\mathcal{E}_\pi$ anterior con el considerado en el caso de grupos compactos es evidente.

Para el caso de álgebras C^*, la parte necesaria del teorema se sigue del caso previo porque una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ es nuclear si y sólo si el álgebra de von Neumann bidual $\mathfrak{A}^{**}$ es inyectiva, y además las órbitas en los espacios $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ y $Rep^w(\mathfrak{A}^{**}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ son isomorfas.

En cuanto al recíproco (o recíprocos, mejor dicho) del teorema, la llave la da la estructura reductiva pues su existencia implica la de una proyección $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \pi(\mathcal{M})'$ tal que $\mathcal{Q}(STS^{-1}) = S\mathcal{Q}(T)S^{-1}$ para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y todo S *inversible* en $\pi(\mathcal{M})'$. Adaptando entonces un argumento de [BuP] para el caso en que la proyección $\mathcal{Q}$ es homomorfismo de $\pi(\mathcal{M})'$-bimódulos, se deduce que el álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ es inyectiva. Si $\mathfrak{A}$ es un álgebra C^* el recíproco sigue de nuevo por paso al álgebra bidual $\mathfrak{A}^{**}$ ([ACS1, p. 488, 489]).

NOTAS.- a) Igualmente se hace notar en [ACS1] que las órbitas unitarias de $*$-representaciones de $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{M}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ son espacios homogéneos de Banach, esta vez como variedades analítico-reales, no necesariamente holomorfas. Por consiguiente, y automáticamente, los espacios totales de $*$-representaciones son en ambos casos uniones discretas de las correspondientes órbitas.

b) Podemos también preguntarnos qué sucede con los espacios totales de representaciones $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ y $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ en el teorema 2.1. En principio podría haber habido una seria dificultad: el método del teorema exige trabajar con $*$-representaciones, y en general π no lo es. Afortunadamente, existen profundos resultados sobre órbitas de semejanza que aseguran que toda órbita $O(\pi)$ posee una (al menos) $*$-representación, si $\mathfrak{A}$ es nuclear. En otras palabras, toda órbita de semejanza es una $*$-órbita en ese caso. Se sigue pues que, efectivamente, $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ es la unión discreta de *todas* las órbitas $O(\pi)$ y que, análogamente, $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ es la unión discreta de las órbitas $O^w(\pi)$.

c) El teorema 2.1 también se verifica si se sustituye $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ por un álgebra de von Neumann inyectiva general.

Las ideas anteriores tienen aplicación en representaciones de grupos. Si $\mathfrak{G}$ es un grupo localmente compacto denotamos por $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ el conjunto de homomorfismos π de $\mathfrak{G}$ en $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ que son fuertemente continuos (esto es, continuos para la topología fuerte de operadores en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) y uniformemente acotados: $\sup\{\|\pi(s)\| : s \in \mathfrak{G}\} < \infty$. Sea $C^*(\mathfrak{G})$ el álgebra C^* standard generada por $\mathfrak{G}$ (véase la definición en la próxima sección). Existe una biyección entre las representaciones fuertemente continuas y unitarias de $\mathfrak{G}$ en $\mathcal{H}$, y las $*$-representaciones de $C^*(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{H}$. Por simpatía con la definición hecha para representaciones de álgebras diremos que una órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$, dada por la acción de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$, es $*$-órbita si posee una representación unitaria.

Corolario 2.2. *([ACS1]) Dado $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto, el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$ es nuclear si y solamente si cada $*$-órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, con estructura reductiva.*

La demostración de este corolario es inmediata, así como lo es el hecho de que el subespacio de $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ de representaciones unitarias admite estructura de variedad analítica real como unión discreta de espacios homogéneos de Banach (sus órbitas).

Notemos que si un grupo localmente compacto $\mathfrak{G}$ es promediable entonces el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$, generada por el grupo por definición, es nuclear. Al igual que ocurre con álgebras nucleares (o de forma semejante, con álgebras von Neumann inyectivas según el teorema 2.1), podemos preguntarnos si una eventual hipótesis de que cada $*$-órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ posea estructura reductiva conllevará que $\mathfrak{G}$ deba ser promediable. La respuesta es negativa ya que existen grupos no promediables para los que $C^*(\mathfrak{G})$ es nuclear (v. g. $\mathfrak{G} = SL(2, \mathbb{R})$) y entonces basta aplicar el corolario 2.2.

Asimismo podemos preguntarnos si cada órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es una $*$-órbita. Podemos asegurar que es así cuando el grupo $\mathfrak{G}$ es promediable, como es bien conocido [G]. Entonces tenemos

Corolario 2.3. *([ACS1]) Si $\mathfrak{G}$ es un grupo promediable entonces $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es la unión discreta de sus órbitas, que son espacios homogéneos de Banach holomorfos reductivos, y subvariedad de $\mathcal{L}(C^*(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.*

En vista de los resultados previos la cuestión natural ahora es la siguiente.

CUESTIÓN 2.4: Supongamos que toda órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ posee estructura reductiva, para todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dilucidar si se deduce de ahí que $\mathfrak{G}$ deba ser promediable.

El trabajo [ACS1] supone un punto de inflexión en el orden de ideas que estamos considerando. En él se apunta abiertamente el papel que la noción de promediabilidad desempeña en la construcción de una geometría diferencial para representaciones, y de hecho se establece un resultado de este tipo para grupos con media (Corolario 2.3). Quedan, no obstante, algunos puntos en el aire que sugieren un mayor análisis en esta dirección. Por ejemplo, en el artículo se da una cierta confusión en cuanto al tipo de propiedades "de promediabilidad" a usar, y en qué lugares; la demostración del teorema 2.1 para alcanzar los espacios globales de representaciones, siendo ingeniosa e interesante, emplea técnicas que sólo funcionan para $*$-representaciones, y por tanto requiere de resultados auxiliares sobre órbitas de semejanza, un tanto alejados de la cuestión; el caso nuclear del teorema 2.1 parece algo indirecto, y debería poder hallarse otra prueba que no pasara por apelar a álgebras biduales de von Neumann; a mayor abundamiento, los corolarios 2.2 y 2.3 no se basan en $\mathfrak{G}$ directamente, sino que pasan por $C^*(\mathfrak{G})$, y luego por $C^*(\mathfrak{G})^{**}$.

Las últimas reflexiones suscitan una serie de cuestiones que motivaron en parte los artículos [CG2] y [CG1], y que usaremos como preámbulo para las dos próximas secciones.

3 Geometría de representaciones en grupos

Hemos visto cómo puede emplearse el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$ asociada a un grupo localmente compacto $\mathfrak{G}$ para establecer una geometría de conexiones sobre las representaciones de $\mathfrak{G}$. Pero ese método conlleva que se pierda contacto con el grupo mismo, y, al menos cuando $\mathfrak{G}$ es promediable, sería conveniente disponer de una demostración interna, más visual por así decir.

Recordemos que, además de $C^*(\mathfrak{G})$, existen otras importantes álgebras de Banach del análisis armónico, cuyas $*$-representaciones están en correspondencia biunívoca con las representaciones unitarias del grupo $\mathfrak{G}$. De hecho la tal correspondencia se extiende a los respectivos conjuntos de todas las representaciones, y ésta es una propiedad muy interesante.

Dado, como arriba, un grupo localmente compacto $\mathfrak{G}$, denotaremos como $M(\mathfrak{G})$ el álgebra de Banach de convolución formada por las medidas de Borel regulares, complejas y de variación acotada sobre $\mathfrak{G}$. Como es habitual, denotaremos asimismo como $L^1(\mathfrak{G})$ la sub-álgebra de Banach de $M(\mathfrak{G})$ formada por aquellas medidas que son absolutamente continuas respecto a la medida de Haar a izquierda sobre $\mathfrak{G}$, llamémosla dt. En otros términos, $L^1(\mathfrak{G})$ consiste de las (clases de) funciones complejas y medibles f sobre $\mathfrak{G}$ para las cuales $\int_{\mathfrak{G}} |f(t)|\, dt < \infty$. Como en el caso de álgebras C^* o von Neumann considerado anteriormente, $Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ va a significar el espacio de homomorfismos acotados *no degenerados* de $L^1(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sea $Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ el conjunto de homomorfismos θ acotados entre $M(\mathfrak{G})$ y $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que además son continuos respecto a las topologías fuertes; es decir, si $lim_j \mu_j * f = \mu * f$ para todo $f \in L^1(\mathfrak{G})$ entonces $lim_j \theta(\mu_j)x = \theta(\mu)x$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

El siguiente resultado es bien conocido en sus dos terceras partes; en la otra, curiosamente, no tanto.

Proposición 3.1. *Con las notaciones anteriores, se verifican las isometrías*

$$Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H})) \equiv Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})) \equiv Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

Proof: Empezamos tomando un elemento π en $Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Puesto que $\pi(L^1(\mathfrak{G}))\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{H}$ y $L^1(\mathfrak{G})$ es un álgebra de Banach que posee unidad aproximada acotada (a izquierda y a derecha, si falta hiciera) se tiene que $\pi(L^1(\mathfrak{G}))\mathcal{H} = \mathcal{H}$, por aplicación del teorema de Cohen [Ru2, p. 39]. Entonces definimos la extensión $\tilde{\pi}$ de π a $M(\mathfrak{G})$ mediante

$$\tilde{\pi}(\mu)x := \pi(\mu * f)y, \qquad \text{si } \; x = \pi(f)y, \;\; y \in \mathcal{H}, f \in L^1(\mathfrak{G}).$$

Usando una aproximación de la identidad (o unidad aproxima acotada, que es el mismo concepto) se comprueba que la definición anterior de $\tilde{\pi}(\mu)$ está bien hecha (no depende de f ni de y) y que da lugar efectivamente a un elemento $\tilde{\pi}$ de $Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Los detalles pueden verse en [Es, p. 96] (aunque están dados para álgebras conmutativas, tambien sirven en nuestro caso).

