

# Órbitas periódicas alrededor de un anillo circular sólido

Fernando Blesa

Grupo de Mecánica Espacial y Dpto. de Física Aplicada. Universidad de Zaragoza.

Antonio Elipe

Grupo de Mecánica Espacial. Universidad de Zaragoza.

## Abstract

Outer planets are surrounded by rings. As a preliminary study, we are interested in analyzing the dynamics of a particle around a solid circular ring. In this paper, we find several families of planar periodic orbits in the plane perpendicular to the ring.

## 1 Introducción

Los planetas exteriores de nuestro sistema solar poseen anillos, y su dinámica ha sido estudiada desde hace más de un siglo. Por otra parte, el cinturón de asteroides puede considerarse como un anillo, que puede considerarse como una perturbación a la órbita de Marte, el planeta más cercano. Esta perturbación no es desdeñable, habiendo sido calculado [2] que el pericentro sufre un avance de 0.00024 seg de arco por siglo. Ello ha motivado nuestro análisis, continuando el iniciado por Broucke y Elipe [2], con objeto de comprender un poco mejor la dinámica de las órbitas alrededor de un anillo sólido circular.

Como hemos dicho, el problema no es nuevo. En efecto, ya Maxwell [9] para estudiar la dinámica de los anillos de Saturno considera un anillo formado por partículas discretas. Actualmente sigue existiendo un interés en este modelo, véase [4, 5, 6, 1] por ejemplo. Por nuestra parte, a diferencia de estos autores, en este trabajo consideramos la dinámica creada por un anillo circular sólido.

El cálculo de su potencial ya lo resolvió Gauss, obteniendo una integral elíptica completa de primera especie, y su expresión puede encontrarse en libros clásicos de la Teoría del potencial, como por ejemplo en Kellog [7]. Para este potencial, Broucke y Elipe [2]

encuentran órbitas planas periódicas tanto en el plano  $xy$  que contiene al anillo como en el plano perpendicular a éste. El primer caso es menos interesante, puesto que se trata de un problema integrable al existir dos integrales primeras, la energía y la componente  $z$  del momento angular. El segundo caso, órbitas en el plano  $xz$  es más interesante desde un punto de vista dinámico. Para este tipo de órbitas, encuentran 10 familias diferentes, así como la estabilidad de dichas familias. Pues bien, nosotros retomamos este problema y para determinar las órbitas y las bifurcaciones empleamos un software diferente, en concreto AUTO2000 (cf. [3, 10]).

El artículo está distribuido como sigue. En primer lugar obtenemos el potencial creado por un anillo circular sólido. A continuación describimos brevemente el procedimiento a seguir con AUTO2000 para la continuación de las familias de órbitas periódicas; por último, pasamos a describir las distintas familias que hemos obtenido, así como las condiciones iniciales de las órbitas que nos han servido para propagarlas.

## 2 Potencial de un anillo circular sólido

Vamos a suponer que el anillo, de radio  $a$  y densidad lineal  $\rho$ , está situado en el plano  $xy$  con centro en el origen  $O$  de un sistema de coordenadas  $Oxyz$ . La masa total será, por tanto,  $M = 2\pi a\rho$ .

Las coordenadas de un elemento de masa  $P$  del anillo están dadas por

$$x_P = a \cos \theta, \quad y_P = a \sin \theta, \quad z_P = 0.$$

El potencial del anillo en un punto  $Q$  situado a una distancia  $x$  de  $P$  es

$$U = \int \frac{Gdm}{r} = Ga\rho \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{r} = \frac{GM}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{r}.$$

Debido a la simetría cilíndrica, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el punto  $Q$  sobre el que actúa el potencial gravitatorio está en el plano  $xz$ , es decir, tomamos  $y = 0$ . La distancia  $r$  entre los puntos  $P$  y  $Q$  es

$$r^2 = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = x^2 + a^2 + z^2 - 2ax \cos \theta.$$

Vamos a introducir dos cantidades auxiliares  $q < p$  que corresponden a las distancias menor y mayor entre el punto  $Q$  y el anillo

