Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza. **26:** 69–88, (2004).

Teoría Cuántica de Yang-Mills. la Generación de la Masa

Manuel Asorey

Dpto. de Física Teórica, Universidad de Zaragoza, Zaragoza (Spain)

asorey@saturno.unizar.es

Resumen

A pesar de constituir la pieza central del paradigma de la física de interacciones fundamentales basado en teorías relativistas cuánticas de campos, las teorías gauge no abelianas presentan a los 50 años de su descubrimiento por Yang y Mills numerosos interrogantes que afectan incluso a su propia consistencia. La importancia de resolver alguno de estos problemas ha impulsado al Instituto Clay a considerarlos como unos de los retos matemáticos del nuevo milenio. En esta nota repasamos diversos aspectos de las teorías de Yang-Mills y la formulación precisa del problema seleccionado por el Instituto Clay como merecedor de su más distinguido galardón.

1 Introducción

Matemáticos de todas las generaciones han enfatizado la importancia de ciertos problemas cuya resolución les es esquiva. El reto por la resolución de problemas simultáneamente reconocidos como importantes y difíciles por matemáticos de prestigio, ha contribuido a impulsar la investigación en áreas matemáticas que se tornan prioritarias por su relevancia para resolver los desafíos planteados. Por su importancia histórica, destaca la selección hecha por Hilbert al comienzo del siglo XX. Entre los 23 problemas elegidos por Hilbert para el Congreso Internacional de Matemáticas de París de 1900 se encuentra en el número seis uno sorprendente: Tratamiento Matemático de los Axiomas de la Física (*Mathematische Behandlung der Axiome der Physik*)[1]. El sexto problema de Hilbert es demasiado vago en su formulación, aunque en su propia descripción Hilbert parece restringirlo a los ámbitos de mecánica y la teoría de la probabilidad, como para pretender encontrar una solución precisa. Un análisis del desarrollo posterior del estudio de este problema puede encontrase en el libro de Corry [2] y en el artículo reciente de Rañada [3]. El enfoque axiomático las Matemáticas propuesto por Hilbert sufrió un duro embate con los resultados de Gödel [4]. Sin embargo sus ideas influyeron en la Física de una manera asombrosa gracias al gran influjo directo e indirecto de Hilbert en el mundo académico alemán. Los fundamentos de la mecánica cuántica fueron establecidos en los años treinta a partir de unos postulados o axiomas que todavía perduran en los manuales europeos [5, 6, 7, 8]. Más tarde, en los años sesenta la incipiente teoría relativista de los campos cuánticos que constituye la síntesis de la relatividad especial de Einstein con la Mecánica Cuántica, comenzó a formularse de forma axiomática y llegó acuñarse el término: teoría axiomática de campos, para describir un campo de investigación que involucró a muy destacados físicos teóricos de todo el mundo [9, 10, 11].

Al hilo de las celebraciones del inicio del tercer milenio, el Instituto Matemático Clay de Cambridge (USA) instituyó un galardón para premiar a los matemáticos que resolviesen los siete problemas más destacados pendientes de solución [12]. Entre los siete problemas vuelven a aparecer algunos directamente vinculados a la Física. Entre ellos destaca el conocido como el problema de la masa en las teoría de Yang-Mills. De los siete problemas del Milenio seleccionados por el Instituto Clay es el más directamente vinculado a la Física contemporánea y el más desconocido para la comunidad matemática. Es sin duda el problema más difícil de formular de los seleccionados porque involucra conceptos de frontera de la física y matemáticas cuya simple formulación requiere varios manuales. En efecto el planteamiento del problema requiere elementos de las teorías físicas de la relatividad especial y la mecánica cuántica al mismo tiempo que campos de la matemática como la teoría de probabilidades, geometría diferencial y análisis funcional. A lo largo de esta reseña pretendemos dar una posible formulación lo más simplificada posible de este problema.

Sin entrar en los detalles técnicos del problema, que veremos más adelante hay una manera sencilla e intuitiva de comprender el problema en términos puramente físicos. Desde finales de los años sesenta existe una teoría fundamental que explica a la perfección la teoría de la interacciones fuertes responsables de la estabilidad del núcleo atómico. Esta teoría recibe la denominación de Cromodinámica Cuántica y su elemento esencial consiste en la descripción de la propagación relativista de dicha interacción fuerte a través de una partícula transmisora virtual conocida como gluón. El gluón juega en el mundo nuclear un papel análogo al del fotón en el mundo de las interacciones electromagnéticas. Ambas se propagan a la velocidad de la luz, sin embargo existen dos diferencias esenciales entre las mismas. El fotón posee una realidad experimental que nuestro ojos detectan en cada instante, sin embargo del gluón sólo observamos sus efectos secundarios. La otra gran diferencia estriba en que el fotón es una partícula sin masa lo que permite que se propague más lejos lo que da un alcance infinito a la interacción electromagnética y un gran tamaño, en términos de distancias fundamentales, al átomo y las moléculas. La interacción fuerte generada por los gluones sin embargo es de corto alcance y no va más allá del núcleo atómico. Esto sugiere que el gluón o sus partículas derivadas responsables de la interacción fuerte poseen en realidad una masa no nula. El explicar este fenómeno en términos de la cromodinámca cuántica, es decir a partir de primeros principios es el objeto del problema Clay. Desde el punto de vista puramente físico esto explicaría porqué los protones y neutrones del núcleo atómico que son tan pesados (m(protón)= 938 MeV, m(neutrón)=940 MeV) [1] mientras que sus constituyentes materiales más fundamentales, tres quarks, son muy ligeros (menos de 20 Mev en total). El resto de la masa debe provenir de la energía de interacción generada por los gluones que pasa de esta forma a constituir el elemento fundamental de las partículas nucleares. La explicación del fenómeno aunque no incumbe al Instituto Clay es de gran interés en la física fundamental de altas energías.

2 Teoría de Yang-Mills

El nacimiento de las teorías de Yang-Mills, una de las grandes invenciones teóricas de la ciencia contemporánea, surge como fruto de una idea abstracta teórica generada a lo largo de medio siglo de estudios sobre la estructura profunda del electromagnetismo y la gravitación.

