Los Problemas Matemáticos del Milenio

En una conferencia pública en París el 24 de Mayo del año 2000 el Clay Mathematics Institute de Boston (USA) anunció siete premios de un millón de dólares cada uno a quienes resolviesen, a satisfacción de la comunidad matemática internacional, siete célebres problemas matemáticos que permanecían sin solución en esas fechas y, que a juicio de un selecto comité de profesionales, estaban entre los más difíciles e importantes de la matemática en ese momento. En el comité figuraban Arthur Jaffe (Harvard), presidente que fué de la American Mathematical Society, y actualmente presidente-fundador del Clay M. Institute, y los medalla Fields, Michael Atiyah (Cambridge), Edward Witten (Princeton) y Alain Connes (París). Entre los proponentes de problemas concretos figuraban, además, los conocidos matemáticos Enrico Bompieri, John Milnor y Andrew Wiles. Se hizo coincidir el anuncio con el centenario de la presentación de los "Problemas de Hilbert" a que nos referiremos enseguida.

En diversos lugares del mundo, y en particular en la Universidad de Texas en Austin, se celebró el acontecimiento con diversas conferencias por especialistas sobre todos estos problemas. Las conferencias de Texas pueden consultarse en video *on line* en la dirección: `http://www.claymath.org/annual_meeting/2000_Millennium_Event/Video/`

En una reunión de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza en octubre de 2003 se acordó que la Academia organizase unas conferencias donde especialistas nacionales explicarían al público científico universitario zaragozano el significado de esos problemas y el estado actual de su posible solución; a esos efectos la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad colaboró activamente con la Academia en la selección de los conferenciantes y en el acceso a los mismos. Las siete Conferencias tuvieron lugar en la Facultad de Ciencias de Zaragoza en el Otoño/Invierno de 2003/04 y contaron con una gran asistencia de público. Se pidió a los conferenciantes que preparasen una versión escrita de sus intervenciones, que aparecería como una edición especial de la Revista de la Academia, y éste es el número monográfico que ahora se presenta.

En conversaciones con los profesores de la Sección de Matemáticas se acordó dejar de lado los dos problemas más esotéricos propuestos por el Clay M. Institute, y reemplazarlos por otros dos problemas importantes, que habían sido resueltos recientemente, y que tenían quizá más interés para el estudioso actual. En estas Actas se incluyen también naturalmente exposiciones de estos dos problemas.

El anuncio del Clay M. Institute en París en el año 2000 fue en conmemoración de los 23 célebres problemas propuestos por el gran matemático alemán David Hilbert con motivo del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas (París, agosto 1900); él los presentó como un reto para la matemática del siglo entrante y, en efecto, la mayor parte de esos problemas se han ido resolviendo a lo largo del pasado siglo veinte.

El primer International Congress of Mathematics (ICM) había tenido lugar en Zürich en 1897; actualmente las reuniones del ICM tienen lugar cada cuatro años; el congreso del año 2002 tuvo lugar en Beijing (China), y el de 2006 está previsto en Madrid, siendo la primera vez que este congreso tenga lugar en España.

Aunque no es cuestión de comentar en detalle los problemas de Hilbert, digamos que en su lectura de presentación en Paris figuraron solamente diez, pero que en la redacción escrita subsiguiente aparecieron 23; hay otro problema que Hilbert había comentado en París pero que no figuró en la numeración final (la conjetura de Fermat, véase luego) y se habla también de un "24" problema de Hilbert. Casi todos estos problemas han sido esencialmente resueltos en el siglo que ha transcurido, como hemos dicho, alguno inmediatamente (M. Dehn resolvió ya en 1905 el Problema Tres de Hilbert, "Sobre la congruencia de tetraedros"), otros estaban enunciados de forma insuficientemente precisa ("Axiomática de la Física", Problema Seis (H.)), pero uno destaca por encima de todos, porque no sólo arranca de 1859, sino que sigue aun figurando como asignatura pendiente fundamental ¡al comenzar el año 2005! Es, como el lector habrá quizá adivinado, el Problema Ocho (H.): la Hipótesis de Riemann (sobre la localización de los ceros complejos de la función $\zeta(s)$. Naturalmente, ese problema figura también como Problema Uno[1] en la lista del Clay M. Institute, ha sido incorporado por indicación de E. Bompieri, y es debidamente expuesto en estas Actas por una especialista zaragozana, Catalina Calderón. Si la conjetura de Riemann es cierta, se dispone de una fórmula asintóticamente exacta para la ley de distribución de los números primos, resultado que va bastante más allá del teorema de los números primos de J. Hadamard y C. de la Vallée-Poussin (1896).

Comentaremos ahora brevemente las alteraciones, es decir, los dos problemas Clay no incluidos, y el resto de los mismos.

