

# Modificaciones del método de Variación de los Parámetros. Aplicaciones en Astrodinámica.

R. Barrio y S. Serrano

Grupo de Mecánica Espacial. Dpto. Matemática Aplicada. IUMA  
Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza. Spain.

*Dedicado al Prof. Manuel Calvo Pinilla en conmemoración de su 65 cumpleaños.*

## Resumen

En los últimos años se ha dedicado mucho tiempo y esfuerzo a la integración numérica de problemas de Mecánica Celeste. En particular, se han desarrollado métodos numéricos eficientes basados en la preservación de propiedades geométricas asociadas a dichos problemas como los métodos simplécticos, reversibles, etc. Otra opción es la búsqueda de una formulación lo más adecuada posible para su integración numérica o analítica. Así surgieron las variables orbitales, el método de variación de las constantes, sistemas de variables redundantes, etc.

En el presente artículo pretendemos realizar una revisión del método de variación de las constantes, analizando y generalizando una modificación propuesta en la literatura: el método de Dziobek-Brouwer [6]. Finalmente, se presenta una comparación numérica tomando como problema el movimiento de un satélite artificial terrestre sujeto a la perturbación del potencial gravitatorio, la cual muestra las ventajas de estos métodos frente a la integración directa del problema en coordenadas cartesianas.

## 1 Introducción

Euler desarrolló el método de variación de los parámetros a mediados del siglo XVIII para estudiar las perturbaciones existentes entre Júpiter y Saturno, sin embargo, sus resultados no fueron del todo correctos debido a que no consideró el hecho de que todos los elementos orbitales variasen a la vez. Posteriormente, el método desarrollado por Euler fue perfeccionado por Lagrange, quien siguió considerando algunos elementos orbitales como constantes, lo que ocasionó errores en algunas de sus ecuaciones. En 1782, el

propio Lagrange corrigió y completó el método desarrollándolo en un trabajo sobre las perturbaciones de los cometas en órbitas elípticas y, algo más tarde, lo usaría también para el estudio del movimiento de los planetas. Este método sigue siendo empleado actualmente en numerosos estudios de carácter científico [1, 3, 4, 12, 13, 14].

En este trabajo estudiamos el método de variación de los parámetros y una modificación suya [3]. Así, en la sección 2 damos dos resultados teóricos que son la base del método clásico. En la sección 3 aplicamos dicho método sobre el problema de dos cuerpos. En la siguiente sección 4 damos el resultado que generaliza una modificación, inicialmente desarrollada para el problema de dos cuerpos, que combina el método de variación de los parámetros con el método de Encke [10]. Finalmente, en la sección 5, aplicamos los métodos sobre un problema concreto, un satélite artificial terrestre, para mostrar las ventajas de dichas formulaciones.

## 2 Variación de los parámetros

En esta sección introduciremos algunos resultados teóricos sobre los que se fundamenta el método [15], su demostración y un análisis más profundo de los mismos puede encontrarse en [3].

**Teorema** Sean  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  las soluciones de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{y}) + \mathbf{F}_p(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

respectivamente, y supongamos que  $\partial\mathbf{F}_0/\partial\mathbf{x}$  y  $\partial\mathbf{F}_p/\partial\mathbf{y}$  existen y son continuas. Además, supongamos que el primer sistema es integrable por cuadraturas y que su solución viene dada en función de un conjunto de  $n$  constantes de integración  $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathbb{R}^n$ , es decir,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\alpha}_0).$$

Entonces, cualquier solución del sistema (2) viene dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\alpha}(t)),$$

donde los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  y las constantes de integración  $\boldsymbol{\alpha}_0$  están conectadas por

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(s) \right)^{-1} \mathbf{F}_p(s, \mathbf{y}(s)) ds.$$

**Corolario** Sea  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2n}$  la solución de un sistema diferencial hamiltoniano integrable en el sentido de Liouville-Arnold dada por

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{v})(t_0) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0),$$

con  $U(\mathbf{r})$  la energía potencial. Además, denotamos por  $(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{2n}$  la solución del sistema perturbado

