

# Estabilidad de tethers electrodinámicos en órbita elíptica inclinada

Y. N. Andrés y J. Peláez

Grupo de Dinámica de Tethers (GDT).

Departamento de Física Aplicada a la Ingeniería Aeronáutica.

Universidad Politécnica de Madrid.

28040 Madrid, Spain.

## Resumen

En órbita circular, la vertical local gira uniformemente alrededor de la normal a la órbita y constituye una posición de equilibrio estable para tethers inertes. En órbita elíptica, sin embargo, el giro no es uniforme y el equilibrio del tether se rompe: abandonado en la vertical local, inicia un movimiento de libración autoexcitado. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento tienen soluciones periódicas en lugar de posiciones de equilibrio. Los tethers electrodinámicos nunca tienen posiciones de equilibrio, ni aun en órbita circular, pero con modelos sencillos del campo magnético y la corriente del tether, exhiben soluciones periódicas. Aquí se analiza la acción combinada de ambos efectos: excentricidad de la órbita y fuerzas electrodinámicas. Se han detectado nuevas soluciones periódicas y se ha analizado su estabilidad, que determina la estabilidad global del sistema.

**Palabras clave y expresiones:** Tethers electrodinámicos, órbitas elípticas, trayectorias periódicas, análisis de estabilidad.

**MSC:** 70F40, 70K65.

## 1 Introducción

Recientemente, se ha detectado una nueva inestabilidad dinámica que afecta a tethers electrodinámicos operando en órbitas *circulares* inclinadas (ver [4, 10, 13, 14]). Usando modelos sencillos (dipolo alineado para el campo magnético terrestre, corriente eléctrica constante a lo largo de la órbita y *dumbbell model* para el tether), las ecuaciones que

gobiernan la dinámica del sistema son forzadas por términos periódicos cuyo periodo coincide con el orbital. Además de la inclinación, aparece un parámetro adimensional  $\varepsilon$ , cociente del par electrodinámico y el producido por el gradiente de gravedad y las fuerzas de inercia (ambos actúan en el centro de masas del sistema). Si  $\varepsilon$  es cero, el sistema tiene posiciones de equilibrio estables con el tether en la vertical local. Si  $\varepsilon \neq 0$ , las ecuaciones del movimiento presentan soluciones periódicas, cuyo periodo coincide, debido a la frecuencia de los términos forzantes, con el periodo orbital (o un múltiplo suyo). Usando técnicas asintóticas (si  $\varepsilon \ll 1$ ) y métodos numéricos (si  $\varepsilon \approx O(1)$ ), se han realizado análisis previos para órbita circular. Ellos muestran la existencia de una solución periódica especial que, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tiende a la posición de equilibrio. En ausencia de amortiguamiento o control, esta solución periódica es inestable. Esta inestabilidad juega un papel crucial en el movimiento del tether relativo al centro de masas del sistema. Con modelos más elaborados, se presenta una situación similar ([15]).

Desde el comienzo de las misiones espaciales se han utilizado órbitas elípticas. En ellas, la estabilidad del movimiento de actitud del satélite resulta de especial relevancia. En órbita circular, los satélites estabilizados por gradiente de gravedad presentan posiciones de equilibrio en las que los ejes principales de inercia del satélite coinciden con los ejes del triedro orbital y algunas de ellas son estables. Los trabajos de Modi y Brereton [7, 8] muestran que las posiciones de equilibrio desaparecen en órbita elíptica. En su lugar, aparecen soluciones periódicas y la dinámica del sistema se complica.

Para un tether, y debido a su gran longitud, la estabilización por gradiente de gravedad es fuerte. Sin embargo, en órbita elíptica, las posiciones de equilibrio del tether desaparecen. En tal caso, en las ecuaciones que gobiernan el movimiento relativo al centro de masas del sistema, los efectos de la excentricidad aparecen como términos periódicos forzantes, que cambian con el periodo orbital y se anulan si la excentricidad tiende a cero. Así, el efecto principal de una excentricidad no nula se traduce en una perturbación de las libraciones que tienen lugar en el caso circular.