Sea ahora θ en $Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Es claro que la restricción de θ a las masas de Dirac δ_t, $t \in \mathfrak{G}$, induce una representación $\pi : t \mapsto \pi(t) := \theta(\delta_t)$ en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$.

Finalmente, cualquier π en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ induce un elemento del espacio de representaciones $Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ del modo habitual:

$$\pi(f)x := \int_{\mathfrak{G}} f(t)\; \pi(t)x\; dt, \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{H}, f \in L^1(\mathfrak{G}).$$

El hecho de que las aplicaciones anteriores son isometrías no es dificil de obtener.

La proposición anterior sigue siendo cierta si en lugar de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se considera cualquier espacio de Banach reflexivo, e incluso para álgebras de Banach más generales que $\mathcal{L}(E)$, con E reflexivo.

La aplicación $\mu \mapsto \mu^*, M(\mathfrak{G}) \to M(\mathfrak{G})$ dada por $\mu^*(\omega) := \overline{\mu(\omega^{-1})}$, para cada boreliano ω de $\mathfrak{G}$, define una involución continua de álgebra en $M(\mathfrak{G})$, que deja invariante $L^1(\mathfrak{G})$ [F, pp. 50, 51]. De modo que tiene sentido hablar de $*$-representaciones de $M(\mathfrak{G})$ y $L^1(\mathfrak{G})$ con respecto a esa involución. Es un ejercicio sencillo probar que las isometrías de la proposición hacen corresponder representaciones unitarias de $\mathfrak{G}$ con tales

$*$-representaciones, pero éste es un hecho que no vamos a usar aquí. Sí que podemos aprovechar no obstante para recordar la definición de $C^*(\mathfrak{G})$: Para cada $f \in L^1(\mathfrak{G})$ se define la norma $\|f\| := \sup\{\|\pi(g)\|\}$ donde el supremo está tomado sobre el conjunto de $*$-representaciones de f (o de sus clases de equivalencia, mejor dicho). Entonces $C^*(\mathfrak{G})$ es por definición la complección de $L^1(\mathfrak{G})$ en la norma dada, véase [F].

Supongamos que $\mathfrak{G}$ es un grupo localmente compacto promediable, y fijemos una media m invariante a izquierda sobre $L^\infty(\mathfrak{G})$. Sea π una representación uniformemente acotada de $\mathfrak{G}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $x, y \in \mathcal{H}$, definimos como en el caso de álgebras de von Neumann inyectivas, sección 2 anterior,

$$\langle \mathcal{E}_\pi(T)x, y\rangle := \int_{\mathfrak{G}} \langle \pi(s)T\pi(s)^{-1}x, y\rangle \, dm(s), \tag{3.1}$$

expresión que quiere significar la acción de la media m sobre la función compleja $s \mapsto \langle \pi(s)T\pi(s)^{-1}x, y\rangle$, acción que tiene sentido ya que dicha función es continua y uniformemente acotada sobre $\mathfrak{G}$, de manera que pertenece a $L^\infty(\mathfrak{G})$.

El operador resultante $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es particularmente sencillo de manejar en algunos aspectos. Por ejemplo es muy sencillo probar (gracias a que m es invariante a izquierda) que ran $\mathcal{E}_\pi = \pi(\mathfrak{G})'$. Más aún, $\mathcal{E}_\pi$ es de hecho una cuasi-esperanza, y esto permite ya establecer que la aplicación $\tau_\pi : \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \to O(\pi)$ es un fibrado principal. Queremos dotar a $O(\pi)$ de estructura reductiva y para ello vamos a seguir las pautas indicadas en [MR], de manera que necesitamos introducir la 1-forma adecuada $\mathcal{K}_\pi$ (véase la sección 1).

Sea Λ una aplicación lineal y continua de $M(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pongamos

$$\mathcal{K}_\pi(\Lambda) := \int_{\mathfrak{G}} \Lambda(s)\pi(s)^{-1} dm(s),$$

cuyo significado es análogo al indicado por la fórmula (3.1). En la “integral”, se sobreentiende que $\Lambda(s) \equiv \Lambda(\delta_s)$. Entonces $\mathcal{K}_\pi$ es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nótese que $\mathcal{E}_\pi(T) = \mathcal{K}_\pi(\pi(\cdot)T)$, para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Como primer resultado del uso combinado de $\mathcal{E}_\pi$ y $\mathcal{K}_\pi$ tenemos que cada órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo. En efecto, sea $\Delta_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ la aplicación definida por $\Delta_\pi(T)(\mu) := T \circ \pi(\mu) - \pi(\mu) \circ T$, $(T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ \mu \in M(\mathfrak{G}))$. Claramente, Δ_π es lineal y acotada, con ker Δ_π= ran $\mathcal{E}_\pi$, y ran $\Delta_\pi = Der_\pi(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, espacio de las derivaciones internas de $L^1(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (viendo $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ como $L^1(\mathfrak{G})$-bimódulo vía la acción de π). El espacio $Der_\pi(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ coincide con el espacio de *todas* las derivaciones acotadas de $L^1(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ya que $\mathfrak{G}$ es promediable. Es fácil verificar que $(d\tau_\pi)_e = \Delta_\pi$. Además, $\mathcal{K}_\pi \circ \Delta_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$, de donde se sigue que $\mathcal{P}_\pi := \Delta_\pi \circ \mathcal{K}_\pi : \mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})) \to \mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ es una proyección acotada, tal que im $\mathcal{P}_\pi = Der_\pi(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. En resumen, se cumple:

1) ker $(d\tau_\pi)_e$ = ker Δ_π = ran $\mathcal{E}_\pi$ es subespacio topológicamente complementado de $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \equiv T_e(\mathcal{G}l(\mathcal{H}))$.

2) ran $(d\tau_\pi)_e$ = ran Δ_π = im $\mathcal{P}_\pi$ es subespacio topológicamente complementado de $\mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

3) $\tau_\pi : \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \to O(\pi)$ es aplicación abierta, debido a la existencia de seccciones locales (facilitadas por $\mathcal{E}_\pi$).

Luego, aplicando el teorema 1.4 de la primera sección, repescamos el corolario 2.3 con algo más de información: para toda $\rho \in O(\pi)$ el espacio tangente $T_\rho(O(\pi))$ coincide con el espacio de derivaciones $Der_\rho(\mathfrak{G}, \mathcal{L}(\mathcal{H})) = Der_\rho(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, cosa que resulta de lo más natural. La estructura reductiva en $O(\pi)$ está definida mediante la conexión dada por la distribución de subespacios horizontales $u \mapsto H^u := uH_\pi := u \ker \mathcal{E}_\pi$, complementados de los correspondientes subespacios verticales $V^u := uV_\pi := u\pi(\mathfrak{G})'$, para cada $u \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$.

Evidentemente nos gustaría dar respuesta afirmativa a la cuestión 2.4 planteada en la segunda sección. No sabemos hacerlo, pero sí podemos enunciar algunas caracterizaciones geométrico-diferenciales de la promediabilidad de grupos. Primeramente, un resultado de A. I. Shtern [S] afirma que para $\mathfrak{G}$ localmente compacto y *conexo*, $\mathfrak{G}$ es promediable si y sólo si $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es localmente transitivo respecto a la acción de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ por automorfismos internos. Por tanto se tiene que $\mathfrak{G}$, conexo, es promediable si y sólo si el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \to O(\pi)$ es principal.

Veamos ahora cómo mejorar significativamente el corolario 2.3. En la definición de $\mathcal{E}_\pi$, tomemos la media m invariante a izquierda y *a derecha* al mismo tiempo. Entonces $\mathcal{E}_\pi$ tiene la propiedad añadida siguiente.

Para $t \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $x, y \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_\pi(\pi(t)T\pi(t^{-1}))x, y\rangle &= \int_{\mathfrak{G}} \langle \pi(st)T\pi((st)^{-1})x, y\rangle \, dm(s) \\ &= \int_{\mathfrak{G}} \langle \pi(s)T\pi(s^{-1})x, y\rangle \, dm(s) = \langle \mathcal{E}_\pi(T)x, y\rangle, \end{aligned}$$

es decir, $\mathcal{E}_\pi(\pi(t)T\pi(t^{-1})) = \mathcal{E}_\pi(T)$, o equivalentemente $\mathcal{E}_\pi(\pi(t)T) = \mathcal{E}_\pi(T\pi(t))$, para todos $t \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. En otras palabras, con una elección más restringida de la media m, resulta que la conexión definida por la elección de subespacios vectoriales $H_\pi :=$ $\ker \mathcal{E}_\pi$ en $O(\pi)$ satisface $[\pi(\mathfrak{G}), H_\pi] \subset H_\pi$. Diremos que una conexión en $O(\pi)$ define una estructura reductiva π-*invariante* cuando verifique la anterior propiedad. Con esta nomenclatura se obtiene pues que si $\mathfrak{G}$ es promediable entonces existe estructura reductiva π-*invariante* en toda órbita $O(\pi)$, y esto mejora el corolario 2.3. Pero no sólo eso. No es dificil demostrar, por adaptación a este contexto de argumentos naturales, que si toda representación satisface esta última propiedad entonces se da la promediabilidad de $\mathfrak{G}$. Por tanto,

Teorema 3.2. *([CG2]) Sea $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto. Las dos siguientes propiedades son equivalentes.*

(i) $\mathfrak{G}$ es promediable

(ii) Para todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y toda representación π de $\mathfrak{G}$ en $\mathcal{H}$, la órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach, holomorfo, con estructura reductiva π-invariante.