Inmediatamente después de que Einstein formulase la teoría relativista de la gravitación en la que la interacción gravitatoria pasa de ser una mera acción a distancia en el universo Newtoniano a ser una interacción transmitida por ondas, similares a las electromagnéticas, que viajan también a la velocidad de la luz, comenzaron a vislumbrarse más características comunes entre ambas interacciones. La más destacada es que ambas son de largo alcance. La primera extiende sus dominios hasta los confines del átomo para las partículas elementales y la segunda hasta los confines del Universo. Esta naturaleza de ambas interacciones radica en que las dos partículas responsables del transporte de la interacción: el fotón y el gravitón no poseen masa. Desde un punto de vista aparentemente más formal ambas comparten una nuevo tipo simetría: la invariancia gauge. La primera observación de esta fenómeno parte de Weyl que en su intento de unificar ambas interacciones en una sola, utiliza como elemento guía la existencia de esta simetría gauge. ¿En qué consiste este nuevo principio?.

En el electromagnetismo la simetría gauge tiene como consecuencia física la conservación de la carga eléctrica. En el caso gravitatorio el resultado análogo implica la conservación del momento y la energía. En el formalismo covariante relativista (c=1) el campo electromagnético es descrito por un campo vectorial tetra-dimensional A_μ cuya primera componente $A_0 = -\phi$ corresponde al potencial escalar del campo eléctrico $E = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$

[1] MeV=Mega electrón voltio=1,8 . 10^{-27} gramos

y cuyas tres últimas al potencial vector $\vec{A}$ que genera el campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Si la fuente del campo electromagnético A_μ es un campo complejo Ψ la teoría posee una invariancia bajo la siguiente transformación conjunta

$$\Psi \to \xi\Psi; \quad A_\mu \to A_\mu - i\xi^*\partial_\mu\xi \tag{1}$$

donde ξ es una función compleja unimodular

$$\xi(x) \in U(1), \quad |\xi(x)| = 1$$

si la carga eléctrica se conserva y viceversa.

En ausencia de materia dicha simetría es evidente. En efecto, la dinámica de las ondas electromagnéticas viene gobernada por la acción

$$S = \frac{1}{4e^2}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{3}$$

es el tensor electromagnético formado por los campos eléctrico $E_i = F_{0i}$ y magnético $B_i = F_{jk}$ (con i,j,k diferentes y ordenados de forma acorde con las permutaciones cíclicas de la terna $1,2,3$) que quedan invariantes bajo la transformación (1). Aunque puede parecer una simetría ficticia debido al empeño en expresar la dinámica en función del potencial electromagnético, esto no es así. Los potenciales son necesarios para la cuantización de las partículas materiales y la propia cuantización de la interacción electromagnética.

En el análisis desarrollado por Weyl [13] la simetría gauge proviene del hecho de que la carga eléctrica es una noción local, definida en cada punto del espacio-tiempo y que su definición en términos de los campos fundamentales de la materia debe permanecer invariante bajo el cambio de sistema de referencia que se adopte en cada punto del espacio-tiempo para medir estos campos. En este sentido multiplicar por la fase [2] $\xi(x)$ los campos materiales puede considerarse como realizar un giro bidimensional asociado en cada punto del espacio-tiempo x a un cambio de sistema de referencia realizado en ese mismo punto de las coordenadas eléctricas internas (complejas) de la materia descrita por la función de estado Ψ. Este nuevo tipo de simetría se conoce con nombre de simetría gauge (anglicismo[3] derivado del original alemán eich, jauge en francés). El campo electromagnético representa un elemento necesario para comparar esos sistemas de referencia en dos puntos alejados.

[2] En un principio Weyl consideró esta transformación gauge como una dilatación del campo, pero enseguida resultó evidente que dicha interpretación no era correcta

[3] Algunos autores, fundamentalmente americanos, utilizan las palabras castellanas calibre o aforo para referirse a esta nueva simetría

El campo electromagnético proporciona el elemento de orientación base para determinar como el sistema de referencia elegido en uno de los puntos x se traslada al punto x' cuando se sigue un camino determinado para viajar de x a x'. La noción de transporte paralelo es la idea necesaria compatible con los principios de la relatividad y el positivismo implícito que subyace en su formulación para describir cualquier tipo de interacción.

La manera en la que realiza esa comparación es fijando cual es el transporte paralelo del valor campo Ψ en el punto x al punto x'. Esto queda determinado por la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\gamma^{\mu}}\partial_{\mu}\Psi = i\dot{\gamma^{\mu}}A_{\mu}\Psi$$

a lo largo de la curva γ que une x a x'.

De forma análoga el campo gravitatorio proporciona el elemento necesario para para comparar sistema de referencia espacio-temporales de un punto a otro. ¿Cómo pueden comparar sus resultados dos observadores que estén en dos puntos diferentes del espacio-tiempo?. En ausencia de gravitación la relatividad especial nos dice que mediante una transformación de Poincaré, sin embargo en presencia de gravitación la comparación debe realizarse de acuerdo con un camino γ elegido para viajar de x a x'. La teoría del transporte paralelo de los sistemas de referencia espacio-temporales fue desarrollada por el matemático Levi-Civita [14] e intensamente utilizada por Weyl, Einstein, Cartan y otros en la búsqueda de una teoría relativista unificada del electromagnetismo y la gravitación.

En el año 1954 Yang y Mills publicaron un trabajo [15] en el que introducían una nueva teoría como propuesta para el fundamento de la teoría de las interacciones fuertes del núcleo atómico. Es bien conocido que los elementos básicos del núcleo lo constituyen protones y neutrones. También se conocía que ambas partículas se comportaban de forma similar bajo las interacciones fuertes nucleares. La simple idea de Yang y Mills fue postular que puesto que estas interacciones debían respectar la simetría de intercambiar un protón por un neutrón en realidad deberían ser invariantes por cualquier rotación intermedia en el plano formado por los campo cuánticos asociados al protón y al neutrón (simetría de isospín). Como estos campos son complejos (esencia básica de la física cuántica) dicha rotación debe ser compleja y el grupo de estas rotaciones es el de matrices unitarias unimodulares $SU(2)$

$$\begin{gathered} \Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \xi \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ \xi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2), \quad \det \xi = ad - cb = 1 \end{gathered} \tag{4}$$

La parte genial de su razonamiento fue hacer que esta simetría fuese no sólo global sino también local (simetría local de isospín),es decir, demandar que la teoría fuese no sólo invariante bajo un cambio global rígido del concepto de protón o neutrón sino incluso bajo un cambio local del mismo en el que la rotación varía de punto a punto. Como hemos visto en el caso electromagnético esta nueva simetría gauge requiere la introducción de una interacción por un campo gauge que mantenga esta simetría y sirva como referencia para comparar los conceptos de protón y neutrón en puntos puntos separados. Es decir, postularon que la nueva teoría debería ser invariante bajo la transformación conjunta

$$\begin{gathered}\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \to \xi(x) \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ A_\mu \to A_\mu - i\xi^\dagger(x)\partial_\mu \xi(x)\end{gathered} \tag{5}$$

donde ahora la transformación ξ puede variar de punto a punto.

