

Dinámica de satélites ligados en las proximidades de los puntos de Lagrange

M. Sanjurjo-Rivo, J. Peláez and F.R. Lucas

Grupo de Dinámica de Tethers (GDT)

Dept. de Física Aplicada a la Ingeniería Aeronáutica

ETSI Aeronáuticos, 28040 Madrid, Spain

Resumen

En este artículo se analiza la dinámica de un sistema de satélites ligados en las proximidades de los puntos de libración colineales aprovechando las ventajas que proporciona la formulación de Hill. Este estudio se centra en las amarras no rotatorias ya sean de longitud constante o variable. Se incluye la masa del tether en el análisis para obtener simulaciones más precisas del comportamiento del sistema cuando los cables son de gran longitud. Se han ensayado estrategias simples que permitirían, haciendo uso de un control realimentado, estabilizar el sistema alrededor de posiciones de equilibrio intrínsecamente inestables.

1. Introducción

En las últimas décadas hemos presenciado un aumento del interés en los puntos de libración en el problema circular restringido de los tres cuerpos. Ello es debido a las atractivas oportunidades que ofrecen las regiones próximas a dichos puntos para la exploración espacial. Un número creciente de misiones explota las ventajas derivadas del mantenimiento de una posición relativa fija en el sistema constituido por los dos primarios.

La utilización de tethers en los puntos de Lagrange, o en sus cercanías, ha sido considerado en distintas ocasiones como una solución adecuada para proporcionar o mejorar el mantenimiento de satélites en órbitas nominales en las regiones vecinas a los puntos de Lagrange. Por una parte, en constelaciones operando en las proximidades de los puntos de libración, el uso de cables conectando los satélites buscaría mejorar la precisión en la posición relativa (fundamental en misiones de interferometría, por ejemplo). Por otra parte, las amarras espaciales permitirían salvar la inestabilidad inherente a los puntos de

Lagrange colineales, evitando con ello las costosas maniobras de corrección de órbita en términos del propulsante requerido. Colombo, uno de los pioneros en el estudio de las aplicaciones espaciales de las amarras muestra en [1] la posibilidad de controlar la naturaleza inestable de los puntos de Lagrange colineales haciendo uso de un sistema de satélites ligados. La idea que fundamenta esta posibilidad radica en el siguiente argumento. Si una masa es desplazada hacia la derecha desde el punto de libración inestable L_1 , v.g., se separará de este punto alejándose hacia la derecha del mismo. De manera similar, si la masa es perturbada hacia la izquierda, continuará moviéndose en ese sentido. Si se conectan esas dos masas por medio de un cable, los efectos desestabilizadores se cancelarían entre sí.

A la exploración de esta última posibilidad se han dedicado varios artículos [2], [3], [4]. La metodología en ellos utilizada es común: la linealización alrededor de los puntos colineales del sistema Tierra-Luna para obtener tanto el comportamiento cualitativo como ciertos resultados cuantitativos en determinados casos concretos. En particular, en [2] se obtiene una ley de control en el caso del movimiento unidimensional en la dirección alineada con los dos primarios que permite la estabilización del sistema de satélites ligados. Por otra parte, en [4] se propone el estudio del movimiento en el plano orbital de los primarios, proporcionando resultados numéricos donde se muestran los beneficios derivados de la utilización de los tethers en este tipo de misiones.

En este artículo, se ha utilizado un planteamiento diferente para proporcionar una imagen global del comportamiento dinámico del *tethered system*. Haciendo uso de la aproximación de Hill en el estudio del movimiento del sistema en las proximidades del segundo primario, es posible conseguir un método general válido para el problema restringido circular de tres cuerpos cuando el tercero de ellos es un sistema de satélites ligados. De esta forma, se proporciona una análisis global de la dinámica de los tethers en este problema y se indican posibles configuraciones que pueden representar soluciones prácticas para misiones espaciales futuras.

2. Análisis previos

En este apartado, se revisan aquellos trabajos anteriores dedicados al estudio de sistemas de satélites ligados en las proximidades de los puntos de Lagrange [3, 4, 5, 6]. En primer lugar, consideramos el trabajo de Farquar [3]. Las ecuaciones del movimiento las ha obtenido considerando las siguientes condiciones: 1) las variables generalizadas son las coordenadas cartesianas de las masas extremas, tomando, por lo tanto, la longitud del cable como una ligadura; 2) las dos masas extremas son iguales y el cable no tiene masa; 3) se linealizan las ecuaciones del movimiento en torno al segundo primario despreciando términos superiores al segundo orden; y 4) el sistema formado por los dos primarios y el

tether está aislado, de manera que no existen perturbaciones adicionales que afecten al mismo.

En este estudio se encuentran posiciones de equilibrio inestables dependientes de la longitud del cable en las proximidades de los puntos de Lagrange. Se estudia en primer lugar el movimiento unidimensional, despreciando los términos de acoplamiento. Posteriormente, se realiza un análisis tridimensional de la posición de equilibrio encontrada en el problema unidimensional y se introduce una ley de control que incorpora la orientación del cable. El movimiento fuera del plano resulta ser no controlable con dicha ley, mientras que se lleva a cabo un estudio detallado para obtener las ganancias que aseguran la estabilidad del movimiento en el plano.

Por otra parte, el artículo [4] está dedicado al mismo propósito, particularizando los resultados en el sistema Tierra-Luna. No obstante, existen diferencias en el planteamiento de ambos trabajos, y algunas de ellas se recogen a continuación: 1) se considera únicamente el movimiento en el plano y las coordenadas generalizadas utilizadas son las cartesianas del centro de masas y ángulo de libración de la amarra en el plano del movimiento; 2) el tether no tiene masa, si bien la distribución de masas extremas puede variar; y 3) las ecuaciones del movimiento se obtienen linealizando alrededor del punto de Lagrange reteniendo términos de hasta tercer orden.

En este trabajo también se procede a realizar la linealización del sistema de ecuaciones considerando pequeñas variaciones en la posición del centro de masas con respecto a la posición de L_2 (o L_1) y asumiendo que la rotación del cable es despreciable. Se proporcionan dos leyes de control estudiando las condiciones de estabilización en términos de las ganancias necesarias para uno de los casos. Además, se presenta la posibilidad de estabilizar la dinámica de un sistema de satélites ligados gracias a la rotación del mismo.

Un análisis más complejo ha sido llevado a cabo por Wong y Misra en sendos artículos [5, 6], donde se examina la dinámica controlada tridimensional de un tether rotatorio que conecta tres satélites en las proximidades del segundo punto de libración del sistema Sol-Tierra. El centro de masas sigue una trayectoria predefinida (órbitas de Lyapunov, trayectorias de Lissajous u órbitas halo); para conseguir que el sistema sea útil como interferómetro, es necesario controlar las oscilaciones de manera que el eje de observación del sistema pueda apuntar a una dirección específica, mientras que el centro de masas sigue una de las trayectorias prefijadas.

3. Modelo Dumbbell extendido

En este artículo se presenta un nuevo planteamiento que permite desarrollar un tratamiento general de una sistema de dos satélites ligados en las proximidades de un punto de libración colineal. Se han extendido los análisis previos incluyendo: 1) un análisis tridi-

mensional que permite diferentes configuraciones másicas e incluye el efecto de la masa del cable; 2) un proceso de linealización más sólido que evita, hasta cierto punto, los problemas asociados a la existencia de distintas pequeñas magnitudes; 3) un reducido número de parámetros que describen el movimiento del sistema, y 4) un sistema de ecuaciones más tratable que facilita la comprensión de las características más importantes de la dinámica.