Hay una clase de grupos mayor que la de los promediables en cuyo seno éstos pueden caracterizarse mediante la posesión, en sus espacios de representaciones, de estructuras reductivas no necesariamente π-invariantes. A saber, un grupo $\mathfrak{G}$ se llama *promediable por automorfismos internos*, o, más llanamente, *internamente promediable* si existe una media m sobre $L^\infty(\mathfrak{G})$ tal que $m(f(t \cdot t^{-1})) = m(f)$ para todo $t \in \mathfrak{G}$ y toda $f \in L^\infty(\mathfrak{G})$ ([LP]).

Teorema 3.3. *([CG2]) Sea $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto e internamente promediable. Entonces $\mathfrak{G}$ es promediable si y solamente si la órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo con estructura reductiva, para toda representación π de $\mathfrak{G}$ en un espacio de Hilbert.*

Un aspecto interesante de este teorema es que se llega a probar la promediabilidad del grupo usando específicamente el *dato reductivo*: para cada π existe una proyección acotada $\mathcal{Q}_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \pi(\mathfrak{G})'$ tal que $U\mathcal{Q}_\pi(T)U^{-1} = \mathcal{Q}_\pi(UTU^{-1})$ para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y todo $U \in \pi(\mathfrak{G})' \cap \mathcal{G}l(\mathcal{H})$. Tal suerte de condición es exactamente (en términos formales) la que resulta suficiente para probar la inyectividad de un álgebra de von Neumann (con conjuntos de representaciones gozando de estructura reductiva). O sea, que este teorema 3.3 viene a ser formalmente el paralelo al de caracterización de la inyectividad.

Para cerrar esta sección, insisto en el interés de saber si se puede eliminar la condición de π-invariación en el teorema 3.2, o la hipótesis sobre la promediabilidad interna del grupo en el teorema 3.3. Mi conjetura es que no se puede.

4 Geometría de representaciones en álgebras de Banach

Acabamos de ver que, para grupos promediables, es posible de forma directa y cómoda llegar a la geometría del espacio de todas las representaciones del grupo sin necesidad de pasar previamente por las que son unitarias y, más importante, sin pasar por la C^*-álgebra de grupo $C^*(\mathfrak{G})$ y sus $*$-representaciones. Pero todavía tenemos pendiente la cuestión de si el uso previo de $*$-representaciones es necesario en el contexto de álgebras de operadores, en el caso de las álgebras C^* nucleares o de von Neumann inyectivas. Por otra parte, el álgebra $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable si $\mathfrak{G}$ lo es, y entonces disponemos de geometría en las representaciones de $L^1(\mathfrak{G})$ por cuanto que el conjunto de éstas coincide con el de las de $\mathfrak{G}$. Es natural por ambas razones plantearse si las representaciones de álgebras de Banach generales que sean promediables poseen también propiedades geométricas del estilo que estamos considerando. Esto tiene todavía más sentido o interés por cuanto que existen álgebras de Banach promediables que no están generadas por ningún grupo promediable [K]. Finalmente, la cuestión más aparente es la de si la promediabilidad de un álgebra de Banach pueda caracterizarse por propiedades de tipo geométrico-diferencial.

En los artículos [CG2], [CG1] se da respuestas completas o parciales, según los casos, a las anteriores preguntas. Se establece una teoría general que engloba los trabajos que se han venido comentado, aunque sólo en la dirección apuntada.

Sea $\mathcal{B}$ álgebra de Banach compleja con unidad e. Supondremos que $\mathcal{B}$ es un álgebra *dual*, esto es, existe un $\mathcal{B}$-submódulo cerrado $\mathcal{B}_*$ del dual $\mathcal{B}^*$ tal que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_*)^*$. Tal módulo no tiene por qué ser único pero nosotros lo suponemos fijado desde el principio (lo que no acarrea ningún problema). Ejemplos de álgebras de Banach duales son: a) el álgebra de medidas $\mathcal{B} = M(\mathfrak{G})$, con $\mathcal{B}_* = C_0(\mathfrak{G})$; b) $\mathcal{L}(E)$, si E es un espacio de Banach reflexivo, con $\mathcal{B}_* = E\hat{\otimes}E^*$, espacio de los operadores de traza finita, o nucleares, sobre E; c) cualquier álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$, con $\mathcal{B}_* = \mathcal{M}_*$, predual único de $\mathcal{M}$; d) el álgebra bidual A^{**}, siempre que A sea álgebra de Banach regular de Arens. (Véase [CG2, p. 317], [Ru2, p. 108].)

Sea ahora $\mathfrak{A}$ un álgebra de Banach compleja no necesariamente con unidad. Con $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ denotaremos el conjunto de homomorfismos acotados $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}$ tales que $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{B}_*$ es denso en $\mathcal{B}_*$, respecto a la norma de $\mathcal{B}_*$.

Es de hacer notar que cuando $\mathcal{B} = \mathcal{L}(E)$, siendo E espacio de Banach reflexivo, entonces $\pi(\mathfrak{A})(E\hat{\otimes}E^*)$ es denso en $E\hat{\otimes}E^*$ si y sólo si $\pi(\mathfrak{A})(E)$ es denso en E.

En efecto, si $\pi(a)y$ tiende a x en E eso implica que $\pi(a)(y \otimes x^*) = \pi(a)y \otimes x^*$ tiende a $x \otimes x^*$ en $E\hat{\otimes}E^*$, para todo $x^* \in E^*$. Además el conjunto (subespacio lineal) de combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $x \otimes x^*$ es denso en $E\hat{\otimes}E^*$, luego $\pi(\mathfrak{A})(E\hat{\otimes}E^*)$ es denso en $E\hat{\otimes}E^*$. Recíprocamente, sea $x \in E$ y tomemos $x^* \in E^*$ tal que $\langle x, x^*\rangle = 1$. Por la densidad asumida como hipótesis, $x \otimes x^*$ puede aproximarse por elementos de la forma $\pi(a)(\sum_j y_j \otimes y_j^*) = \sum_j(\pi(a)y_j) \otimes y_j^*$, con $a \in \mathfrak{A}$, $y_j \in E$, $y_j^* \in E^*$. Entonces $x = \langle x, x^*\rangle x$ puede aproximarse por $\sum_j\langle x, y_j^*\rangle\pi(a)y_j = \pi(a)(\sum_j\langle x, y_j^*\rangle y_j) \in \pi(\mathfrak{A})E$ (nótese que $\langle x, x^*\rangle x$ es la acción del operador nuclear $x \otimes x^*$ sobre x).

En definitiva, $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(E))$ si y solamente si π es no-degenerada en el sentido habitual.

Supongamos que $\mathfrak{A}$ es promediable y fijemos una diagonal aproximada $(m_j)_j$ en $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$. Sea $\mathcal{B}$ como líneas arriba y tomemos $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Por ser promediable, $\mathfrak{A}$ posee unidad aproximada acotada y entonces el teorema de factorización de Cohen ([Ru2, p. 39]) nos dice que $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_*$. Tomemos ξ en $\mathcal{B}_*$. Según lo anterior existen $a \in \mathfrak{A}$, $\eta \in \mathcal{B}_*$ tales que $\xi = \pi(a)\eta$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lim_j\langle(\pi\gamma)(m_j), \xi\rangle &= \lim_j\langle(\pi\gamma)(m_j), \pi(a)\eta\rangle = \lim_j\langle(\pi\gamma)(m_j)\pi(a), \eta\rangle \\ &= \lim_j\langle\pi((\gamma.m_j)a), \eta\rangle = \langle\pi(a), \eta\rangle = \langle e, \pi(a)\eta\rangle = \langle e, \xi\rangle, \end{aligned}$$

es decir, $\lim_j(\pi\gamma)(m_j) = e$ en la topología débil* de $\mathcal{B}$. Esto tiene traducción para diagonales virtuales. Si M es una diagonal virtual obtenida como punto de acumulación débil* de $(m_j)_j$ y $\xi \in \mathcal{B}_*$,

$$\begin{aligned} \langle(\pi^{**}(\gamma^{**}M), \xi\rangle &= \langle M, (\pi\gamma)^*(\xi)\rangle \\ &= \lim_j\langle m_j, (\pi\gamma)^*(\xi)\rangle = \lim_j\langle(\pi\gamma)(m_j), \xi\rangle \end{aligned}$$

de modo que $\pi^{**}(\gamma^{**}M) = e$. Este hecho tiene importancia debido al siguiente lema, central para la construcción de la geometría de $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Lema 4.1. *Sean $\mathfrak{A}$, $M = \lim_j m_j$, como antes y $\mathcal{B}$ álgebra dual con unidad e. Sea $\theta : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo acotado tal que $\theta^{**}(\gamma^{**}M) = e$. Entonces el operador $\mathcal{K}_\theta : \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ definido mediante*

$$\langle\mathcal{K}_\theta(T), \xi\rangle := \langle\mu^{**}(T \otimes \theta)^{**}(M), \xi\rangle \ , \qquad T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}), \ \xi \in \mathcal{B}_*,$$

en donde μ es la multiplicación in $\mathcal{B}$, es lineal y continuo, y cumple:

- *(i) $\|\mathcal{K}_\theta\| \leq \|M\|\|\theta\|$.*
- *(ii) $\mathcal{K}_\theta(bT(\ \cdot\ )) = b\mathcal{K}_\theta(T)$, para cada $b \in \mathcal{B}$, $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.*
- *(iii) $\mathcal{K}_\theta(T(a\ \cdot)) = \mathcal{K}_\theta(T)\theta(a)$, para cada $a \in \mathfrak{A}$, $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.*
- *(iv) $\mathcal{K}_\theta(\theta) = e$.*

Este lema es el teorema 2.1 de [CG2] (véase tambien [Ru2, Teorema 8.2.1], si bien éste contiene un ligero error de transcripción), que proporciona la 1-forma fundamental $\mathcal{K}_\pi$, sobre la cual cimentar la estructura reductiva de $O(\pi)$, $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Denotemos por $\mathcal{G}$ el grupo de elementos inversibles de $\mathcal{B}$. Si $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, y $u \in \mathcal{G}$ es sencillo comprobar que $(u\pi u^{-1})(\mathfrak{A})\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_*$. Por tanto, la acción

$$(u, \pi) \mapsto u\pi u^{-1}, \mathcal{G} \times Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \to Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$$

está bien definida (y es holomorfa). Como habitualmente, vamos a estudiar el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G} \to O(\pi)$.

