Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza. **26:** 31–56, (2004).

La ecuación de Navier-Stokes. Un reto físico-matemático para el siglo XXI

Juan Luis Vázquez

Departamento de Matemáticas. Univ. Autónoma de Madrid

Resumen

Examinamos en estas notas el reto matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes en el marco de Los Problemas Clay y concedemos importancia al hecho de que un problema de índole intelectual pura tenga relación con una problemática que afecta a la Física, a la Ingeniería y a la vida diaria de la Sociedad. En el terreno de las matemáticas puras, que es aquel en que se juega el reto, intentamos explicar cuál es la dificultad que ha eludido a algunas de las mejores mentes del mundo científico por siglo y medio. En concreto, planteamos el problema bajo el punto de vista de los problemas de explosión o *blow-up.*

1 Retos matemáticos. Los "Problemas del Milenio"

Las matemáticas tienen múltiples facetas, desde la construcción de sofisticadas teorías intelectuales a la modelización del mundo real, de Pitágoras a Newton, de Gauss a Einstein, etc. Hay en las mejores matemáticas una tensión permanente entre el arte y la utilidad, entre las capacidades de crear y descubrir en el reino matemático y las de explicar y controlar el mundo que nos rodea[1]. Pero las matemáticas son una cultura con muchas aspectos y matices y uno de los ingredientes que más fascina a los profesionales es el reto de *los problemas abiertos*: el largo discurrir, a veces arduo, a veces tranquilo, de la construcción de una teoría matemática se va encrespando en dificultad según se avanza y en casos frecuentes (y al parecer de los matemáticos, afortunados) cristaliza en una dificultad muy específica, una dura roca, que pide a gritos el concurso a una mente excelente o la combinación de varias de tales mentes, para que ataquen al monstruo, lo pongan a nuestros pies y nos permitan así seguir avanzando.

[1]Una detallada discusión de esta dualidad puede encontrarse en [32].

El año 1900 fue un año extraordinario para esa parte de la Humanidad (mínima, pero entrañable para nosotros) que se apasiona por los *grandes problemas abiertos matemáticos*. En efecto, en ese año el gran matemático alemán David Hilbert planteó en el Congreso Internacional de París sus famosos 23 problemas que tuvieron en el mundo matemático del siglo XX tanta o más resonancia que las tesis de Lutero en el mundo norteuropeo[2].

Al cumplirse un siglo de este notable hecho, diversas iniciativas pretenden dar la réplica al gran hombre, cf. por ejemplo los libro de Arnold-Atiyah-Lax-Mazur [2], la lista de Smale en ese volumen, o el libro de Engquist-Schmid [10]. El miércoles 24 de mayo de 2000 se anunció en el Collège de France de París el Conjunto de los 7 problemas matemáticos que constituyen los *Millennium Prize Problems*, patrocinados por el *Clay Mathematics Institute*. Recordando a Hilbert, pretendía reflejar 7 de los más importantes problemas abiertos de la ciencia matemática al comienzo del nuevo siglo[3]. Estos problemas recorren las diversas áreas las matemáticas puras y aplicadas y son

1. P versus NP (Teoría de la computación)

2. Conjetura de Hodge (Geometría algebraica)

3. Conjetura de Poincaré (Geometría y topología)

4. Hipótesis de Riemann (Teoría de números y Análisis)

5. Existencia de Yang-Mills y salto de masa (Física teórica)

6. Existencia y regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes (Mecánica de Fluidos y EDPs)

7. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (Geometría aritmética algebraica).

Por el cuidado en la selección de problemas, por la seriedad con que procede la Fundación y en vista de la reacción habida en los cuatro años pasados, esta lista parece destinada a ser famosa e influyente. De acuerdo con los tiempos de optimismo y expansión que corren para las matemáticas, la lista incluye problemas abiertos importantes en temas variados tanto de la matemática pura como de la aplicada. La computación teórica, ese hijo aventajado que le ha surgido a las matemáticas en siglo XX figura con "su problema".

Nosotros nos centraremos en el problema 6, que une física de medios continuos, ecuaciones en derivadas parciales, análisis funcional y un número prometedor de aplicaciones a cálculos de la vida diaria. Su resolución haría justicia a la visión de la matemática como herramienta básica de la ciencia y la ingeniería y haría un gran favor a la popularidad del matemático teórico en el "mundo real"; pues si seguimos la máxima de que

[2]Para una referencia a estos problemas ver por ejemplo [15].

[3]La resolución de cada problema valdría al autor un premio de 1 millón de dólares. Toda la información sobre el premio y los problemas se puede obtener en la dirección `http://www.claymath.org/prize_problems`.

las Matemáticas son el lenguaje en que se piensa la Ciencia, sería prudente que la comunidad matemática diera una cierta prioridad a tener el tal lenguaje listo y reluciente en los campos en que las ciencias llaman a nuestra puerta.

La ecuación de Navier-Stokes en el portal del Clay Mathematics Institute

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

`http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/`

2 Qué es un fluido. Realidad e idealización

Un fluido es un **medio continuo**, es decir un agregado que se mueve (se deforma) en forma continua al transcurrir el tiempo, t, y forma un todo continuo en el espacio $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Pensamos en tal medio como compuesto de partículas puntuales. No hay en ello ninguna objección de tipo matemático; en los últimos siglos las matemáticas se han inclinado frecuentemente por el estudio de magnitudes continuas frente a las discretas, y en tal hipótesis se basan la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales y una gran parte de los procesos estocásticos. Aunque no el cálculo numérico, evidentemente.

Ahora bien, la mecánica es una ciencia física que pretende describir el comportamiento de los cuerpos (sólidos, líquidos, gases o plasmas) y apoya por tanto su formulación matemática en la *experiencia* y la *teoría*. A este respecto, el concepto de medio continuo es una abstracción que, estrictamente hablando, está en contra de una teoría incontestable y ampliamente verificada, la teoría atómica, que describe la realidad a escala inferior al nanómetro (10^{-9}m; por ejemplo, el radio del átomo más pequeño, el de hidrógeno, mide alrededor de medio angström, $0,5 \times 10^{-10}$m). Un matemático a la usanza clásica tiene tendencia a resolver tal situación rechazando de plano al candidato que tropieza con una tal contradicción. Pues bien, la teoría de los fluidos no acepta tal rechazo. Se trata por el contrario de construir una teoría matemática que sirva de *modelo* a una parcela de la Realidad; un modelo renuncia a la categórica exactitud y ha de ser juzgado por una parte desde el punto de vista *matemático*, en que se tiene en cuenta la belleza, extensión y profundidad de las matemáticas originadas; y por otra parte desde el punto de vista *físico*, por su eficacia en reflejar y en permitirnos *intuir* y *conocer* la realidad subyacente, *explicar* su funcionamiento observado y *predecir* su evolución futura. Hoy día, en el período dorado de la ciencia *computacional*, añadiríamos como esencial la capacidad de *calcular* y *controlar* eficazmente en base a este modelo.

La aproximación del medio continuo resulta ser tan efectiva que se olvida con frecuencia de que se trata de un modelo. Es con todo importante tener en cuenta las hipótesis de partida. Así, la consideración del fluido como un medio continuo se basa en que éste consiste en un agregado de partículas en movimiento caótico y que la distancia característica de este movimiento, que recibe el nombre técnico de "recorrido libre medio entre colisiones", λ, es mucho menor que las longitudes experimentales, que tomamos típicamente como mayores de 10^{-5} cm, de forma que sólo percibimos un cierto promedio de los procesos individuales entre partículas. Ahora bien, en ocasiones (piénsese en los gases enrarecidos de la materia interestelar) el recorrido libre medio puede ser mucho mayor, la hipótesis del continuo cesa de ser válida y no quedará más remedio que recurrir a teorías "más detalladas" que tengan en cuenta los movimientos moleculares (como la teoría cinética de gases). Precisamente, una de las líneas más activas de la investigación matemática actual es la obtención de las leyes del medio continuo como límite de las teorías cinéticas.