$$p^2 = (x + a)^2 + z^2, \quad q^2 = (x - a)^2 + z^2.$$

De este modo, la distancia es

$$r^2 = \frac{1}{2} [(p^2 + q^2) - (p^2 - q^2) \cos \theta].$$

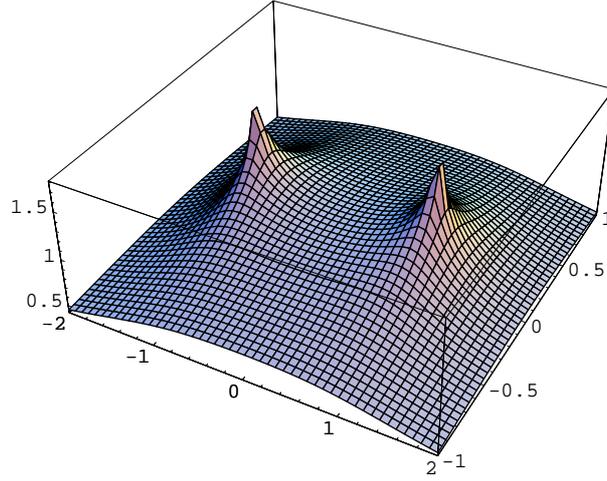


Figura 1.— Potencial del anillo

Si definimos  $k$  como

$$k^2 = 1 - \frac{q^2}{p^2} < 1,$$

y hacemos el cambio de variable  $2\phi = \pi - \theta$ , tenemos que

$$r^2 = p^2(1 - k^2 \sin^2 \phi),$$

y, por tanto, el potencial resulta ser

$$U = -\frac{2GM}{p\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = -\frac{2GM}{p\pi} K(k^2), \quad (1)$$

siendo  $K(k^2)$  la Integral Elíptica Completa de primera especie de módulo  $k$ .

La Figura 1 muestra el potencial del anillo  $U(x, z)$  para  $a = 1$  y  $GM = 1$ .

El hamiltoniano de nuestro problema es

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_z^2) - \frac{2GM}{p\pi} K(k^2) \quad (2)$$

por lo que las ecuaciones del movimiento, si tomamos  $GM = 1$ , son

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{(a^2 - x^2 + z^2)E(k^2) - q^2 K(k^2)}{xq^2 p\pi}, \\ \ddot{z} &= \frac{-2zE(k^2)}{q^2 p\pi}, \end{aligned}$$

donde  $E(k^2)$  es la Integral Elíptica Completa de segunda especie de módulo  $k$ .

Dadas estas ecuaciones, podemos emplear el método utilizado por Broucke y Elife [2] a partir de las superficies de sección de Poincaré para un nivel de energía dado (ver Figura 2 donde la energía es  $E = -1.4$ ), y obtener unas condiciones iniciales para unas órbitas periódicas.

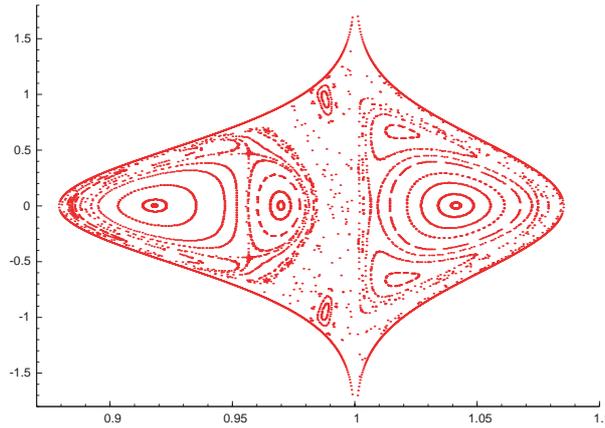


Figura 2.— Superficie de Sección de Poincaré  $(x, \dot{x})$  para una energía  $E = -1.4$ .

A partir de dichos valores, nuestro objetivo es buscar familias de órbitas periódicas, para lo cual vamos a emplear el programa AUTO2000 para continuar las soluciones obtenidas previamente. El método empleado se describe en las siguientes secciones.

### 3 Continuación de soluciones

La solución de un sistema de ecuaciones no lineales dependientes de uno o varios parámetros es el núcleo de muchos modelos matemáticos de sistemas físicos. Dichos problemas generalmente tienen más de una solución y, a menudo, es deseable calcular un conjunto de soluciones y buscar soluciones específicas con ciertas propiedades. Al conjunto de soluciones de dichos problemas lo llamamos diagrama de bifurcaciones, se puede resolver con algoritmos numéricos de continuación de parámetros. AUTO2000 es un programa [3] que calcula dichos diagramas de bifurcación y se puede aplicar a problemas muy variados. En nuestro caso estamos interesados en el cálculo de familias de órbitas periódicas.

Nuestro problema es Hamiltoniano y hay que expresarlo de manera conveniente como problema de contorno para poderlo resolver con AUTO2000. Las familias de órbitas periódicas pueden calcularse por métodos de continuación para un amplio rango de valores de la energía. Los métodos de continuación numéricos no dependen de las simetrías de la solución, y pueden calcularse órbitas periódicas hasta que se alcanza alguna singularidad. Una exposición más detallada puede encontrarse en [10].

Consideremos la ecuación de dimensión finita

$$F(x) = 0, \quad F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dada la solución  $X_0$ , existe generalmente una familia de puntos de una dimensión localmente única, llamada rama de soluciones, que pasa por  $X_0$ .

Para calcular otro punto cercano  $X_1$  de esta rama, uno puede llamar a una componente de  $X_0$  como el parámetro de continuación  $\lambda$  y escribir:

$$X_0 = (Y_0, \lambda_0) \quad \text{donde} \quad Y_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

Se usa entonces un procedimiento para hallar raíces, tal como el método de Newton, para resolver el sistema extendido:

$$\left. \begin{array}{l} F(X_1) = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_0 = \Delta\lambda, \end{array} \right\}$$

tomando como estimación inicial  $X_1^\sharp = (Y_0, \lambda_1)$ .