Proposición 4.2. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{B}$ como antes, y sea $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Entonces $\mathcal{K}_\pi(\rho) \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{K}_\pi(\rho)\pi\mathcal{K}_\pi(\rho)^{-1} = \rho$ para toda representación ρ en el entorno $\mathcal{U}_\pi := \{\rho : \|\rho - \pi\| < (\|M\|\ \|\pi\|)^{-1}\}$.*

La demostración de la proposición emplea los puntos (ii), (iii) y (iv) del lema 4.1. Lo que nos dice el resultado es que τ_π admite secciones locales obtenidas de la 1-forma $\mathcal{K}_\pi$. Además una tal sección induce, en torno a π, un homeomorfismo local implementado por la fórmula $u \mapsto (u\pi u^{-1}, \mathcal{K}_\pi(u\pi u^{-1})^{-1}u)$ ([CG2]). En consecuencia, $\tau_\pi : \mathcal{G} \to O(\pi)$ es un fibrado principal holomorfo.

Si releemos la introducción de este trabajo veremos que en la fórmula del homeomorfismo local debe estar implícita una cuasi-esperanza $\mathcal{E}_\pi$ para la cual $\mathcal{K}_\pi(u\pi u^{-1})^{-1}u = \mathcal{E}_\pi(u^{-1})^{-1}$. Esto es así, en efecto.

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ definida por*

$$\mathcal{E}_\pi(b) := \mathcal{K}_\pi(\pi(\ \cdot\ )b), \qquad si\ \ b \in \mathcal{B}.$$

Entonces $\mathcal{E}_\pi \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ y se cumple:

(i) $\|\mathcal{E}_\pi(b)\| \leq \|\pi\|^2\|b\|$, *($b \in \mathcal{B}$).*

(ii) *ran* $\mathcal{E}_\pi = \pi(\mathfrak{A})'$ *en* $\mathcal{B}$.

(iii) $\mathcal{E}_\pi^2 = \mathcal{E}_\pi$, *y* $\mathcal{E}_\pi(e) = e$.

(iv) $\mathcal{E}_\pi(cbd) = c\mathcal{E}_\pi(b)d$, *para todo* $b \in \mathcal{B}$*;* $c, d \in \pi(\mathfrak{A})'$.

En analogía con lo visto para grupos promediables (véase la sección anterior), sea $Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ el espacio de todas las derivaciones (internas de hecho, pues $\mathfrak{A}$ es promediable) de $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{B}$, considerando $\mathcal{B}$ como $\mathfrak{A}$-módulo a través de la acción de π. Sea $\Delta_\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ dada por $\Delta_\pi(b)(a) := b\pi(a) - \pi(a)b$, $(a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathcal{B})$, y sea $\mathcal{P}_\pi := \Delta_\pi \circ \mathcal{K}_\pi$. Las aplicaciones Δ_π y $\mathcal{P}_\pi$ son lineales y continuas, y verifican las identidades $(d\tau_\pi)_e = \Delta_\pi$, $\mathcal{K}_\pi \circ \Delta_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$, $\ker\, \Delta_\pi = \mathrm{ran}\ \mathcal{E}_\pi$, $\mathrm{im}\ \mathcal{P}_\pi = \mathrm{ran}\ \Delta_\pi = Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Con todo ello, el teorema 1.4 implica que toda órbita $O(\pi)$ es espacio homogéneo de Banach holomorfo, y subvariedad de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, de espacios tangentes $T_\rho(O(\pi)) \equiv Der_\rho(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, $(\rho \in O(\pi))$. El espacio $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ es la unión discreta de sus órbitas.

Todavía más, cada elemento de la componente conexa of π en $O(\pi)$ es de la forma $exp(b_1)...exp(b_n)\pi exp(-b_n)...exp(-b_1)$ con $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$, ya que la componente principal de $\mathcal{G}$, llamémosla $\mathcal{G}_e$, consiste de todos los productos finitos de exponenciales de elementos of $\mathcal{B}$ [SS]. También, el elemento inversible $K_\pi(\rho)$ de la proposición 4.2 está en $\mathcal{G}_e$ de hecho. Por tanto, si consideramos la sub-acción de $\mathcal{G}_e$ sobre $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ obtenemos esta vez que la componente conexa de π es $\tau_\pi(\mathcal{G}_e)$.

Como no podía ser menos, en $O(\pi)$ existe una conexión definida por $\mathcal{E}_\pi$. Si u pertenece a $\mathcal{G}_\pi := \pi(\mathfrak{A})' \cap \mathcal{G}$ y $b \in \ker\, \mathcal{E}_\pi$, se tiene $\mathcal{E}_\pi(ubu^{-1}) = u\mathcal{E}_\pi(b)u^{-1} = 0$, de donde resulta ser $u(\ker\, \mathcal{E}_\pi)u^{-1} = \ker\, \mathcal{E}_\pi$, y $\mathcal{E}_\pi$ deviene en una forma de conexión

$$\mathcal{E}_\pi : T_e(\mathcal{G}) = \mathcal{B} \to \pi(\mathfrak{A})' = T_e(\mathcal{G}_\pi),$$

con distribución asociada de subespacios horizontales $u\ker\, \mathcal{E}_\pi$, y verticales $u\pi(\mathfrak{A})'$, cuando u recorre $\mathcal{G}$.

Hay una clase particular de álgebras de Banach promediables para cuyas representaciones se puede dar una estructura reductiva π-invariante, en el sentido de lo hecho para grupos (promediables). Dada A álgebra de Banach, un elemento de $A\hat{\otimes}A$ se llama *simétrico* si es punto fijo de la extensión de la aplicación $a \otimes a' \mapsto a' \otimes a$ al espacio completado $A\hat{\otimes}A$. Un álgebra promediable se llama *simétricamente promediable* si posee una diagonal aproximada acotada que sea simétrica. Esta definición fue también introducida por B. E. Johnson. Como ejemplos, toda álgebra promediable que sea conmutativa, o álgebra de grupo de un grupo (promediable, claro), o álgebra C^* fuertemente promediable, es simétricamente promediable [J2].

Sea entonces $\mathfrak{A}$ un álgebra simétricamente promediable. Cualquier diagonal virtual M obtenida como punto límite débil* de una diagonal aproximada simétrica verifica $M\tilde{\circ}a = a\tilde{\circ}M$ $(a \in \mathfrak{A})$, siendo la operación de bimódulo $\tilde{\circ}$ dada por $(c\otimes d)\tilde{\circ}a = ca\otimes d$, $a\tilde{\circ}(c\otimes d) = c\otimes ad$ $(a, c, d \in \mathfrak{A})$. Por consiguiente, si $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathcal{B}$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\pi(\pi(a)b) &= \mathcal{K}_\pi(\pi(\cdot\ a)b) = \mu^{**}((\pi(\cdot\ a)b\otimes\pi)^{**}(M)) = \mu^{**}((\pi(\ \cdot\ )b\otimes\pi)^{**}(M\tilde{\circ}a)) \\ &= \mu^{**}((\pi(\ \cdot\ )b\otimes\pi)^{**}(a\tilde{\circ}M)) = \mu^{**}((\pi(\cdot\ )b\pi(a)\otimes\pi)^{**}(M)) = \mathcal{E}_\pi(b\pi(a)).\end{aligned}$$

(Recordemos que μ denota la multiplicación en $\mathcal{B}$.)

En resumen, se cumple que $\mathcal{E}_\pi(\pi(a)b) = \mathcal{E}_\pi(b\pi(a))$ for every $a \in \mathfrak{A}$ and $b \in \mathcal{B}$. Análogamente al caso de grupos, si tomamos $H_\pi := \ker\,\mathcal{E}_\pi$ esa propiedad puede escribirse como $[\pi(\mathfrak{A}), H_\pi] \subset H_\pi$.