El objetivo de este trabajo es analizar la combinación de los dos efectos: *excentricidad* de la órbita y *fuerzas electrodinámicas*. En tal caso, aparecen tres parámetros independientes: la excentricidad  $e$ , la inclinación orbital  $i$  y el parámetro, ya mencionado,  $\varepsilon$ . A primera vista, la excentricidad podría reforzar la inestabilidad causada por las fuerzas electrodinámicas, pero no puede descartarse que la presencia de una excentricidad no nula suavice la inestabilidad en un rango determinado de valores de los parámetros. En cualquier caso, este punto se clarificará con un análisis detallado que consta de tres etapas lógicas:

1. En la primera, el tether sigue una órbita elíptica ( $e \neq 0$ ) *sin fuerzas electrodinámicas*. Se obtienen algunas familias de órbitas periódicas, se determina su estabilidad lineal

y se muestra cómo varían sus propiedades de estabilidad con la excentricidad.

2. En la segunda, se considera la influencia de las fuerzas electrodinámicas  $\varepsilon \neq 0$ .
3. Finalmente, se compara detalladamente esta solución con la obtenida en el caso circular.

La primera etapa no proporciona nuevos resultados. Las soluciones periódicas involucradas ya fueron obtenidas en [7] y sus propiedades de estabilidad estudiadas en [8]. Son, por tanto, resultados conocidos. No obstante, se obtendrán de nuevo, utilizando un enfoque más acorde con el análisis posterior. Se utiliza un algoritmo numérico basado en el método de Poincaré de continuación de órbitas periódicas que permite obtener las órbitas periódicas de cada familia, y sus propiedades de estabilidad, en función de la excentricidad orbital.

## 2 El *Dumbbell Model*

Sea  $Ex_1y_1z_1$  la referencia Geocéntrica Inercial con origen en el centro de masas de la Tierra  $E$ , cuyo eje  $Ex_1$  apunta al punto vernal y con el eje  $Ey_1$  contenido en el plano ecuatorial. El eje  $Ez_1$  forma un triedro dextrógiro. Se describirá el movimiento del sistema relativo a esta referencia.

Se utilizarán modelos simples para subrayar los efectos físicos involucrados en el problema. Así, se considera el sistema formado por dos masas puntuales unidas por una varilla rígida, el tether, de longitud  $L$  y masa  $m_t$ , alineadas según un vector unitario  $\mathbf{u}$  (ver figura 1). La masa superior será  $m_2$  y la inferior  $m_1$ . El centro de masas  $G$  del sistema sigue una órbita kepleriana de excentricidad  $e$ , e inclinación  $i$ . La geometría de masas del sistema se describe mejor mediante los parámetros  $(m, \phi, \Lambda_t)$ , en lugar de  $(m_1, m_2, m_t)$ . Aquí,  $m$  es la masa total del sistema:  $m = m_1 + m_2 + m_t$ .  $\Lambda_t = m_t/m$  es el cociente entre la masa del tether y la masa total. El parámetro  $\phi$ , definido por

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{m} \{m_1 + \frac{1}{2}m_t\} \quad \Rightarrow \quad m_1 = m \left( \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \Lambda_t \right) \quad (1)$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{m} \{m_2 + \frac{1}{2}m_t\} \quad \Rightarrow \quad m_2 = m \left( \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \Lambda_t \right) \quad (2)$$

describe las masas extremas y su valor mínimo (máximo) se corresponde con  $m_2 = 0$  ( $m_1 = 0$ ), respectivamente. Así,  $\phi \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$  y los extremos de este intervalo sólo dependen de  $\Lambda_t$

$$\phi_{min} = \arcsen\left(\sqrt{\frac{\Lambda_t}{2}}\right), \quad \phi_{max} = \arccos\left(\sqrt{\frac{\Lambda_t}{2}}\right).$$

Si  $\Lambda_t = 0$ ,  $\phi_{min} = 0$  y  $\phi_{max} = \pi/2$ . Si se fijan  $\Lambda_t$  y  $m$ , al variar  $\phi$  en el intervalo  $[\phi_{min}, \phi_{max}]$  desde  $\phi_{min}$  a  $\phi_{max}$ , la masa de las partículas se redistribuye y pasa de la

inferior a la superior, sin que se altere la masa total del sistema. Por último, se satisface que  $\phi = \pi/4$  si  $m_1 = m_2$ .