En general,  $F(X_1^\sharp) \neq 0$ , pero si el paso  $\Delta\lambda$  es suficientemente pequeño el procedimiento converge a  $X_1$ . Este algoritmo se llama continuación de parámetro natural.

Un problema con este algoritmo es que, si el punto inicial cae en una región donde la curva de soluciones no es función del parámetro  $\lambda$ , puede fallar porque no tiene en cuenta la forma local de la curva de soluciones. Para solventar esta dificultad, existe un método que consiste en construir una solución inicial que se aproxima mejor a  $X_1$ , tomando  $X_1^* = X_0 + \dot{X}_0 \Delta s$  para algún valor del paso  $\Delta s$ .

Si calculamos la diferencial de la ecuación  $F(X) = 0$  con respecto a la longitud de arco  $s$  en  $X_0$ , tenemos  $F_X(X_0) \cdot \dot{X}_0 = 0$ , con lo que el vector  $\dot{X}_0$  es un vector nulo de la matriz jacobiana  $F_X(X_0)$  y puede calcularse fácilmente.

Ahora bien, es posible que no haya soluciones para un valor fijo de  $\lambda$ , por ello hay que permitir que los valores de  $\lambda$  se determinen por la geometría de la curva de soluciones. En consecuencia, reemplazamos el sistema anterior por

$$\left. \begin{array}{l} F(X_1) = 0, \\ (X_1 - X_0)^T \dot{X}_0 = \Delta s. \end{array} \right\}$$

El tamaño del paso  $\Delta s$  se adapta a lo largo de la rama, dependiendo de la velocidad de convergencia del método de Newton.

En definitiva, lo que hemos obtenido es algoritmo bien conocido, el “método de continuación pseudo longitud de arco”.

Si tenemos un sistema sin parámetros, no podemos aplicar el método anterior. Para poder utilizar los métodos de continuación numérica, debemos modificar el problema de modo que se puedan aplicar directamente. Para ello, añadimos un parámetro ficticio  $\alpha$ , de modo que cuando  $\alpha = 0$ , nuestro sistema no cambia, pero cuando es distinto de cero, no aparecen soluciones periódicas.

Para un sistema Hamiltoniano como el nuestro, podemos proceder de la siguiente manera. Sea  $u_0$  una órbita periódica con periodo  $T_0$  de las ecuaciones del movimiento

$$\dot{u} = J\nabla H(u), \quad \text{donde} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una órbita periódica con periodo  $T$  equivale a resolver el problema de contorno:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= T[J\nabla H(u(t)) + \alpha\nabla H(u(t))], \\ u(1) &= u(0). \end{aligned} \tag{3}$$

Consideremos una solución  $u_0(t)$  tal que  $u_0(1) = u_0(0)$  y tal que  $T = T_0$ ,  $\alpha = 0$ . Pues bien, añadimos estas ligaduras

$$\begin{aligned} [u(0) - u_0(0)]J\nabla H(u_0(0)) &= 0, \\ u(1; u(0), T, \alpha) - u(0) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

al problema de contorno anterior. De este modo, resolviendo el sistema formado por (3) y (4), obtenemos la familia uniparamétrica de órbitas periódicas de un sistema hamiltoniano.

#### 4 Órbitas periódicas

De acuerdo con la sección anterior, nuestras ecuaciones del movimiento las tenemos que convertir en un problema de contorno para poder utilizar AUTO2000, introduciendo un parámetro  $\alpha$ , con lo que nos queda el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= T \left[ p_x - \alpha \frac{(a^2 - x^2 + z^2)E(k^2) - q^2K(k^2)}{xq^2p\pi} \right], \\ \dot{z} &= T \left[ p_z - \alpha \frac{-2zE(k^2)}{q^2p\pi} \right], \\ \dot{p}_x &= T \left[ \frac{(a^2 - x^2 + z^2)E(k^2) - q^2K(k^2)}{xq^2p\pi} + \alpha p_x \right], \\ \dot{p}_z &= T \left[ \frac{-2zE(k^2)}{q^2p\pi} + \alpha p_z \right], \end{aligned}$$

donde  $T$  es el periodo y  $\alpha$  multiplica al término correspondiente del gradiente de la energía como se ha visto en la sección anterior y de modo que para  $\alpha = 0$  siguen siendo las ecuaciones del movimiento.

Además, tenemos que añadirle las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} x(1) &= x(0), & z(1) &= z(0), \\ p_x(1) &= p_x(0), & p_z(1) &= p_z(0) \end{aligned}$$

y las ligaduras

$$\begin{aligned} [x(0) - x_0(0)]\dot{x}_0 &= 0, & [p_x(0) - p_{x_0}(0)]\dot{p}_{x_0} &= 0, \\ [z(0) - z_0(0)]\dot{z}_0 &= 0, & [p_z(0) - p_{z_0}(0)]\dot{p}_{z_0} &= 0. \end{aligned}$$

De este modo, este sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones del movimiento y las condiciones de contorno puede ser introducido directamente en AUTO2000 u otros programas que resuelvan numéricamente condiciones de contorno.