El planteamiento se basa en obtener un modelo haciendo uso de la aproximación de Hill; esta formulación utiliza una escala espacial en las proximidades del primario pequeño donde el gradiente de gravedad del primario principal, la fuerza de inercia de Coriolis y la atracción gravitatoria del primario pequeño son del mismo orden de magnitud. Esta aproximación permite analizar la dinámica del sistema en los puntos de Lagrange con la adecuada precisión para la mayoría de sistemas binarios del Sistema Solar y facilita la presentación de las ecuaciones del movimiento de una manera comprensible, incluso cuando se considera un caso general. Asimismo, no es necesario llevar a cabo una linealización para obtener dicho sistema de ecuaciones, dado que la simplificación se obtiene gracias a una expansión asintótica en el parámetro ν , esto es, la masa reducida del segundo primario que es suficientemente pequeña en un gran número de casos. Finalmente, esta formulación proporciona un modelo cerrado que incluye únicamente un parámetro no dimensional que pone de manifiesto la importancia y organización de todos y cada uno de los elementos implicados en la dinámica del sistema.

Suponemos un par de primarios moviéndose en órbitas circulares alrededor de su centro de masas común. Resumimos en estas líneas los principales resultados del problema restringido circular de tres cuerpos contenido en el análisis. Las masas del primario principal (m_{P_1}) y la del primario pequeño (m_{P_2}) son conocidas. Cualquier sistema de referencia no rotatorio con origen en G_P , el centro de masas de los primarios, es una referencia inercial. El movimiento relativo de los primarios tiene lugar en un plano constante. Sea $Gxyz$ una referencia inercial contenida en este plano.

Dado que estamos interesados en el movimiento del vehículo espacial en las proximidades del segundo primario (m_{P_2}), tomamos el sistema de referencia sinódico $Oxyz$ con origen en el centro de masas de m_{P_2} y el plano Oxy en el plano orbital de ambos primarios (véase figura 1). Esta referencia es coincidente con el sistema de referencia orbital del segundo primario alrededor del primario principal y gira alrededor de la dirección Oz con una velocidad angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_{P_1} + m_{P_2})}{\ell^3}} \quad (1)$$

Los primarios se encuentran en reposo respecto a este sistema de referencia en las posiciones $m_{P_2} (0, 0, 0)$, $m_{P_1} (-\ell, 0, 0)$.

La aproximación de Hill se introduce mediante el siguiente cambio de variable:

$$x = \ell \nu^{1/3} \xi \quad y = \ell \nu^{1/3} \eta \quad z = \ell \nu^{1/3} \zeta$$

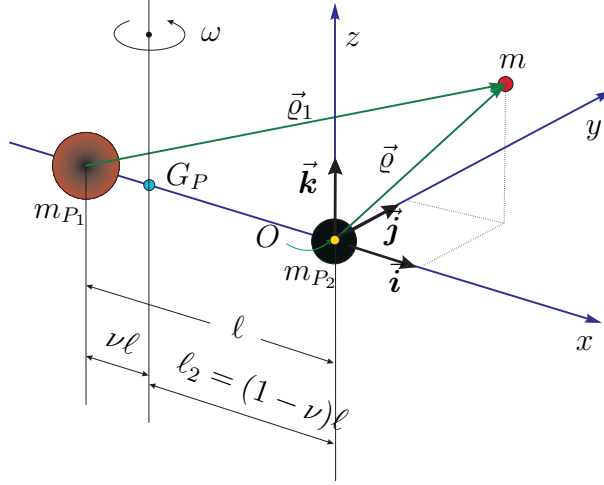


Figura 1.— Sistemas de referencia.

y usamos un modelo de haltera extendido que permite incluir la masa del tether en el análisis. Es ese caso, y tomando el tiempo adimensional $\tau = \omega t$ como variable independiente, las ecuaciones del movimiento del sistema de satélites ligados se expresa en su forma no dimensional como sigue:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi \left(3 - \frac{1}{\tilde{\rho}^3}\right) = \frac{\lambda}{\tilde{\rho}^5} \left\{ 3\tilde{N} \cos \theta \cos \varphi - \xi S_2 \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{\rho}} \right) \right\} \quad (2)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \frac{\eta}{\tilde{\rho}^3} = \frac{\lambda}{\tilde{\rho}^5} \left\{ 3\tilde{N} \sin \theta \cos \varphi - \eta S_2 \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{\rho}} \right) \right\} \quad (3)$$

$$\ddot{\zeta} + \zeta \left(1 + \frac{1}{\tilde{\rho}^3}\right) = \frac{\lambda}{\tilde{\rho}^5} \left\{ 3\tilde{N} \sin \varphi - \xi S_2 \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{\rho}} \right) \right\} \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} + (1 + \dot{\theta}) \left[\frac{\dot{I}_s}{I_s} - 2\dot{\varphi} \tan \varphi \right] + 3 \sin \theta \cos \theta = \frac{3\tilde{N}}{\tilde{\rho}^5} \frac{(\eta \cos \theta - \xi \sin \theta)}{\cos \varphi} \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \left[(1 + \dot{\theta})^2 + 3 \cos^2 \theta \right] + \frac{\dot{I}_s}{I_s} \dot{\varphi} = \frac{3\tilde{N}}{\tilde{\rho}^5} (-\xi \sin \varphi \cos \theta - \eta \sin \varphi \sin \theta + \zeta \cos \varphi) \quad (6)$$

donde $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ y las funciones \tilde{N} y $S_2(x)$ están dadas por

$$\tilde{N} = \xi \cos \varphi \cos \theta + \eta \cos \varphi \sin \theta + \zeta \sin \varphi \quad S_2(x) = (3/2)(5x^2 - 1)$$

Aquí, (θ, φ) son los ángulos de libración clásicos en la descripción de los sistemas de satélites ligados (véase figura 2). En estas ecuaciones el nuevo parámetro que retiene la influencia de la longitud del cable es

$$\lambda = \left(\frac{L_d}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{a_2}{\nu^{2/3}}, \quad a_2 = \frac{I_s}{m L_d^2} \quad (7)$$

donde $m = m_1 + m_2 + m_T$ es la masa total del sistema y I_s es el momento de inercia respecto una línea normal al tether por el centro de masas G del sistema; el parámetro no dimensional a_2 es de orden unidad y toma su valor máximo $a_2 = 1/4$ para un cable sin masa y masas extremas iguales ($m_1 = m_2$). Para una amarra de longitud variable el parámetro λ es una función temporal dado que la masa de tether desplegado $m_d(t)$

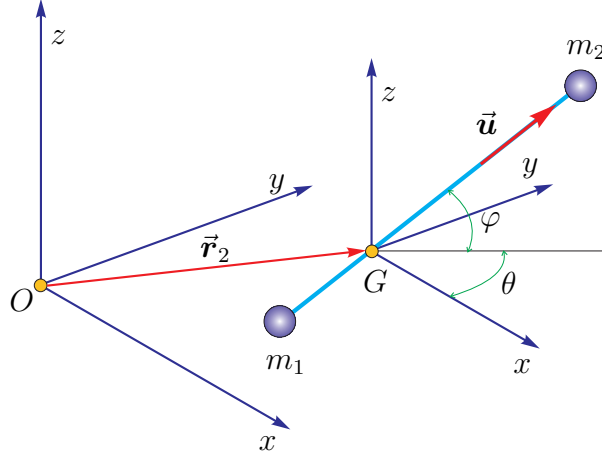


Figura 2.— Modelo Dumbbell

y la longitud de cable desplegada $L_d(t)$ varían. Además, algunos de los términos en las ecuaciones que gobiernan el movimiento contienen el ratio:

$$\frac{\dot{I}_s}{I_s} = 2 \frac{\dot{L}_d}{L_d} J_g, \quad J_g = 1 - \frac{\Lambda_d (1 + 3 \cos 2\phi)}{(3 \sin^2 2\phi - 2 \Lambda_d)}, \quad \Lambda_d = \frac{m_d}{m}, \quad \cos^2 \phi = \frac{m_1}{m} - \frac{\Lambda_d}{2}. \quad (8)$$

Esta formulación incluye la masa del tether a través del parámetro Λ_d y el ángulo másico ϕ . En caso de no considerar la masa del cable, basta con imponer la condición $\Lambda_d = 0$ en las expresiones anteriores. Para un tether de longitud constante, el parámetro λ es constante y el ratio \dot{I}_s/I_s desaparece, esto es, $\dot{I}_s/I_s = 0$. Por simplicidad, en lo que sigue consideraremos un tether sin masa, pero las ecuaciones (2)-(6) pueden ser utilizadas para un caso general de un tether masivo de manera sencilla.