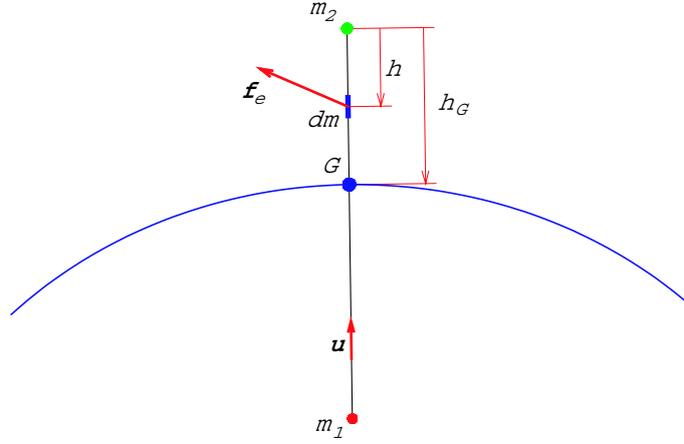


Figura 1: Distribución de masas del sistema.

La posición del centro de masas  $G$  y el momento de inercia de todo el sistema relativo a un eje normal al tether por  $G$  son:

$$h_G = L \cos^2 \phi, \quad I_s = \frac{1}{12} m L^2 (3 \sin^2 2\phi - 2\Lambda_t) \quad (3)$$

y ya que el tether se modela como un sólido rígido, el movimiento del centro de masas del sistema  $G$  se desacoplará del problema de actitud.

### 2.1 Movimiento del centro de masas

Las únicas fuerzas a considerar son las gravitatorias y las electrodinámicas. Se supone que  $m$ , la masa total del sistema, es *grande*. Como consecuencia, el decaimiento orbital debido a la resistencia electrodinámica es despreciable y el centro de masas  $G$  seguirá un elipse kepleriana sin perturbar, de semieje mayor  $a$ . En coordenadas polares  $(r, \nu)$  dentro del plano orbital, la ecuación de la órbita será

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (4)$$

donde  $\nu$  es la anomalía verdadera medida desde el perigeo.

### 2.2 Dinámica de actitud

Sea  $Gx_1y_1z_1$  un sistema de referencia con origen en el centro de masas del sistema y ejes paralelos a los de la referencia  $Ex_1y_1z_1$ . El movimiento relativo al centro de masas, esto es, el movimiento relativo a  $Gx_1y_1z_1$ , está gobernado por la ecuación de momento cinético:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{H}_G) = \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_E, \quad (5)$$

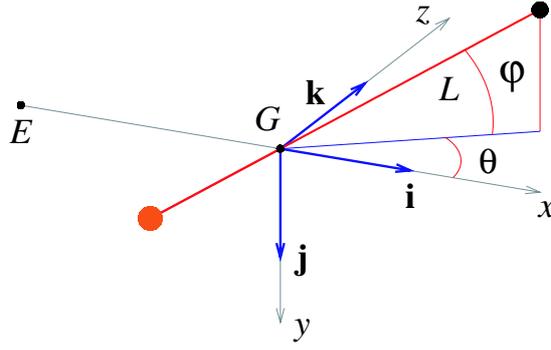


Figura 2: Triedro orbital y posición del tether.

donde  $\mathbf{H}_G = \bar{\mathbf{I}}_G \circ \boldsymbol{\omega}$  es el momento cinético del sistema. Aquí,  $\bar{\mathbf{I}}_G$  es el tensor de inercia en  $G$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , la velocidad angular relativa al triedro  $Gx_1y_1z_1$ , toma el valor<sup>1</sup>

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} + \alpha \mathbf{u}. \quad (6)$$

En el lado derecho de (5) se encuentra el par gravitatorio  $\mathbf{M}_G$  y el momento electrodinámico  $\mathbf{M}_E$ . Ambos actúan en  $G$  y más adelante se darán expresiones para ellos (ecuaciones (11-12)).