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial U(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} + \mathbf{F}_p(\mathbf{R}, \mathbf{V}),$$

con las mismas condiciones iniciales  $(\mathbf{R}, \mathbf{V})(t_0) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ . Entonces, las soluciones de los dos sistemas anteriores pueden ser obtenidas de forma implícita como

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\alpha}_0), \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\alpha}_0)}{\partial t} = \mathbf{g}(t; \boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\alpha}(t)), \quad \mathbf{V}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\alpha}(t))}{\partial t} = \mathbf{g}(t; \boldsymbol{\alpha}(t)),$$

donde los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  y las constantes de integración  $\boldsymbol{\alpha}_0$  están conectados por

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{V}}(s) \cdot \mathbf{F}_p(\mathbf{R}(s), \mathbf{V}(s)) ds.$$

### 3 Variación de parámetros en el problema de dos cuerpos

Las ecuaciones del movimiento de dos cuerpos bajo una fuerza perturbadora  $\mathbf{F}_p$  pueden formularse como un sistema de primer orden en la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F}_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \end{cases}$$

donde  $r$  hace referencia a la norma del vector  $\mathbf{r}$  y  $\mu$  a la constante de Gauss.

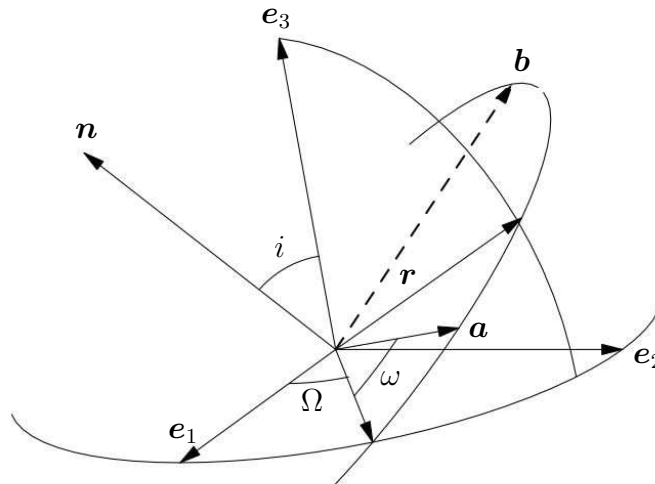


Figura 1.— Sistema apsidal y elementos orbitales clásicos.

Como se puede observar, dicho sistema corresponde al caso contemplado en el corolario de la sección anterior y, si consideramos el conjunto de elementos orbitales  $\boldsymbol{\alpha} = (a, e, i, l_0, \omega, \Omega)$  (ver figura 1), para el caso  $\mathbf{F}_p = 0$  existe una solución analítica que nos da la posición  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t, \boldsymbol{\alpha}_0)$  y velocidad  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k(t, \boldsymbol{\alpha}_0)$ , en función de los elementos orbitales, que en este caso son constantes. Si  $\mathbf{F}_p \neq 0$ , el vector  $\boldsymbol{\alpha}$  ya no es constante y para determinarlo tendremos que plantear el sistema dado por el corolario

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right) \mathbf{F}_p,$$

que se corresponde, para este problema, con el clásico sistema de Gauss.

A la vista del sistema, vemos la necesidad de calcular la matriz de derivadas parciales que puede obtenerse como