La dinámica de la interacción puede obtenerse de forma análoga al caso electromagnético a partir de una acción similar

$$\begin{gathered}S = \frac{1}{2g^2}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad A_\mu \in \operatorname{Lie} SU(N) \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]\end{gathered} \tag{6}$$

La misma idea habia sido explorada previamente por Klein y Pauli quienes habían descartado la idea puesto que requería que la interacción fuerte fuese de largo alcance al estar basada en la transmisión por una partícula similar al fotón y descrita por el campo gauge A_μ y los hechos experimentales muestran lo contrario: dicha interacción no sale del núcleo atómico. Yang y Mills conscientes de este problema lo mencionan al final de su artículo pero lanzan su teoría pensando que alguna solución implícita contendría del mismo.

Aunque la teoría de Yang y Mills fracasó en su intento de describir la interacciones fuertes en su formulación original, la idea germinó una década más tarde en la teoría de las interacciones nucleares débiles formulada por Glashow, Salam y Weinberg. En ellas el carácter de corto alcance se logra por un mecanismo basado en un campo auxiliar que genera una masa para el campo gauge A_μ. A finales de los sesenta volvió a retomarse la teoría original de Yang-Mills para describir la interacción fuerte, pero ahora en vez de la simetría de sabor del protón y neutrón se consideró una simetría nueva de color descubierta por Gell-Mann que se basa en rotaciones del espacio de los quarks (constituyentes elementales de los nucleones) y que como son tres pasa a ser de tipo $SU(3)$ en vez de $SU(2)$ original de Yang-Mills. Dicha teoría tuvo un éxito inmediato a partir de nuevos datos experimentales en la física de interacciones fuertes a muy altas energías que indican que los quarks en el interior de los nucleones se mueven casi libremente. La teoría constituye lo que se conoce con el nombre de Cromodinámica y se considera la teoría básica de la interacción fuerte. Sin embargo ésta presenta dos problemas inexplicados: ¿cómo se genera la masa de la partícula gauge puesto que la interacción es de corto alcance? y ¿por qué los quarks no pueden observarse libremente fuera de los nucleones que componen los núcleos atómicos?. Los dos problemas están íntimamente relacionados y podría decirse que son dos caras de la misma moneda: un fenómeno escondido en la dinámica cuántica no lineal de la ingenua y simple teoría formulada en 1954 por Yang y Mills. La solución del primero de esos problemas será galardonado por el Instituto Clay, el segundo es de vital importancia para la física teórica fundamental.

3 El problema de la masa

Una manera sencilla de ver que la interacción descrita por teorías de campos gauge es de largo alcance es que su acción (6) es invariante bajo cambios de escala en las medidas de longitudes y tiempos. En otras palabras la constante que mide la fortaleza del acoplo g que aparece como un prefactor no posee dimensiones desde el punto de vista espacio-temporal, y por tanto permanece constante bajo dilataciones del espacio-tiempo, lo que explica porque esta teoría puede describir al menos de forma clásica una interacción que posea una escala que da cuenta del alcance espacialmente acotado de la interacción. Éste es en esencia el problema que la teoría cuántica debe resolver y que resultará premiado por el Instituto Clay.

Por otra parte esta invariancia conforme de la teoría clásica ha hecho que el estudio de las soluciones clásicas de la teoría proporcione información muy valiosa acerca de la topología y estructura diferenciable del espacio-tiempo. Ésta es la vía que condujo a Donaldson a probar un famoso teorema acerca de la existencia de diferentes estructuras diferenciables en el espacio-tiempo de Minkowski [16] que el valió la consecución de la prestigiosa medalla Field.

Ahora bien es sabido que al cuantizar un sistema clásico algunas de las simetrías pueden quebrarse y desaparecer en el correspondiente sistema cuántico. Si la simetría clásica de dilataciones de la teoría de Yang-Mills desapareciese en el mundo cuántico no habría ningún problema para que la teoría generase una masa no nula que fuese no sólo responsable de su corto alcance sino también del confinamiento de los quarks.

Sin embargo la cuantización de la teorías gauge no es sencilla. La rutina de cuantización seguida con gran éxito en los sistemas atómicos se enfrentó a un gran problema cuando trató de cuantizar el campo electromagnético. La teoría comenzó a plagarse de predicciones divergentes lo que llevó a uno de sus fundadores Dirac a sombríos pensamientos pesimistas acerca de toda la teoría [4]. Sin embargo dichas dificultades fueron resueltas mediante un proceso que se conoce con el nombre de renormalización cuyo fundamento

[4] "Parece ser que hemos seguido hasta donde es posible el desarrollo lógico de las ideas de la mecánica cuántica tal y como se conocen hoy en día. Teniendo en cuenta que las dificultades son de carácter muy profundo, únicamente pueden ser superadas por un cambio drástico de los fundamentos de la teoría, probablemente tan drástico de como el paso dado de la teoría de las órbitas de Bohr a la mecánica cuántica actual"[17].

estriba en que los parámetros que medimos de los sistemas cuánticos no se corresponden con los parámetros que aparecen en la teoría clásica. Así la carga eléctrica elemental observada no coincide con el parámetro desnudo e que aparece en el Lagrangiano (2). Una vez aceptado este principio no hay ninguna razón para que la carga eléctrica presente en la acción (2) no tenga una dependencia (*renormalización*) en el parámetro auxiliar de control de las divergencias (*regularización*) de forma que el resultado final sea finito. El único requisito es que la predicción surgida de la teoría cuántica sea finita y no dependa de la forma en que este parámetro regulador es introducido. Ahora bien como contrapartida esta solución al problema lleva implícitamente acompañada una dependencia de la carga observada con la escala de energías. En el caso de la electrodinámica esta dependencia viene dada a orden dominante por el flujo del grupo de renormalización

$$E\,\partial_{_E} e^2 = \frac{e^4}{6\pi^2}\log E \tag{7}$$

lo que implica que dicha carga crece con la energía, o lo que es lo mismo al acercarse a la carga. La constante de integración que aparece en la resolución de la ecuación diferencial ordinaria (7) introduce una escala fundamental E_0 en la teoría que rompe la invariancia de escala de la teoría clásica.