Broucke y Elife [2], han realizado un estudio de las órbitas periódicas de nuestro problema. Siguiendo su notación, somos capaces de obtener, con AUTO2000, las mismas familias que ellos obtuvieron y que numeraron de 1 a 10. Algunas de las órbitas periódicas que componen estas familias las hemos reproducido en la figura 3.

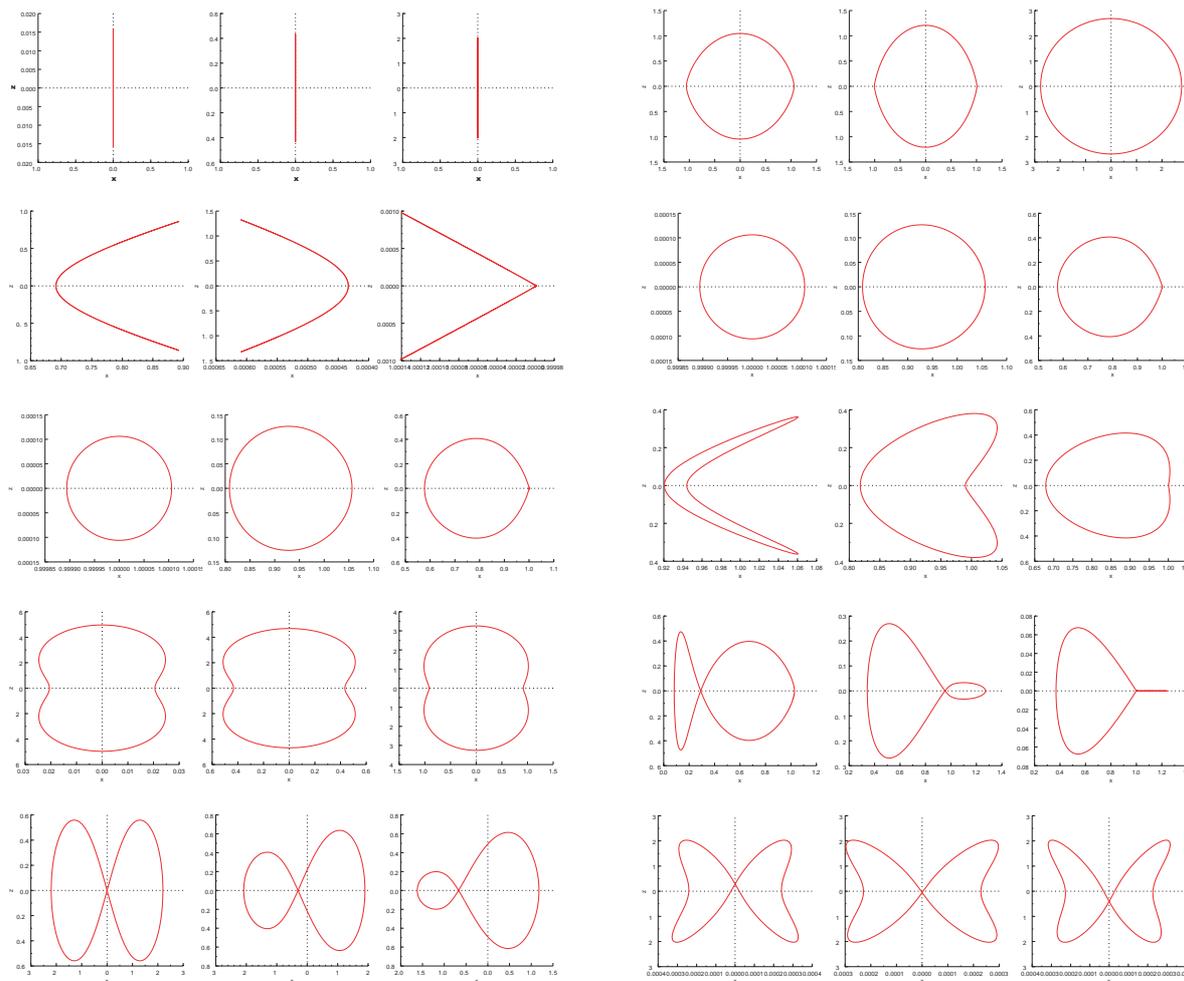


Figura 3.— Las 10 familias obtenidas por Broucke y Elife, numeradas de izquierda a derecha y de arriba abajo. Nótese que las familias 4 y 5 son idénticas; únicamente que las órbitas de la familia 4 son directas, mientras que las de la familia 5 son retrógradas.

Además de las anteriores, hemos sido capaces de encontrar nuevas familias. Para respetar la notación introducida por Broucke y Elife, comenzamos numerándolas a partir de la familia 11.

Para calcular las condiciones iniciales estas nuevas órbitas periódicas nos hemos servido de secciones de Poincaré para los niveles de energía en los que estamos interesados.