Una vez establecido que trabajamos en escalas muy superiores al recorrido libre medio de las partículas podemos olvidar el fino detalle de su movimiento individual y ver en torno a cada punto del espacio $\mathbf{x}$ y para cada instante t un *volumen elemental representativo*, δV, de tamaño *mesoscópico*[4], es decir mucho mayor que λ y mucho menor que las longitudes macroscópicas en las que deseamos trabajar. Este volumen elemental, que se denomina también *partícula fluida*, es considerado como un medio continuo y homogéneo; en él se define una velocidad media del movimiento de ese elemento, que será para nosotros la *velocidad* puntual en este punto e instante, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Para decirlo en forma más matemática, admitimos que existe un valor límite de los promedios cuando δV se hace muy pequeño en la escala intermedia, es decir es muy pequeño pero aún muy por encima de la escala atómica. Del mismo modo, se habla de las demás magnitudes macroscópicas, como la *densidad*, que es la masa por unidad de volumen en el sentido de límite antedicho, y la *presión*, que es la fuerza normal por unidad de área ejercida por el fluido sobre una superficie ideal inmersa en él o rodeándolo. Esta magnitud tiene una evidente explicación física, por ejemplo en un gas encerrado en un recipiente, como el efecto neto de las colisiones de las partículas individuales reales sobre la superficie de las paredes. A estas

[4]del griego, *mesos*, medio, *skopein*, mirar; intermedio entre macroscópico y microscópico.

tres magnitudes básicas se unirán otras en el curso del estudio, como *temperatura, energía interna, entropía, viscosidad,...* según el modelo sea más o menos complejo. La existencia de estos valores medios para las magnitudes fundamentales en cada partícula fluida es lo que constituye la hipótesis de continuidad del medio.

3 Ecuaciones fundamentales de los fluidos

Una vez identificado el tema de estudio, con sus aproximaciones admitidas y las variables que describen el sistema, el modelizador ha de proceder a escribir las leyes que relacionan a esas variables y nos permitirán predecir el funcionamiento del sistema. Siguiendo a Newton [26], estas leyes son diferenciales. Al involucrar el espacio y el tiempo son ecuaciones en derivadas parciales, EDPs. Siendo las variables que describen el sistema varias, se tratará de un sistema de ecuaciones. Finalmente veremos que, para poner la guinda al pastel, las ecuaciones son no lineales. Llegaremos pues a un Sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución No Lineales, que son uno de los temas en donde está la frontera del saber matemático en nuestros días, tres siglos después de Newton.

Las leyes fundamentales son las siguientes: ley de conservación de la masa y ley de conservación de la cantidad de movimiento. Las introducimos a continuación. El lector que, en su prisa por conseguir el premio, se interese sólo por Navier-Stokes puede proceder a la sección 5.

3.1 Ley de Conservación de la Masa

Esta ley enuncia matemáticamente el principio según el cuál estamos describiendo un fenómeno de transporte de partículas que no se crean ni se destruyen. ¡Los cálculos que siguen son muy sencillos! La variable fundamental es la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$. En la formulación más geométrica, llamada lagrangiana, la ley dice

$$\frac{d}{dt}(\rho\, J) = 0, \tag{3.1}$$

donde J es el jacobiano de la deformación que sucede entre el momento $t = 0$ y el momento t en la situación de las partículas y d/dt indica la derivada a lo largo de las trayectorias que tiene como fórmula

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_1^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.2}$$

en función de las derivadas parciales usuales; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es la velocidad, que va a ser en un momento la variable fundamental. Así pues, si J es la medida de la *expansión de* *volumen* a lo largo de una trayectoria, como la masa se conserva, (3.1) simplemente dice que densidad $\times$ volumen = constante.

En un artículo fundamental titulado "Principes généraux du mouvement des fluides" y publicado en 1755, Leonhard Euler tradujo esta ley de conservación de masa mediante el cálculo de la derivada en t de J:

$$\frac{dJ}{dt} = J.(\text{div } \mathbf{u}). \tag{3.3}$$

Créanlo o consulten la demostración en [33]. Con este lema se deduce que

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = \frac{d\rho}{dt}J + \rho J(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \tag{3.4}$$

Escribimos $\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}$. Como $J \neq 0$ por razones físicas evidentes, se tiene la versión en derivada total respecto al tiempo:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{3.5}$$

Aún podemos transformar la derivada total en parcial usando (3.2), llegando así a la fórmula: $\partial\rho/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$, que finalmente da

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0} \tag{3.6}$$

Esta es la forma llamada euleriana de la ley de conservación de masa. Nótese que es no lineal, pues contiene un término producto.

3.2 Ley de conservación de la cantidad de movimiento

La LCCM describe la dinámica del medio fluido. Comienza como un capítulo de la mecánica newtoniana afirmando que la variación de la cantidad de movimiento se debe a la acción de fuerzas,

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}, t). \tag{3.7}$$

No hay gran novedad en el término $\mathbf{f}_e$ que es la fuerza debida a campos externos, como el gravitatorio. La particularidad de los fluidos reside en la *fuerza de contacto* $\mathbf{f}_c$. Identificar sus componentes llevó siglo y medio y en la tarea participaron Johann y Daniel Bernoulli y L. Euler que describieron la componente de presión como

$$\mathbf{f}_p = -\nabla p.$$

Digno de mención es Augustin Cauchy que añadió el análisis del concepto de tensor de esfuerzos como forma general del efecto de contacto, en 1822. En los decenios que siguen varios prominentes científicos identificaron el efecto que debe añadirse al gradiente de presión para obtener el conjunto de fuerzas de contacto. Entre ellos la posteridad ha seleccionado los nombres de Claude-Louis Navier que propuso en 1822 la fórmula del efecto viscoso [25], y sir George Gabriel Stokes, que culminó en 1845 la modelización con una deducción racional y matemáticamente elegante, al uso actual [29]. Según estos autores, en los fluidos usuales, llamados newtonianos, el esfuerzo de contacto toma la forma de una fuerza viscosa, de la forma

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}.$$

Este es un hito histórico de la modelización matemática de los problemas de la Física. Aparecen nuevas variables o parámetros cuyo significado físico ha de ser examinado: la presión $p(\mathbf{x}, t)$ es una variable reconocida como relevante desde la Antigüedad. Los parámetros de λ y μ describen la viscosidad y podemos suponerlos en primera aproximación constantes medibles que dependen del fluido. Poniendo todo junto, llegamos a la ley

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) = -\nabla p + \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t)} \tag{3.8}$$

Nótese que el término no lineal $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ proviene del paso de derivadas totales en tiempo a derivadas parciales (derivada de la función de función). Se llama término convectivo o de transporte y en la coordenada i vale

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{dx_j}. \tag{3.9}$$

Puede parecer una simple complicación técnica pero no es sólo eso: su nolinealidad, aunque sea solo cuadrática, es la razón de que las soluciones de la ecuación puedan en principio desarrollar singularidades y los matemáticos no han logrado decidir si este fenómeno ocurre o no tras incesantes esfuerzos teóricos y computacionales durante todo el pasado siglo. Explicar tal hecho será el punto culminante de estas notas en la sección 8.

