

Normalizaciones de orden alto en el problema de Hill

Juan F. San-Juan

Universidad de La Rioja, 26004 Logroño

and

Martín Lara

Real Observatorio de la Armada, 11110 San Fernando

Resumen

Hill's problem describes the most relevant features in the dynamics around planetary satellites. We consider a system of nondimensional variables, and a small parameter that depends only on the nondimensional semimajor axis. Then, the 3-DOF problem is reduced to 1-DOF by means of two Lie transforms. Since a symmetry between direct and retrograde inclination orbits arises from the second order approach, we are compelled to reach higher orders. We find that, while the third order approximation breaks that symmetry, only the fourth order normal form reflects the real Keplerian behavior of retrograde orbits inside Hill radius.

1. Introduction

La misión JIMO de la NASA, que pretendía estudiar la estructura interna de los satélites galileanos externos, ha renovado el interés por el modelo de Hill [4]. Aunque las exigencias de esta misión requerían considerar un modelo más complejo [7, 8, 13, 15, 17], como la inclusión de los armónicos zonales J_2 y J_3 o el armónico teseral C_{22} del cuerpo central, por su influencia en el caso de satélites bajos.

En este trabajo, se estudian algunas de las características presentadas por el modelo analítico desarrollado en [15], que analiza el comportamiento cualitativo de un orbitador, O , considerado como una masa puntual, en torno a un satélite natural, S , de un planeta P . El modelo utilizado en [15] suponía que la distancia entre los centros de masas de S y P es lo suficientemente grande como para considerar el planeta como una masa puntual, que S y P describen órbitas circulares alrededor de su centro de masas con velocidad angular constante, y, que el ecuador del satélite coincide con su plano orbital. Además, se consideró que la dinámica de O se encontraba bajo la influencia del achatamiento de S .

En [15] se desarrolló una teoría analítica de tercer orden¹ que para el caso de orbitadores próximos al satélite planetario describían de forma más precisa el comportamiento del sistema original como puede verse en la Figura 1.

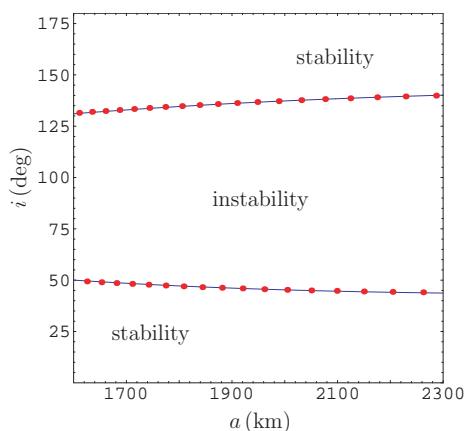


Figura 1: Comparación de las bifurcaciones de las órbitas circulares obtenidas a partir de la aproximación analítica v.s. las obtenidas por métodos numéricos a partir del problema original.

La segunda característica que presenta la aproximación de tercer orden es respecto al comportamiento de la línea de bifurcación de las órbitas circulares retrógradas cuando nos alejamos del satélite planetario. Como puede verse en la Figura 2 esta línea corta a la recta $L + H = 0$, recta que delimita la región del espacio de las fases donde la dinámica es posible, corte que no aparece en la aproximación de segundo orden.

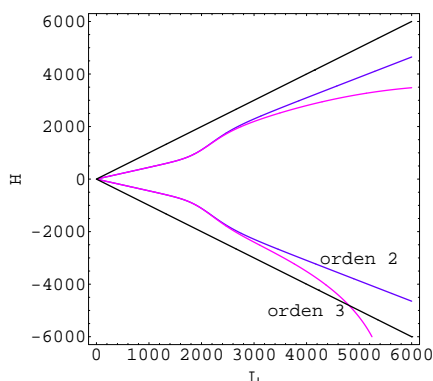


Figura 2: Bifurcación de las órbitas circulares: aproximaciones de segundo y tercer orden.

La ruptura de la simetría y el comportamiento de la línea de bifurcación de las órbitas circulares retrógradas son efectos producidos por la influencia del tercer cuerpo. En este

¹El modelo fue inicialmente estudiado por Lidov y Yarskaya [8] a partir de un promedio de primer orden, esta aproximación presenta una simetría entre las bifurcaciones de las órbitas circulares directas y retrógradas que no existe en el modelo físico.

trabajo, retomamos el modelo de Hill, y presentamos una aproximación de cuarto orden, en el cual, después de aplicar dos transformaciones de Lie, que eliminan los términos de corto periodo, se estudia el espacio fásico reducido.