La dirección de  $(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}})$  es principal de inercia en  $G$ . Por tanto

$$\bar{\mathbf{I}}_G \circ \boldsymbol{\omega} = \bar{\mathbf{I}}_G \circ (\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{I}}_G \circ (\alpha \mathbf{u}) = I_s (\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}),$$

relación que permite escribir la ecuación (5) en la forma

$$\mathbf{u} \times \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{I_s} (\mathbf{M}_G + \mathbf{M}_E). \quad (7)$$

La derivada  $\ddot{\mathbf{u}}$  se calcula en la referencia inercial, cuyos vectores unitarios  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  permanecen fijos.

Se introduce, a continuación, el triedro orbital  $Gxyz$ , con origen en el centro de masas del sistema, el eje  $Gx$  a lo largo de la vertical local apuntando al zenit y el eje  $Gy$  normal al plano orbital (ver fig. 2).

La posición del tether y de su vector unitario  $\mathbf{u}$  están definidas por los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  (ver fig. 2). El ángulo  $\theta$ , en el plano orbital y  $\varphi$  fuera del plano orbital. Los términos anglosajones resultan ilustrativos: *in plane angle* para  $\theta$  y *out of plane angle* para  $\varphi$ . Se tendrá

$$\mathbf{u} = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \varphi \sin \theta \mathbf{k}.$$

Se utilizará el *teorema de Coriolis*, que relaciona las derivadas temporales de un vector  $\mathbf{a}(t)$ , en la referencia inercial (sólido 1) y en el triedro orbital (sólido 0)

$$\left. \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \right|_{(1)} = \left. \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \right|_{(0)} + \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{a}(t).$$

<sup>1</sup>En (6), el valor particular de  $\alpha$  es irrelevante pues el momento de inercia según la dirección del tether es, en primera aproximación, nulo.

Aquí,  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} = -\dot{\nu} \mathbf{j}$  es la velocidad angular del *triedro orbital* respecto a la referencia inercial ( $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}}$  es su aceleración angular). Sean  $\mathbf{u}'$  y  $\mathbf{u}''$ , las derivadas temporales de  $\mathbf{u}$  en el triedro orbital. Se tendrá

$$\ddot{\mathbf{i}} = \mathbf{u}'' + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{u}), \quad (8)$$

y la ecuación (7) adopta la forma

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u}'' = \frac{1}{I_s} (\mathbf{M}_G + \mathbf{M}_E) - \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}})) + 2(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}'. \quad (9)$$

El par gravitatorio está dado, en primera aproximación, por

$$\mathbf{M}_G \approx \frac{3\mu}{r^3} \mathbf{i} \times (\bar{\bar{\mathbf{I}}}_G \circ \mathbf{i}), \quad (10)$$

donde  $\mu$  es la constante gravitatoria terrestre. La relación (10) es cierta bajo las hipótesis: 1) campo gravitatorio terrestre perfectamente esférico y 2) los términos del orden  $L/r$  y superiores, despreciables frente a la unidad. La identidad  $\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{u})$  permite escribir

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_G \circ \mathbf{i} = I_s \mathbf{u} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{u}) = I_s \{ \mathbf{i} - \mathbf{u}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) \},$$

y el par gravitatorio adopta la forma

$$\mathbf{M}_G \approx \frac{3\mu}{r^3} I_s (\mathbf{u} \times \mathbf{i})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}). \quad (11)$$

El momento introducido en  $G$  por las fuerzas electrodinámicas es

$$\mathbf{M}_E = \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) J_1, \quad \text{donde } J_1 = \int_0^{L_t} (h_G - h) I_e(h) dh. \quad (12)$$

$I_e(h)$  es el perfil de corriente del tether. El campo magnético terrestre  $\mathbf{B}$  (se supone constante a lo largo del tether y de valor igual al que alcanza en  $G$ ), se modela mediante un dipolo alineado con el eje terrestre, como en [13, 14]. Sus componentes en el triedro orbital son

$$(B_x, B_y, B_z) = \frac{\mu_m}{r^3} (-2 \sin i \sin(\omega + \nu), -\cos i, \sin i \cos(\omega + \nu)),$$

donde  $\omega$  es el argumento del perigeo y  $\mu_m$  la intensidad del dipolo.