En la búsqueda de posiciones de equilibrio, consideraremos que la tensión esta dada por:

$$T_0 \approx \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 L_d \left[\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \left((1 + \dot{\theta})^2 + 3 \cos^2 \theta \right) - 1 + \frac{1}{\rho^3} \left(3 \left(\frac{\hat{N}}{\rho} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\ddot{L}_d}{L_d} \right] \quad (9)$$

Esta ecuación ha sido obtenida bajo las siguientes hipótesis: 1) la masa del tether es nula y 2) se ha tenido en cuenta la aproximación de Hill. Obviamente, en cualquier posición de equilibrio la tensión en el tether ha de ser positiva dado que el cable no puede trabajar a compresión. En una posición de equilibrio, la expresión anterior toma la siguiente forma

$$T_0 \approx T_c \left[\cos^2 \varphi (1 + 3 \cos^2 \theta) - 1 + \frac{1}{\rho^3} \left(3 \left(\frac{\hat{N}}{\rho} \right)^2 - 1 \right) \right], \quad T_c = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 L_d \quad (10)$$

Utilizaremos la expresión (10) para comprobar la tensión del cable en las soluciones estacionarias de las ecuaciones (2)-(6); si la tensión es positiva la posición de equilibrio existirá; si es negativa, la posición de equilibrio no existirá.

4. Longitud constante

En un primer paso se analiza el caso más sencillo: un tether no rotatorio de longitud constante para el cual $\dot{I}_s = 0$. El sistema de ecuaciones (2)-(6) presenta varias familias

de soluciones estacionarias que dependen del parámetro λ . Las más interesantes son las contenidas en el los planos coordenados. La familia que está relacionada con los puntos de libración colineales está caracterizada por los siguientes valores de las variables (que son funciones del parámetro λ):

$$\xi_e = \pm\rho_e, \quad \eta_e = \zeta_e = \varphi_e = 0, \quad \theta_e = 0, \pi, \quad \lambda = \frac{\rho_e^2}{3} (3\rho_e^3 - 1), \quad \rho_e^3 \geq 1/3 \quad (11)$$

El tether se encuentra alineado con el eje Ox y el centro de masas del sistema G se encuentra separado del punto de libración a una distancia que depende del parámetro λ (proporcional al cuadrado de la longitud del cable). Esta es la familia de soluciones en la que nos centraremos. Comienza desde los puntos de libración L_1 y L_2 con $\lambda = 0$ (equivalente a un sistema no ligado) y se separa de ellos a medida que aumenta el valor de λ .

El análisis de estabilidad lineal ¹ muestra que las posiciones de equilibrio de esta familia son siempre inestables, esto es, son inestables para cualquier valor de λ . En efecto, dos grados de libertad son siempre estables - el ángulo de fuera del plano φ y la coordenada ζ que sufren movimientos oscilatorios en el análisis lineal - mientras que los demás grados de libertad son inestables puesto que un autovalor asociado a ellos es siempre real y positivo, para cualquier valor de λ . La figura 3 muestra el comportamiento del autovalor inestable en función del parámetro λ . Como se puede observar en la misma, la presencia del cable hace que el sistema sea más inestable. A pesar de este comportamiento, el valor del parámetro λ es habitualmente muy pequeño para longitudes de tether prácticas y la mayoría de los sistemas binarios en el Sistema Solar, y el aumento en la inestabilidad es prácticamente inapreciable.

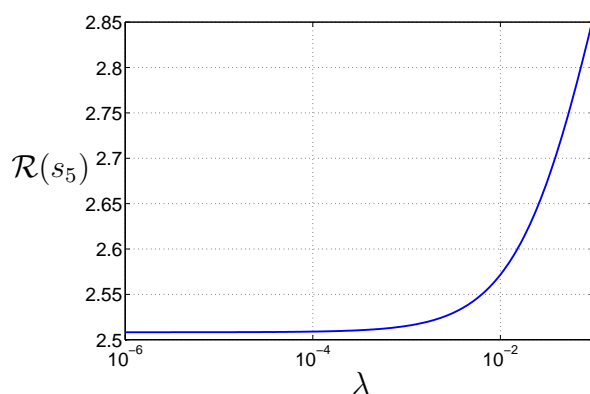


Figura 3.— Parte real del autovalor inestable como función de λ

¹Las ecuaciones variacionales pueden obtenerse del sistema de ecuaciones (12)-(16) imponiendo una longitud constante para el tether ($\delta\lambda = 0$)

5. Longitud variable

En primer lugar, es necesario analizar en este apartado la aproximación realizada en las ecuaciones (2)-(6) en relación al campo gravitatorio de los dos primarios. El potencial gravitatorio del segundo primario se ha expandido en potencias de L/r_2 , donde r_2 es la distancia $r_2 = |\vec{OG}|$ (véase figura 2), y se han despreciado términos de orden 3 o superior en dicha expansión. Esta aproximación funciona correctamente cuando $L/r_2 \ll 1$. En las posiciones de equilibrio consideradas, esa relación es posible expresarla en términos de las variables adimensionales de manera que

$$\frac{L}{r_2} = \sqrt{\frac{3\rho_e^3 - 1}{3a_2}} \ll 1$$

y puede expresarse en función de λ como se muestra en la figura 4 para $a_2 = 1/4$. Por

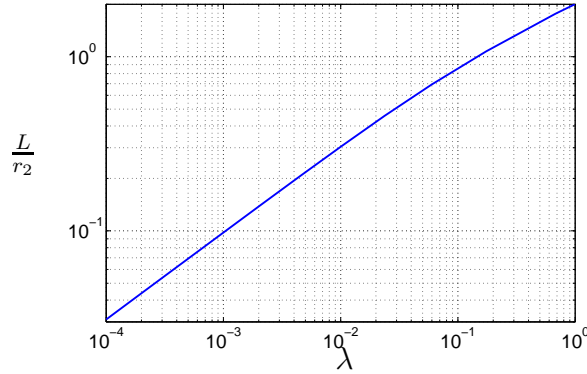


Figura 4.— Relación entre longitud del tether y distancia del CM del sistema al segundo primario como función de λ . $a_2 = 1/4$

tanto, la aproximación realizada es apropiada cuando λ es pequeño, pero falla cuando λ es de orden unidad.