Formulación del problema

En un sistema de referencia rotante el problema de Hill formulado en términos de un conjunto de variables adimensionales tiene por Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{r} - (xp_y - yp_x) + \frac{1}{2}(r^2 - 3x^2), \quad (1)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Por medio de un cambio de variable y tiempo simpléctico [9]

$$\mathbf{x} = \epsilon^{2/3}\mathbf{x}', \quad \mathbf{p} = \epsilon^{-1/3}\mathbf{p}', \quad t = \epsilon\tau,$$

se introduce un parámetro adimensional, ϵ , que representa un factor de escala. Eliminando las primas en un abuso de notación, el Hamiltoniano (1) se expresa como un desarrollo en serie de potencias de ϵ

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{r} - \epsilon(xp_y - yp_x) + \frac{\epsilon^2}{2}(r^2 - 3x^2). \quad (2)$$

El cambio de variable transforma el problema de Hill en otro de tipo kepleriano, en cierta región del espacio de las fase, donde la influencia del problema de dos cuerpos se recoge en el término no perturbado, se desplaza el efecto de la fuerza de Coriolis a primer orden y la perturbación producida por el tercer cuerpo se sitúa en el segundo orden. Esta aproximación es válida cuando se estudia la dinámica kepleriana en el sistema rotante en torno a S y limitado por los puntos Lagrangianos como puede verse en la Figura 3.

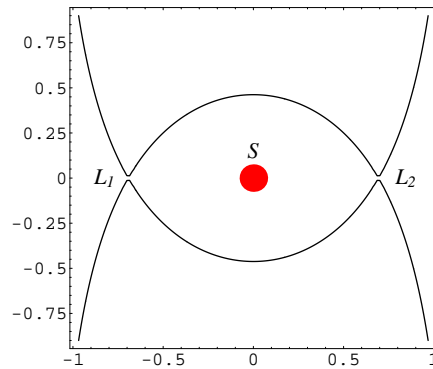


Figura 3: El valor de la constante de Jacobi correspondiente al radio de Hill proporciona el límite de validez de la teoría analítica.

La expresión del Hamiltoniano (2) en variables de Delaunay (l, g, h, L, G, H) , con l la anomalía media, g el argumento del pericentro, h el argumento del nodo y donde los momentos conjugados vienen definidos por $L = \sqrt{a}$, $G = L\sqrt{1 - e^2}$ y $H = G \cos i$, es

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2L^2} - \epsilon H + \frac{\epsilon^2}{2} r^2 \left(1 - 3(\cos(f + g) \cos h - \cos i \sin(f + g) \sin h)^2\right), \quad (3)$$

donde a , e , i y f representan el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación y la anomalía verdadera de la órbita osculadora.

La transformación del problema de Hill de tres grados de libertad a otro de un grado de libertad se realizará por medio de teoría de perturbaciones basadas en transformaciones de Lie [2].

Eliminación de la anomalía media

La transformación de Lie, $\mathcal{T}_1 : (l, g, h, L, G, H) \rightarrow (l', g', h', L', G', H')$, que elimina la anomalía media de \mathcal{H} recibe por nombre Normalización de Delaunay [3]. Su construcción se realiza por medio del método de Lie-Deprit [2] de tal forma que el Hamiltoniano transformado, \mathcal{H}' , y la función generatriz, \mathcal{W} , se expresan también como un desarrollo en serie de potencias de ϵ .

A través de un método iterativo se obtiene los términos de orden n de \mathcal{H}' y \mathcal{W} . En este proceso es necesario resolver una ecuación en derivadas parciales que recibe el nombre de ecuación homológica

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{W}_n) + \mathcal{H}'_n = \widetilde{\mathcal{H}}_{n0}, \quad (4)$$

donde \mathcal{L}_0 es el operador lineal definido como

$$\mathcal{L}_0(\cdot) = -\frac{1}{L'^3} \frac{\partial}{\partial l'}.$$

El término $\widetilde{\mathcal{H}}_{n0}$ acumula todos los cálculos del método a excepción del término $-\mathcal{L}_0(\mathcal{W}_n)$.