La solución en el caso de Yang-Mills no fue tan sencilla. Hasta que Faddeev y Popov [18] no encontraron la necesidad de apoyarse en campos fantasma (sin realidad física) para resolver las dificultades técnicas del método tradicional de cuantización no pudo comenzarse el camino seguido con éxito en caso del electrodinámica clásica. En este esquema pudo comprobarse de forma perturbativa que el mecanismo de renormalización funciona de forma similar al caso electromagnético, aunque sin la necesidad de otros campos materiales dado que el propio campo gauge autointeracciona consigo mismo. La variación de la contante de acoplo con la energía [19, 20]

$$E\,\partial_{_E} g^2 = -\frac{11g^4}{12\pi^2}\log E \tag{8}$$

es en este caso inversa a la de la electodinámica. La carga g disminuye con la energía de forma que a cortas distancias explica el comportamiento casi libre de los quarks en el interior de un nucleón. Esta propiedad puesta de manifiesto por Gross, Politzer y Wilczek en 1973 y mereció la concesión del premio Nobel de Física este mismo año 2004. Sin embargo, aunque la constante de integración que surge de la ecuación (8) rompe con la invariancia de escala, los cálculos perturbativos de altas energías no proporcionan ninguna información sobre el mecanismo de generación de masa y confinamiento que domina el comportamiento de la teoría a bajas energías.

La escala de energía E_0 que surge de la resolución de (8) no sólo rompe la simetría conforme clásica sino también separa dos regímenes de comportamiento de la teoría. Para energías superiores $E > E_0$ donde asintóticamente existe libertad de movimiento de los quarks, son válidas las predicciones obtenidas por los métodos perturbativos que son genéricos para todas las teorías de campos. Para energías inferiores $E < E_0$ la interacción se vuelve tan fuerte que es capaz de impedir que los quarks abandonar los nucleones y los métodos perturbativos se vuelven ineficaces para analizar el comportamiento de la teoría. En la jerga técnica los especialistas distinguen a los dos regímenes con nombres más sugerentes como libertad ultravioleta y esclavitud infrarroja, respectivamente.

El problema de la masa por lo tanto requiere el desarrollo de nuevos métodos matemáticos que den cuenta de los efectos no perturbativos y que serán especiales para cada teoría, en este caso para la teoría de Yang-Mills no abeliana.

4 Regularización de la Teoría de Yang-Mills

Cualquier intento de construcción rigurosa de la teoría cuántica debe resolver en primer lugar el problema de las divergencias ultravioletas. Para ello debe partirse de una formulación ligeramente modificada de la teoría que produzca sólo resultados finitos y que en un cierto límite renormalizado conduzca a una teoría finita con todas las propiedades exigibles a una teoría relativista de campos cuánticos.

En definitiva el problema se diseccionado en dos partes. La primera consiste en encontrar una teoría regularizada sin divergencias, mientras que la segunda, que es la realmente difícil de analizar, trata de encontrar un procedimiento de tomar el límite ultravioleta de forma que se recupere la teoría cuántica sin divergencias.

Desde un punto de vista muy simplificado el problema que se plantea es como tratar de definir el área de una superficie curva. En primer lugar hay que encontrar una aproximación a la superficie por un mosaico formado pequeñas teselas planas y calcular una aproximación al área. A continuación el área se obtendrá como límite al hacer tender el tamaño de las facetas a cero. Este método consiste en la generalización del método de Riemann para definir la integral de una superficie. Este sencillo problema tiene dos dificultades. En primer lugar, la elección de la forma de las teselas es fundamental. Una elección inadecuada puede producir una definición de área con propiedades indeseadas. En este sentido, la elección de la forma triangular para las teselas es la óptima. En segundo lugar si la superficie es complicada el cálculo del límite puede ser muy costoso y desde luego no estar al alcance de métodos analíticos.

En el caso de Yang-Mills la dificultad es infinitamente superior. El calificativo no es exagerado. En efecto, a esos dos problemas se une que la dimensión de la superficie es infinita, lo que requiere una renormalización en el proceso de tomar el límite.

Aunque la mecánica cuántica fue formulada por Heisenberg en el formalismo Hamiltoniano, Feynman, inspirado por Dirac, encontró una formulación en el formalismo Lagrangiano que ha resultado ser más eficaz para cuantizar las teorías de campos. El método de Feynman se basa en que todos los efectos observables de la teoría cuántica pueden obtenerse a partir de funciones de correlación de una integral funcional extendida al dominio de los campos clásicos de la exponencial de la acción clásica de la teoría, i.e.

$$\int \delta A \; \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} S(A)} \tag{9}$$

Obviamente, la notación de la expresión (9) es una puramente formal porque δA no puede designar una generalización inexistente de la integración de Lebesgue ordinaria en dimensión finita.

Aparte, de las divergencias ultravioletas previstas en el proceso de construcción de la integral funcional (9) un nuevo tipo de divergencias aparecen debido a la gran invariancia gauge de la acción (5). En efecto, existe un conjunto de dimensión infinita de campos gauge que dan el mismo valor a la acción $S(A)$. Este problema puede resolverse proyectando la integral (9) a una integral definida exclusivamente en el espacio $\mathcal{M}$ de las clases de campos equivalentes bajo transformaciones gauge. Este espacio $\mathcal{M}$ que se conoce como *espacio de órbitas gauge* es una variedad de dimensión infinita con una geometría y topología altamente no triviales responsables de fenómenos físicos exclusivos de las teorías gauge, como son la existencia de anomalías cuánticas [21, 22] y una familia uniparamétrica de teorías cuánticas de Yang-Mills inequivalentes conocidas como teorías de vacío θ [23, 24].

Una vez más se muestra acertada la analogía con el cálculo del área de una superficie mencionada al comienzo de la sección.