Problema Seis (Clay M. Institute). "La conjetura de Birch y de Swinnerton-Dyer". La conjetura se refiere a los puntos racionales de ciertas curvas elípticas. Tiene relación con la función Zeta de Riemann, con el último teorema de Fermat (del que se habla enseguida), etc.

[1]Seguimos en esta Introducción el orden de numeración de los Problemas Clay propuesto por K. DEVLIN en "The Millennium Problems" (ver la Bibliografía al final de esta Introducción), que nos parece más adecuada que la ordenación original establecida, un poco erráticamente, por el Clay M. Institute.

Problema Siete (Clay M. Institute). “La conjetura de Hodge”. El lector conocerá la figura del matematico inglés W. Hodge siquiera sea sólo por el operador “estrella” de Hodge, dual de la diferencial exterior en geometría diferencial, o el diamante de Hodge, ordenación de los números de Betti dobles, en geometría algebraica. He aquí el enunciado preciso de la conjetura, en el terso lenguaje de las matemáticas:

> *Toda forma diferencial armónica (dentro de un cierto tipo) en una variedad algebraica proyectiva no singular es una combinación racional de clases de cohomología de ciclos algebraicos.*

Completamos ahora la lista de los problemas tratados. El Problema Dos (Clay M. Ins.) lleva por título “La teoría de Yang-Mills y la Hipótesis de Masa no Nula”; es un tema genuino y capital de Física Teórica, propuesto por Jaffe y Witten, y desarrollado aquí por Manuel Asorey, del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza. El Problema Tres (Clay M. Ins.) es el único problema que hace referencia directa a los ordenadores: “El problema P versus el NP” y fue desarrollado por Elvira Maldonado, del Centro Politécnico Superior de la Universidad de Zaragoza. La motivación física domina también el Problema Cuatro (Clay M. Ins.): “Las Ecuaciones de Navier-Stokes”, cuya brillante exposición es debida a Juan Luis Vázquez, de la Universidad Autónoma de Madrid.

La conferencia final en Zaragoza corrió a cargo de María Teresa Lozano, de nuestra Universidad y Académica, una especialista mundial en la Conjetura de Poincaré, el Problema Cinco (Clay M. Ins.). El tópico es especialmente caliente por las pretensiones del ruso Gregory Perelman, que parece haber resuelto la conjetura en sentido positivo, aunque aún no hay un veredicto definitivo por parte de la comunidad matemática. La conjetura de Poincaré dice que si una variedad cerrada de tres dimensiones es simplemente conexa, es homeomorfa a la esfera S^3.

Es de destacar que la técnica de resolución del ruso, originalmente debida a R. Hamilton (1982), está basada en la ecuación del grupo de renormalización, una conocida herramienta de la teoría cuántica de campos en física (Gell-Mann; Wilson).

Y ahora viene una pequeña explicación sobre los dos problemas que han sustituído a los Problemas (Clay) Seis y Siete; a saber, la clasificación de los grupos finitos simples y el último teorema de Fermat.

Clasificación de los grupos finitos simples. Desde que Evariste Galois en 1829 (Galois reescribió varias veces su trabajo fundamental, ya que las primeras versiones se las perdieron; la última en la noche víspera de su muerte en duelo por una cocotte, el 31 de mayo de 1832) determinó la relación entre la estructura del grupo de simetría $G \subset S_n$ del conjunto de las raíces de un polinomio $P_n(z)$ y la solubilidad del mismo por radicales, la estructura de los grupos finitos ha sido estudiada a fondo por legiones de matemáticos, comenzando por C. Jordan hacia 1870 y siguiendo por F. Klein, G. Burnside y otros aun en el s. XIX. En particular, se conocen de antiguo dos familias infinitas de grupos finitos simples, a saber los grupos cíclicos de orden primo $\mathbb{Z}_p$ (se anima al lector a que compruebe que son los únicos grupos Abelianos finitos simples), y el grupo de las permutaciones pares (o grupo alternante A_n cuando $n > 4$) cuyo orden es $n!/2$, que es el resultado de Galois.

Tras más de un siglo, y la colaboración de cientos de matemáticos, el resultado final, es decir, la lista de todos los grupos finitos simples se obtuvo completa hacia 1983, como el magnífico relato de Javier Otal (Universidad de Zaragoza) explica en detalle. Hay cuatro familias infinitas y 26 grupos esporádicos, de momento muy enigmáticos. Naturalmente, hay uno máximo, el llamado Monstruo, M o el Gigante Amigo (a veces F_1) de Fischer-Griess; su orden es

$$\#M \approx 8 \cdot 10^{54}$$

y hay un M-módulo (= representación compleja irreducible) de dimension 196883, número que es el primer término del desarrollo en serie de Laurent de una funcion modular .... Todo este asunto forma parte de las conjeturas de McKay, probadas en parte por Borchers, que estamos lejos de entender aun en su totalidad.