Las disquisiciones previas nos facilitan el siguiente

Teorema 4.4. *Sean $\mathfrak{A}$ un álgebra de Banach promediable con diagonal virtual fija M, y $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach dual. Entonces, para toda representación $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, la órbita $O(\pi) = \{U\pi U^{-1} : U \in \mathcal{G}\}$ posee estructura reductiva, con forma de conexión definida por M como antes. Más aún, en el caso en que $\mathfrak{A}$ admita una diagonal virtual M tal que $M\tilde{\circ}a = a\tilde{\circ}M$ $(a \in \mathfrak{A})$ (por ejemplo, cuando $\mathfrak{A}$ es simétricamente promediable), entonces la estructura reductiva es π-invariante, en el sentido de que $[\pi(\mathfrak{A}), H_\pi] \subset H_\pi$, siendo H_π el espacio de vectores horizontales (en el punto π) asociado a la conexión.*

Los invariantes de la conexión definida por M sobre el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G} \to O(\pi)$, así como los de la conexión lineal inducida en el fibrado tangente, pueden calcularse de manera "standard", a partir de $\mathcal{K}_\pi$ y $\mathcal{E}_\pi$ (véase literatura precedente sobre el tema). Es tiempo de insistir, a esos efectos, en que $\mathcal{K}_\pi$ induce una 1-forma sobre $O(\pi)$ en el sentido de [MR]. Para empezar, recordemos que $\mathcal{K}_\pi\circ\Delta_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$ y por ello $\mathcal{K}_\pi$ se identifica con el isomorfismo $Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \cong \ker\,\mathcal{E}_\pi$ dado por $\Delta_\pi(b) \mapsto b - \mathcal{E}_\pi(b)$, $b \in \mathcal{B}$. De otro modo dicho, H_π puede conseguirse alternativamente como la elevación de $T_\pi(O(\pi)) = Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ al fibrado, exactamente como $H_\pi = \mathcal{K}_\pi(Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B}))$ (y lo mismo con $H^u = u \cdot H_\pi$, para cada $u \in \mathcal{G}$). Así la interpretación geométrica queda muy clara. Más aún, si $\rho = Ad_u(\pi)$, o sea, $\rho = u\pi u^{-1}$, $u \in \mathcal{G}$, no es complicado comprobar, usando diagonales aproximadas por ejemplo ([CG2]), que $\mathcal{K}_\rho(T) = (Ad_u \circ \mathcal{K}_\pi \circ Ad_{u^{-1}})(T)$ for every $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. En conclusión, $\rho \mapsto \mathcal{K}_\rho$ define una 1-forma sobre $O(\pi)$.

Algunos invariantes son los siguientes.

Forma de curvatura de la conexión: Para $u \in \mathcal{G}$ and $X, Y \in (T\mathcal{G})_u = u \cdot \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}$,

$$\Omega_u(X, Y) = (1/2)h_\pi([u^{-1}Y, u^{-1}X]) + (1/2)[h_\pi(u^{-1}X), h_\pi(u^{-1}Y)],$$

en donde h_π es la proyección $h_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$ sobre los vectores horizontales en $e \in \mathcal{G}$.

Derivada covariante de un campo tangente $Y(t)$ a lo largo de una curva $\beta(t)$: Es el campo vectorial $\frac{DY}{dt}$ dado por

$$\mathcal{K}_\beta(\frac{DY}{dt}) = \mathcal{K}_\beta(\dot{Y}) + [\mathcal{K}_\beta(Y), \mathcal{K}_\beta(\dot{\gamma})].$$

Restringida a $\ker(\mathcal{E}_\beta)$, $\mathcal{K}_\beta$ es un isomorfismo.

Una curva β es una *geodésica* si $\frac{D\dot{\beta}}{dt} = 0$. Se puede probar que la única geodésica ψ in $O(\pi)$ con valor inicial π y vector velocidad $\dot{\psi}(0) = X$ es

$$\psi(t) = e^{t\mathcal{K}_\pi(X)}\pi e^{-t\mathcal{K}_\pi(X)}, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Tensor torsión T:

$$\mathcal{K}_\pi(T(X, Y)) = (I - \mathcal{E}_\pi)([\mathcal{K}_\pi(X), \mathcal{K}_\pi(Y)]),$$

para todos $X, Y \in Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Tensor curvatura R:

$$\mathcal{K}_\pi(R(X, Y)Z) = (I - \mathcal{E}_\pi)([\mathcal{K}_\pi(Z), (I - \mathcal{E}_\pi)[\mathcal{K}_\pi(X), \mathcal{K}_\pi(Y)]])$$

para todos $X, Y \in Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Cerramos este apartado mencionando la *ecuación de transporte*, que para una curva $\beta : [0, 1] \to O(\pi)$ de clase $C^{(1)}$ con $\beta(0) = \pi$, es la ecuación diferencial

$$\dot{\Gamma}(t) = \mathcal{K}_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t))\Gamma(t),$$

sujeta a la condición inicial $\Gamma(0) = 1$. La solución Γ se llama *levantamiento horizontal* of β porque $\tau_\pi(\Gamma(t)) = \beta(t)$, $t \in [0, 1]$, y los vectores tangentes de Γ en cada punto pertenecen a los correspondientes espacios horizontales, $\dot{\Gamma}(t) \in H^{\gamma(t)}$ para todo $t \in [0, 1]$.

El anterior listado se recoge en [CG2, pp. 324, 325].

NOTAS.- 1) Esta sección subsume la literatura precedente sobre el tema, en el sentido de construir o establecer la geometría de conexión de los conjuntos de representaciones (pues hay otros varios aspectos a considerar que no se han contemplado aquí). Algunos de los resultados vistos son extensión considerable de sus precedentes. Por eso he expuesto la teoría con algo más de detalle que en previas secciones.

Notemos que los resultados indicados se aplican a álgebras C^* nucleares, como la de grupo $C^*(\mathfrak{G})$, o álgebras de convolución $L^1(\mathfrak{G})$ (en ambos casos si $\mathfrak{G}$ es promediable), trabajando directamente sobre las álgebras, mediante las diagonales virtuales o aproximadas.

Al respecto, se afirma en [CG2] que si m es una media sobre un grupo (localmente compacto) promediable $\mathfrak{G}$ entonces m origina una diagonal virtual M in $(L^1(\mathfrak{G})\hat{\otimes}L^1(\mathfrak{G}))^{**} = L^1(\mathfrak{G}\times\mathfrak{G})^{**} = L^\infty(\mathfrak{G}\times\mathfrak{G})^*$ sin más que poner

$$M : h \in L^\infty(\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}) \mapsto M(h) = \int_{\mathfrak{G}} h(t,t^{-1})\; dm(t),$$

para cada $h \in L^\infty(\mathfrak{G}\times\mathfrak{G})$. Este es un despite de grueso calibre, puesto que la diagonal $\{(t,t^1) : t \in \mathfrak{G}\}$ puede ser de medida cero. Asi que la afirmación sólo vale cuando $\mathfrak{G}$ es discreto. Los autores de [CG2] están agradecidos al Dr. Ross Stokke por la anterior observación. De hecho, la relación entre medias sobre $\mathfrak{G}$ y diagonales aproximadas (o virtuales) asociadas a $\mathfrak{G}$ no es trivial precisamente ([St]). Afortunadamente, el error es marginal y no afecta a la sustancia de los teoremas de [CG2].

2) Las técnicas comentadas en la sección podrían ser adaptadas a las álgebras de von Neumann inyectivas, utilizando diagonales virtuales *normales*. En ese caso, debería verificarse paso a paso que tales técnicas son compatibles con la continuidad débil* (o ultradébil), que es la propia a considerar en este contexto. Resulta un método más sencillo apelar a la notación de Effros para esas diagonales (véase la introducción de este trabajo), como se hace en [CG1]. De esta forma se obtienen los resultados vistos aquí (salvo la existencia de estructura π-invariante), y en la sección 2 (salvo el recíproco, es decir, su caracterización), para álgebras inyectivas $\mathcal{M}$, muy directamente, sin necesidad del aparato usado en [ACS1] y reflejado en §2.

3) Pueden darse versiones análogas del teorema 4.3, y de los resultados previos, para conjuntos de $*$-representaciones y grupos unitarios actuando sobre ellos, en función de la analiticidad real. Por otra parte, tambien pueden aplicarse parte de las técnicas descritas aquí a órbitas de automorfismos de álgebras promediables [CG2], si bien en el caso de un álgebra de von Neumann no es necesario suponer la inyectividad de la misma [ACS3].

Queda por plantear la posible caracterización geométrica de la promediabilidad de un álgebra de Banach. De acuerdo con el resultado dado por Shtern para grupos, ya comentado en §3, tiene sentido la

CUESTIÓN 4.4: Aclarar si el hecho de que el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G} \to O(\pi)$ sea principal implica que el álgebra $\mathfrak{A}$ deba ser promediable (véase [Ru2, p. 229]).

Y en general,

CUESTIÓN 4.5: Demostrar si se cumple o no que la existencia de estructura reductiva, o de alguna otra propiedad de corte geométrico ligada a ésa, en órbitas de representaciones de un álgebra de Banach obliga a ésta a ser promediable.

El hecho de que la π-invariación funcione bien en el caso de grupos y de que toda álgebra $L^1(\mathfrak{G})$ sea simétricamente promediable, si $\mathfrak{G}$ es promediable, sugiere dedicar cierta atención a las álgebras simétricamente promediable generales, respecto a la cuestión anterior.

5 Algunos vínculos

Representación básica de espacios reductivos. En la sección 1 comenzamos refiriendo resultados geométricos en conjuntos de grasmanianas. Reencontramos grasmanianas en este parágrafo, a las que van a parar los espacios reductivos (reflejando así, aquéllas, su carácter "universal"). En cierto sentido, ésto cierra el circuito.

Supongamos dado un espacio homogéneo reductivo Q en abstracto, pero formado a partir de la acción $G(A) \times Q \to Q$ del grupo de inversibles $G(A)$ de una C^*-álgebra A con unidad, y con estructura reductiva definida por una esperanza condicional $\mathcal{E} : A \to B$, siendo $B := \mathcal{E}(A)$ sub-álgebra C^* de A con la misma unidad. Tenemos entonces un fibrado principal $\tau : u \mapsto uqu^{-1}$, $G(A) \to Q$, si q es un elemento de Q. Supongamos también dado un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ tal que $B \subset A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Mediante aplicación del teorema de Stinespring al operador completamente positivo (que lo es por tratarse de una esperanza condicional) $\mathcal{E}$ se construyen un nuevo espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$, con $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, y una $*$-representación $\rho : A \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$. Se toma la proyección de Jones $p : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, que es extensión de la esperanza $\mathcal{E}$, y se considera la C^*-álgebra $\tilde{A}$ generada por $\rho(A)$ y p en $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$. De este modo resultan las dos órbitas de tipo grasmaniano $O(p) := \{upu^{-1} : u \in G(\tilde{A})\}$ y $O_A(p) := \{\rho(u)p\rho(u^{-1}) : u \in G(A)\}$. Entonces Q es biyectivo con $O_A(p)$, si suponemos que $\mathcal{E}$ es fiel, y la aplicación $Q \to O_A(p) \subset O(p)$ es holomorfa. A esta aplicación se le llama en [ALRS] *representación básica.*

No siempre la inclusión $Q \hookrightarrow O(p)$ presenta Q como subvariedad de $O(p)$. De hecho esa situación es algo restrictiva.