El sistema formado por las dos leyes anteriores, (3.6) y (3.8), contiene cuatro ecuaciones, la LCM escalar y la LCCM vectorial, e implica a cinco variables, la densidad ρ, las tres componentes de la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p. Es pues indeterminado y necesita una o varias nuevas leyes que son las que hacen intervenir el balance de energía e involucran nuevas variables como la temperatura. La temperatura es fundamental en la descripción ajustada de muchos flujos reales, como los atmosféricos o marinos, como todo el mundo sabe. Concluimos pues que la descripción de los fluidos "reales" implica modelos de una notable envergadura matemática, aún hoy día difíciles de abordar, incluso a nivel computacional. Fenómenos climatológicos de gran interés, como *El Niño,* escapan aún casi completamente a la capacidad de explicación de los modelos matemáticos y más aún a la predicción. Referimos a los textos clásicos de Batchelor [3] o Landau-Lipshitz [19] para una introducción a los sistemas completos de los fluidos reales. Quien se interese por un punto de vista más matemático puede consultar el libro de Chorin y Marsden [7] o el curso del autor [33][5].

4 Las ecuaciones de Euler. Fluidos perfectos

De las dificultades del "modelo matemático completo" de los fluidos eran conscientes los precursores, los Bernoulli y Euler, en el siglo XVIII, y propusieron hallar condiciones razonables que simplificaran el problema y lo redujeran a un problema susceptible de ser analizado matemáticamente. La reducción tomó dos vías: la primera, considerar fluidos que no se comprimen, llamados *fluidos incompresibles*; la segunda considerar fluidos que no sufren efectos viscosos, llamados *fluidos perfectos*.

4.1 Incompresibilidad

Examinemos la primera de estas simplificaciones. La condición de fluido incompresible nos dice que el factor de expansión J debe ser constante igual a 1 por lo que la LCM en su primera versión lagrangiana (3.1) dice que $d\rho/dt = 0$, mientras que el lema de Euler dice que div $\mathbf{u} = 0$. En total, la hipótesis de incompresibilidad nos lleva a mejorar la ley de conservación de masa en forma de dos condiciones

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4.10}$$

Podemos simplificar aún un poco más la situación añadiendo la hipótesis de homogeneidad de la densidad. Basta con pedir homogeneidad espacial $\rho = \rho(t)$ para obtener de $d\rho/dt = 0$ que $\partial\rho/dt = 0$, o sea que ρ debe ser constante tanto en espacio como en tiempo. Ello es muy conveniente pues hace desaparecer ρ como variable del sistema, que pasa a tener tantas ecuaciones como incógnitas. Tan radical simplificación es con todo aceptable en los estudios hídráulicos, en oceanografía y muchas veces en las cuestiones atmosféricas.

4.2 Ecuaciones de Euler. Fluidos ideales

Tratemos ahora de simplificar las fuerzas de contacto. Euler supuso que podíamos partir del estudio de fluidos que son sensibles a la presión, pero no a los llamados esfuerzos cortantes, es decir, a lo que llamaríamos arrastre de capas contiguas. En ese caso ponemos simplemente $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_p = -\nabla p$ y la ecuación dinámica nos queda

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) + \nabla p = \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t). \tag{4.11}$$

[5] Nóte el lector curioso que, como se describe la última referencia, existen también diversos fluidos no newtonianos con viscosidades dadas por leyes más complejas, que son de gran aplicación en la industria moderna.

Si a esta ecuación vectorial unimos la incompresibilidad tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4.12}$$

Éstas son las cuatro ecuaciones que gobiernan la evolución de las incógnitas $\mathbf{u}$ y p. Nos queda aún ligarlas con la evolución de ρ que viene regida por la ley $d\rho/dt = 0$. Pero es cómodo y usual suponer homogeneidad con lo que ρ es una constante. Un fluido perfecto, incompresible y homogéneo se llama *fluido ideal*. El sistema de Euler de los fluidos ideales consiste en las leyes (4.11) y (4.12). Se suele poner $\rho = 1$ para simplificar.

El sistema de Euler - SE en lo que sigue - es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no lineal. El método más natural para los sistemas de tipo hiperbólico es el método de características, y ello se adapta bien a la ecuación dinámica salvo por la no linealidad. Es bien conocido que incluso las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden generar discontinuidades en tiempo finito. En todo caso, como sucede en todas las EDPs, la resolución del SE exige de condiciones iniciales y de contorno adecuadas para que de pueda identificar una solución única.

Tosio Kato probó en 1967 el siguiente teorema de existencia y unicidad de solución global clásica en dimensión dos de espacio; global quiere decir que existe para todo $t > 0$, clásica que todas las derivadas que aparecen en las ecuaciones son funciones continuas y las ecuaciones se satisfacen en todo punto, [17].

Teorema 1 *Sea Ω un dominio acotado del plano con frontera Γ compuesta de $m+1$ curvas cerradas simples regulares $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$, de las que Γ_0 rodea a todas las demás y éstas no se contienen unas a otras. Denotemos por Q_T el cilindro espacio-temporal $\Omega \times [0, T]$, $T > 0$. Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ un campo de fuerzas de la clase de Hölder $C^{1+\alpha,0}_{x,t}(\overline{Q}_T)$, para un $0 < \alpha < 1$, y sea $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ un dato de velocidad inicial en la clase $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, que es además solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$.*

Entonces existen un par de funciones, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, que satisfacen el sistema SE *en el sentido clásico, siendo continuas en $\overline{Q}_T$, clausura de Q_T, tanto ellas como todas sus derivadas que aparecen en las ecuaciones. Además, $\mathbf{u}$ satisface la condición de contorno*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{en } \Gamma, \tag{4.13}$$

así como la condición inicial

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \qquad \text{para } \; \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4.14}$$

Por último, $\mathbf{u}$ es única y p es única salvo adición de una función arbitraria del tiempo.

Nos interesa saber si un resultado similar es cierto en tres dimensiones de espacio. Se sabe que el resultado es cierto si admitimos que el intervalo de definición de la solución en el tiempo sea pequeño (de tamaño dependiendo de los datos). Es lo que se llama problema local en el tiempo. Se plantea entonces el resultado de existencia y unicidad de una solución clásica definida para todo $t > 0$, es decir, una *solución global*. Queda así formulado el **Problema Abierto de las Ecuaciones de Euler.**

Aunque este problema no forma parte de la Lista de Clay, es considerado por la comunidad matemática de tanto interés como el de las ecuaciones de Navier-Stokes que discutiremos a continuación. En este momento no se tiene una hipótesis mayoritariamente compartida sobre una u otra de las opciones del problema abierto.

5 Las ecuaciones de Navier-Stokes. Fluidos viscosos

La extremada simplificación inherente a los fluidos perfectos, que no admiten el arrastre lateral (¡contradiciendo a Newton y a la realidad!), fue notada desde sus comienzos por los precursores y puesta muy de relieve por D'Alembert. Aunque según esa teoría, un barco flotaría en el agua, ¡sin embargo los aviones no volarían, grave defecto que retrasó el comienzo de la ciencia aeronáutica! Remediar esta situación con "un modelo de nivel superior" nos ha llevado de la mano de Cauchy, Navier y Stokes a considerar en la sección 3 fluidos más realistas que incluyen efectos de viscosidad. Cuando se impone la incompresibilidad y se supone $\rho = 1$, el sistema de Navier-Stokes SNS, toma la forma

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{array}} \tag{5.15}$$

Siguiendo la costumbre, usamos la notación $\nu = \mu/\rho$ para el parámetro que caracteriza la propiedad de viscosidad de cada fluido "real". El operador $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ viene dado en coordenadas por la expresión (3.9) con suma de $j = 1$ a n ($n = 3$ en el problema físico). Este es el sistema de EDPs al que queríamos llegar y que figura en el anuncio del Instituto Clay. Necesitamos datos adicionales, iniciales y /o de contorno, dependiendo del dominio donde se plantee el problema y del tipo de datos que tengan interés para las aplicaciones.