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right) = D \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^\top,$$

con  $D = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d^\top & 0 \end{pmatrix}$ , siendo  $d = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ \frac{\eta^2}{\sqrt{\mu a e}} & \frac{-\eta}{\sqrt{\mu a e}} & 0 \\ 0 & \frac{\cot i}{\sqrt{\mu a \eta}} & \frac{-1}{\sqrt{\mu a \eta \sin i}} \end{pmatrix}$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial (a, e, l_0)} &= M_p \cdot M_E, & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial i} &= M_p \cdot M_\omega \cdot V_p, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} &= M_p \cdot M_c \cdot V_p, & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Omega} &= M_c \cdot M_p \cdot V_p, \end{aligned}$$

donde

$$M_E = \begin{pmatrix} (\cos E - e) + \frac{3a}{2r} tn \sin E & -a(1 + \frac{a}{r} \sin^2 E) & -\frac{a^2}{r} \sin E \\ \eta \sin E - \frac{3a\eta}{2r} tn \cos E & \frac{a^2}{r\eta} \sin E (\cos E - e) & \frac{a^2\eta}{r} \cos E \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \end{pmatrix},$$

y  $M_p$  es la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema ortonormal estándar que define la orientación espacial de la órbita y que dependen únicamente de los elementos orbitales  $i$ ,  $\omega$  y  $\Omega$ . Como es habitual,  $E$  denota la anomalía excéntrica,  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$  y  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  el movimiento medio.

#### 4 Modificación del método

El siguiente resultado generaliza el método de Dziobek-Brouwer [2, 6, 7, 9] definido para el problema de dos cuerpos.

**Teorema** Sean  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  las soluciones de

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_0(t, \mathbf{y}) + \mathbf{F}_p(t, \mathbf{y}), & \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

respectivamente, y supongamos que el primer sistema es integrable por cuadraturas, siendo  $\alpha_0$  un conjunto de  $n$  constantes de integración que definen la solución. Además, supongamos que  $\partial\alpha_0/\partial\mathbf{x}$  es continua. Entonces las soluciones de los sistemas anteriores están conectadas por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{\partial\mathbf{x}(t)}{\partial\alpha_0} \int_{t_0}^t \frac{\partial\alpha_0}{\partial\mathbf{x}}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \cdot \mathbf{F}_p^*(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{y}(\tau)) d\tau,$$

donde  $\mathbf{F}_p^*$  viene definida como

$$\mathbf{F}_p^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{y}) - \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial\mathbf{F}_0(t, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \mathbf{s} + \mathbf{F}_p(t, \mathbf{y}),$$

siendo  $\mathbf{s} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ .

Aplicando dicho teorema sobre el problema de dos cuerpos llegamos a que la solución del sistema perturbado puede obtenerse mediante la expresión

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_k(t) + \left( \frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial\alpha} \right) \cdot \mathbf{K},$$

donde  $\left( \frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial\alpha} \right)$  se corresponde con las fórmulas aparecidas en la sección anterior pero evaluadas en los elementos orbitales  $\alpha_0$  (problema sin perturbar), mientras que  $\mathbf{K}$  es la solución del sistema diferencial

$$\dot{\mathbf{K}} = \left( \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{r}_k, \alpha_0) \right) \cdot \mathbf{F}_p^*(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (3)$$

con

$$\mathbf{F}_p^*(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) - \mu \frac{\partial(\mathbf{r}_k/r_k^3)}{\partial\mathbf{r}_k} \mathbf{s} + \mathbf{F}_p(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Hay que observar que el nuevo sistema a integrar (3) tiene la misma expresión formal que el proporcionado por el método de variación de parámetros clásico, donde, además, si cada cierto tiempo se actualiza la órbita de referencia dada por el problema sin perturbar, las funciones  $\mathbf{F}_p$  y  $\mathbf{F}_p^*$  son muy similares. La diferencia fundamental en ambos métodos [2, 3, 8] es que el primer factor del segundo miembro  $(\partial\alpha/\partial\mathbf{v})$  se evalúa en la órbita

sin perturbar, donde los elementos orbitales no varían, por lo que muchos términos son constantes.

Un problema con el que nos podemos encontrar es la pérdida de dígitos significativos en el cálculo del término

$$\Delta \mathbf{F}_0 = -\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) = -\frac{\mu}{r_k^3} \left[ \left( \frac{r_k^3}{r^3} - 1 \right) \mathbf{r} + \mathbf{s} \right],$$

al ser la resta de dos expresiones de magnitudes similares. Para evitar dicho problema podemos hacer uso del siguiente resultado [5].