### 3 Ecuaciones del Movimiento

De la ecuación vectorial (9) se obtienen *dos* relaciones escalares, al proyectar en dos direcciones independientes distintas de la del tether (proyectar según el tether lleva a una identidad trivial). Sea  $\mathbf{u}_2$  un vector unitario del plano orbital y perpendicular al tether. Proyectando sobre los versores  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{u}_2$  se obtienen las ecuaciones que gobiernan

el movimiento. En función de los ángulos de libración  $\theta$  y  $\varphi$ , dichas ecuaciones toman la forma

$$\theta'' - 2\varphi' \tan \varphi (\theta' + 1) + 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = e [2h_1 (\theta' + 1) + 3h_2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta] - \epsilon \{ \tan \varphi \operatorname{sen} i (2g_1 \cos \theta - g_2 \operatorname{sen} \theta) + g_3 \cos i \}, \quad (13)$$

$$\varphi'' + [(\theta' + 1)^2 + 3 \cos^2 \theta] \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = e \left[ 2h_1 \varphi' + \frac{3}{2} h_2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos^2 \theta \right] + \epsilon \operatorname{sen} i \{ 2g_1 \operatorname{sen} \theta + g_2 \cos \theta \}, \quad (14)$$

donde  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  son funciones auxiliares dadas por

$$h_1 = \frac{\operatorname{sen} \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad h_2 = \frac{\cos \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad (15)$$

$$g_1 = \frac{\operatorname{sen}(\omega + \nu)}{1 + e \cos \nu}, \quad g_2 = \frac{\cos(\omega + \nu)}{1 + e \cos \nu}, \quad g_3 = \frac{1}{1 + e \cos \nu} \quad (16)$$

y la variable independiente es la anomalía verdadera  $\nu$ .

Hay cuatro parámetros en las ecuaciones (13-14): tres elementos orbitales ( $e, i, \omega$ ) y  $\epsilon$ , cociente entre el momento electrodinámico y el producido por el gradiente de gravedad y las fuerzas de inercia:

$$\epsilon = \frac{J_1 \mu_m}{I_s \mu}. \quad (17)$$

Las ecuaciones (13-14) han de integrarse desde las condiciones iniciales correspondientes al *encendido* de la corriente en el tether

$$\text{en } \nu = \nu_0 : \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta' = \theta'_0, \quad \varphi' = \varphi'_0 \quad (18)$$

#### 4 El Tether Inerte

En un tether *inerte* no fluye corriente en el cable y  $\epsilon = 0$ . Las ecuaciones del movimiento (13-14) se reducen a

$$\theta'' - 2\varphi' \tan \varphi (\theta' + 1) + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2\theta = e \left( 2h_1 (\theta' + 1) + \frac{3}{2} h_2 \operatorname{sen} 2\theta \right), \quad (19)$$

$$\varphi'' + ((\theta' + 1)^2 + 3 \cos^2 \theta) \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi = e \left( 2h_1 \varphi' + \frac{3}{2} h_2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos^2 \theta \right), \quad (20)$$

con  $h_1$  y  $h_2$  dados por (15). En *órbita circular*,  $e = 0$ , la vertical local es posición de equilibrio estable de las ecuaciones (19-20) y, en ella, el tether gira uniformemente alrededor de la normal a la órbita. En *órbita elíptica*, sin embargo, la vertical local no gira uniformemente y el equilibrio se rompe, incluso si el tether se abandona en reposo en la vertical local, pues se excita el movimiento de libración del tether. La razón de este comportamiento se haya en la ecuación (19) para el ángulo  $\theta$ , que resulta ser autoexcitada. Debido al acoplamiento entre  $\theta$  y  $\varphi$ , el tether oscilará continuamente, con amplitudes que

crecen con la excentricidad  $e$ . En lugar de posiciones de equilibrio, las ecuaciones del movimiento exhiben *soluciones periódicas* que juegan un papel importante, ya que la estabilidad dinámica del sistema viene dada por sus propiedades de estabilidad.

Este problema se ha tratado en la literatura. Sin ánimo de ser exhaustivos, se dan algunas referencias donde se analiza desde diferentes puntos de vista: [1–3, 5, 7, 8, 16, 17]. Para el objetivo de este artículo, las referencias centrales son [7, 8]. En ellas, Modi & Brereton, ya en 1969, encontraron diferentes familias de soluciones periódicas para el problema más general de un satélite en órbita elíptica. El tether es un caso particular de sus análisis.