Sea A^+ el cono de elementos positivos de A. Diremos que la esperanza $\mathcal{E}$ tiene *índice finito* si $\lambda := \sup\{\varepsilon > 0 : \|\mathcal{E}(a)\| \geq \varepsilon \|a\|,\ (a \in A^+)\}$ es un número real *positivo.* En este caso se escribe $Ind(\mathcal{E}) = \lambda^{-1}$. Hay varias nociones de índice de una esperanza condicional; la dada aquí (es decir, en [ALRS]) es conocida como índice *débil* en el ambiente de las álgebras de von Neumann. Pues bien, en [ALRS] se demuestra el siguiente interesante resultado: la inclusión $Q \hookrightarrow O(p)$ proporciona Q como subvariedad (holomorfa) de $O(p)$ si y solamente si el índice de $\mathcal{E}$ es finito.

Eso no ocurre muchas veces, pero se prueba también en [ALRS, Proposición 5.3] que hay ejemplos importantes en que sucede. A saber, cuando $\mathcal{E}$ es la esperanza $\mathcal{E}_\pi$ asociada a una representación unitaria (continua en norma) de un grupo compacto. Evidentemente, se suscita la cuestión de qué pasa con esperanzas $\mathcal{E}_\pi$ cuando π es una representación unitaria de un grupo promediable en general. La respuesta no es clara. La demostración de [ALRS, Proposición 5.3] no funciona por un pequeño detalle, a saber, que en un grupo localmente compacto *no compacto*, dotado de una media m sobre él, se tiene siempre que $m(\chi_V) = 0$, siendo χ_V la función característica de un abierto relativamente compacto en el grupo ([HR]). Pero ese detalle parece vital, de modo que quizá sea más sencillo probar que $Ind(\mathcal{E}_\pi) = \infty$ en general, en este contexto.

En cualquier caso, si $Ind(\mathcal{E}_\pi)$ fuera finito para grupos promediables entonces se podría aplicar automáticamente una serie de interesantes resultados. Por ejemplo tendríamos que la órbita $O(\pi)$ es un espacio de cubrimiento. Si $Ind(\mathcal{E}_\pi)$ no fuera finito en general entonces habría que indagar el mismo tipo de cuestiones en otras direcciones más elaboradas (véase para ambas posibilidades [ALRS], [AS 1,2], por ejemplo).

Álgebras de Banach duales. Se han definido en la sección 4. La propiedad que sustancia estas álgebras aparece utilizada de manera significativa en [CG2] y [CG1], y probablemente ya debía subyacer en diversos respectos. Su definición explícita se debe a V. Runde, quien ha desarrollado un trabajo notable en esta dirección ([Ru 1,3,4,5,6]). La clase de álgebras duales incluye como subclase más importante la de las álgebras de von Neumann y, como éstas, requieren de los morfismos implicados en sus problemas naturales que sean continuos para las topologías débiles*. Tienen sentido, por separado, los conceptos de álgebra dual Connes-promediable y de diagonal virtual normal (análogos a los mencionados en §1). Toda álgebra dual con diagonal virtual normal es promediable de Connes, pero no a la inversa [Ru5]. (Un caso importante, aparte del de álgebras de von Neumann, para el que las dos nociones coinciden es el del álgebra de medidas $M(G)$ de un grupo localmente compacto G [Ru 3,4].) Si un álgebra dual posee diagonal virtual normal entonces las órbitas de sus representaciones y $*$-representaciones débilmente* continuas son espacios homogéneos, etc., con estructura reductiva. Esto se demuestra en [CG1] usando la notación Effros para una diagonal virtual. La pregunta que queda en el aire es fácil de adivinar.

CUESTIÓN 5.1: Demostrar que, para un álgebra de Banach dual que sea Connes-promediable, sus órbitas de representaciones débilmente* continuas poseen estructura reductiva. Si esto es así, estudiar si se verifica el recíproco, o sea, si la existencia de estructura reductiva implica promediabilidad de Connes.

Proyecciones completamente acotadas. En [BP] se establece un procediemiento general para construir aplicaciones *completamente acotadas* (c. a., en abreviatura) idempotentes (o sea, proyecciones) sobre *espacios de operadores*, sujetos a la acción de un semigrupo promediable formado a su vez por aplicaciones completamente acotadas. Las proyecciones obtenidas tienen como rango o espacio imagen el conjunto de puntos fijos para la acción del semigrupo, de manera que a priori se puede imaginar que este tipo de resultados guarda alguna relación con lo tratado aquí. De hecho el "leitmotiv" de [BP] consiste en explorar las consecuencias del uso de técnicas de operaciones de promedio en el contexto de los operadores c. a., y en ciertas direcciones no exploradas anteriormente. En este sentido, hay cierta relación con [CG1].

Más aún, el principal teorema de [BP] permite adquirir una visión unificada de diversas estructuras en teoría de operadores aparentemente no conectadas entre sí (sistemas dinámicos, operadores de Toepliz, espacios homogéneos de grupos de Lie). Así, se tiene el corolario 3.6 de [BP], en el que aparece latente una estructura reductiva (definida por una forma de conexión c. a.) asociada a operadores de Toepliz, que tal vez mereciera la pena analizar en detalle. Otro ejemplo es el corolario 3.10 de la misma referencia, en el que se prueba que las órbitas de representaciones de grupos promediables, *no necesariamente* localmente compactos, son variedades de Banach.

Hay otros varios resultados en [BP] (Teorema 3.3, Teorema 3.5, ...) que merecen atención desde el enfoque contemplado en esta reseña. El hecho común a todos ellos, incluidos los corolarios citados, es que las proyecciones resultantes, así como acciones de grupos en algunos casos, son c. a., por lo que es natural preguntarse si se puede establecer geometrías reductivas en espacios homogéneos en el ambiente general, pero al mismo tiempo exclusivo, en que todos los morfismos implicados sean completamente acotados. Si este planteamiento funcionara al menos en principio, podría servir de aliciente para abordar los problemas de reciprocidad o, mejor, de caracterización (a la manera como problemas clásicos se han resuelto haciendo una incursión en el mundo completamente acotado, véase [P]). A modo de ejemplo algo impreciso, supóngase que las órbitas de representaciones c. a. de un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ en todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ poseen estructura reductiva con forma de conexión c. a. (y si hace falta, incluso π-invariante). La cuestión en este punto es si esa propiedad obliga al álgebra $\mathfrak{A}$ a ser promediable.

A estas alturas el lector que conozca aunque sólo sea de referencia la teoría de "operator spaces" ya echará en falta la pregunta obvia:

CUESTIÓN 5.2: Sea A un álgebra de Banach *operatorial* promediable. Estudiar si (las órbitas de) sus espacios de representaciones c. a. son espacios homogéneos con estructura c. a. reductiva, y si es así estudiar si esa propiedad obliga al álgebra operatorial A a ser promediable.

(He traducido "operator Banach algebra" ([Ru2]) por "álgebra de Banach operatorial" porque en español la expresión "álgebra de Banach de operadores" puede dar lugar a confusión, por identificación con "álgebra de operadores".)

Las nociones de álgebra de Banach operatorial y álgebra de Banach operatorial promediable pueden consultarse en [Ru2]. No lo he comprobado, pero de acuerdo con [Ru2, Teorema 7.3.4], es muy probable que la respuesta a la primera parte de la cuestión 5.2 sea afirmativa. En el caso en que $\mathfrak{A}$ sea un álgebra C^* se tiene que $\mathfrak{A}$ es promediable operatorial si y sólo si es promediable (o nuclear), véase [Ru2, Teorema 7.5.1], luego todo es afirmativo en la cuestión 5.2.

Modelizaciones geométricas de representaciones GNS. El llamado método de órbitas descansa en la idea de que el estudio de representaciones infinito-dimensionales de un grupo de Lie puede basarse en el análisis de una representación en dimensión finita particularmente sencilla de entender, la conocida como representación co-adjunta del grupo. Dicho en términos más cualitativos, se trata de acceder a la comprensión de objetos complicados ligados a la teoría de representaciones (o las representaciones mismas) mediante objetos geométricos "sencillos", las órbitas de la representación co-adjunta. Éstas poseen de modo natural una estructura simplética. Muy somera y esquemáticamente, el método en cuestión funciona como sigue.