El problema de la regularización de la teoría de Yang-Mills fue durante años un quebradero de cabeza, pero afortunadamente en la actualidad está resuelto satisfactoriamente. La relevancia de la simetría gauge para la consistencia física de la teoría y de la integral (9) hace que cualquier modificación de la misma tendente a eliminar las divergencias debe ser muy cuidadosa con la conservación de esta simetría. Este requerimiento unido a la no linealidad de la simetría gauge hizo que desde el primer momento la regularización de la teoría de Yang-Mills fuese un problema a añadir a los usuales en teorías cuánticas de campos. Desde un punto de vista perturbativo el problema se resolvió satisfactoriamente con el descubrimiento de la regularización dimensional [25, 26]. Sin embargo desde un punto de vista no perturbativo el problema continuó durante varios años más. La solución surgió de dos vías distintas. Por un lado se encontraron regularizaciones que mantienen la continuidad del espacio-tiempo como se había hecho con las teorías de campos más tradicionales ya sea desde el punto de vista de Feynman[27, 28] o desde el punto de vista de Schwinger [29]. Por otro, si se introduce la discretización del espacio-tiempo es posible regularizar la teoría de una forma reticular más radical [30]. Ventajas del primer tipo de regularización incluyen la conservación explícita de las simetrías relativistas inherentes al espacio-tiempo continuo, mientras que las regularizaciones de tipo reticular aunque las violan, permiten una aproximación numérica más eficiente a la teoría.

En ambos casos se torna necesario realizar un giro en el planteamiento del problema. Además de los expuestos la integral (9) presenta un problema adicional. El integrando es una fase pura lo que no parece facilitar la convergencia de la misma. La solución a este problema genérico del enfoque de Feynman de la cuantización de sistemas clásicos se consigue considerando la extensión analítica a tiempos imaginarios de la acción y todos los observables físicos. Esta propuesta fue seriamente introducida por Symanzik [31] quien mostró como recuperar todos los elementos de la teoría cuántica a partir de su formulación Euclídea. Dicha formulación fue intensivamente utilizada por Wilson [32] para establecer una conexión entre la Teoría de Campos Cuánticos y la Mecánica Estadística permitiendo a ambas aprovechar métodos y técnicas previamente desarrolladas en la otra. Con este enfoque la integral funcional (9) se convierte en

$$\int \delta A \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar} S_\epsilon(A)} \tag{10}$$

donde $S_e(A)$ denota la extensión de la acción (6) para tiempos imaginarios. Como el exponente del integrando es una magnitud negativa hay más posibilidades de conseguir la convergencia de la integral. Efectivamente, esto es así en los dos esquemas de regularización mencionados. Por simplicidad nos limitaremos a describir el correspondiente a la regularización reticular.

Si introducimos una discretización del espacio-tiempo Euclídeo este se convierte en un retículo de puntos situados en los vértices de una familia infinita de hipercubos tetradimensionales que llenan todo el espacio-tiempo (Figura 1). Si tomamos las aristas de todos los cubos con igual longitud a el retículo será muy regular. La invariancia relativista en el espacio-tiempo Euclídeo se reduce a invariancia bajo translaciones y rotaciones en cuatro dimensiones. Obviamente, el reticulado rompe esta simetría pero la esperanza es recuperarla en el límite en que la longitud de las aristas de los cubos básicos tienda a ceros, $a \to 0$.

En campos materiales la regularización de la teoría en el retículo Euclídeo [32] se consigue simplemente restringiendo los campos a sus valores en los vértices del retículo, sustituyendo las derivadas por diferencias entre esos valores en vértices contiguos y las integrales ordinarias en el espacio-tiempo por sumas a todos los vértices. La integral funcional se convierte simplemente en el producto de las integrales a todos los valores de los campos en cada punto del retículo.

En el caso de Yang-Mills como siempre hay una gran diferencia. El hecho de que

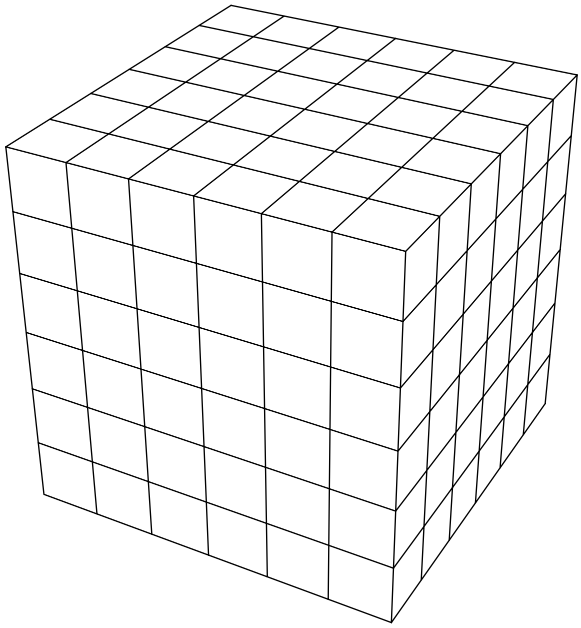

Figura 1.— Retículo espacio-temporal regulador del comportamiento de la teoría de Yang-Mills a cortas distancias

el campo de Yang-Mills esté asociado a un campo gauge, que es objeto geométrico que establece una conexión de referencia entre puntos conectados por un camino que los une mediante el transporte paralelo, obliga que la correspondiente descripción en el retículo no sea la ordinaria de los campos de materia. La descripción más adecuada consiste en asociar un operador unitario a cada arista básica de los hipercubos del reticulado espacio-temporal. El transporte paralelo a lo largo de un camino formado por la unión de aristas contiguas se obtiene por el producto ordenado de los operadores correspondientes a las aristas elementales que lo componen.