En [7, 8] estudiaron sólo la oscilación en el plano orbital, pues la ecuación (20), que no es autoexcitada, proporciona la solución  $\varphi(\nu) \equiv 0$  para las condiciones iniciales  $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ . Por ello, y en ausencia de otras perturbaciones, las soluciones periódicas corresponden a oscilaciones dentro del plano orbital gobernadas por la ecuación

$$\theta'' + 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = e (2h_1(\nu, e) (\theta' + 1) + 3h_2(\nu, e) \operatorname{sen} \theta \cos \theta). \quad (21)$$

La primera tarea consiste en reproducir los resultados de [7, 8], adoptando un enfoque diferente, basado en la herramienta numérica utilizada para obtener familias de órbitas periódicas. Se trata de una versión ligeramente modificada del algoritmo numérico desarrollado en [6] y basado en el método de Poincaré sobre la continuación analítica de órbitas periódicas (ver [18]). Este algoritmo proporciona las propiedades de estabilidad de las órbitas periódicas una vez obtenidas.

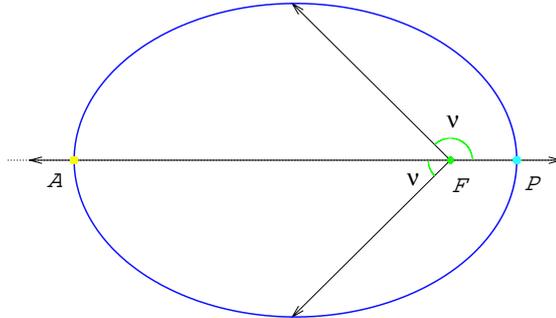


Figura 3: Rangos de excentricidad en  $[0, 1]$ .

Usar el algoritmo exige reescribir las ecuaciones del movimiento como un sistema forzado. Las ecuaciones (19-21) satisfacen ya ese requisito. En su primer miembro se encuentran los términos correspondientes al caso circular. En el segundo, la perturbación introducida por la excentricidad, que se describe mediante términos forzantes periódicos, de periodo igual al orbital. En [7, 8] la excentricidad varía en el intervalo  $[-1, 1]$ ; en este artículo, sin embargo, la excentricidad sólo se considera en el intervalo  $[0, 1]$ . Una excentricidad negativa equivale a medir la anomalía verdadera  $\nu$  desde el apogeo, en lugar

del perigeo, es decir, se ha desplazado en  $\pi$ . Si se conviene en medir  $\nu$  desde el perigeo, se tendrá  $e \in [0, 1]$  (ver Fig. 3).

El algoritmo numérico se usa partiendo de una órbita periódica conocida del caso circular ( $e = 0$ ) y, posteriormente, propagando la familia para valores crecientes de  $e$ . Debido a la ley de *arrastré de frecuencias* (ver [9]), las soluciones periódicas que aparecen en órbita elíptica deben ser de periodo orbital, o un múltiplo entero de él. Por tanto, las órbitas periódicas del caso circular ( $e = 0$ ), a partir de las cuales se comenzará el proceso de propagación, deben satisfacer este requisito. Se comienza con un breve estudio del caso circular.

#### 4.1 Caso circular

En órbita circular, la ecuación (21) proporciona la integral primera

$$\theta'' + 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (\theta')^2 + 3 \operatorname{sen}^2 \theta = 3 \operatorname{sen}^2 \theta_M, \quad (22)$$

donde la amplitud  $\theta_M$  viene dada por las condiciones iniciales

$$\nu = \nu_0 : \theta = \theta_0 = 0, \quad \theta' = \theta'_0 = \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta_M.$$

Nótese que  $\theta_M$  y  $\theta'_0$  son equivalentes y cualquiera de ellas puede usarse para describir las condiciones iniciales de una órbita periódica. La figura 4 muestra las órbitas de (22) en el espacio de fases. El movimiento es una *libración* si  $\theta_M < 90^\circ$  y una *rotación* si  $\theta_M > 90^\circ$ . Para  $\theta_M = 90^\circ$ , se tiene *posiciones de equilibrio y separatrices* que corresponden a movimientos asintóticos que *separan* la libración de la rotación. Estamos interesados en las libraciones, que en el caso circular siempre están asociadas con un movimiento periódico.