Una solución de la ecuación (4) se obtiene eligiendo como n -ésimo orden del nuevo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}'_n = \int_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{H}}_{n0} dl'$$

y calculando el n -ésimo orden de la función generatriz como

$$\mathcal{W}_n = L'^3 \int (\widetilde{\mathcal{H}}_{n0} - \mathcal{H}'_n) dl'.$$

Este proceso se puede generalizar a cualquier orden. Hasta cuarto orden la transformación se ha realizado en forma cerrada de la excentricidad y las integrales que hay que calcular durante el proceso son de la forma

$$\int \mathcal{Q}_1 \cos(nE' \pm mf' + \mathcal{Q}_2) dl' \quad n = 0 \dots 6 \text{ y } m = 0 \dots 4$$

con \mathcal{Q}_1 función de i' , e' y a' y \mathcal{Q}_2 una combinación lineal de h' y g' , para más detalles sobre el cálculo de estas integrales ver [1, 5]. Eliminada la anomalía media, el Hamiltoniano transformado sólo depende de los argumentos del nodo y del pericentro y la expresión del tercer orden queda

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=0}^3 \frac{c^i}{i!} \mathcal{H}'_i, \quad (5)$$

donde

$$\mathcal{H}'_0 = -\frac{1}{2L^2},$$

$$\mathcal{H}'_1 = -H',$$

$$\mathcal{H}'_2 = \mathcal{M}_0^2 - \mathcal{M}_1^2 \cos 2g' - \mathcal{M}_2^2 \cos 2h' - \mathcal{M}_3^2 \cos(2g' - 2h') - \mathcal{M}_4^2 \cos(2g' + 2h'),$$

$$\mathcal{H}'_3 = \mathcal{M}_0^3 \cos(2g' - 2h') - \mathcal{M}_1^3 \cos(2g' + 2h').$$

Los coeficientes \mathcal{M}_j^k son funciones de i' , e' y a' definidos como

$$\mathcal{M}_0^2 = (1/8) L^4 (1 - 3c'^2) (2 + 3e'^2),$$

$$\mathcal{M}_1^2 = (15/8) L^4 s'^2 e'^2,$$

$$\mathcal{M}_2^2 = (3/8) L^4 s'^2 (2 + 3e'^2),$$

$$\mathcal{M}_3^2 = (15/16) L^4 (1 - c')^2 e'^2,$$

$$\mathcal{M}_4^2 = (15/16) L^4 (1 + c')^2 e'^2,$$

$$\mathcal{M}_0^3 = (45/16) L'^7 (1 - c')^2 e'^2 \eta',$$

$$\mathcal{M}_1^3 = (45/16) L'^7 (1 + c')^2 e'^2 \eta',$$

donde $\eta' = \sqrt{1 - e'^2}$, s' y c' representan al seno y al coseno de la inclinación respectivamente. El cuarto orden de \mathcal{H}' no se muestra debido al elevado número de términos, sólo notaremos que la serie $\widetilde{\mathcal{H}}_{40}$ tiene 84181 términos.

Eliminación del argumento del nodo

La reducción del Hamiltoniano (5) a otro de un grado de libertad se realizará mediante otra transformación de Lie, $\mathcal{T}_2 : (l', g', h', L', G', H') \rightarrow (l'', g'', h'', L'', G'', H'')$, que elimina el argumento del nodo. El esquema que seguiremos difiere del método clásico de Lie-Deprit en la construcción de transformación. Este esquema fue aplicado al movimiento de un satélite Lunar [6], en el problema estelar de tres cuerpos [10], en el problema del satélite artificial terrestre [11, 12, 14] y en el problema de un orbitador en torno a Europa [7, 15].

El Hamiltoniano \mathcal{H}' se caracteriza por que el término de orden cero es constante, sólo depende del momento L' , el término de orden uno sólo depende de H' , momento conjugado del argumento del nodo, y el resto de los términos dependen de $(-, g', h', L', G', H')$. Que \mathcal{H}'_1 no dependa de h' lo convierte en una integral de primer orden de \mathcal{H}' , que por medio de la transformación de Lie, \mathcal{T}_2 , se puede extender al resto del Hamiltoniano.