Cuando se permite la variación de la longitud del cable, las ecuaciones variacionales del sistema (2)-(6) alrededor de la posición de equilibrio (11), toma la forma:

$$\delta\ddot{\xi} = \left(15 \mp \frac{2}{\xi_E^3}\right) \delta\xi + 2\delta\dot{\eta} - \frac{3\delta\lambda}{\xi_E^4} \quad (12)$$

$$\delta\ddot{\eta} = \left(6 \pm \frac{1}{\xi_E^3}\right) \delta\eta + \frac{(3\xi_E^3 \mp 1)}{\xi_E^2} \delta\theta - 2\delta\dot{\xi} \quad (13)$$

$$\delta\ddot{\zeta} = -\left(7 \mp \frac{1}{\xi_E^3}\right) \delta\zeta + \frac{(3\xi_E^3 \mp 1)}{\xi_E^2} \delta\varphi \quad (14)$$

$$\delta\ddot{\theta} = \pm \frac{3}{\xi_E^4} \delta\eta - 3\left(1 \pm \frac{1}{\xi_E^3}\right) \delta\theta - \frac{3J_g \delta\lambda}{\lambda_E} \quad (15)$$

$$\delta\ddot{\varphi} = \pm \frac{3}{\xi_E^4} \delta\zeta - \left(4 \pm \frac{3}{\xi_E^3}\right) \delta\varphi \quad (16)$$

donde $\delta\lambda$ representa la variación de λ respecto del valor de equilibrio λ_e y J_g es una función de la configuración másica del tether (para un tether sin masa $J_g = 1$; véase ec. (8)). Estas ecuaciones muestran que las coordenadas (ζ, φ) asociadas al movimiento fuera del plano están desacopladas respecto del movimiento en el plano. Esto es, el movimiento fuera del plano no puede corregirse mediante variaciones de la longitud del cable; resultado que concuerda con lo apuntado por Farquhar [2]. Afortunadamente el movimiento fuera del plano es estable (oscilatorio). De aquí en adelante el análisis se centrará en el movimiento en el plano que es el origen de la inestabilidad que exhibe el sistema.

5.1. Aproximación lineal con $\lambda \ll 1$

En este apartado, supondremos que las desviaciones de la posición del centro de masas respecto a la de equilibrio es pequeña y del orden de λ . De esta forma, el análisis lineal con $\lambda \ll 1$ presenta la ventaja de la simplicidad manteniendo un amplio rango de validez. Aplicando el siguiente cambio de variable:

$$\xi = \xi_L + 3^{1/3} \lambda_0(1 + u(\tau)), \quad \eta = 3^{1/3} \lambda_0 v(\tau), \quad \lambda = \lambda_0(1 + s(\tau)) \quad (17)$$

donde $\xi_L = (1/3)^{1/3}$ es la distancia del punto de Lagrange al centro de masas del segundo primario, es posible linealizar en λ_0 el sistema de ecuaciones de Hill (2)-(6).

En las siguientes líneas nos ocupamos de dos conceptos diferentes orientados a controlar el sistema linealizado. El primero de ellos es un esquema de control “ad hoc” que surge del análisis del problema unidimensional y que será extendido posteriormente al caso bidimensional. El segundo es una estrategia de control clásica para el caso tridimensional que hemos llamado “control proporcional”.

5.1.1. CONTROL “AD HOC”

En este apartado se fuerza a que la solución del sistema de ecuaciones anterior se encuentre acotada, evitando la inestabilidad.

Unidimensional En el caso unidimensional las variables $v(\tau), w(\tau), \theta(\tau), \varphi(\tau)$ se cancelan de manera permanente, de manera que la ecuación que establece la evolución del sistema es como sigue:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - 9u(\tau) + 9s(\tau) = 0 \Rightarrow u(\tau) = C e^{-3\tau} + D e^{3\tau} + u_p(\tau) \quad (18)$$

para cualquier función $s(\tau)$. Esta función de control la escogemos de manera que 1) responda a la forma general

$$s(\tau) = e^{\beta\tau} (A \cos \Omega\tau + B \sin \Omega\tau)$$

siendo (A, B, β, Ω) parámetros que han de hacer cumplir las siguientes condiciones; 2) en $u(\tau)$, la solución particular ha de anular la contribución de $D e^{3\tau}$; y 3) inicialmente la longitud del cable es la correspondiente a la de equilibrio de la posición alrededor de la que estamos linealizando.

Las condiciones que se obtienen para los parámetros compatibles con las restricciones anteriores son:

$$A = 0 \quad B = \frac{\Omega^2 + (\beta + 3)^2}{9\Omega} \cdot (3u_0 + \dot{u}_0)$$

En la siguiente figura se recoge la respuesta del sistema para una pareja arbitraria de valores de $\Omega = 1,5$ y $\beta = 0,5$, en el caso en el que las condiciones iniciales sean $u_0 = 0,15$ y $\dot{u}_0 = 0$.

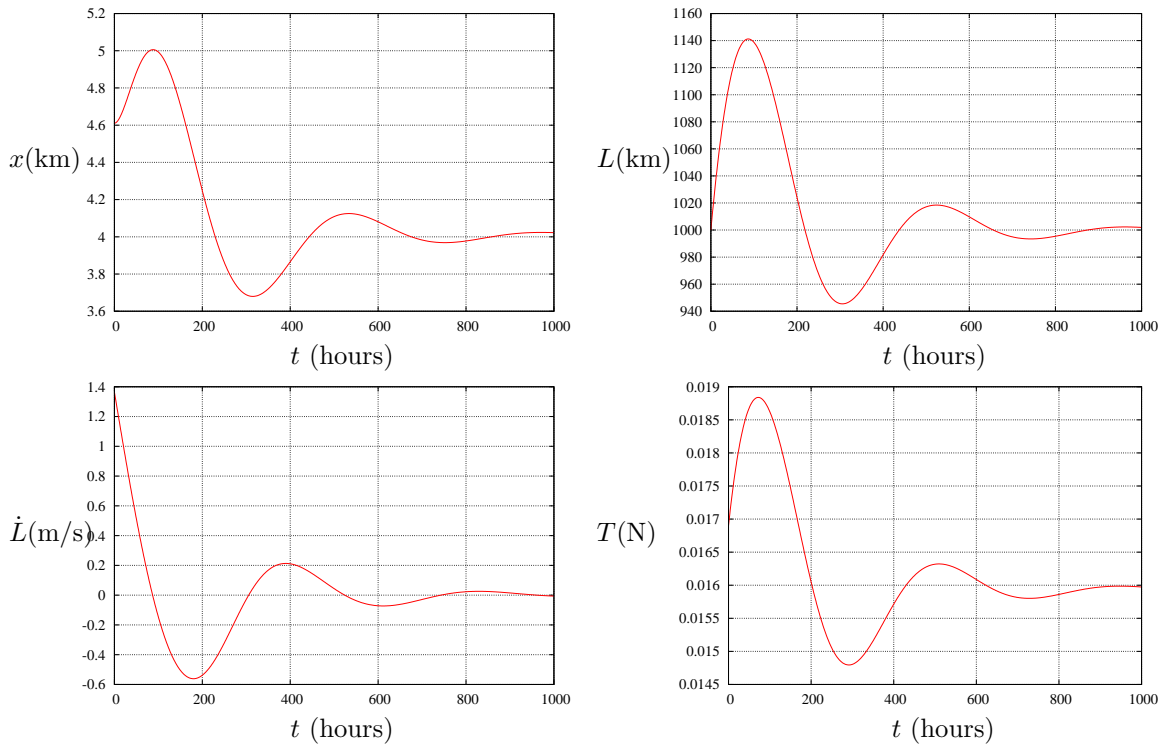


Figura 5.— Estrategia de control unidimensional. Tether sin masa con dos masas iguales (500 kg) en los extremos en el sistema Tierra-Luna. Los parámetros seleccionados son $\beta = 0,5$, $\Omega = 1,5$, para las condiciones iniciales $u_0 = 0,15$ y $\dot{u}_0 = 0$. La longitud del tether nominal se considera $L = 1000$ km

Como se aprecia en las figuras, el sistema tiende asintóticamente a la posición de equilibrio manteniendo la longitud de equilibrio correspondiente. La longitud máxima es del orden de un 10% la final. Para llevar a cabo la maniobra de control son necesarias pequeñas velocidades de despliegue y recogida del tether, si bien las tensiones involucradas son también pequeñas, del orden de los 10 mN.