**Lema** Sea  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  y  $a, b, c$  sus normas, entonces se tiene que

$$\left( \frac{b^3}{a^3} - 1 \right) = (1 + q)^{\frac{3}{2}} - 1 = q \frac{3 + 3q + q^2}{1 + (1 + q)^{\frac{3}{2}}},$$

donde  $q = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} - 2\mathbf{a})/a^2$ .

Así, el uso de la expresión

$$\Delta \mathbf{F}_0 = -\frac{\mu}{r_k^3} \left( q \frac{3 + 3q + q^2}{1 + (1 + q)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{r} + \mathbf{s} \right) \quad \text{con} \quad q = \frac{\mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} - 2\mathbf{r})}{r^2},$$

evitará los problemas de redondeo comentados.

## 5 Tests numéricos

En esta sección presentamos diversos resultados numéricos aplicando las técnicas anteriormente descritas. Todos los tests numéricos han sido realizados en un ordenador Windows PC Pentium III-933Mhz usando g77 (GNU FORTRAN77) y doble precisión. Las órbitas de referencia han sido calculadas usando una tolerancia ( $\mathbf{tol} = 10^{-30}$ ) en LF95 con precisión extendida.

Como problema test vamos a considerar el movimiento de un satélite artificial perturbado por el potencial terrestre dado por

$$V_T(r, \lambda, \varphi) = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^n \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_T}{r} \right)^l P_l^m(\sin \varphi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda)$$

donde  $(r, \lambda, \varphi)$  son las coordenadas esféricas,  $R_T$  el radio medio ecuatorial terrestre y  $P_l^m(x)$  las funciones asociadas de Legendre. Los coeficientes  $C_{lm}$  y  $S_{lm}$  del potencial terrestre siguen el modelo de potencial terrestre GEM9&10 [16].

En primer lugar vamos a comparar los resultados obtenidos cuando un problema es integrado con el mismo integrador numérico pero aplicando tres formulaciones diferentes. La primera consiste en integrar directamente el problema en coordenadas cartesianas

(CART); la segunda se basa en el uso del método clásico de variación de los parámetros (VOP) y, finalmente, la tercera alternativa utiliza la modificación comentada en la sección anterior (VVOP). Como condiciones iniciales vamos a considerar el movimiento del satélite artificial GPSBII-02 (PRN 02) perturbado por el potencial terrestre dado por los cinco primeros armónicos zonales del potencial terrestre. Las condiciones iniciales de la órbita (sacadas de la página web <http://celestrak.com>) de este satélite son:

$$\begin{aligned}
 a &= 26559.212356 \text{ km.}, & e &= 0.02334, & i &= 53^\circ 4247, \\
 \omega &= 261^\circ 3417, & \Omega &= 171^\circ 8804, & l_0 &= 95^\circ 9617.
 \end{aligned}$$

El integrador numérico en los tres métodos ha sido el RK DOPRI8(7) [11] a paso constante ya que la baja excentricidad de su órbita no plantea la necesidad de tomar paso variable.