El orden donde aparece la integral hace que el algoritmo de cálculo se modifique ligeramente. Partiendo del esquema iterativo propuesto en [2] se plantea una nueva ecuación en derivadas parciales, ecuación homológica, que debe ser resuelta para poder obtener el Hamiltoniano nuevo \mathcal{H}'' y la nueva función generatriz, \mathcal{V} , ésta es

$$n\mathcal{L}_1(\mathcal{V}_{n-1}) + \mathcal{L}_0(\mathcal{V}_n) + \mathcal{H}''_n = \widehat{\mathcal{H}}_{n0}, \quad (6)$$

donde $\widehat{\mathcal{H}}_{n0} = \widetilde{\mathcal{H}}_{n0} - n\mathcal{L}_1(\mathcal{V}_{n-1})$, con $\widetilde{\mathcal{H}}_{n0}$ la parte conocida de la formulación clásica propuesta por Deprit, y donde los operadores lineales \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_1 están definidos como

$$\mathcal{L}_0(\cdot) = -\frac{1}{L''^3} \frac{\partial}{\partial l''} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_1(\cdot) = \frac{\partial}{\partial h''}.$$

El término \mathcal{H}''_n es elegido como

$$\mathcal{H}''_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{\mathcal{H}}_{n0} dh'',$$

\mathcal{V}_{n-1} se calcula como

$$\mathcal{V}_{n-1} = \frac{-1}{n-1} \int (\widehat{\mathcal{H}}_{n0} - \mathcal{H}''_n) dh'',$$

mientras que el término correspondiente a la función generatriz de orden n , \mathcal{V}_n , se calcula en el orden siguiente, $n+1$.

El Hamiltoniano de cuarto orden después de eliminar el nodo queda

$$\mathcal{H}'' = \sum_{i=0}^4 \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{H}''_i, \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}''_0 &= -\frac{1}{2L''^2}, \\ \mathcal{H}''_1 &= -H'', \\ \mathcal{H}''_2 &= \mathcal{N}_0^2 + \mathcal{N}_1^2 \cos 2g'', \\ \mathcal{H}''_3 &= \mathcal{N}_0^3 + \mathcal{N}_1^3 \cos 2g'', \\ \mathcal{H}''_4 &= \mathcal{N}_0^4 + \mathcal{N}_1^4 \cos 2g'' + \mathcal{N}_2^4 \cos 4g''. \end{aligned}$$

Los coeficientes \mathcal{N}_j^k son funciones de i'' , e'' y a'' definidos como

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_0^2 &= (1/16) L''^4 (1 - 3c''^2)(2 + 3e''^2), \\
\mathcal{N}_1^2 &= -(15/16) L''^4 s''^2 e''^2, \\
\mathcal{N}_0^3 &= -(9/128) L''^7 ((17e''^2 - 2)c''^2 + 33e''^2 + 2)c''\eta'', \\
\mathcal{N}_1^3 &= -(135/128) L''^7 c'' s''^2 e''^2 \eta'', \\
\mathcal{N}_0^4 &= (1/16384) L''^{10} (9(8879e''^4 - 7088e''^2 + 24)c''^4 \\
&\quad + 6(15375e''^4 - 21240e''^2 + 1864)c''^2 \\
&\quad + 11943e''^4 - 68256e''^2 + 1144), \\
\mathcal{N}_1^4 &= (1/4096) L''^{10} (165(43e''^2 - 32)c''^2 + 1079e''^2 - 2172)s''^2 e''^2, \\
\mathcal{N}_2^4 &= (5445/16384) L''^{10} s''^4 e''^4.
\end{aligned}$$