Bidimensional En este apartado tratamos el problema en el plano ξ, η , al encontrarse la inestabilidad ligada al movimiento en el mismo. Adicionalmente se realiza una nueva hipótesis suponiendo que las variaciones en actitud del sistema así como sus variaciones serán pequeños, esto es, $\theta \ll 1$ y $\dot{\theta} \ll 1$. De esta forma, la siguiente solución general del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= C_1 \sin(\gamma_1 \tau) + C_2 e^{\gamma_2 \tau} + C_3 \cos(\gamma_1 \tau) + C_4 e^{-\gamma_2 \tau} + \\
&\quad C_5 \frac{12}{47} \sqrt{3} \cos(2\sqrt{3}\tau) - C_6 \frac{12}{47} \sqrt{3} \sin(2\sqrt{3}\tau) + u_p(\tau) \\
v(\tau) &= C_1 \frac{\sqrt{7} + 4}{\gamma_1} \cos \gamma_1 \tau + C_2 \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{7})}{\gamma_1} e^{\gamma_2 \tau} - C_3 \frac{\sqrt{7} + 4}{\gamma_1 \sin \gamma_1 \tau} \\
&\quad - C_4 \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{7})}{\gamma_1} e^{-\gamma_2 \tau} - C_5 \frac{63}{47} \sin 2\sqrt{3}\tau - C_6 \frac{63}{47} \cos 2\sqrt{3}\tau + v_p(\tau) \\
\theta(\tau) &= C_5 \sin 2\sqrt{3}\tau + C_6 \cos 2\sqrt{3}\tau
\end{aligned}$$

donde $\gamma_1 = \sqrt{-1 + 2\sqrt{7}}$ y $\gamma_2 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$. De la misma manera que en el párrafo anterior, buscamos una estrategia de control representada por la función $s(\tau)$ que cumpla los siguientes requisitos: 1) responda a la forma general

$$s(\tau) = e^{\beta \tau} (A \cos \Omega \tau + B \sin \Omega \tau)$$

siendo (A, B, β, Ω) parámetros que han de hacer cumplir las siguientes condiciones; 2) en la solución de $u(\tau), v(\tau), \theta(\tau)$, la solución particular ha de anular la contribución de $C_2 e^{\gamma_2 \tau}$; y 3) inicialmente la longitud del cable es la correspondiente a la de equilibrio de la posición alrededor de la que estamos linealizando.

Con estas condiciones, se obtiene por una parte $A = 0$, y por otra parte una relación $B = B(\beta, \Omega)$ que liga los parámetros involucrados en el control. En la figura 6 se reproduce el caso del párrafo anterior extendido al plano. Se representa, por tanto, la respuesta del sistema para una pareja arbitraria de valores de $\Omega = 1,5$ y $\beta = 0,5$, cuando las condiciones iniciales son $u_0 = 0,15$ y $\dot{u}_0 = 0$, como en el caso anterior.

Por supuesto la longitud del tether y su variación temporal son las mismas que en el caso anterior al ser igual la ley de control en ambos casos. Las diferencias aparecen en las oscilaciones de la posición del centro de masas y la tensión. stas son debidas a la imposibilidad de cancelar la contribución de la variedad inestable y simultáneamente las de las variedades de oscilación.

5.1.2. CONTROL PROPORCIONAL

Manteniendo la aproximación lineal, es posible plantear estrategias de control también lineales del tipo $s(\tau) = \sum K_i x_i$, donde K_i son las ganancias y x_i las variables de estado del sistema. Un análisis sencillo sugiere las opciones que puede aportar el control

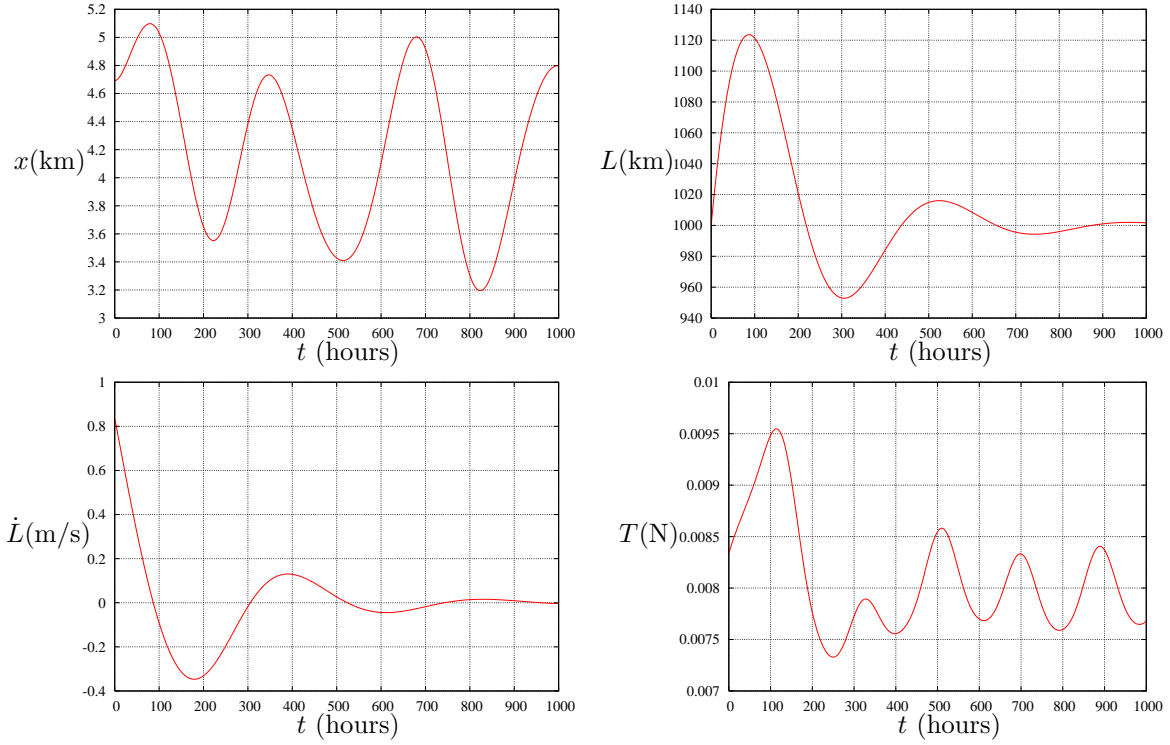


Figura 6.— Estrategia de control bidimensional. Tether sin masa con dos masas iguales (500 kg) en los extremos en el sistema Tierra-Luna. Los parámetros seleccionados son $\beta = 0,5$, $\Omega = 1,5$, para las condiciones iniciales $u_0 = 0,15$ y $\dot{u}_0 = 0$. La longitud del tether nominal se considera $L = 1000$ km

proporcional. De nuevo es conveniente realizar hipótesis relacionadas con la actitud del sistema, suponiendo que tanto θ, φ como sus derivadas son $\ll 1$. De esta forma, se llega a un sistema lineal que, al sustituir la función de control por el esquema proporcional, puede expresarse de la siguiente forma

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathcal{A}\vec{y} \quad (19)$$

donde $\vec{y} = \left\{ u, v, w, \theta, \varphi, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\theta}, \dot{\varphi} \right\}^T$ y la matriz $\mathcal{A} = \mathcal{A}(K_i)$. En primer lugar se estudian las posibilidades de estabilización que proporciona este tipo de control con únicamente una ganancia distinta de cero. Es decir, $s(\tau) = K_i x_i$. El análisis de los autovalores al considerar alguna de estas ganancias distinta de cero muestra que el único control proporcional de este tipo que permite estabilizar el sistema es $s(\tau) = K_u u(\tau)$ con $K_u > 1$. En esta situación todos los autovalores son imaginarios puros y el sistema se mantendría oscilando alrededor de la posición de equilibrio.