Tengamos de partida un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y consideremos la acción de G sobre sí mismo mediante automorfismos internos, $(u, g) \mapsto ugu^{-1}$, $G \times G \to G$. La diferencial de la aplicación $g \mapsto ugu^{-1}$, $G \to G$ en la identidad de G se denota como $Ad(u) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, y da lugar a lo que se llama *acción adjunta* $Ad : u \mapsto Ad(u)$, $G \to \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, si $u \in G$. Por dualidad, tenemos entonces la *acción co-adjunta* de G sobre el dual $\mathfrak{g}^*$ (real o complejo, ahora no es materia de discusión) de $\mathfrak{g}$ dada por $K : u \mapsto K(u) = Ad(u^{-1})^*$, $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$, donde $\langle K(u)\xi, X\rangle = \langle \xi, Ad(u^{-1})X\rangle$, para $u \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Sea una órbita Ω de $\mathfrak{g}^*$ en la acción anterior. Entonces existe sobre Ω una 2-forma diferencial ω *simplética*, es decir, no degenerada, G-invariante, y *cerrada*, que viene dada (en notación al uso) como $\omega : F \mapsto \omega_F(K_*(X)F, K_*(Y)F) := \langle F, [X, Y]\rangle$, para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$, $F \in \Omega$. Fijemos F en Ω y tomemos $\mathfrak{h}$ una sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, de dimensión maximal, tal que $F([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. Sea H subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Se puede definir una representación unidimensional irreducible ρ de H mediante la fórmula $\rho(\exp\ X) := e^{2\pi i\langle F,X\rangle}$, $X \in \mathfrak{h}$. En principio esta definición es local y su extensión a todo H depende en profundidad de propiedades gométricas de la forma simplética; a saber, que la órbita Ω sea "integral" (no necesitamos la definición), o equivalentemente, que ω sea la forma de curvatura de una conexión hermítica en cierto fibrado de línea (unidimensional) sobre Ω. Una vez tal ocurre y tenemos la representación ρ definida sobre todo H, se obtiene una representación π (que debería ser unitaria e irreducible) de G como la *inducida* por ρ, $\pi := Ind_H^G(\rho)$ en notación habitual.

Hay sustancialmente dos modos de inducir representaciones de subgrupos a grupos, según sea la modelización del espacio de Hilbert de la representación π. En una de estas interpretaciones nos encontramos una intensa tonalidad geométrica, pues se puede decir con precisión que el espacio de Hilbert de la representación π es el espacio de secciones de un cierto fibrado vectorial con base el espacio homogéneo G/H.

La pretensión del método de órbitas es que pueda establecerse por la vía anterior, o variantes más complicadas, una correspondencia (incluso topológica) entre órbitas co-adjuntas y clases de equivalencia de representaciones unitarias e irreducibles, para amplias e importantes clases de grupos de Lie. Esa correspondencia debería también traducir los aspectos (más o menos intrincados) de la teoría de representaciones en propiedades de la geometría simplética de las órbitas, y viceversa. (Tal plan de acción viene a reflejar el planteamiento matemático de los procedimientos de cuantización geométrica de la Física.) Pero, si bien el método funciona satisfactoriamente para unas cuantas clases notables de grupos, no es ése exactamente el caso respecto a otras clases o ejemplos no menos interesantes. Para todo lo anterior puede consultarse [Ki1] y [Ki2], así como [F] para la teoría de representaciones inducidas.

Para grupos de Banach-Lie en dimensión infinita es posible también un acercamiento al estudio de representaciones que rememore las líneas maestras del método orbital, pero, naturalmente, no se dispone de una maquinaria tan ajustada o refinada como la del caso finito-dimensional [Ki2]. Hay entonces diversas formas de entrarle al asunto, según el contexto.

Vamos a considerar el siguiente teatro de operaciones. Sea A un álgebra C^* con unidad y B una sub-álgebra C^* de A de forma que existe una esperanza incondicional $\mathcal{E} : A \to B$ y un estado φ de A tales que $\varphi\circ\mathcal{E} = \varphi$. Démonos cuenta de que de momento esta situación recuerda mucho a la contemplada antes: el álgebra A puede verse como el álgebra de Lie del grupo $G(A)$; B, asimismo, como el álgebra de Lie de $G(B)$, y φ como el funcional de A^* que correspondería al F de $\mathfrak{g}^*$ anterior. Esta interpretación se refuerza si asumimos además que el estado φ es una traza sobre B; es decir, $\varphi(bb' - b'b) = 0$ para cada $b, b' \in B$. Pero, más todavía, resulta que si suponemos que A es un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ y que φ no sólo está en $\mathcal{M}^*$, sino que de hecho pertenece al predual $\mathcal{M}_*$, entonces la órbita co-adjunta unitaria

$$O(\varphi) := \{\varphi(u^{-1} \cdot u) : u \in U(\mathcal{M})\}$$

posee estructura simplética o, con más precisión, débilmente simplética (véase [BR2], y para más detalle [BR1], [B]).

Podríamos intentar seguir los pasos del proceso de inducción señalado líneas arriba para obtener una representación de A inducida por la aplicación $\exp(X) \mapsto e^{2\pi i\langle\varphi,X\rangle}$, $X \in B$, pero eso no está claro, y por otra parte, disponemos en teoría de operadores de un ingenio mucho más directo (aunque menos potente) para construir representaciones de A a partir de $\varphi :$ el teorema de Gelfand-Naimark o Segal, el teorema GNS; recordemos brevemente en qué consiste.

Primero se toma la forma sesquilineal $(a_1, a_2) \mapsto \varphi(a_2^* a_1), A \times A \to \mathbb{C}$, se factoriza A

por el espacio nulo de esa forma, y se considera la complección correspondiente. Así se obtiene un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A$, y se define la representación $\rho_A : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ como la extensión (automática) del operador de multiplicación $a' \mapsto aa'$ en A.

En este punto ya no podemos hablar de un método de órbitas propiamente, nos hemos separado bastante. Tenemos la representación directamente dada en A, sin pasar por B de hecho, y no hay más geometría aparentemente que la inherente al conjunto de estados, si es que viniera al caso tratar con ella. Pero nuestra ρ es una representación unitaria de A, y existe, ya desde algún tiempo, un vivo interés en analizar las representaciones unitarias de grupos unitarios (y no sólo éstos) de álgebras C^*, o von Neumann, en todas sus posibilidades. Las analogías iniciales del caso C^*-algebraico con el de grupos de Lie, comentadas antes, son tan palmarias que sugieren buscar un mayor paralelismo, en particular mirando hacia características geométricas de la representación. Este paso se da en [BR2]:

Del mismo modo que con el álgebra A podemos obtener el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_B$, y representación $\rho_B : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, a partir de B y φ, aplicando el método GNS. Por ser $\mathcal{E} : A \to B$ esperanza condicional, cumple que $0 \leq \mathcal{E}(a)^*\mathcal{E}(a) \leq \mathcal{E}(a^*a)$ para todo $a \in A$, y por tanto puede extenderse a una proyección $P_\varphi : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$. Entonces se tiene $P_\varphi \circ \rho_A(b) = \rho_B(b) \circ P_\varphi$ para todo $b \in B$.

Restringimos ahora las representaciones ρ_A y ρ_B a los respectivos grupos de elementos unitarios de A y B. Tenemos entonces un fibrado principal $U(A) \to U(A)/U(B)$, y el fibrado vectorial asociado $\Pi_\varphi : [(u, f)] \mapsto u \cdot U(B)$, $U(A) \times_{U(B)} \mathcal{H}_B \to U(A)/U(B)$, en donde $[(u, f)]$ es la clase de $(u, f) \in U(A) \times \mathcal{H}_B$ respecto a la relación de equivalencia $(u_1, f_1) \sim (u_2, f_2)$: existe $v \in U(B)$ tal que $u_1 = u_2v$ y $f_1 = \rho_B(v^{-1})f_2$. Este último fibrado es hermítico continuo, con núcleo reproductivo K_φ de sencilla expresión,

$$K_\varphi(u_1U(B), u_2U(B))[(u_2, f)] \;=\; [(u_1, P_\varphi(\rho_A(u_1^{-1}u_2)f))]$$

siendo $u_1, u_2 \in U(A)$ y $f \in \mathcal{H}_B$.

Pues bien, la representación ρ_A puede modelizarse geométricamente mediante la transformación del espacio $\mathcal{H}_A$ en un espacio de secciones del fibrado Π_φ. Sea $\Gamma(U(A)/U(B))$ el espacio de secciones continuas de ese fibrado, y sea ι_φ el *operador de modelización* $\iota_\varphi : \mathcal{H}_A \to \Gamma(U(A)/U(B))$ dado, en clara relación con el núcleo K_φ, por $\iota_\varphi(h)(u\,U(B)) := [(u, P_\varphi(\rho_A(u^{-1})h))]$ para cada $h \in \mathcal{H}_A$ y $u \in U(A)$. Se tiene que de hecho $\iota_\varphi(h)(\mathcal{H}_A)$ consiste de secciones analítico-reales.

Sea α la acción natural de $U(A)$ sobre el espacio $\Gamma(U(A)/U(B))$.

Teorema 5.3. *([BR2]) El operador ι_φ es inyectivo e intercambia la representación ρ_A (restringida a $U(A)$) con la representación α; es decir, $\iota_\varphi \circ \rho_A(v) = \alpha(v) \circ \iota_\varphi$:*

$$\iota_\varphi(\rho_A(v)h)(u \cdot U(B)) = v\; \iota_\varphi(h)(v^{-1}u \cdot U(B))$$

para cada $u, v \in U(A)$, $h \in \mathcal{H}_A$.

Este teorema suministra una interesante modelización geométrica (en espacios de secciones) de representaciones GNS sobre grupos de unitarios en álgebras de operadores. La llave de paso para su obtención la ha proporcionado un adecuado núcleo reproductivo asociado a un fibrado vectorial. Tiene importancia estudiar cuándo las secciones de la modelización son holomorfas.

Supóngase entonces que A es un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ con un estado τ normal, fiel, y que sea traza. Sea $a \in \mathcal{M}$, de espectro finito, tal que $0 \leq a$, $\tau(a) = 1$. Definamos $\varphi(a') := \tau(aa')$ si $a' \in \mathcal{M}$. Sea $\mathcal{M}_\varphi := \{c \in \mathcal{M} : \varphi(ca') = \varphi(a'c), (a' \in \mathcal{M})\}$. Notemos que el cociente $U(\mathcal{M})/U(\mathcal{M}_\varphi)$ y la órbita co-adjunta unitaria $O(\varphi)$ coinciden difeomórficamente.