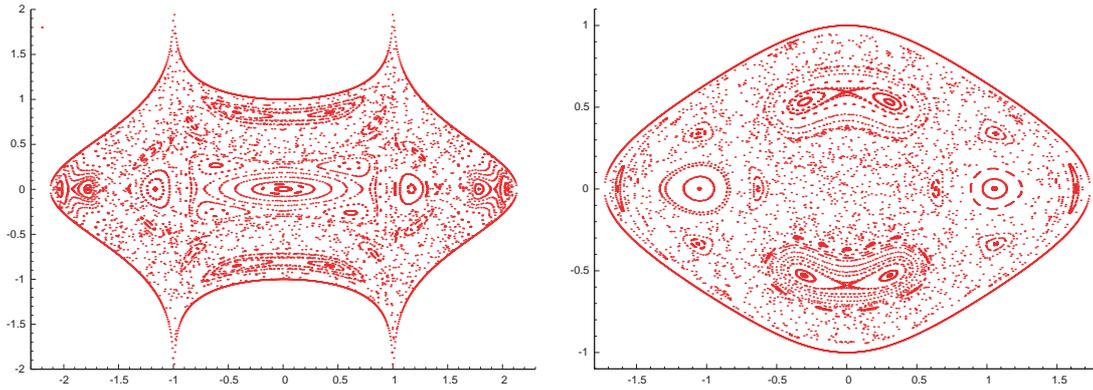


Figura 4.— Superficies de sección para una energía  $E = -0.5$ . A la izquierda sección  $(x, \dot{x})$  y a la derecha la  $(z, \dot{z})$ .

Con objeto de que las órbitas no estén restringidas a las cercanías del anillo, sino que evolucionen pasando por las proximidades de los dos extremos del anillo que se encuentran en el eje  $x$ , hemos utilizado valores de la energía grandes. Como ejemplo, en la figura 4 representamos las correspondientes a un valor de  $E = -0.5$ ; a la izquierda la sección  $(x, \dot{x})$  y a la derecha la  $(z, \dot{z})$ . En ambas, podemos observar la presencia de puntos fijos así como de varias islas, que corresponden a órbitas periódicas, de periodo simple en el primer caso y de periodo múltiple en el segundo. De los puntos fijos, vemos que algunos son estables de tipo elíptico, mientras que otros son de tipo silla. También es digno de resaltar que la comparación entre la sección de Poincaré para una energía  $E = -1.4$  (Figura 2) con la correspondiente a una energía mayor  $E = -0.5$  (Figura 4, izquierda) nos muestra que en este último caso, la región de movimiento caótico es mucho mayor, lo que nos da un indicio de la no integrabilidad de este problema en el plano  $xz$ .

Los puntos fijos de estas superficies de sección nos han permitido encontrar órbitas periódicas, cuyas condiciones iniciales reproducimos en la Tabla 1.

Una vez encontradas órbitas periódicas, y haciendo uso del procedimiento descrito anteriormente, mediante el software AUTO2000, propagamos las distintas familias, y hemos encontrado 25 familias, de las cuales, las 10 primeras coinciden con las encontradas por Broucke y Elife [2]. Para las otras 15 restantes hemos dibujado varias órbitas que aparecen recogidas en las Figuras 5, 6 y 7.

Podemos observar que las órbitas de las familias 11, 12, 13 y 14 son simétricas con respecto al eje  $z$ ; las de las familias 20, 21, 23, y 24 son simétricas con respecto al eje  $x$ ; las de las familias 15, 16, 17, 22 y 25 son simétricas respecto a los ejes  $x$  y  $z$ ; por último, las de las familias 18 y 19 son simétricas respecto al origen. Podemos notar también que las familias 11 y 12 son la imagen especular (con respecto al eje  $x$ ) una de otra, al igual que las familias 13 y 14. De modo similar, pero con respecto al eje  $z$ , son imágenes especulares las familias 20 y 21; 23 y 24. Debido a su simetría con respecto al origen, las familias 18

Familia	$x$	$z$	$\dot{x}$	$\dot{z}$
11	8.966878E-03	6.315244E-01	8.321112E-01	-4.113738E-03
12	2.791949E-02	-6.328238E-01	8.302661E-01	1.284042E-02
13	-2.816104E-03	-1.636608E+00	2.073857E-01	-3.150298E-03
14	-2.646047E-03	1.638455E+00	2.067876E-01	2.964340E-03
15	9.720241E-03	-1.054279E+00	6.163729E-01	5.418671E-03
16	5.323963E-03	-4.999309E-01	4.406768E-01	4.322249E-03
17	1.014201E-02	-1.486022E-01	4.643104E-01	-4.006931E-01
18	1.408876E-02	-1.860461E-02	7.637776E-01	-1.008419E+00
19	1.074252E-02	1.418629E-02	7.637509E-01	1.008489E+00
20	8.981122E-01	2.004477E-02	1.134302E+00	8.906121E-01
21	-8.504228E-01	1.940691E-02	1.040765E+00	8.931735E-01
22	-1.067880E+00	1.735485E-02	4.684205E-01	1.384820E+00
23	-8.820237E-01	3.182977E-02	-4.972778E-02	1.409471E+00
24	8.822332E-01	2.822895E-02	4.445178E-02	1.411663E+00
25	6.127487E-03	1.065766E-02	5.457542E-01	9.491680E-01

Tabla 1.— Condiciones iniciales para las distintas familias.

y 19 son imágenes especulares con respecto a los ejes  $x$  y  $z$ .