En un segundo paso, se busca incluir una segunda variable con una ganancia distinta de cero que permita que el sistema sea asintóticamente estable en el movimiento en el plano. De manera que se estudian los esquemas de control del tipo $s(\tau) = K_u u(\tau) + K_i x_i$. Del análisis de los autovalores se obtiene que no existe ninguna combinación posible que

conduzca al resultado deseado. Ya que, incluso el caso más favorable $s(\tau) = K_u u(\tau) + K_{\dot{u}} \dot{u}(\tau)$ con $K_u > 1$, $K_{\dot{u}} > 0$ conduce a un sistema con dos autovalores imaginarios puros conjugados asociados al movimiento en el plano.

5.2. Problema completo. Control proporcional

En este apartado se analiza el problema completo planteado en el sistema de ecuaciones (12), (13) y (15) en el caso en el que la variación de longitud $\lambda(\tau)$ esté gobernada por la siguiente ley de control proporcional:

$$\lambda = \lambda_e + \sum K_i (x_i - x_{e,i}) \quad (20)$$

donde K_i son las ganancias y x_i representa las variables ξ, η, θ . De esta forma, es posible buscar ganancias que permitan estabilizar el sistema. Cuando la ley de control se incluye en las ecuaciones variacionales, éstas se convierten en un sistema lineal que se puede escribir en forma vectorial como:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathcal{M}\vec{y} \quad (21)$$

donde $\vec{y}^T = \left\{ \delta\xi, \delta\eta, \delta\theta, \delta\dot{\xi}, \delta\dot{\eta}, \delta\dot{\theta} \right\}$.

El análisis detallado de la estabilidad del sistema (21) no es sencillo. No obstante, teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, consideraremos en primer lugar el caso en el que únicamente una ganancia K_ξ es no nula. En este caso, el polinomio característico del sistema toma la forma:

$$s^3 + \left[\frac{3K_\xi}{\xi_e^4} - \left(2 - \frac{4}{\xi_e^3} \right) \right] s^2 + \left[\left(\frac{6J_g + 27}{\xi_e^4} + \frac{6}{\xi_e^7} \right) K_\xi - \left(105 - \frac{6}{\xi_e^3} + \frac{4}{\xi_e^6} \right) \right] s + 6 \left[\left(\frac{9}{\xi_e^4} - \frac{3}{\xi_e^7} \right) K_\xi - \left(45 + \frac{9}{\xi_e^3} - \frac{2}{\xi_e^6} \right) \right] = 0 \quad (22)$$

La regla de Descartes de los signos proporciona una condición suficiente que ha de ser satisfecha por K_ξ para estabilizar el sistema; dicha condición se ha representado en la figura 7 como función de la posición de equilibrio λ_e para un tether sin masa ($J_g = 1$).

Este esquema de control proporciona estabilidad pero no estabilidad asintótica. Para ello, parece conveniente incluir ganancias que afecten a las variables de *velocidad*. Considerando el análisis de la sección anterior, se han incluido dos ganancias de control: K_ξ y $K_{\dot{\xi}}$, y se ha utilizado el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz (véase Ref. [7]) para establecer si este par de ganancias es capaz de proporcionar estabilidad. La aplicación del criterio indica que éstas han de cumplir las siguientes condiciones:

$$K_{\dot{\xi}} > 0, \quad (11 + 2J_g)\xi_e^4 - 2\xi_e - 3K_\xi < 0, \quad \frac{12((J_g^2 + 10J_g - 6)\xi_e^3 + 1)}{\xi_e^3((11 + 2J_g)\xi_e^4 - 2\xi_e - 3K_\xi)} K_{\dot{\xi}} > 0$$

Desafortunadamente, son incompatibles. En efecto, para un tether sin masa ($J_g = 1$), el numerador de la última condición es positivo para todos los valores de ξ_e y el denominador

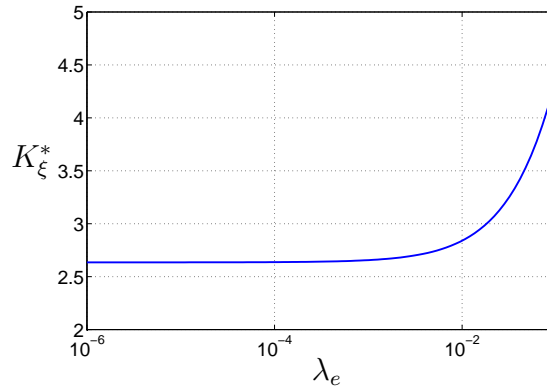


Figura 7.— Condición suficiente en K_ξ para estabilizar el sistema en función de λ_e . Los valores por encima de la curva ($K_\xi > K_\xi^*$) proporcionan estabilidad.

negativo. Por lo tanto, se puede concluir que el sistema no puede estabilizarse usando valores de K_ξ y $K_{\dot{\xi}}$ distintos de cero.

5.3. Problemas asociados al control

5.3.1. VARIACIONES DE LONGITUD NECESARIAS

En este apartado se analizan las variaciones de longitud asociadas a las leyes de control necesarias para la estabilización del sistema. En el caso más sencillo, el unidimensional linealizado para $\lambda \ll 1$, se observa claramente que la base del control se encuentra al modificar la longitud del cable de manera que sea siempre la de equilibrio en la posición dada. Se puede, en este caso, responder a la cuestión de cuál es la variación de longitud asociada a determinada variación en la posición del centro de masas. En valores dimensionales, la relación que liga ambas variaciones es como sigue:

$$\frac{\Delta L_t}{\Delta x_e} = \frac{1}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \sqrt{a_2} \lambda} \quad (23)$$

En el caso general, esta relación se puede escribir en función de la posición adimensional de equilibrio:

$$\frac{dL_t}{dr_e} = \frac{15\rho_e^3 - 2}{2\sqrt{3}a_2\sqrt{3\rho_e^3 - 1}} \quad (24)$$

Ambas relaciones se muestran en la figura 8; se observa que la aproximación lineal es adecuada hasta valores de λ del orden de $\sim 10^{-2}$. El aspecto importante de las relaciones anteriores es que para valores pequeños de λ ($\lambda < 10^{-6}$) la variación de ΔL es muy grande; así, para mover la posición de equilibrio 1 km es necesario desplegar (o recoger) 1000 km de cable. La presencia de un mínimo sugiere que sería conveniente trabajar en las proximidades de ese punto donde dL/dx_e es aproximadamente $\sim 4,5$. Esto hace necesario buscar valores de $\lambda \sim 1,3 \cdot 10^{-1}$. No obstante, para ser coherente con las aproximaciones realizadas en el modelo (véase figura 4) los valores de λ deber ser menores que $\lambda <$

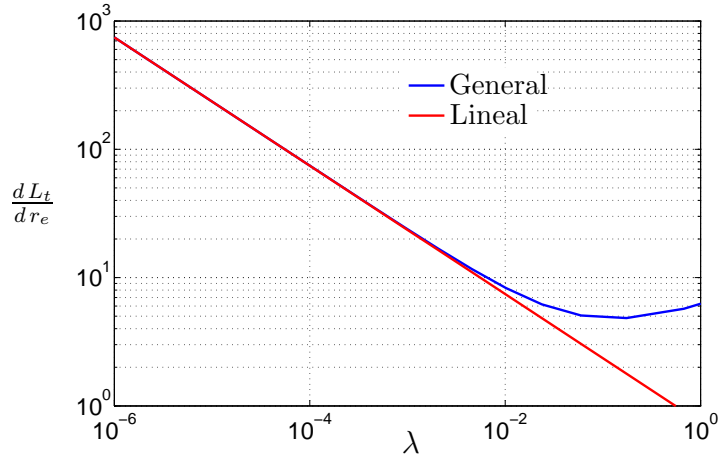


Figura 8.— Relación entre la variación de longitud necesaria y las desviaciones del centro de masas del sistema en función del parámetro λ . Comparación de las expresiones lineal y general

10^{-1} . Como resultado, los valores de λ del orden de 10^{-2} mantienen la coherencia con la aproximación realizada al tiempo que dan lugar a longitudes de cable viables.