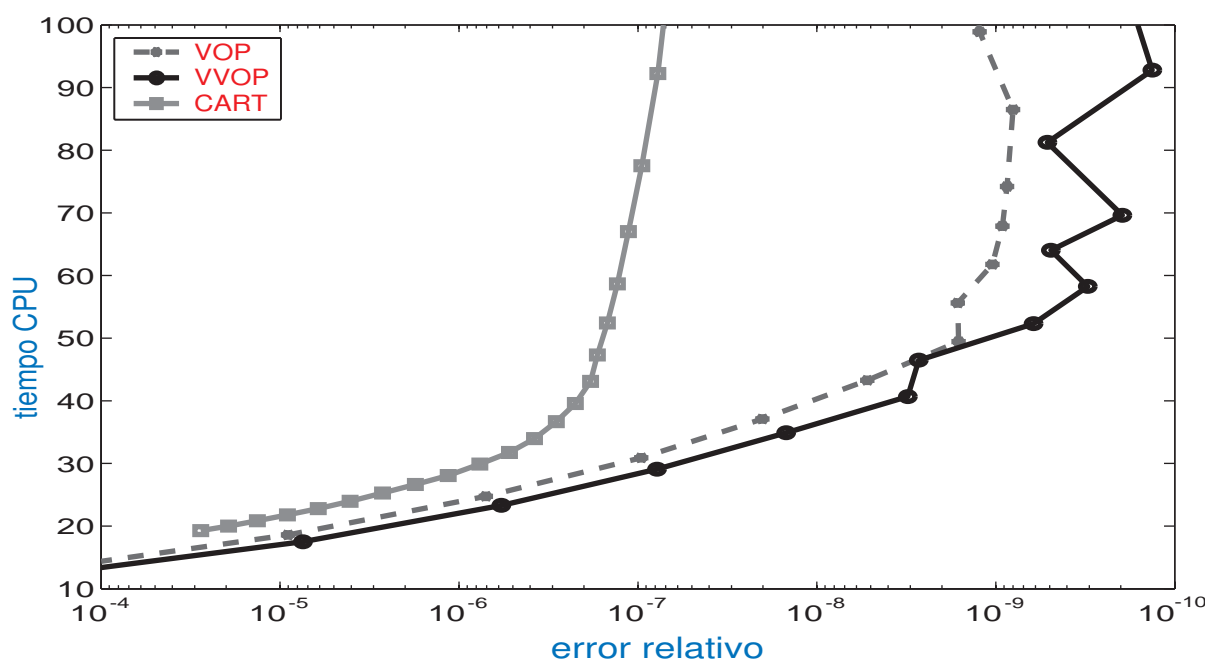


Figura 2.— Análisis de eficiencia de los métodos CART, VOP y VVOP. Tiempo final de integración  $T = 10$  años.

El segundo miembro del sistema diferencial para el método CART es mucho mayor que para los otros dos métodos, lo que va a generar una mayor variación de las variables a integrar por el primero frente a VOP y VVOP. La diferencia de variación de estos dos últimos les permitirá usar pasos de integración mucho mayores que los empleados por CART para la misma precisión. En [17], los autores afirman erróneamente que, en general, dicha apreciación es falsa debido al hecho de que las mismas frecuencias aparecen en los tres métodos y que los términos de alta frecuencia controlan el paso de integración. Obviamente, el tamaño del paso tiene que ser inferior a la mayor frecuencia, sin embargo, el método CART necesitará pasos mucho más pequeños que dicha frecuencia, mientras que los otros dos métodos pueden trabajar con pasos de tamaño similar a la misma. De este modo, aunque la complejidad del método CART es inferior a la de los otros dos (en

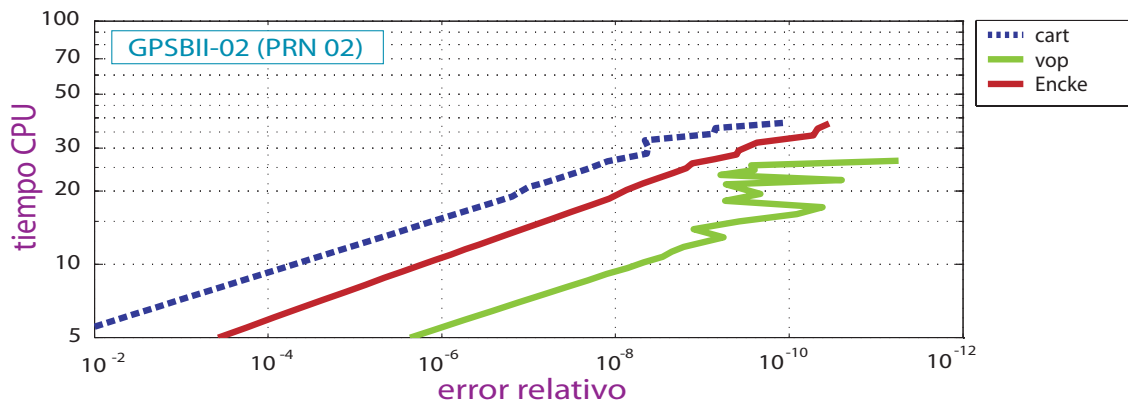


Figura 3.— *Error relativo* vs. *tiempo CPU* en la integración numérica usando el modelo completo  $20 \times 20$  ( $n = 20$ ) del potencial terrestre y las formulaciones CART, VOP-VVOP y Encke.