2. Análisis cualitativo

Tras la eliminación del nodo el problema resultante es de un grado de libertad en (g, G) . Despreciando los términos \mathcal{H}_0 y \mathcal{H}_1 del Hamiltoniano (7), y haciendo un cambio de tiempo las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{aligned}
\dot{g}'' &= \frac{\partial \mathcal{H}''}{\partial G''} = \epsilon^2 \mathcal{F}_2^{\dot{g}''} + \epsilon^3 \mathcal{F}_3^{\dot{g}''} + \epsilon^4 \mathcal{F}_4^{\dot{g}''}, \\
\dot{G}'' &= -\frac{\partial \mathcal{H}''}{\partial g''} = (\epsilon^2 \mathcal{F}_2^{\dot{G}''} + \epsilon^3 \mathcal{F}_3^{\dot{G}''} + \epsilon^4 \mathcal{F}_4^{\dot{G}''}) (G^2 - H^2)L^2(G^2 - L^2) \sin 2g,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^{\dot{g}''} &= -\frac{3}{8} \frac{L^2}{G^3} (G^4 - 5H^2L^2 - 5(G^4 - H^2L^2) \cos 2g), \\
\mathcal{F}_3^{\dot{g}''} &= \frac{27}{64} \frac{HL^4}{G^3} (11G^4 + 5H^2L^2 + 5(G^4 - H^2L^2) \cos 2g), \\
\mathcal{F}_4^{\dot{g}''} &= \frac{3}{4096} \frac{L^6}{G^5} (3981G^8 + 15375H^2G^6 + 7395L^2G^6 + 4001H^2L^4G^2 + 16005H^4L^2G^2 \\
&\quad - 5445H^4L^4 + 4(1079G^8 + (3008H^2 + 7L^2)G^6 - (4455L^2H^4 + 1454L^4H^2)G^2 \\
&\quad + 1815H^4L^4) \cos 2g + 1815(G^2 - H^2)(G^2 - L^2)(G^4 - H^2L^2) \cos 4g), \\
\mathcal{F}_2^{\dot{G}''} &= \frac{15}{8} \frac{1}{G^2}, \\
\mathcal{F}_3^{\dot{G}''} &= \frac{135}{64} \frac{HL^2}{G^2}, \\
\mathcal{F}_4^{\dot{G}''} &= \frac{3}{2048} \frac{1}{G^4} (1093G^2L^6 - 1815H^2L^6 + 1079G^4L^4 + 7095G^2H^2L^4 \\
&\quad + 1815L^4(G^2 - H^2)(G^2 - L^2) \cos 2g).
\end{aligned}$$

Como se presentó en [16] el estudio del espacio de las fases, en función de los parámetros dinámicos (L, H) , presenta dos regiones, que contienen dos y cuatro puntos de equilibrio,

separadas por las líneas de bifurcación de las órbitas circulares. Las expresiones de las líneas de bifurcación de las aproximaciones de segundo, tercer y cuarto orden tomando $\epsilon = 1$ son

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &\equiv 5H^2L^4 - 3L^6 = 0, \\ \Gamma_3 &\equiv 27HL^8 + (45H^3 - 24)L^6 + 40H^2L^4 = 0, \\ \Gamma_4 &\equiv 879L^{14} + 1645H^2L^{12} + H(2640H^3 + 432)L^{10} \\ &\quad + (720H^3 - 384)L^8 + 640H^2L^6 = 0,\end{aligned}$$

Como se puede observar la expresión Γ_2 , obtenida a partir de la normalización de segundo orden, presenta una simetría central (el momento H aparece en potencias pares) que se rompe al alcanzar el tercer orden en la normalización. Sin embargo, aunque la aproximación al problema original mejora en el caso de satélites bajos, empeora en función de L . Efecto producido al introducir el cambio de variable en el Hamiltoniano (1) que desplaza a primer orden el efecto de la fuerza de Coriolis, de tal manera que un orden n en la transformación \mathcal{T}_1 no equivale a un orden n en \mathcal{T}_2 , ya que el término de \mathcal{H}'_0 es constante. En nuestro caso, el problema se resuelve con la normalización de cuarto orden como puede verse en la Figura 4.

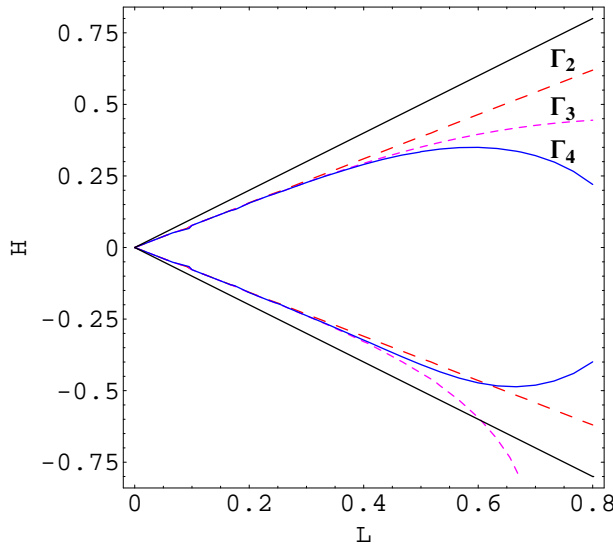


Figura 4: Líneas de bifurcación de las órbitas circulares: Γ_i aproximación de orden i con $i = 2, 3, 4$.