En el último siglo y medio, estas ecuaciones han pasado el test de la aplicación siendo utilizadas por físicos e ingenieros con notable éxito en muy diversos campos, entre ellos la hidráulica, la meteorología y la aeronáutica, y su rango de validez está bien establecido. Pertenecen ya, junto a las ecuaciones de Newton, Schrödinger y Maxwell, a las ecuaciones básicas de la Física.

Claude-Louis Navier (1785-1836) y George Gabriel Stokes (1819-1903)

5.1 Problemas matemáticos

No hay ninguna objección matemática a que el problema de construcción de soluciones y de su unicidad y regularidad se plantee dentro de un espacio $\mathbb{R}^n$ de un número de dimensiones $n \geq 1$, siendo el caso $n = 3$ el interesante para la ciencia aplicada y el $n = 1$ trivial.

Contexto del Problema de Cauchy[6]**.** El dominio espacial es todo $\mathbb{R}^3$, o en general, todo $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, ...$ Se plantean pues las ecuaciones (5.15) para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Se añaden datos iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{5.16}$$

Se supone que $\mathbf{u}_0$ es un campo vectorial de clase C^∞ y de divergencia nula en $\mathbb{R}^n$. El campo $\mathbf{f}$, también regular, representa la acción de las fuerzas externas como la gravedad, pero no es esencial para el tema que nos ocupa en este momento. Dado que el problema se plantea en el espacio infinito, razones de coherencia con la fisica y de comodidad matemática sugieren someter a los datos y a la solución a condiciones de decrecimiento rápido del tipo

$$|\partial_x^\alpha u_{0i}(\mathbf{x})| \leq C_{\alpha,K}(1 + |\mathbf{x}|)^K \qquad \forall\alpha, \forall K \tag{5.17}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m \mathbf{f}_i(\mathbf{x})| \leq C_{\alpha,m,K}(1 + |\mathbf{x}| + t)^K \qquad \forall\alpha, \forall m, \forall K \tag{5.18}$$

[6]Seguimos aquí en lo esencial la exposición de Charles Fefferman en la presentación del problema para el Clay Institute, [11].

Declaramos admisibles las soluciones clásicas $\mathbf{u}, p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ tales que

$$\int u^2(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} < \infty \qquad \forall t,$$

lo que significa que la energía cinética es acotada, una condición muy razonable desde el punto de vista de la mecánica y también de las EDPs.

El **problema de decisión** se formula como sigue: decidir cuál de los dos enunciados responde a la realidad.

(PSNS-1) Problema de existencia y regularidad. *Tomamos ν constante positiva y $\mathbf{f} = 0$ y suponemos que $\mathbf{u}_0$ satisface las condiciones de regularidad, divergencia nula y decaimiento rápido en el infinito enumeradas. Demostrar que existen funciones $\mathbf{u}$ y $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $\mathbf{u}$ de energía finita, que resuelven el sistema* SNS *en el sentido clásico y $\mathbf{u}$ toma el dato inicial $\mathbf{u}_0$.*

(PSNS-2) Problema de colapso de la solución. *Tomamos $\nu > 0$. Encontrar un dato inicial $\mathbf{u}_0$ y una función $\mathbf{f}$ con las condiciones enumeradas, tales que no existe una solución clásica $(\mathbf{u}, p)$ del sistema* SNS *con condiciòn inicial* (5.16).

A este problema alternativo se une el problema de unicidad:

(PSNS-3) Problema de unicidad. *Dada una teoría de existencia de soluciones físicamente aceptable (como las soluciones débiles de Leray de la próxima sección o las soluciones obtenidas computacionalmente), demostrar que la solución es única durante todo el tiempo de existencia.*

Contexto de Cauchy-Dirichlet. El dominio espacial es un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^3$, o en general, de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$. En general se toma acotado y de borde regular. Se imponen condiciones de no deslizamiento en el borde, $\mathbf{u} = 0$ en $\Gamma = \partial\Omega$. Problemas similares a los anteriores se plantean.

Contexto con condiciones periódicas. En un intento de enfocar la atención de los investigadores sobre las dificultades esenciales el siguiente problema más artificial se admite como marco del desafío: se toma como dominio un cubo $\Omega = \Pi_i(0, ll_i)$ y se supone que $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{f}$ son funciones suaves en el cierre de Ω que se extienden por periodicidad a todo $\mathbb{R}^n$. Se pide entonces que las funciones extendidas sean C^∞. Se buscan soluciones clásicas y periódicas. Los problemas (PSNS-1) y (PSNS-2) se formulan mutatis mutandis.

5.2 Resultados parciales

Se trata pues de un Problema de Decisión. Lo mismo que en el caso de las Ecuaciones de Euler, el problema ha sido decidido en dimensión $n = 2$, y la respuesta es: la opción (PSNS-1) es cierta, ver Ladyzhenskaya [18].

El problema completo en $n = 3$ ha resistido todo los intentos hasta ahora. Centrándose en el problema de Cauchy que es el más interesante, varios casos parciales están decididos:

(i) Si sustituimos $T = \infty$ por un tiempo pequeño entonces (PSNS-1) es cierto. Ello fue ya demostrado por Jean Leray en sus artículos fundamentales de 1933-34.

(ii) Si $\mathbf{u}_0$ es pequeño en un sentido a precisar, o si es fuertemente oscilante, (PSNS-1) es cierto.

(iii) Si (PSNS-2) fuese cierto y una solución no pudiese ser continuada más allá de un tiempo $T > 0$, entonces la velocidad se debe hacer infinita cuando $t \to T$.

Este fenómeno se llama técnicamente *blow-up* en inglés o explosión en castellano y de él hablaremos en detalle en la Sección 7, pues es nuestra estrella invitada matemática.

6 Soluciones débiles del sistema SNS. La obra de Leray

Jean Leray hizo en los años 1933-34 una contribución fundamental al problema SNS. Tras obtener existencia de solución clásica para datos regulares durante un pequeño intervalo de tiempo $(0, T)$, se encontró con el problema de que no le era posible controlar *a priori* el crecimiento de la velocidad y sus derivadas al avanzar el tiempo, lo cual arruinaba la esperanza de construir una solución global. Enfrentado a esta dificultad, optó por el procedimiento ya seguido por Hilbert en el tratamiento del problema de Dirichlet para el operador laplaciano y planteó el problema en el marco de las llamadas *soluciones débiles* en los espacios de energía que hoy llamamos de Sóbolev, ver [20, Le3].

6.1 Solución débil

La idea es simple: si $\mathbf{u}$ es una solución clásica de SNS definida en $Q = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ y $\theta = (\theta_i(\mathbf{x}, t))$ es un campo solenoidad, de clase C^2 y con soporte compacto, multiplicando la ecuación de Navier-Stokes por θ e integrando por partes se tiene

$$\iint_Q \{\langle \mathbf{u}, \frac{\partial \theta}{\partial t}\rangle + \sum_i u_i u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \nu \langle \mathbf{u}, \Delta\theta\rangle + \langle \mathbf{f}, \theta\rangle\}\, d\mathbf{x}dt = 0. \tag{6.19}$$

Denotamos por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ para más claridad. Nótese que el término de presión desaperece, $\int\int p(\nabla \cdot \theta)\, d\mathbf{x}dt = 0$, dado que hemos elegido las funciones test θ de divergencia nula. Podemos ahora testear la condición de divergencia nula de forma similar multiplicando la ecución $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ por una función test φ de clase C^2 y con soporte compacto para dar

$$\iint_Q \langle \mathbf{u}, \nabla_x \varphi\rangle\, d\mathbf{x}dt = 0. \tag{6.20}$$