La regularización reticular de los campos de Yang-Mills se formula de forma explícita asignando a cada vértice del retículo una coordenada x y a cada arista elemental que parte de ese punto en la dirección positiva de los ejes de coordenadas un índice $\mu = 1, 2, 3, 4$ que indica de que eje se trata, a cada plano elemental que arranca de x dos índices μ, ν con $\mu < \nu$ que indican de que plano se trata. Finalmente cada cara de los hipercubos elementales queda únicamente determinada por la especificación de su origen x y tres índices μ, ν, σ con $\mu < \nu < \sigma$ y el hipercubo correspondiente por su vértice básico x. El campo gauge viene descrito por la familia de elementos $U_\mu(x)$ del grupo $SU(2)$ asociados a cada arista (x, μ) . La acción regularizada viene dada por la suma a todos las planos elementales $P_{\mu,\nu}(x)$ de los hipercubos elementales de la traza de los productos ordenados de los valores del campo gauge en las cuatro aristas que la bordean (Figura 2), i.e.

$$S_\epsilon = \frac{1}{4g^2} \sum_x \sum_{\mu<\nu} \left[2 - \Re\, \mathrm{Tr}\, U_\mu(x)\, U_\nu(x+\mu)\, U_\mu^\dagger(x+\mu+\nu)\, U_\nu^\dagger(x)\right] \tag{11}$$

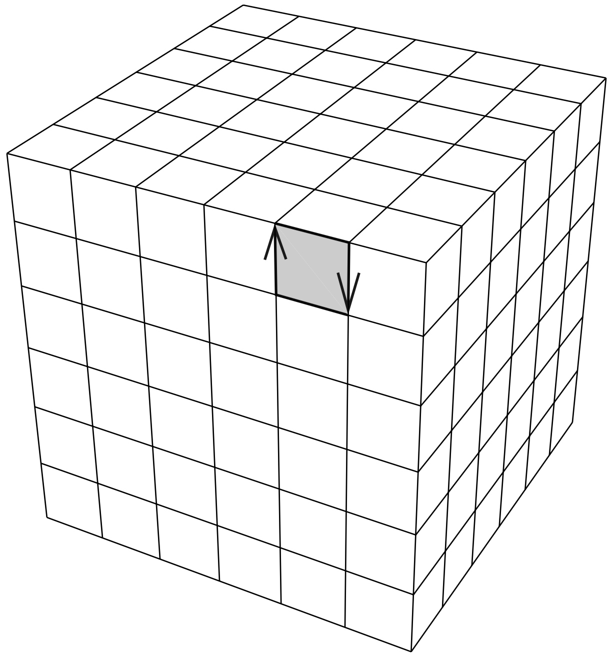

Figura 2.— La acción de Wilson se define a partir de las contribuciones de las cara fundamentales de los hipercubos del retículo

donde $x + \mu$ denota el vértice contiguo a x en la dirección μ y $\Re$ la parte real del número complejo que le sigue.

La integral funcional se completa con la definición de la medida de integración sobre los elementos del grupo en cada arista elemental. Si parametrizamos las matrices de cada arista

$$U = \begin{pmatrix} u_0 + iu_3 & u_1 + iu_2 \\ u_1 - iu_2 & u_0 - iu_3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

por cuatro parámetros reales u_0, u_1, u_2, u_3 con $u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 1$, la medida de integración de de Haar viene explícitamente dada por

$$dU = du_0\, du_1\, du_2\, du_3\ \delta(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1) \tag{13}$$

En definitiva la integración funcional (9) viene expresada en la regularización reticular como ($\hbar = 1$)

$$\mathcal{Z} = \prod_{x,\mu} \int dU_\mu(x)\, \mathrm{e}^{-S_\epsilon(U)} \tag{14}$$

Si el volumen espacio temporal es finito la integral es de dimensión finita y convergente. El problema estriba en como conseguir que los promedios de los observables físicos permanezcan finitos cuando la dimensión del retículo se hace infinita (límite termodinámico) y sobre todo cuando la longitud de las aristas básicas del mismo tiende a cero $a \to 0$ (límite continuo).

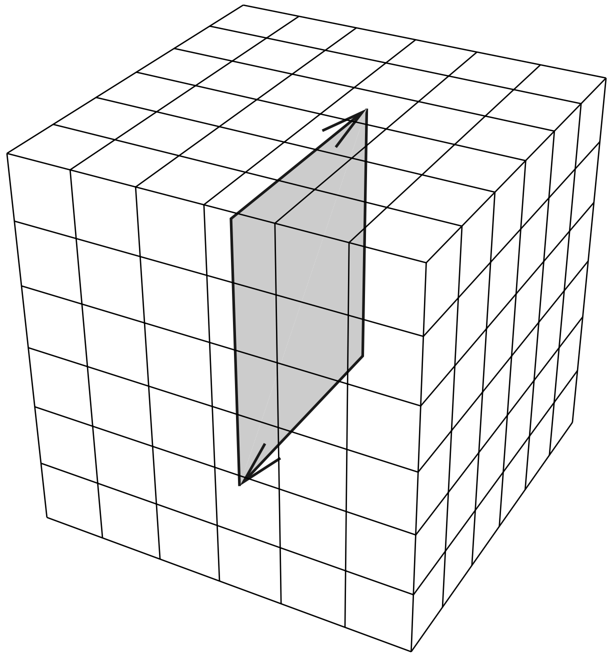

Figura 3.— Bucle de Wilson cuya tensión determina el carácter confinante de la teoría

A partir de dichos promedios deberían poder obtenerse un par de parámetros básicos que corresponden a dos observables físicos la tensión de confinamiento σ y el salto de masa m. Por diversos razonamientos se puede ver que ambos están relacionados con el comportamiento asintótico de dos promedios. La tensión de confinamiento σ viene dada por el comportamiento asintótico del valor esperado del bucle de Wilson

$$\sigma = -\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^2}\left[\log\prod_{x,\mu}\int dU_\mu(x)\,\mathrm{e}^{-S_\epsilon(U)}\,\mathrm{Tr}\prod_{x,\mu\in C}U_\mu(x) - \log\mathcal{Z}\right]. \tag{15}$$

donde C es el contorno de un cuadrado plano formado por L^2 caras planas de hipercubos del retículo (Figura 3).

La masa m es la diferencia de energías entre los dos estados con menos energía de la teoría. En términos de la regularización en el retículo viene definida por el comportamiento asintótico de la función de correlación (Figura 4)

$$m = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\log\quad\Big[\mathcal{Z}^{-1}\textstyle\prod_{x,\mu}\int dU_\mu(x)\,\mathrm{e}^{-S_\epsilon(U)}\,\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x)\,\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x+L\sigma) \tag{16}$$

$$-\mathcal{Z}^{-2}\Big(\textstyle\prod_{x,\mu}\int dU_\mu(x)\,\mathrm{e}^{-S_\epsilon(U)}\,\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x)\Big)^2\Big]^{-1} \tag{17}$$

donde

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x) = \mathrm{Tr}\;U_\mu(x)\,U_\nu(x+\mu)\,U_\mu^\dagger(x+\mu+\nu)\,U_\nu^\dagger(x)$$