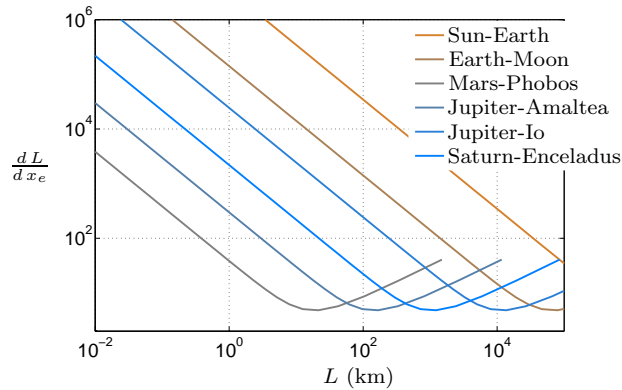


Figura 9.— Ratio entre la variación de longitud necesaria y las desviaciones del centro de masas del sistema como función de la longitud del cable (km)

En la figura 9 se muestra el ratio $\frac{dL}{dx_e}$ como función de la longitud del cable (km) para la posición de equilibrio en diferentes sistemas binarios de interés. La parte de la curva por encima del mínimo hacia la derecha no debe ser considerada dado que se corresponde con valores de λ demasiado elevados. Esta figura permite establecer cuáles son los sistemas de primarios más adecuados en los que es posible llevar a cabo las estrategias de control propuestas en este artículo. En la parte derecha de la figura las longitudes de cable necesarias para trabajar en las proximidades del mínimo dL/dx_e son prohibitivamente altas. Sin embargo, las curvas a la izquierda de la figura conducen a valores más razonables de la longitud del cable, con el ratio dL/dx_e próximo a su mínimo. Este análisis, por lo tanto, nos ayuda a evaluar *a priori* la adecuación de las estrategias de control basadas en

la variación de la longitud del tether para cada uno de los sistemas binarios del Sistema Solar.

Por otra parte, en el control proporcional existen problemas relacionados con la longitud del cable. En primer lugar, existe un límite asociado al hecho de que las posiciones de equilibrio se encuentran a uno de los lados del punto de Lagrange (a la derecha en el caso de L_2 , a la izquierda en el caso de L_1) y no a ambos. Por ello, el tether ha de encontrarse en la zona correcta. Esta condición sobre la perturbación máxima se puede expresar en valores dimensionales y adimensionales para el caso de L_2

$$\|x - x_E\| = \Delta x < \|x_E - x_{L_2}\| \quad \|\xi - \xi_E\| = \Delta\xi < \|\xi - 3^{-1/3}\| \quad (25)$$

En segundo lugar, la ligadura asociada a la longitud del cable: $L > 0$ da lugar a una limitación en esta estrategia de control. La longitud del cable es proporcional a $\sqrt{\lambda}$ y esta variable adimensional varía conforme a lo establecido en la ley de control. En un caso general de control lineal proporcional a las variaciones $\Delta\vec{y}$ respecto a la posición de equilibrio:

$$\lambda = \lambda_e + \vec{K} \cdot \Delta\vec{y}$$

De esta forma, la condición puede escribirse como: $\lambda_e + \vec{K} \cdot \Delta\vec{y} > 0$ De manera general, se puede acotar inferiormente λ teniendo en cuenta:

$$\lambda_e + \vec{K} \cdot \Delta\vec{y} > \lambda_e - \|\vec{K}\| \|\Delta\vec{y}\|$$

Y establecer de esta forma una condición suficiente en el módulo del vector de ganancias de la ley de control para el cumplimiento de la condición $L > 0$:

$$\|\vec{K}\| < \frac{\lambda_e}{\|\Delta\vec{y}\|_{max}} \quad (26)$$

Además las ganancias han de cumplir la condición relativa a la existencia de estabilidad.

No es sencillo establecer el valor de $\|\Delta\vec{y}\|_{max}$ en un caso general, ya que depende de la evolución dinámica del sistema. Sin embargo, es razonable suponer que en un sistema estabilizado mediante el control, la perturbación máxima es la inicial, ya que el control se encarga de “acercar” el sistema al punto de equilibrio inestable. Por tanto en muchas situaciones $\|\Delta\vec{y}\|_{max} = \|\Delta\vec{y}\|_0$.

Para la ley de control propuesta: $\lambda = \lambda_e + K_\xi (\xi - \xi_E)$, la condición anterior (26) se traduce en: $K_\xi < \lambda_e / (\xi - \xi_E)_{max}$. Suponiendo que dicho máximo se produce en el instante inicial y que para un mismo $\Delta\rho$, el que produce un mayor $(\xi - \xi_E)$ es tal que $\Delta\rho = \Delta\xi$. De esa forma, la condición en K_ξ es como sigue:

$$K_\xi < \frac{\lambda_e}{\xi_0 - \xi_E} \text{ no dimensional} \quad K_\xi < \frac{\sqrt{\lambda_e a_2}}{\|x_0 - x_e\|} \text{ dimensional} \quad (27)$$

Obtenemos dos límites de funcionamiento, por tanto, para la estrategia de control relacionados con las siguientes condiciones: 1) longitud de cable positiva L y 2) centro de masas G en el lado correcto del punto de Lagrange. En lo que sigue se mostrará que el primero es más restrictivo que el segundo. Para compararlas, ambas restricciones pueden medirse en términos de la máxima perturbación admisible; ésta se define como la máxima perturbación inicial que puede controlarse cumpliendo las ligaduras (1) o 2)).

Para el segundo límite, una vez que se ha seleccionado la posición de equilibrio para la operación nominal del tether, se ha de asegurar que la posición inicial pertenezca al intervalo de amplitud $2 |\xi_E - 3^{-1/3}|$ y centrado en ξ_E . Por lo tanto, la máxima perturbación permitida es el semi-intervalo $\Delta\xi|_{max}^{(C2)} = |\xi_E - 3^{-1/3}|$ y este valor es fijo para cada posición de equilibrio.

Para el primer límite, podemos obtener la máxima perturbación admisible de la relación (27).

$$\Delta\xi|_{max}^{C1} = \frac{\lambda_e}{K_\xi}$$

Dado que el valor de $\Delta\xi|_{max}^{C1}$ depende de λ_e y de la ganancia del control, usaremos el valor mínimo de K_ξ que garantiza la estabilidad del sistema, esto es, K_ξ^* (véase figura 7), para mantenernos en la zona estable. De acuerdo con ello, el máximo valor admisible de la perturbación para cada límite se representa en función de la posición de equilibrio en la figura 10.

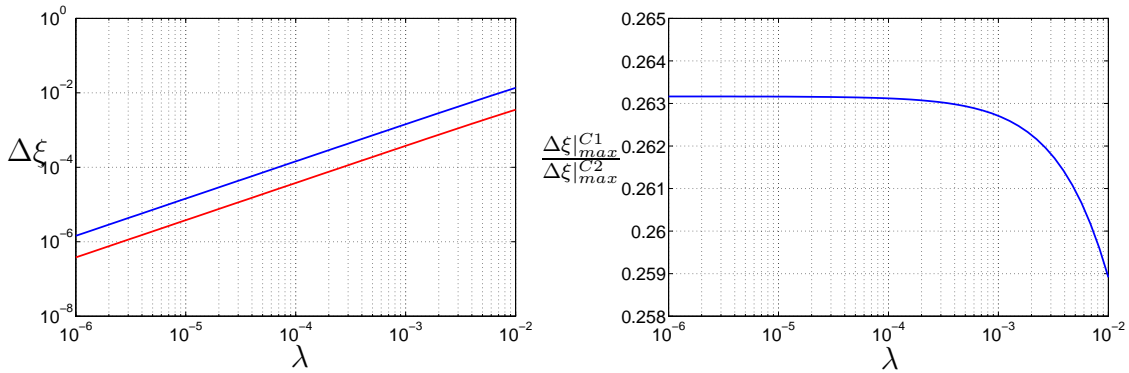


Figura 10.— Figura de la derecha: $\Delta\xi|_{max}$ en ambos casos, $\Delta\xi|_{max}^{C2}$ (curva azul) y $\Delta\xi|_{max}^{C1}$ (curva roja). Figura de la izquierda: ratio entre la perturbación máxima permitida para ambas limitaciones

Por lo tanto, el requerimiento $L > 0$ es más restrictivo que la necesidad de situar el centro de masas en el lado correcto del punto de Lagrange.