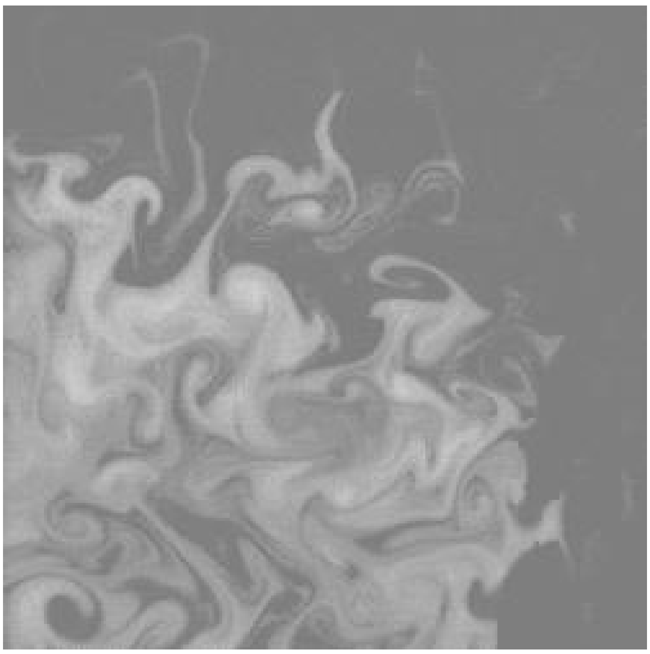
Definición. Toda función $\mathbf{u} = (u_i)$ localmente integrable en espacio y tiempo y tal que (6.19), (6.20) se satisfacen para todo campo vectorial test θ y escalar φ con las propiedades enumeradas, se llama una solución débil del sistema SNS[7].

Por lo tanto una solución clásica es débil, pero una solución débil sólo satisface una serie de tests y podría ser un objeto más general.

6.2 Programa "débil"

A partir de años 50 del pasado siglo, y gracias en parte a la obra previa de Leray y a causa del trabajo sobre el SNS, los matemáticos han abrazado con entusiamo la mentalidad de las soluciones débiles y han contagiado este entusiasmo al mundo de la computación a través de los elementos finitos. Una idea fundamental en las EDPs del siglo XX ha sido pues la de construir soluciones débiles de una serie de problemas; se demuesta luego la unicidad de tales objetos matemáticos; en un tercer paso se trata de probar (mediante técnicas a veces muy sofisticadas) que tales soluciones débiles son en realidad soluciones en el sentido clásico. El programa no siempre cumple este objetivo, pues en algunos casos las soluciones débiles pueden no ser regulares (contiene conjuntos de singularidad) o no ser únicas (como sucede en las leyes de conservación de la dinámica de gases estudiadas por Riemann); en ese caso es preciso añadir condiciones de selección (condiciones de entropía en el caso citado).

6.3 Singularidades y turbulencia



Turbulencias en un fluido

Leray fue capaz de construir soluciones débiles del sistema SNS de energía cinética finita, $\int \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$ finito para todo t, pero la regularidad de tales objetos se resistió en dimensión $n = 3$. Tampoco fue posible probar en dimensión $n = 3$ la unicidad de tales soluciones, que es *otro problema fundamental abierto*. La presencia de singularidades fue conjeturada por Leray y le sirvió como posible explicación del fenómeno físico de la **turbulencia**. Según esta hipótesis, incluso para datos regulares las soluciones en tres dimensiones pueden desarrollar en un tiempo finito singula-

[7]Esta formulación es la usual hoy día, actualizada respecto a la original de Leray.

ridades en la forma de puntos donde la vorticidad $\overrightarrow{\omega} = \text{rot}\,(\mathbf{u})$ se hace infinita.

La teoría de soluciones débiles ha sido luego elaborada por matemáticos como E. Hopf, O. A. Ladyzhenskaya, J. Serrin, J. L. Lions, G. Prodi, T. Kato, R. Temam y otros muchos[8].

7 Qué es un problema de explosión o blow-up

Analicemos un momento el problema que se nos presenta con las posibles singularidades en un marco más general, lo cual permitirá obtener una visión más amplia de la interrelación de los problemas de Euler y Navier-Stokes con otros problemas.

7.1 El mundo no lineal y sus peculiaridades

Numerosos procesos de las ciencias aplicadas se modelan por medio de sistemas de ecuaciones de evolución que involucran operadores diferenciales como los arriba vistos. El tratamiento matemático tiene como objeto obtener problemas bien propuesto, para lo cual se añaden datos iniciales y de contorno, se suministra un adecuado marco funcional y eventualmente se imponen condiciones de compatibilidad. Problema bien propuesto quiere decir para el matemático que existe una solución en el marco descrito, es única y depende continuamente de los datos (estabilidad).

Las teorías matemáticas clásicas involucran operadores lineales para los que existe hoy día una enorme teoría matemática desarrollada en el marco del Análisis Funcional. Por suerte existen importantes teorías físicas que se modelan en forma lineal en su rango de aplicación usual, como son la teoría electromagnética y la teoría de propagación del calor. Sin embargo, muchos otros modelos importantes son no lineales, y entre ellos se cuentan la teoría de la relatividad y la de los fluidos. Se ha comprobado que tales teorías tienden a una dificutad matemática mayor y que exhiben un número de propiedades que no se dan en los modelos lineales. Además, se ha visto que estos nuevos fenómenos o propiedades reflejan aspectos esenciales de la realidad que se pretendía describir, por lo que volver la vista al mundo lineal, más sereno y regular, no resuelve nada, salvo como primera aproximación.

Una de las más notables propiedades que distinguen el mundo no lineal es precisamente la que nos ocupaba al final de la sección precedente, a saber, la posibilidad de que datos

[8] Franceses, italianos, alemanes, ingleses, irlandeses como Stokes, norteamericanos, japoneses y rusos; pueblos ilustres a través de sus científicos. Es triste observar cómo hasta hace nada las matemáticas españolas no aparecían en la ciencia mundial. El autor confía que en una futura Lista de los Fluidos del Siglo XXI la situación cambie sustancialmente.

perfectamente regulares den lugar a una evolución que (i) está bien propuesta en el sentido matemático para tiempos pequeños, (ii) en un determinado tiempo la solución clásica deja de existir pues se genera una singularidad. Nótese que pueden existir singularidades en problemas lineales, pero éstas deben ser ya patentes en la regularidad de los datos o coeficientes adecuadamente examinados. En cambio, en los problemas no lineales, las singularidades surgen del mecanismo interno a la ecuación, incluso a partir de datos y coeficientes extremadamente regulares.

La forma más simple en que se observan singularidades espontáneas en un problema de evolución es aquel en que la variable o variables tienden a infinito cuando el tiempo se acerca a un valor finito $T > 0$. Esto es lo que se llama fenómeno de *blow-up* o explosión.

7.2 Blow-up para ecuaciones diferenciales ordinarias

El contexto más elemental en que se observa el blow-up es la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Y el ejemplo más simple, y a la vez enormemente representativo lo suministra la *ecuación del crecimiento cuadrático*: se considera una variable real escalar $Y = Y(t)$ que obedece a la ley

$$Y_t = Y^2, \;\; t > 0; \quad Y(0) = a. \tag{7.21}$$

Si el dato inicial es $a > 0$, se sigue immediatamente que existe una única solución definida en un intervalo temporal $0 < t < T$ con $T = 1/a$, y dada por la fórmula

$$Y(t) = \frac{1}{T-t}. \tag{7.22}$$

Vemos pues que la evolución está descrita por una función regular para $t < T$. Cuando $t \to T^-$ (límite por la izquierda), vemos que la solución explota, $Y(t) \to \infty$. No solo eso, también sabemos cual es la tasa de crecimiento cerca de la explosión, $Y(t) = O((T-t)^{-1})$. Este será para nosotros el *ejemplo elemental de explosión.*

Arrancando de este ejemplo afortunado (por simple y representativo), los matemáticos han extendido el concepto de explosión y han realizado estudios de cuándo, cómo y dónde sucede en toda una serie de diferentes problemas y contextos de la matemática y la ciencia aplicada. En general se trata de que una o más de las variables de un sistema se hagan infinitas al acercarse a un tiempo finito T, el tiempo de explosión, que impide que la solución pueda ser continuada globalmente en el tiempo, al menos en el sentido original. En algunos casos la explosión sucede en una derivada de una variable del sistema. Una tal explosión de derivada se admite como "explosión del sistema" si impide la demostración de existencia de solución más allá de T.