Una nueva integración proporciona la solución

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta_M \operatorname{sn}(\sqrt{3}(\nu - \nu_0), \operatorname{sen} \theta_M), \quad (23)$$

donde  $\operatorname{sn}(u, \operatorname{sen} \theta_M)$  es la función elíptica de Jacobi de módulo  $\operatorname{sen}^2 \theta_M$ . La función  $\operatorname{sn}(u, \operatorname{sen} \theta_M)$  es periódica en  $u$ , de periodo  $4K(\theta_M)$ , donde  $K(\theta_M)$  es la integral elíptica de primera especie:

$$K(\operatorname{sen} \theta_M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_M \operatorname{sen}^2 \zeta}}. \quad (24)$$

Por lo tanto, durante un ciclo completo de libración, el incremento en anomalía verdadera vendrá dado por

$$\Delta\nu = \frac{4}{\sqrt{3}} K(\operatorname{sen} \theta_M) \quad (25)$$

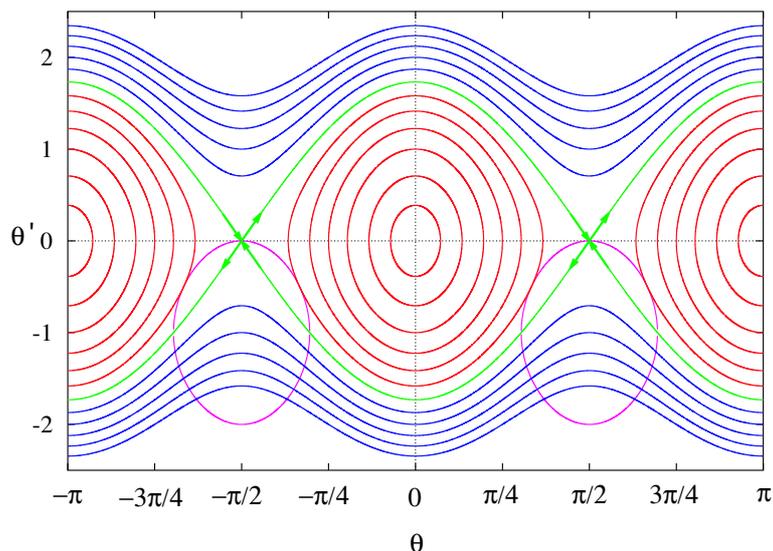


Figura 4: Plano de fases del péndulo por gradiente de gravedad.

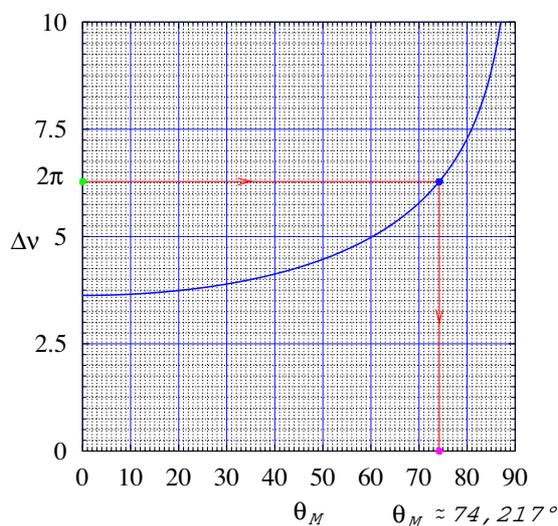


Figura 5:  $\Delta\nu$  en un ciclo de libración.

y se representa en la figura 5 como función de  $\theta_M$ . Nótese que la función  $\Delta\nu = \Delta\nu(\theta_M)$  es monótona creciente con un valor mínimo de  $\Delta\nu(0) = 2\pi/\sqrt{3} \approx 3.63$  para  $\theta_M = 0$ . No está acotada y tiende a infinito cuando  $\theta_M \rightarrow \pi/2$ . Las soluciones para las que se satisface que  $\Delta\nu = 2\pi n/m$  (con  $m$  y  $n$  enteros) son particularmente interesantes. Corresponden a situaciones en las cuales el tether realiza  $m$  libraciones completas mientras su centro de masas  $G$  describe  $n$  órbitas.