El último teorema de Fermat. La conjetura que P. de Fermat dijo haber probado, pero que no publicó, dice que no hay solución entera a la ecuación diofántica $x^n + y^n = z^n$ para $n > 2$. No podía faltar en nuestra colección, por la gran difusión que ha tenido en los medios la demostración encontrada por A. Wiles en 1993, que se probó ser incompleta, privando así a su autor de la medalla Fields (que exige la edad del recipendario por debajo de los 40), pero que fue completada poco después por él mismo en colaboración con R. Taylor (1996). La charla de Fernando Montaner (Universdiad de Zaragoza) sobre la conjetura de Fermat no ha sido posible incluirla en esta colección, y aparecerá verosimilmente como artículo normal en otro número de la Revista de la Academia.

Queremos destacar, para terminar, la gran relación con la Física que tienen casi todos estos problemas del milenio. Por ejemplo, los problemas Cuatro (Navier-Stokes) y el Dos (Yang-Mills) arrancan directamente de la física. El Problema Tres (P vs. NP) trata sobre ordenadores, con gran aplicación práctica en criptografía. Otros, como el Uno (Riemann) y el Cinco (Poincaré) se relacionan directamente con problemas físicos muy importantes, como la distribución estadística de los niveles energéticos de los núcleos atómicos complejos (Wigner-Dyson) y la integración funcional sobre membranas (Polyakov), respectivamente. La Física ha sido siempre fuente de inspiración para las matemáticas, y no olvidemos que los tres matemáticos más grandes de la historia, según consenso, que son Arquímedes, Newton y Gauss, hicieron grandes contribuciones a la Física.

Agradecimientos

Quiero agradecer aquí, primero, el gran esfuerzo realizado por los conferenciantes, incluyendo la redacción de sus charlas. La ayuda específica recibida, entre otros, de José F. Cariñena y Julio Abad de Física Teórica, así como de Mariano Gasca de Matemática Aplicada y Jesús Bastero y Alberto Elduque por el Departamento de Matemáticas. El Presidente de la Academia, Horacio Marco Moll, ha acogido con gran entusiasmo la iniciativa y ha inaugurado y clasurado el ciclo. La ayuda institucional de la Facultad de Ciencias, personificada por el Decano Antonio Elipe es difícil de reconocer suficientemente. A Elipe es de agradecer, además, la cuidadosa labor de edición de los artículos de esta colección, y a Cariñena la revisión de esta Introducción.

Bibliografía.-

De la extensa biblografía sobre los Problemas de Hilbert y del Clay M. Institute seleccionamos lo siguiente:

1. Benjamin H. YANDELL. “The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers”. A.K. Peters ed. Natick (MA), USA 2002

2. Keith DEVLIN. “The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time”. Basic Boooks, N.Y. 2002

3. Jeremy J. Gray. “El reto de Hilbert: Los 23 problemas que desafiaron a la matemática”. Crítica, Barcelona 2003

4. El website del Clay M. Insitute con el anuncio y descripción particular de cada problema es `www.claymath.org`

   La literatura sobre la conjetura de Riemann es enorme; destaquemos las siguientes referencias recientes:

5. “Riemann Selecta”. Edición y estudio por José FERREIRÓS. Edición del CSIC, Madrid 2001. Contiene el artículo fundamental de Riemann de 19859 sobre la distribución de números primos en alemán y en español.

6. Marcus du SAUTOY. “The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics”. Harper, N.Y. 2003

7. Karl SABBAGH. “The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics”. Farrar, N.Y. 2002

8. John DERBYSHIRE. “Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics”. J. Henry Press, Washington D.C., 2003.

Señalemos el libro-fuente sobre la solución de A. Wiles de la conjetura de Fermat:

9. Simon SINGH. "Fermat´s Last Theorem: The story of a Riddle that confounded the World´s Greatest Minds for 358 Years". Fourth State, London 1997.

La conjetura de Poincaré está en el punto de mira de todos los matemáticos a raíz de los trabajos del ruso Gregory Perelman, como bien describe Maite Lozano en su conferencia. Algunas referencias técnicas recientes son:

10. John MILNOR. "Towards the Poincaré conjecture and the Classification of 3-Manifolds". Notices of the Am. Math. Soc. **50**, 1226-1233 (2003).

11. Michael T. ANDERSON. "Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow". Notices of the Am. Math. Soc. **51**, 184-193 (2004)

12. John W. MORGAN. "Recent Progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds". Bulletin of the Am. Math. Soc. **42**, 52-78 (2005)

Zaragoza, el día de Inocentes, 2004

Luis Joaquín BOYA

Departamento de Física Teórica, Universidad de Zaragoza
Real Academia de Ciencias de Zaragoza