Una primera extensión del ejemplo elemental de explosión la proporcionan las EDOs de la forma $Y_t = Y^p$ con $p > 1$ (caso superlineal), que el lector no tendrá dificultad en integrar. Pero no explota si $0 < p < 1$, caso en el que problema es la falta de unicidad. Nosotros nos encontraremos más adelante con el caso $p = 3$ en el estudio del SNS. Más generalemte, podemos considerar la ODE

$$Y_t = f(Y), \tag{7.23}$$

con f positivo y continuo; la condición de Osgood

$$\int_1^\infty ds/f(s) < \infty \tag{7.24}$$

es necesaria y suficiente para que la solución que arranca con dato inicial positivo $Y(0) = a$ explote en tiempo finito. Siguiendo el camino de generalización, podemos considerar sistemas $Y_t = f(t, Y)$ con variable vectorial $u \in \mathbb{R}^n$. Entonces, tenemos blow-up por las mismas razones si f es superlineal con respecto a Y para $|Y|$ grande.

Resumiendo, el estudio de las ODEs proporciona ejemplos y técnicas básicos para la teoría matemática de los fenómenos explosivos. Cuando se extienden a otros ámbitos, no siempre se encontrarán fórmulas explícitas como las anteriores, pero el matemático halla al menos útiles suficientes para resolver los problemas de decisión e incluso para estimar cuándo, dónde y cómo explota la solución. Tal tarea se ha cumplido con éxito en los últimos decenios en un número importante de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de la Física Matemática. Desgraciadamente, no es aún el caso en los problemas de Euler y Navier-Stokes.

8 Blow-up o no blow-up, esa es la cuestión

Un buen artículo de matemáticas ha de tener algún "cálculo de verdad". Veamos ahora cuales son los cálculos básicos de la teoría débil para el SNS y porqué las cosas se tuercen en dimensión tres y no en dos. Una teoría débil suele basarse en tres ingredientes: un buen marco funcional, un procedimiento de aproximación por problemas resolubles y estimaciones a priori sobre el comportamiento de las eventuales soluciones y de sus aproximantes que permitan pasar al límite en el proceso.

8.1 Marco funcional

El marco se establece primero para la variación espacial a tiempo fijo. Las velocidades han de ser campos vectoriales $\mathbf{u}(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con gradientes $\nabla\mathbf{u}(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ y divergencia nula (en el sentido débil (6.20))[9]. Tales funciones vectoriales forman el espacio V. Si no pedimos que los gradientes sean funciones sino solo quizá distribuciones tenemos el espacio

[9]Siguiendo la tradición en problemas de evolución escribimos a veces $\mathbf{u}(t)$ para abreviar $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

H. Nótese que V es un subespacio cerrado del espacio de Sobolev clásico $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$, mientras $H \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n$. Ambos espacios V y H son espacios de Hilbert. Introducimos las notaciones

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \, dx, \qquad ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_i \int \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\rangle dx, \tag{8.25}$$

para elementos de V (y de H en su caso). Usamos además las notaciones

$$|\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \qquad \|\mathbf{u}\|^2 = ((\mathbf{u}, \mathbf{u})). \tag{8.26}$$

Podemos ya formular las soluciones débiles dentro de estos espacios. Así, multiplicando formalmente la ENS por una función vectorial $\mathbf{v} \in V$ e integrando queda la identidad variacional, básica en lo que sigue:

$$\left(\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, \mathbf{v} \right) + \nu((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) \tag{8.27}$$

Aquí el término de transporte $\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)$ de la ecuación de NS da de sí tras integración por partes $b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})$, un término no lineal que hemos de vigilar. Hay varios resultados técnicos que estiman su influencia. He aquí el lema básico:

Lema 2 *La fórmula*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_i \int u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx \tag{8.28}$$

define una forma trilineal acotada en $V \times V \times V$.

8.2 Problemas aproximados. Problema de Stokes.

Son diversos y forman la parte técnica de la disciplina. Referimos al lector a los libros de Temam [30, 31] o de Constantin-Foias [9]. El punto de apoyo más importante consiste en hacer un anális completo del problema reducido en que se suprime el término no lineal y la ecuación queda en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t), \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{8.29}$$

Este problema se llama Problema de Stokes. He aquí el resultado que se obtiene utilizando los métodos del Análisis Funcional (a final de cuentas, el teorema de Lax-Milgram).

Teorema 3 *Para todo dato inicial $\mathbf{u}_0 \in H$ y toda función $\mathbf{f} \in L^2(0, T : L^2(\mathbb{R}^n)^n)$ existe una única $\mathbf{u} \in L^2(0, T : V)$ que es solución débil del sistema de Stokes y tal que $\mathbf{u}$ es continua en $t \in [0, T)$ con valores en V' (el espacio dual de V) y se toma el dato inicial $\mathbf{u}_0$.*

Una vez obtenido $\mathbf{u}$ no es difícil obtener p salvo constantes espaciales. El estudio estacionario previo a la resolución del problema pasa por definir el laplaciano como un operador A autoadjunto, no acotado y no negativo con dominio

$$D(A) = \{\mathbf{u} \in H : \Delta\mathbf{u} \in H\}.$$

8.3 Estimaciones no lineales

Las dificultades están pues en la parte lineal de la formulación variacional descrita en (8.27). Veamos las estimaciones a nivel formal.

• Poniendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t)$ en la formulación débil tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + \nu\|\mathbf{u}(t)\|^2 = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \|\mathbf{f}\|_{V'}\|\mathbf{u}(t)\|, \tag{8.30}$$

pues se demuestra fácilmente que $b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) = 0$. Integrando (8.30) se obtiene la ley de conservación de la energía, que para $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ toma en la forma usual

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}(t)|^2 + \nu\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2\,dt = \frac{1}{2}|\mathbf{u}(0)|^2, \tag{8.31}$$

donde el término integral describe la energía disipada por el sistema. El término no lineal $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ no tiene pues influencia a este nivel y obtenemos un control a priori para las soluciones

$$|\mathbf{u}(t)| \leq C_1, \qquad \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2\,dt \leq C_2, \tag{8.32}$$

con constantes dependientes de las normas de $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{f}$ pero no de T. Leray utilizó estas estimaciones para construir su teoría débil.

• Trabajando de nuevo formalmente, suponemos que $\mathbf{u}(t) \in D(A)$ y multiplicamos por $\Delta\mathbf{u}(t)$. Tras integrar por partes obtenemos esta vez

$$\left(\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, A\mathbf{u}(t)\right) + \nu((\mathbf{u}(t), A\mathbf{u}(t))) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), A\mathbf{u}(t)) = (\mathbf{f}(t), A\mathbf{u}(t)). \tag{8.33}$$

Tras algunas manipulaciones la relación puede ser escrita como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu|A\mathbf{u}(t)|^2 + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), A\mathbf{u}(t)) \leq \frac{1}{\nu}|\mathbf{f}|^2 + \frac{\nu}{4}|A\mathbf{u}(t)|^2. \tag{8.34}$$

¡El término no lineal no desaparece ahora!