5.3.2. TENSIONES

Las amarras no trabajan a compresión. Asociado a este hecho, existe un límite natural para la operación del tether que es explorado en este apartado. Dado que la expresión de

la tensión en un cable sin masa dentro de la aproximación de Hill puede escribirse como:

$$T_0 = T_c \left[\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \left\{ (1 + \dot{\theta})^2 + 3 \cos^2 \theta \right\} - 1 + \frac{1}{\rho^3} \left(3 \left(\frac{\tilde{N}}{\rho} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\ddot{L}_d}{L_d} \right] \quad (28)$$

donde $T_c = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \omega^2 L_d$, la tensión dependerá de la ley de control a través del término (\ddot{L}_d/L_d) . Analizamos el control proporcional ($\lambda = \lambda_E + K_\xi(\xi - \xi_E)$) para establecer la influencia de las diferentes variables en la capacidad estabilizadora de la misma (perturbación inicial, posición de equilibrio y configuración de masas), una vez fijada la ley de control. En la siguiente figura se muestran la mínima y la máxima tensión en un tether sin masa para una posición de equilibrio dada en función de la perturbación inicial.

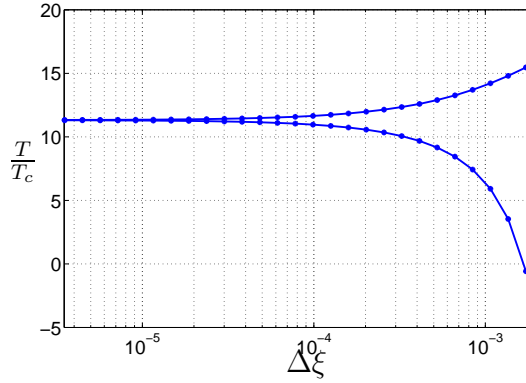


Figura 11.— Tensión máxima y mínima en el cable como función de la perturbación inicial $\Delta\xi$ para una posición de equilibrio dada: $\lambda_e = 10^{-2}$.

Como se puede observar, existe una perturbación inicial máxima por encima de la cual la tensión se hace negativa. Además, el valor máximo de la perturbación inicial se ha escogido como el máximo $\Delta\xi$ que puede ser estabilizado con la mínima ganancia de control K_ξ de cada posición de equilibrio. Por lo tanto, el límite derivado de la necesidad de que la tensión sea positiva es más restrictivo que el requerimiento $L > 0$ expuesta en el párrafo anterior para esta posición de equilibrio.

Así, es posible asociar un valor crítico de $\Delta\xi$ a cada posición de equilibrio, que se recoge en la figura 12 en función de λ_e . A lo largo de la línea azul, se alcanza la condición de tensión nula; por consiguiente, los valores admisibles de $\Delta\xi$ han de situarse bajo esa línea. La línea roja representa $L > 0$. Se puede establecer, a partir de la figura, que el límite más restrictivo es el asociado a la tensión; y, consecuentemente, la línea azul en dicha figura constituye la máxima perturbación inicial permitida que puede ser controlada con variaciones de la longitud del tether factibles manteniendo tenso el cable.

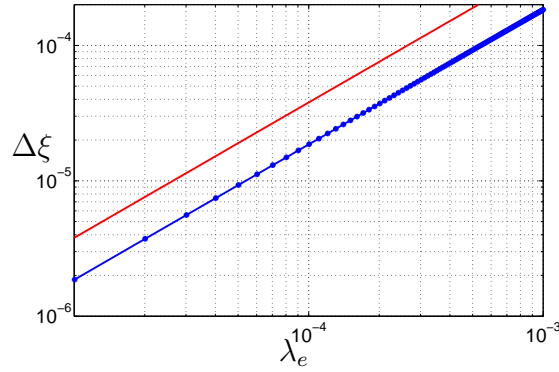


Figura 12.— $\Delta\xi$ que proporciona tensión nula vs. λ_e (línea azul). $\Delta\xi$ que proporciona longitud de cable nula cuando se considera el mínimo valor de K_ξ necesario para estabilizar el sistema (línea roja).

6. Conclusiones

Del análisis llevado a cabo en este artículo se pueden extraer varias conclusiones significativas. En primer lugar, se ha deducido una formulación robusta incluyendo en el análisis la aproximación de Hill que da lugar a expresiones más sencillas, manteniendo simultáneamente la precisión necesaria en los resultados.

Con esta nueva formulación se obtiene un único parámetro no dimensional que recoge la influencia de la longitud del tether y juega un papel fundamental en la dinámica del sistema. También se obtienen posiciones de equilibrio próximas a los puntos de Lagrange colineales en los que un sistema de satélites ligados puede ubicarse para explotar las ventajas de estas especiales posiciones. Estos resultados están en consonancia con los previos encontrados en la literatura.

Dado que las posiciones de equilibrio son inestables, se han obtenido varias leyes de control que permitirían la operación de sistemas de satélites ligados en las proximidades de los puntos de Lagrange. Estas técnicas de estabilización posibilitan la utilización de tethers en distintos campos de la astrodinámica y la exploración espacial.

En general, la utilización de amarras es más conveniente en aquellos sistemas binarios en los que el segundo primario sea pequeño, porque la longitud de cable requerida será menor. En el artículo también se señalan algunas dificultades asociadas con las técnicas de estabilización exploradas; por ejemplo, la estabilización aquí propuesta únicamente puede utilizarse a uno de los lados del punto de Lagrange seleccionado, dado que al otro lado no existen posiciones de equilibrio. Por lo tanto no está permitido cruzar el punto colineal. Se ha visto además la gran sensibilidad que presenta la longitud del tether a las desviaciones respecto a la posición de equilibrio inicial, así como la limitación que impone la necesidad de mantener positiva la tensión en el cable. Desde este punto de vista se ha mostrado que

el requerimiento más restrictivo es este último, pudiendo establecer la máxima desviación inicial permitida para cada ley de control propuesta, tal y como se recoge para un caso particular en la figura 12.

Referencias

- [1] Colombo G. The Stabilization of an Artificial Satellite at the Inferior Conjunction Point of Earth-Moon System. Technical Report Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report Number 80, 1961.
- [2] Farquhar R.W. The Control and Use of Libration-Point Satellites. Technical Report NASA TR T-346, NASA, 1970.
- [3] Farquhar R.W. Tether Stabilization at a Collinear Libration Point. *Journal of the Astronautical Sciences*, 49(1), 2001.
- [4] Misra, A.K.; Bellerose, J. & Modi, V.J. Dynamics of a Tethered System Near the Earth-Moon Lagrangian Points. *Advances in the Astronautical Sciences*, 109(III):415–435, 2001.
- [5] Wong, B. and Misra, A.K. Dynamics of multitethered system near the sun-earth lagrangian points. In *Proceedings of the 13th Space Flight Mechanics Meeting, Ponce, Puerto Rico*, number Paper No AAS-03-218, February 2003.
- [6] Wong, B. and Misra, A.K. Dynamics of libration point multi-tethered system. In *Proceedings of 2004 International Astronautical Congress*, number Paper No. IAC-04-A.05.09., 2004.
- [7] Gantmacher, F.R. *Applications of the Theory of Matrices*. Mineola, New York : Dover, 2005.