Conclusiones y trabajos futuros

La comprensión del modelo de Hill, sin considerar ningún otro efecto, sigue siendo un tema de interés, ya que cuando se estudia la dinámica en torno a satélites planetarios el

efecto del tercer cuerpo crece en función de la distancia. De tal manera, que si se está interesado en la dinámica kepleriana en el interior del radio de Hill, considerando el sistema rotante, es necesario, para una descripción cualitativa precisa, considerar normalizaciones de orden alto.

Queda pendiente, para un futuro trabajo, comparar la precisión de las líneas de bifurcación Γ_4 , obtenida a partir de la normalización de cuarto orden, frente a los resultados obtenidos, por métodos numéricos, del problema original.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (proyectos BFM2003-02137, ESP2004-04376 y ESP2005-07107).

Referencias

- [1] Ahmed, M.K.M., “On the Normalization of Perturbed keplerian Systems,” *The Astronomical Journal*, Vol. 107, No. 5, 1994, pp. 1900–1903.
- [2] A. Deprit, “Canonical Transformations Depending on a Small Parameter,” *Celestial Mechanics*, Vol. 1, 1969 pp. 12–30.
- [3] Deprit, A., “Delaunay Normalizations,” *Celestial Mechanics*, Vol. 26, 1982, pp. 9–21.
- [4] Hill, G.W., “Researches in the Lunar Theory,” *American Journal of Mathematics*, Vol. I, 1878, pp. 129–147.
- [5] Kelly, T.S., “A note on first-order normalizations of perturbed Keplerian systems,” *Celestial Mechanics*, Vol. 46, No. 1, 1989, pp. 19–25.
- [6] Kozai, Y., “Motion of a Lunar Orbiter,” *Publications of the Astronomical Society of Japan*, Vol. 15, No. 3, 1963, pp. 301–312.
- [7] Lara, M., San-Juan, J.F., and Ferrer, S., “Secular Motion around TriAxial, Synchronously Orbiting, Planetary Satellites: Application to Europa,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, Vol. 15, No. 4, 2005, pp. 1–13.
- [8] Lidov, M. L., Yarskaya, M. V., “Integrable cases in the problem of the evolution of a satellite orbit under the joint effect of an outside body and of the noncentrality of the planetary field,” *Kosmicheskie Issledovaniya*, Vol. 12, 1974, pp. 155–170.
- [9] Meyer, K. R. y Hall, G. R., *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [10] C. Osácar, “Estudio del movimiento de sistemas estelares”, Ph.D. dissertation, Universidad de Zaragoza, Spain, 1990.

- [11] J. Palacián, “An Analytical Solution for Artificial Satellites at Low Altitudes,” *proceedings of the Conference on Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*, eds. K. Kurzyńska et al., Poznań, Poland, 1993, pp. 365–370.
- [12] J. Palacián, J.F. San Juan and P. Yanguas, “Analytical theory for the Spot satellite” *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 95, 1997, pp. 375–382.
- [13] Paskowitz, M.E., and Scheeres, D.J., “Transient Behavior of Planetary Satellites Including Higher Order Gravity Fields,” paper AAS 2005-358, presented at the 2005 Astrodynamics Specialists Conference, Lake Tahoe, California, August 2005.
- [14] Serrano, S. and San Juan, J.F., “ATESAT: revisited and improvements. Analytical theory and numerical validation for a SPOT-like satellite”, *Report # DTS/MPI/MS/MN/2000-013* CNES, Toulouse (France), 2000.
- [15] San-Juan, J.F., Lara, M., y Ferrer, S. “Phase space structure around oblate planetary satellites.” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 29 (1) 2006, pp. 113-120.
- [16] San-Juan, J.F., Lara, M., y Ferrer, S. “El modelo de Lidov y Kozai revisado desde la perspectiva de las futuras misiones a los satlites galileanos.” *VII Jornadas de Mecánica Celeste*, San Fernando, 2004.
- [17] Scheeres, D.J., Guman, M.D., and Villac, B.F., “Stability Analysis of Planetary Satellite Orbiters: Application to the Europa Orbiter,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, 2001, pp. 778–787.