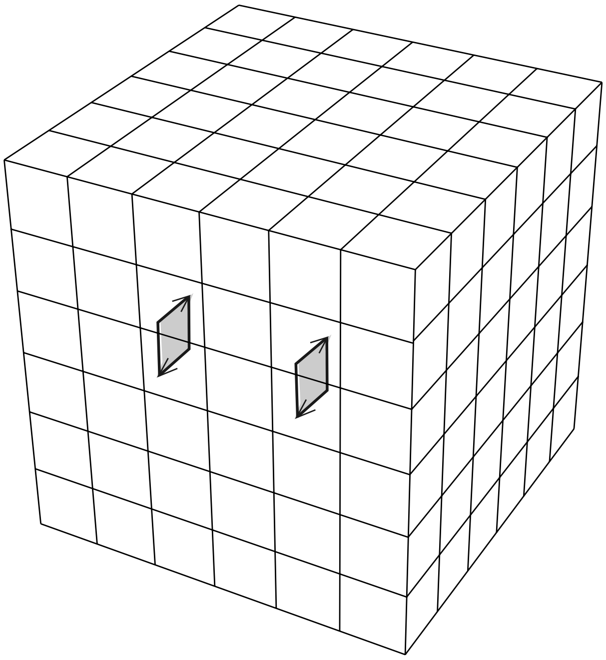

Figura 4.— Función de correlación de dos caras elementales cuyo decaimiento con la distancia determina la masa de la teoría de Yang-Mills

5 El Desafío Matemático de Yang-Mills

El problema de la masa de Yang-Mills puede reducirse a demostrar la siguiente conjetura.

Conjetura de Yang-Mills: *Los límites que definen la tensión de confinamiento σ y el salto de masa m existen y son positivos. El cociente de ambas magnitudes posee un límite finito y positivo cuando la constante de acoplamiento g de la acción (11) tiende a cero*

$$0 < \lim_{g\to\infty} \frac{m(g)}{\sqrt{\sigma(g)}} < \infty. \tag{18}$$

No cabe duda que el problema crudamente planteado en versión reticular es muy difícil de resolver. No se trata de calcular el valor de dicho límite sino solamente que existe es finito y positivo. Pero aun así sin una poderosa estrategia el análisis el problema es inabordable.

La estrategia más prometedora es la basada en el método del grupo de renormalización introducido por Wilson [32] y por el que fue galardonado con el premio Nobel. Esta estrategia consiste en promediar de forma organizada a los valores del campo gauge en solamente algunas aristas del retículo de modo que las integrales que definen las magnitudes m y σ quedan reducidas a integrales similares pero dependientes solamente en los campos de las aristas restantes que a su vez forman un retículo del mismo tipo pero con aristas dobles. Repetir el procedimiento conduce a un proceso iterativo cuyo control permite establecer cotas sobre los valores de m y σ. Lo interesante es que en cada etapa del proceso de promedios iterativos se obtiene una acción efectiva del mismo tipo que la acción original S_ϵ pero con una constante de acoplamiento mayor. Este cambio puede controlarse mediante la teoría de perturbaciones y los términos restantes de la acción efectiva también pueden acotarse mediante cotas estables bajo las recurrencias del método. En esto consiste el método del grupo de renormalización introducido por Wilson.

El éxito del mismo depende en gran medida en la elección adecuada de las aristas que se promedian y en el control analítico que pueda obtenerse sobre los términos adicionales que aparecen en la acción efectiva.

El método del grupo de renormalización ha conseguido implementarse en otras teorías similares en espacio-tiempos de más baja dimensión [33] y también de forma parcialmente satisfactoria [34] en la propia teoría de Yang-Mills en tres dimensiones (dos dimensiones espaciales y una temporal)[5].

Sin embargo en tres dimensiones espaciales el método presenta innumerables dificultades que no han permitido alcanzar ni siquiera mínimos resultados esperanzadores [35]. Ahora bien la formulación del problema de Yang-Mills en un retículo abre también la posibilidad de utilizar métodos numéricos que no sólo permiten iluminar posibles vías de solución analítica sino que proporcionan resultados de interés para confirmar la validez de la teoría en el mundo de las interacciones fuertes en los regímenes de bajas energías [36]. De acuerdo con los resultados numéricos el valor límite de la masa es [37]

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = 3.844 \pm 0.061,$$

lo que está de acuerdo con la conjetura y anima a seguir intentado encontrar una demostración analítica. De hecho los resultados numéricos muestran que la teoría posee un rico espectro de masas (Figura 5).

Desde un punto de vista más exigente la demostración de la existencia de una masa finita no nula en el límite ultravioleta (18) no basta para demostrar la consistencia de la teoría de Yang-Mills como teoría cuántica de campos. Haría falta demostrar la recuperación de la invariancia relativista en límite continuo. En la formulación euclídea esta se reduce a la simetría rotacional. También haría falta probar que las funciones de correlación que intervienen en la definición de la masa (17) satisfacen una desigualdad importante conocida como condición de postividad de Osterwalder-Schrader [38]. Dicha desigualdad refleja en el formalismo Euclídeo el carácter unitario de la evolución temporal de la teoría cuántica. Desde un punto de vista físico habría que demostrar también que la interacción gauge de Yang-Mills con SU(3) confina los quarks de la cromodinámica cuántica y que estos también adquieren masa no nula posiblemente por el mecanismo de rotura de simetría.

[5] En una dimensión espacial la teoría de Yang-Mills es exactamente soluble pero trivial.

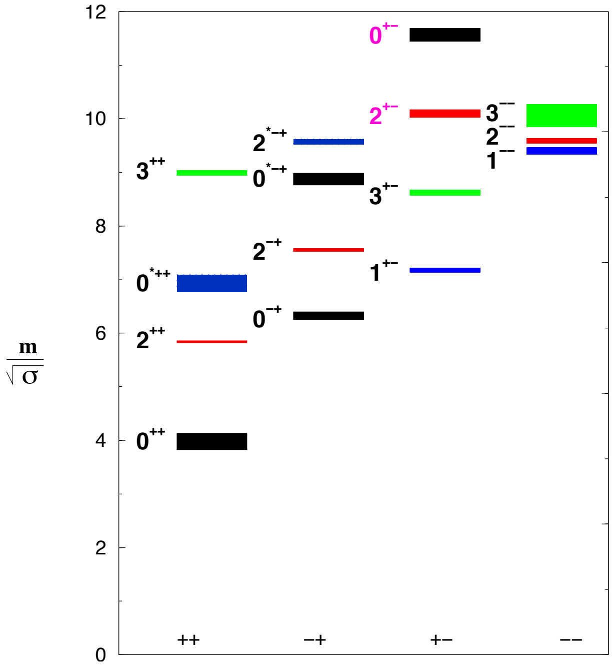

Figura 5.— Valores de los cocientes $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$ para las masas m de los distintos compuestos de gluones de la teoría de Yang-Mills

No obstante muchos de nosotros, entre los que incluyo los miembros del Instituto Clay, aceptaríamos con gran admiración y respeto, como un gran hito teórico, la verificación de la simple conjetura de Yang-Mills (18) en términos puramente analíticos.