Las dos familias 13 y 14 nacen de la familia 1, que es la familia vertical. La familia 17 surge a partir de una multiplicación del periodo de la familia 9. Corresponde a las islas en la sección de Poincaré que rodean el punto fijo. Las familias 18 y 19 evolucionan manteniendo su misma forma, pero aumentando su distancia máxima al origen; se obtienen para valores elevados de la energía ( $E = -0.2$ ). La familia 20 se obtiene por una duplicación del periodo. La familia 22 surge como una bifurcación de la familia 2 cuadruplicando el periodo; hemos encontrado también otra bifurcación en que el periodo se multiplica por 6.

## 5 Conclusiones

La dinámica de un partícula atraída gravitatoriamente por un anillo sólido circular es muy rica. El potencial se puede expresar en forma cerrada en términos de funciones elípticas. Para este potencial, hemos encontrado 25 familias de órbitas periódicas y sus bifurcaciones.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, (Proyecto # ESP2002-02329).

## Referencias

- [1] Arribas, M., Elipe, A.: 2004, “Bifurcations and equilibria in the extended N-body ring problem”, *Mechanics Research Communications*, **31**, 1–8.
- [2] Broucke, R., Elipe A.: 2004, “The dynamics of orbits in a potential field of a solid circular ring,” Paper **AAS04-291**. Space Flight Mechanics Meeting. Maui, Hawaii.
- [3] Doedel, E.J. *et al.*: 2000, “AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations” Technical Report, Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Canada. <http://sourceforge.net/projects/auto2000/>.
- [4] Kalvouridis, T.J.: 1999, “A planar case of the  $n + 1$  body problem: The ‘ring’ problem”, *Astrophys. and Space Sc.* **260**, 309-325.
- [5] Kalvouridis, T.J.: 1999, “Periodic solutions in the ring problem”, *Astrophys. and Space Sc.* **266**, 467-494.
- [6] Kalvouridis, T.J.: 2001, “Zero velocity surfaces in the three-dimensional ring problem of  $N + 1$  bodies”, *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* **80**, 133-144.
- [7] Kellog, O. D., *Foundations of Potential Theory*. Dover Pub. Inc., 1929.
- [8] Lara, M., Elipe, A.: 2000, “Periodic orbits around geostationary positions,” Paper AAS00-156. 2000 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. Clearwater, Florida.
- [9] J. C. Maxwell: 1952, *Scientific Papers*. Dover edition. New York.
- [10] Paffenroth, R.C., Doedel, E.J., Dichmann, D.J.: 2001, “Continuation of periodic orbits around Lagrange points and AUTO2000,” Paper AAS01-303. 2001 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Quebec City, Canada.