Teorema 5.4. *([BR2]) El fibrado vectorial $U(\mathcal{M}) \times_{U(\mathcal{M}_\varphi)} \mathcal{H}_{\mathcal{M}_\varphi} \to O(\varphi)$ es holomorfo, con núcleo reproductivo holomorfo, y la imagen $\iota_\varphi(\mathcal{H}_\mathcal{M})$ del operador de modelización está formada en este caso por secciones holomorfas.*

Parece bastante claro que hay una relación estrecha (al menos entre aspectos formales) de los teoremas 5.3 y 5.4, por un lado, y los resultados comentados en secciones precedentes. Desde luego, tenemos un primer resultado inmediato en este sentido, bajo las siguientes hipótesis.

Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C^* nuclear o von Neumann inyectiva, y sea $\mathcal{B}$ una C^*-álgebra dual, esto es, un álgebra de von Neumann. Sea π una representación en $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ (que suponemos débilmente* continua, si $\mathfrak{A}$ es de von Neumann e inyectiva). Tomemos $A := \mathcal{B}$, $B := \pi(\mathfrak{A})'$, y $\mathcal{E} := \mathcal{E}_\pi : A \to B$ obtenida mediante diagonal virtual, como en §4. Sea ϕ un estado cualquiera de B, y tomemos $\varphi := \phi \circ \mathcal{E}$; obviamente, $\varphi \circ \mathcal{E} = \varphi$. Por aplicación del teorema 5.3, resulta que la representación GNS, sobre los unitarios de $B = \pi(\mathfrak{A})'$, construida a partir de φ puede ser modelizada actuando en espacios de secciones. Tales secciones lo son de un tipo de fibrado vectorial, asociado al fibrado principal $\tau_\pi : G(B) \to O(\pi)$ con forma de conexión $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\pi$, de los que se presentan de manera natural en la teoría de conexiones ([KN]). (El corolario también es cierto si se sustituye $\mathfrak{A}$ por un grupo promediable.)

La reflexión que precede sugiere una *cuestión general* evidente, la de investigar cómo se relacionan la geometría diferencial de conexiones y la teoría de representación geométrica de grupos de álgebras de operadores. Puesto que la forma de conexión $\mathcal{E}$ actúa de $A = T_eG(A)$ en $B = T_eG(B)$, y no sólo de $T_eU(A)$ en $T_eU(B)$ (nótese que $T_eU(A) = \{a \in A : a = -a^*\}$), parece lógico incorporar a la teoría en que se inserta el teorema 5.3 los grupos de inversibles $G(A)$ y $G(B)$ *totales*, y no limitarse a los grupos de unitarios. En este contexto, sería oportuno conseguir modelizaciones sobre secciones *holomorfas* en general, así como estudiar su relación con complexificaciones de órbitas de unitarios. Esto implica una serie de tareas colaterales no triviales, como por ejemplo dar con una noción adecuada de núcleo reproductivo, y otras cuestiones. Hay en marcha un proyecto o plan general de trabajo en la direción indicada, por parte del Dr. D. Beltita, del Instituto de Matemáticas "Simion Stoilow" en Bucarest, y yo mismo. Se han obtenido ya algunos resultados de interés, parte de los cuales serán recogidos en una prepublicación de próxima aparición [BG].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el M.C.YT./DGI-FEDER, España, en el seno del Proyecto MTM2004-03036, y por la D.G. de Aragón, España, en el Proyecto E-64.

Referencias

[ACS1] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, A geometric characterization of nuclearity and injectivity, *J. Funct. Anal.* **133** (1995), 474-494.

[ACS2] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, The homogeneous space of representations of a nuclear C*-algebra, *Contemp. Math*, **189** (1995), 37-53.

[ACS3] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, A Banach-Lie structure for the automorphism group of a von Neumann algebra, *prepublicación.*

[ALRS] E. Andruchow, Larotonda, L. Recht y D. Stojanoff, Infinite-dimensional homogeneous reductive spaces and finite index conditional expectations, *Illinois J. Math.* **41** (1997), 54-76.

[ARS] E. Andruchow, L. Recht y D. Stojanoff, The space of spectral measures is a homogeneous reductive space, *Int. Eq. Oper. Th.* **16** (1993), 1-14.

[AS1] M. Argerami y D. Stojanoff, The Weyl group and the normalizer of a conditional expectation, *Int. Eq. Oper. Th.* **34** (1999), 165-186.

[AS2] M. Argerami y D. Stojanoff, Orbits of conditional expectations, *Illinois J. Math.* **45** (2001), 243-263.

[B] D. Beltita, *Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. 137, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[BG] D. Beltita y J. E. Galé, trabajo en preparación.

[BP] D. Beltita y B. Prunaru, Amenability, completely bounded projections, dynamical systems and smooth orbits, por aparecer en *Int. Eq. Oper. Th.*

[BR1] D. Beltita y T. S. Ratiu, Symplectic leaves in real Banach Lie-Poisson spaces, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 753-779.

[BR2] D. Beltita y T. S. Ratiu, Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras, por aparecer en *Adv. in Math.*, accesible *on line.*

[BuP] J. W. Bunce y W. L. Paschke, Quasi-expectations and amenable von Neumann algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **71** (1978), 232-236.

[CG1] G. Corach y J. E. Galé, Averaging with virtual diagonals and geometry of representations, in: *Proc. 13th Intern. Conf. of Banach Algebras 1997*, E. Albrecht y M. Mathieu (eds.), Walter de Gruyter, Berlin 1998, pp. 87-100.

[CG2] G. Corach y J. E. Galé, On amenability and geometry of spaces of bounded representations, *J. London Math. Soc.* **59** (1999), 311-329.

[CPR] G. Corach, H. Porta y L. Recht, Differential geometry of systems of projections in Banach algebras, *Pacific J. Math.* **143** (1990), 209-228.

[E] [E] E. Effros, Amenability and Virtual Diagonals for von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* **78** (1988), 137-153.

[Es] J. Esterle, Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, in: *Radical Banach Algebras and Automatic Continuity, Proc. Long Beach 1981* J. M. Bachar et al., (eds.), Lecture Notes in Math., 975, Springer-Verlag, Berlin 1983, pp. 66-162.

[F] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Adv. Math., CRC Press, Boca Raton 1995.

[G] F. P. Greenleaf, *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*, Van Nostrand Math. Studies 16, Van Nostrand, New York, 1969.

[GM] W. M. Goldman y A. R. Magid (ed.), Geometry of group representations, *Contemporary Math.* **74**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[HR] E. Hewitt y K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* I, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[J1] B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* **127** (1972).

[J2] B. E. Johnson, *Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **120** (1996), 455-474.

[K] A. Kepert, *Amenability in group algebras and Banach algebras*, Math. Scand. **74** (1994), 275-292.

[Ki1] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[Ki2] A. A. Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, Graduate Studies in Math., 64, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[KN] M. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* I, II, Interscience, New York, 1969.

[LP] A. T. M Lau and A. T. L. Paterson, Inner amenable locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **325** (1991), 155-169.

[M] M. Martin, Projective representations of compact groups in C^*-algebras, in: *Linear Operators in Function Spaces (Timisoara 1998)*, Oper. Theory Adv. Appl., 43, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 237-253.

[MS] M. Martin y N. Salinas The canonical complex structure of flag manifolds in a C^*-algebra, in: *Nonselfadjoint Operator Algebras, Operator Theory, and Related Topics*, Bercovici, H. et al. (eds.), Oper. Theory Adv. Appl., 104, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 173-187.

[MR] L. Mata -Lorenzo, L. Recht, Infinite dimensional homogeneous reductive spaces, *Acta Cient. Venezolana* **43** (1992), 76-90.

[N] K. H. Neeb, *Holomorphy and Convexity in Lie Theory*, de Gruyter Exp. in Math. 28, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.

[P] G. Pisier, *Similarity problems and Completely Bounded maps*, Lecture Notes in Math. 1618, Springer-Verlag 1996.

[PR] H. Porta y L. Recht, Spaces of projections in a Banach algebra, *Acta Cient. Venezolana* **38** (1987), 408-426.

[R] I. Raeburn, The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space, *J. Funct. Anal.* **25** (1977), 366-390.

[Ru1] V. Runde, Amenability for dual Banach algebras, *Studia Math.* **148** (2001), 47-66.

[Ru2] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Math. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Ru3] V. Runde, Connes-amenability and normal, virtual diagonals for measure algebras I, *J. London Math.* **67** (2003), 643-656.

[Ru4] V. Runde, Connes-amenability and normal, virtual diagonals for measure algebras II, *Bull. Austral Math. Soc.* **68** (2003), 325-328.

[Ru5] V. Runde, Dual Banach algebras: Connes-amenability, normal, virtual diagonals, and injectivity of the predual bimodule, *Math. Scand.* **95** (2004), 124-144.

[Ru6] V. Runde, A Connes-amenable, dual Banach algebra need not have a normal, virtual diagonal, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 391-402.

[S] A. I. Shtern, A characterization of amenability in the class of connected locally compact groups, *Russian Math. Surv.* **49** No.2 (1994), 174-175.

[St] R. Stokke, Approximate Diagonals and Fϕlner Conditions for Amenable Group and Semigroup Algebras, *Studia Math.* **164** (2004), 139-159.

[SS] A. M. Sinclair and R. R. Smith, *Hochschild cohomology of von Neumann algebras*, London Math. Soc., Lecture Note Series 203, Cambridge University Press, 1995.

[U] H. Upmeier, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^* - algebras*, North- Holland Math. Studies 104, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1985.