Como todo problema matemático de primera linea no puede alcanzar su popularidad hasta que no haya habido varias falsas reclamaciones de resolución, el caso de Yang-Mills posee ya cierta notoriedad también desde este punto de vista. Existen varios intentos de resolución claramente fallidos [39, 40].

El problema de la masa de Yang-Mills constituyó durante más de una década mi el objetivo fundamental de mis pesquisas. Cuando se convocó el galardón Clay yo ya había renunciado con enorme frustración a resolverlo. Espero que la iniciativa Clay anime a otros investigadores más jóvenes y con más recursos a aproximarse a su resolución.

En mi opinión faltan muchas décadas o siglos hasta conseguir una completa resolución. En este sentido me atrevo a conjeturar que si en 2100 algún matemático célebre o institución prestigiosa hacen pública una lista de problemas del siglo, en ella no faltará el problema de la masa en la teoría de Yang-Mills y quizás se le una otro más difícil todavía, el problema de la consistencia de la teoría de gravitación cuántica.

Agradecimientos

A Luis J. Boya por su interés en ver materializado el interesante ciclo de conferencias sobre los problemas Clay del Milenio. Este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos del MECD nº FPA2003-1252 y DGA Grupo Teórico de Altas Energías.

Referencias

[1] D. Hilbert, *Mathematicsche Probleme*, Göttinger Nachritten (1900) 253-297

[2] L. Corry, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)*, Kluwer, Dordrecht (2004)

[3] M. F. Rañada, *David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el problema número seis*, Gaceta RSME, **6** (2003) 641-664

[4] K. Gödel,*Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Math. u. Physik, **38** (1931)173-198

[5] J. von Neumann, *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, Ed. CSIC, Madrid (1949)

[6] A. Messiah, *Mecánica Cuántica*, Technos, Madrid (1965)

[7] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Vols. I and II, Hermann, Paris (1973)

[8] A. Galindo and P. Pascual, *Mecánica Cuántica*, Alhambra, Madrid (1978)

[9] R. Streater , A. Wightman, PCT, *Spin and statistics and all that*, W. A. Benjamin, New York (1964)

[10] B. Simon,*The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*,Princeton University Press, Princeton (1974)

[11] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2nd edition, Springer , Berlin (1987)

[12] Millenium Prize Problems of Clay Mathematics Institute: http://www.claymath.org/prizeproblems

[13] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Sitzunsber. Preuss. Akad. Wiss. **26** (1918)465-478

[14] T. Levi-Civita, *Nozione de parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **42** (1917) 173-201

[15] C. N. Yang, R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance* , Phys. Rev. **96** (1954) 191-195

[16] S.K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc, **50** (1985)1-26

[17] P. A. M. Dirac, *Principios de Mecánica Cuántica*, Ariel, Barcelona (1958)

[18] L. D. Faddeev, V. N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field* , Phys. Lett. **B 25** (1967)30

[19] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1346-1349.

[20] D. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343-1346

[21] S. Adler, *Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics*, Phys. Rev. **177** (1969) 2426-2438

[22] J. Bell, R. Jackiw, *A PCAC puzzle: $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the Sigma Model*, Nuovo Cimento **60A**(1969)47 9

[23] R. Jackiw, C. Rebbi, *Vacuum Periodicity in a Yang-Mills Quantum Theory* Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 172-175

[24] C. G. Callan, Jr. R. F. Dashen, D. J. Gross, *The structure of the gauge theory vacuum* Phys. Lett. **B 66** (1977) 375-381 ; *Toward a theory of the strong interactions* Phys. Rev. **D 17** (1978) 2717-2763

[25] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter*, Nuovo Cimento **B12** (1972) 20

[26] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189-213.

[27] L. D. Faddeev, A. Slavnov, *Gauge fields: Introduction to quantum theory*, Benjamin-Cummings (1980)

[28] M. Asorey, F. Falceto, *Geometric Regularization of Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B 327** (1989) 427

[29] M. Asorey, P. K. Mitter, *Regularized, continuum Yang-Mills process and Feynman-Kac functional integral*, Commun. Math. Phys. **80** (1981) 43

[30] K.G. Wilson, *Confinement of quarks* , Phys. Rev. **D 10** (1974) 2445-2459

[31] K. Symanzik, *Euclidean quantum field theory, in local quantum theory*, Ed. R. Jost, Academic Press, New York (1969) 152-226

[32] K. G. Wilson, *The Renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 773

[33] K. Gawedẓki, A. Kupiainen, *A regourous block spin approach to massless lattice theories*, Comm. Math. Phys. **77** (1980) 31-64

[34] T. Balaban, *Ultraviolet stability of three-dimensional lattice pure gauge field theories* , Comm. Math. Phys. **102** (1985) 255-275

[35] T. Balaban, *Renormalization group approach to lattice gauge field theories I, and II: generation of effective actions in a small field approximation and a coupling constant renormalization in 4D*, Comm. Math. Phys. **109** (1987) 249-301; Comm. Math. Phys. **119** (1989) 243

[36] M. Creutz, *Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory*, Phys. Rev. **D21** (1980) 2308-2315

[37] B. Lucini, M. Teper, *SU (N) gauge theories in four dimensions: exploring the approach to $N = \infty$* ,JHEP **0106** (2001) 050

[38] K. Osterwalder and R. Schräder, *Axioms for Euclidean Green's functions*, Com- mun. Math. Phys. **31** (1973), 83-112; Commun. Math. Phys. **42** (1975), 281-305.

[39] E.T. Tomboulis, *Permanent confinement in four-dimensional non-abelian gauge theory*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 885; **ArXiv:**hep-lat/0409019 (2004)

[40] K.-I. Kondo, *A proof of quark confinement in QCD* **ArXiv:**hep-lat/9808186 (1998)