promedio, el cociente entre el tiempo de CPU de un paso para VVOP frente a CART es 2.56 y el de VOP frente a CART 2.72), los métodos VOP y VVOP son bastante más eficientes que CART, alcanzando los primeros mayor precisión y a un coste inferior de tiempo de CPU como se observa en la figura 2. Por otro lado, también se observa una ligera mejoría de VVOP frente al VOP clásico.

Por último presentamos en la figura 3 los resultados comparando las formulaciones CART, VOP-VVOP y el método de Encke. En este caso realizamos una comparación usando el modelo de potencial hasta orden 20 en términos zonales y tesorales, es decir un modelo completo  $20 \times 20$ . De nuevo se observa que el método de variación de los parámetros presenta el mejor comportamiento de entre las distintas formulaciones analizadas.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado a través del proyecto de investigación MTM2009-10767.

## Referencias

- [1] H. Arakida and T. Fukushima, “Long-term integration error of Kustaanheimo-Stiefel regularized orbital motion I. Method of variation of parameters”, *Astronom. J.* **121**, 1764–1767 (2001).
- [2] R. Barrio, M. Palacios and A. Elipe, “Chebyshev collocation methods for fast orbit determination”, *Appl. Math. Comput.* **99**, 195–207 (1999).
- [3] R. Barrio and S. Serrano, “Modifications of the method of variation of parameters”, *Comput. Math. Appl.* **51**, no. 3-4, 451–466 (2006).



- [4] R. Barrio and S. Serrano, “Performance of perturbation methods on orbit prediction”, *Math. Comput. Modelling* **48**, no. 3-4, 594–600 (2008).
- [5] R. H. Battin, *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics* (AIAA Education Series, New York, 1987).
- [6] R. Broucke, “Perturbations in rectangular coordinates by iteration”, *Celestial Mech.* **1**, 110–126 (1969).
- [7] D. Brouwer, “Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates”, *Astronom. J.* **51**, 37–43 (1944).
- [8] D. Brouwer and G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics* (Academic Press, New York, 1961).
- [9] O. Dziobek, *Mathematical theories of planetary motions* (Dover Publications, New York, 1962).
- [10] J. F. Encke, “Über die allgemeinen Störungen der Planeten”, *Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1857*, 319–397 (1854).
- [11] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations, I. Nonstiff problems* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
- [12] K. N. Jayasree and S. G. Deo, “Variation of parameters formula for the equation of Cooke and Wiener”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **112**, 75–80 (1991).
- [13] S. K. Kaul and X. Liu, “Generalized variation of parameters and stability of impulsive systems”, *Nonlinear Anal.* **40**, 295–307 (2000).
- [14] G. L. Kraige and S. B. Skaar, “A variation of parameters approach to the arbitrarily torqued, asymmetric rigid body problem”, *J. Astronaut. Sci.* **25**, 207–226 (1977).
- [15] V. Lakshmikantham and S. G. Deo, *Method of variation of parameters for dynamic systems*, Series in Mathematical Analysis and Applications, 1, (Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998).
- [16] F.J. Lerch, S.M. Klosko, R.E. Laubscher and C.A. Wagner, *Gravity Model Improvement using GEOS-3 (GEM9 & 10)*. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland (1977).
- [17] W. I. Newman and M. Efroimsky, “The method of variation of constants and multiple time scales in orbital mechanics”, *Chaos* **13**, 476–485 (2003).