• **Final feliz para $n = 2$.** Seguimos en dimensión dos estimándo el término no lineal mediante las inmersiones de Sobolev en la forma:

Lema 4 *Si $n = 2$ y $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in D(A)$, $\mathbf{w} \in H$, entonces*

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq C|\mathbf{u}|^{1/2}\|\mathbf{u}\|^{1/2}\|\mathbf{v}\|^{1/2}|A\mathbf{v}|^{1/2}|\mathbf{w}|$$

Usando este lema, llegamos a

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2 + \frac{3}{2}\nu|A\mathbf{u}(t)|^2 \le \frac{2}{\nu}|\mathbf{f}|^2 + C|\mathbf{u}(t)|^{1/2}\|\mathbf{u}(t)\||A\mathbf{u}(t)|^{3/2} \tag{8.35}$$

Usando la desigualdad de Young acotamos el último término por

$$\frac{2}{\nu}|A\mathbf{u}(t)|^2 + C'|\mathbf{u}|^2\|\mathbf{u}\|^4.$$

Llegamos pues a

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu|A\mathbf{u}(t)|^2 \le \frac{2}{\nu}|\mathbf{f}|^2 + C''|\mathbf{u}(t)|^2\|\mathbf{u}(t)\|^4. \tag{8.36}$$

Este es el momento importante: la estimación obtenida, junto con las ya obtenidas (8.32), permite probar mediante una técnica llamada "desigualdad de Gronwall" que

$$\|\mathbf{u}(t)\| \le C_3, \qquad \int_0^T |A\mathbf{u}(t)|^2\,dt \le C_4, \tag{8.37}$$

con constantes dependientes de las normas de $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{f}$, pero no de T. La primera de ellas es una estimación de la norma L^2 de los gradientes de velocidad (en particular de la vorticidad) que es uniforme en el tiempo. La segunda controla derivadas segundas en L^2 del espacio-tiempo.

Estas estimaciones son suficientes para actuar en los problemas aproximados, que usualmente son aproximaciones finito-dimensionales del tipo llamado Galerkin, pasar al límite y demostrar la existencia de solución global regular para datos regulares.

Es muy interesante ver un segundo como se aplica el "truco Gronwall". Llamemos $Y(t) = 1 + \|\mathbf{u}(t)\|^2$. Entonces la estimación (8.36) implica que

$$\boxed{Y'(t) \le C(t)Y(t)} \tag{8.38}$$

una inecuación diferencial ordinaria (IDO) de tipo cuadrático, muy parecida a nuestro ejemplo elemental de explosión $u' = u^2$, salvo por el signo de desigualdad, que va en la dirección adecuada y no causa problemas, y por el coeficiente

$$C(t) = C''|\mathbf{u}(t)|^2\|\mathbf{u}(t)\|^2,$$

del cual sabemos que es integrable en el tiempo debido a (8.32). Gronwall nos dice que en esas circunstancias $Y(t)$ está acotado superiormente independientemente del tiempo.

• **Final no feliz para $n = 3$.** En dimensión tres estimamos el término no lineal mediante las inmersiones de Sobolev de forma menos efectiva:

Lema 5 *Si $n = 3$ y $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in D(A)$, $\mathbf{w} \in H$, entonces*

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| \le C\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|^{1/2}|A\mathbf{v}|^{1/2}|\mathbf{w}|$$

Manipulaciones como las anteriores conducen a una IDO de la forma

$$\boxed{Y'(t) \leq Y^3(t)} \tag{8.39}$$

que no excluye la explosión en tiempo finito. Omitimos los detalles pues nos parece que ya hemos abusado de la atención del lector, pero cf. [31].

9 En caso de haber explosión

Enfrentados a la posibilidad de explosión en tiempo finito, los investigadores han querido saber pormenores sobre tal fenómeno si llegara a producirse. Hay dos tipos de resultados relacionados con este tema

9.1 Geometría del conjunto singular

Se supone que $\mathbf{f}$ es regular (o nula) y $\mathbf{u}_0$ regular y se define el *conjunto singular* E de la solución débil $\mathbf{u}$ como el conjunto de puntos $(\mathbf{x}, t)$ tales que $\mathbf{u}$ no es acotada en ningún entorno de $(\mathbf{x}, t)$. En caso $\mathbf{u}$ fuese acotada en un entorno no es difícil probar que $\mathbf{u}$ es C^∞ en ese entorno.

En 1976 V. Scheffer introdujo ideas de teoría geométrica de la medida para estimar el conjunto E. Esta estimación fue mejorada por L. A. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg en 1982. Definen medidas de Hausdorff parabólicas $\mathcal{P}_r$ en el espacio-tiempo y concluyen que para toda solución con unas condiciones de crecimiento razonables

$$\mathcal{P}_{5/3}(E) = 0. \tag{9.40}$$

Existe una prueba simplificada por Lin [21] de este resultado, que muchos consideran el más importante tras los trabajos de Leray. Dado que la medida parabólica cuenta el tiempo como espacio al cuadrado (9.40) impide singularidades que se propaguen a lo largo de líneas de la forma $\mathbf{x} = \varphi(t)$. Concluimos: un conjunto singular, de existir, es un conjunto ralo y raro.

9.2 Formas y tasas de divergencia

Otra posibilidad de dar luz al problema es la de investigar qué pasaría en caso de explosión con diversas cantidades relevantes, como la vorticidad, y cuáles podrían ser las tasas y perfiles de explosión. En el primer aspecto los trabajos más notables se refieren al problema gemelo de Euler; podemos citar el famoso artículo de Beale-Kato-Majda en 1984 [4], que dice que el supremo espacial de la vorticidad ha de diverger cuando se integra en tiempo.

En cuanto a los perfiles, tras mucho especular con perfiles autosemejantes, hoy se buscan perfiles mucho más complejos.

10 Explosión para Ecuaciones en Derivadas Parciales

10.1 Blow-up y combustión

El estudio del blow-up no se ha encontrado con tantas dificultades en otros tipos de EDPs y ha adquirido notable madurez en algunas áreas. Quizá el área más estudiada sean las ecuaciones de Reacción Difusión, que en la forma más simple se escriben

$$u_t = \Delta u + f(u), \tag{10.41}$$

donde f es como en la sección 7. Añadimos al fenómeno evolutivo de la ODE la complicación de la estructura espacial (la dependencia de $\mathbf{x}$). La motivación aplicada viene de una disciplina relacionada con los fluidos, la Teoría de la Combustión. Refiero al lector a los libros de Bebernes and Eberly [5] y Samarskii et al. [27], o al reciente artículo survey de V. Galaktionov y el autor [12], donde se organiza el examen el campo desde el punto de vista de la llamada "Lista de Preguntas": en qué problemas se da el blow-up, cuándo ocurre, dónde, cómo, a qué velocidad diverge la solución, es posible continuar la solución y el problema de describir las avalanchas térmicas. A lo que se añade el problema computacional con sus problemas de estabilidad anexos.

10.2 Blow-up y el Problema Clay número 3

Nuestro último tema se refiere a un desarrollo reciente y más bien espectacular. El Problema 3 de la lista Clay llama a resolver la conjetura de Poincaré sobre la estructura de las 3-variedades. Una forma de ataque en el intento de clasificación ha sido el hacer evolucionar superficies riemannianas mediante un "motor" relacionado con su curvatura. R. Hamilton [13, 14] propuso utilizar el flujo de Ricci, lo que le condujo a un problema de singularidades en tiempo finito, es decir a un problema de blow-up. La aparición no es casual: estas ecuaciones se parecen algo a los casos aquí mencionados de Navier-Stokes y Reacción-Difusión en el sentido de que todas ellas son *versiones no lineales de la ecuación del calor* $u_t = \Delta u$.