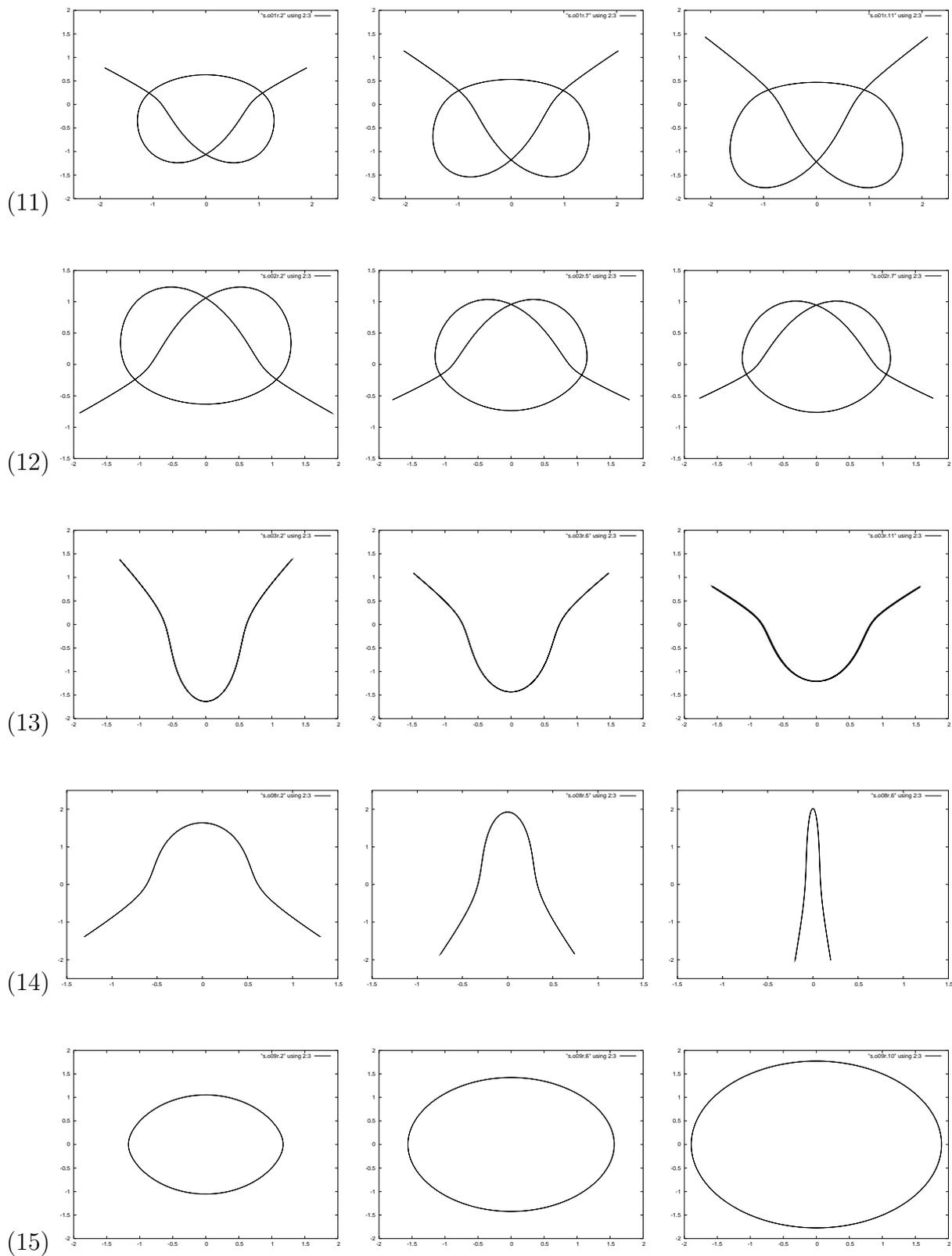


Figura 5.— Familias de órbitas periódicas 11 a 15 en sucesivas filas. Reproducimos tres órbitas para cada familia