Las noticias recibidas a lo largo de 2004 apuntan a que David Perelman, matemático ruso, ha resuelto la conjetura de Poincaré (o está muy cerca de hacerlo) [1]. Lo que confirma el extraordinaria importancia de los problemas de blow-up en las matemáticas actuales[10].

[10] Nota de lectura: el análisis de singularidad hecho por Perelman se basa en la autosemejanza.

11 Comentarios finales

Terminamos estas notas con algunas cuestiones que suscita este reto matemático.

- ¿Se resolverá el problema de Navier-Stokes en los próximos años?

Hay opiniones para todos los gustos. Charles Fefferman termina así su report para el Clay Institute: *"Los métodos estándar de las EDPs parecen inadecuados para resolver el problema. Probablemente necesitamos nuevas y profundas ideas"*. Pues ya lo saben, busquen nuevas ideas.

- ¿Tendrá consecuencias prácticas la solución del reto?

Las opiniones son también de lo más diverso a este respecto: muchos investigadores limitan su respuesta al campo de la matemática pura y para ellos los grandes retos matemáticos son la sal de la profesión, al acicate para elaborar nuevas y profundas teorías, como ha sucedido con el Teorema de Fermat, cuya utilidad *inmediata* no puede ser menor para la vida diaria (pero nos puede dar una sorpresa).

Este no es el caso de las ecuaciones de los fluidos, que intervienen en aspectos cruciales de la vida moderna, de los que destacamos: la meteorología, el estudio del clima, la aeronáutica, la oceanografía, la hidráulica, el estudio del flujo sanguíneo, la explotación de los recursos de gas y petróleo y el control de la contaminación. En todos estos campos el esfuerzo computacional que se está haciendo es enorme y continuo. Y es preciso señalar que no solo se trata evidentemente de los modelos incompresibles sino que incluye los modelos compresibles, los fluidos no newtonianos y los fluidos en medios porosos que estudia el autor de las presentes notas. Los protagonistas del esfuerzo práctico son conscientes de la falta de una adecuada comprensión teórica de los sutiles mecanismos que subyacen a los complicados fenómenos observados.

¿Cambiará pues nuestra comprensión teórica del SNS este panorama? Lo dejo a la consideración del amable lector.

Este texto tiene su origen en una conferencia impartida en la Academia de Ciencias de Zaragoza el 15 de enero de 2004.

Referencias

[1] M. ANDERSON. *Geometrization of 3 - manifolds via the Ricci Flow,* Notices Amer. Math. Soc, **51**, 2 (2004), pp. 184–193 *(Breve e intensa presentación del problema de Poincaré y la obra de D. Perelman).*

[2] V. ARNOLD, M. ATIYAH, P. LAX, B. MAZUR, "Mathematics: Frontiers and Perspectives", AMS Publications, 2000.

[3] G.K. BATCHELOR, "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge Univ. Press, 1967.

[4] J. T. BEALE, T. KATO, A. MAJDA, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the* 3*-D Euler equations*. Comm. Math. Phys. 94 (1984), no. 1, 61–66.

[5] J. BEBERNES, D. EBERLY. "Mathematical Problems from Combustion Theory", Appl. Math. Sci. **83**, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] L. A. CAFFARELLI, R. KOHN, L. NIRENBERG, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Applied Maths., **35** (1982), pp. 771-831.

[7] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN, "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics", Springer-Verlag, 1980.

[8] P. CONSTANTIN, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics,* in [10], pages 353–360.

[9] P. CONSTANTIN, C. FOIAS, "Navier Stokes equations", Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago press, Chicago, 1988.

[10] B. ENGQUIST (Editor), W. SCHMID (Editor), "Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond", Springer Verlag, Berlin, 2001.

[11] C. FEFFERMAN. Clay Mathematics Institute, Millenium Problems. Official problem description, http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/.

[12] V. A. GALAKTIONOV, J. L. VÁZQUEZ. *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems A **8**, 2 (2002), 399–433. (A Special Issue: *Current Developments in PDE,* Guest Editors: Carlos Conca, Manuel del Pino, Patricio Felmer, and Raúl Manásevich) (Proceedings of the Summer Course in Temuco, Chile, jan. 1999).

[13] R. HAMILTON. *Three manifolds of positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306.

[14] R. HAMILTON. *The formation of singularities in the Ricci flow,* Surveys in Differential Geometry, vol. 2, International Press, 1955, pp. 7–136.

[15] "Mathematical Developments arising from Hilbert Problems", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII, Amer. Math. Soc, Providence, 1976.

[16] A. Jackson, *Mathematical challenges of the XXI century*, Notices Amer. Math. Soc., vol. **47**, no 10 (2000), pp. 1271-1273.

[17] T. Kato, *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, Archive Rat. Mech. Anal. **25** (1967), pp. 188–200.

[18] O.A. Ladyzhenskaya, "The mathematical theory of Viscous Incompressible flow", Gordon and Breach, 1969.

[19] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Mecánica de Fluidos", Reverté, Barcelona, 1991.

[20] J. Leray, (L1) *Étude de diverses équations non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, Jour. Math. Pures Appl. **12** (1933), pp. 1–82.

(L2) *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, Jour. Math. Pures Appl. **13** (1934), pp. 331–418.

(L3) *Essai sur le mouvement d'un liquide emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), pp. 193–248.

(L4) "Oeuvres scientifiques", Tome II, Équations aux dérivées partielles réelles et mécanique des fluides. Reedición SMF, 1998.

[21] F. H. Lin, *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem*, Comm. Pure Appl. math. **51**, (1998), 241-257.

[22] J. L. Lions, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod, Paris, 1969.

[23] P.L. Lions, "Mathematical models in fluid mechanics", 2 volúmenes, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996/1998.

[24] A. Majda, A. Bertozzi, "Vorticity and incompressible flows", Cambridge Univ. Press, 2002.

[25] C.L.M.H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides,* Mém. Acad. Sci. Inst. France **6** (1822), 380–440.

[26] I. Newton, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", Pepys, London, 1687. En castellano: "Principios matemáticos de la Filosofía Natural", Alianza Ed., Madrid, 1987.

[27] A. A. Samarskii; V. A. Galaktionov; S. P. Kurdyumov; A. P. Mikhailov. "Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations", Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English transl.: Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[28] V. Scheffer, *Turbulence and Hausdorff dimension,* in "Turbulence and the Navier-Stokes Equations", Lecture Notes in Math. **565**, Springer Verlag, 1976, pp. 94–112.

[29] G.G. Stokes, *On the theories of internal friction of fluids in motion*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **8** (1845).

[30] R. Temam, “Navier-Stokes equations”, North-Holland, New York, 1979.

[31] R. Temam, “Navier-Stokes equations and Nonlinear functional analysis”, SIAM, Philadelphia, 1983.

[32] J. L. Vázquez *The importance of Mathematics in the development of Science and Technology*, Boletín Soc. Esp. Mat. Aplicada, no 19, 2001, pg. 69–112. Versión española retocada: ”*Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera*, http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/

[33] J. L. Vázquez, “Fundamentos matemáticos de la Mecánica de Fluidos”, Notas Curso Doct. UAM, 2003. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/coursejlv.html

Dirección:

Juan Luis Vázquez, Dpto. de Matemáticas,

Univ. Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, España

Tel. 34-91-3974935, FAX 34-91-3974889

Correo electrónico: juanluis.vazquez@uam.es

htpp://www.uam.es/juanluis.vazquez