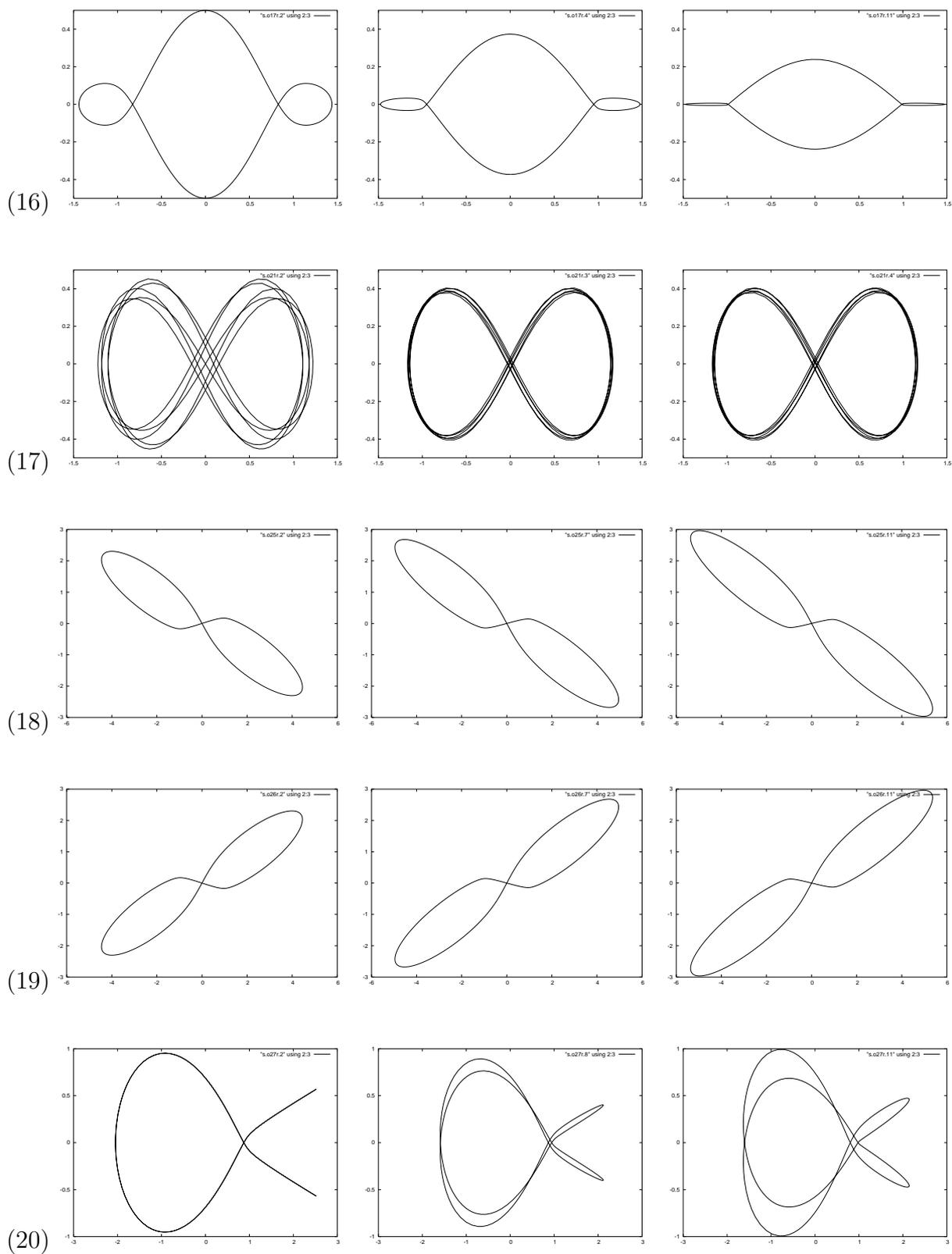


Figura 6.— Familias de órbitas periódicas 16 a 20 en sucesivas filas. Reproducimos tres órbitas para cada familia

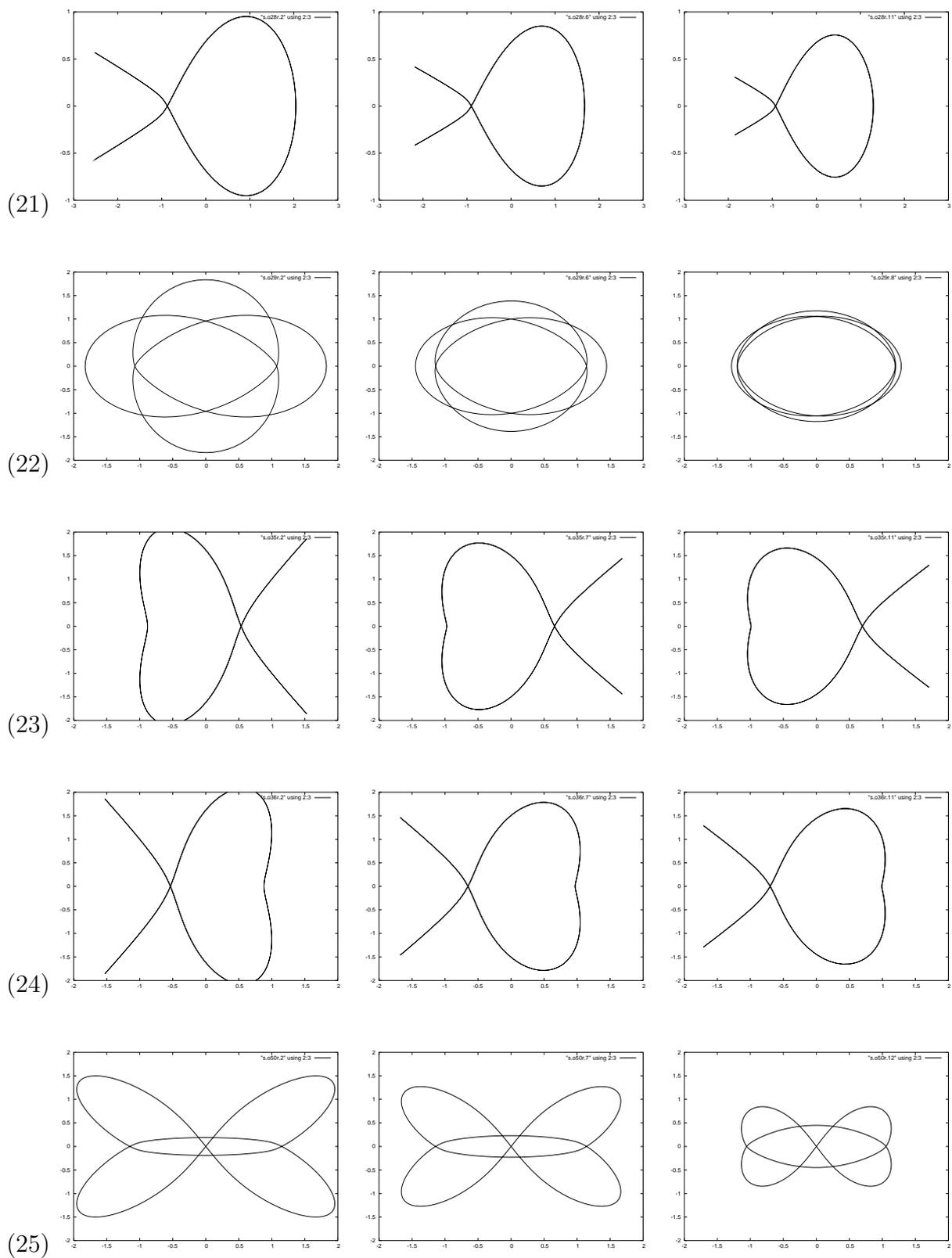


Figura 7.— Familias de órbitas periódicas 21 a 25 en sucesivas filas. Reproducimos tres órbitas para cada familia