Para  $n = 1$ , sólo existe una solución de este tipo y corresponde a  $m = 1$ ; por tanto,  $\Delta\nu(\theta_M) = 2\pi$  (Nótese que para  $m = 2$  se obtiene  $\Delta\nu = \pi$ , menor que  $\Delta\nu(0) \approx 3.63$ : no existe, por ello, ningún  $\theta_M$  que satisfaga la relación). El procedimiento que conduce a la solución se esquematiza en la figura 5 y proporciona, en este caso,  $\text{sen } \theta_M \approx 0.9623$ . Las condiciones iniciales son  $\theta_M \approx 74.217^\circ$ , (o  $\theta'_0 \approx \pm 1.667$ ) y determinan un par de órbitas

$m \setminus n$	1	2	3	4	5
1	$2\pi$	$4\pi$	$6\pi$	$8\pi$	...
2	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	...
3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi$	$\frac{8\pi}{3}$	...
4	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	...
5	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	...
6	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$2\pi$ -periódicas.

- La primera, que se denominará  $\mathcal{P}_1$ , se obtiene para  $\theta'_0 \approx +1.667$ .
- La segunda, que se denominará  $\mathcal{P}_2$ , se obtiene para  $\theta'_0 \approx -1.667$ .

Las dos son idénticas y describen la misma trayectoria en el plano de fases  $(\theta, \theta')$ , sin embargo, están desfasadas  $180^\circ$ . Anticipamos que ambas soluciones tendrán comportamientos diferentes para  $e \neq 0$ .

Cuando  $n = 2$ , hay tres posibilidades:  $m = 1, 2$  y  $3$ . El caso  $m = 2$  coincide con el caso ya considerado y será descartado. En cada uno de los casos restantes se tienen dos soluciones  $4\pi$ -periódicas. Así

- para  $m = 3$ , el incremento será  $\Delta\nu(\theta_{M_2}) = 4\pi/3$ , obteniéndose  $\text{sen } \theta_{M_2} \approx 0.67074$ ,  $\theta_{M_2} \approx 42.12404^\circ$  y  $\theta'_2(0) \approx \pm 1.16175$ . Estas órbitas se denominarán  $\mathcal{P}_{3a}$  y  $\mathcal{P}_{3b}$  para el caso positivo y negativo respectivamente,
- para  $m = 1$ , el incremento será  $\Delta\nu(\theta_{M_1}) = 4\pi$ , obteniéndose  $\text{sen } \theta_{M_1} \approx 0.99985$ ,  $\theta_{M_1} \approx 89.00647^\circ$  y  $\theta'_1(0) \approx \pm 1.73179$ . Estas órbitas se denominarán  $\mathcal{P}_{4a}$  y  $\mathcal{P}_{4b}$  respectivamente.

Para  $n = 3$  se presentan cuatro posibilidades,  $m = 1, 2, 4$  y  $5$  que conducen, todas ellas, a soluciones  $6\pi$ -periódicas. Utilizando este procedimiento sistemáticamente, se podría llenar la tabla anexa e ir obteniendo soluciones de periodo cada vez mayor. Sin embargo, solamente se han considerado los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  por razones que se revelarán más tarde.

Nótese que también existen posiciones de equilibrio, en las que  $\theta = \theta' = 0$  y el tether está alineado con la vertical local y en reposo. Estas soluciones estacionarias pueden considerarse periódicas y su periodo puede ser seleccionado libremente. Además, cada una

de las soluciones periódicas obtenidas pertenece a una familia más amplia de soluciones periódicas, cuyo parámetro es la excentricidad  $e$ .

#### 4.2 Caso elíptico. Familias de órbitas periódicas

Se comienza el análisis mostrando las familias de órbitas periódicas que oscilan con el periodo orbital  $2\pi$  en la variable  $\nu$ .

##### 4.2.1 ÓRBITAS DE PERIODO $2\pi$

La figura 6 recoge tres familias de soluciones periódicas obtenidas en este análisis. La figura superior muestra sus trayectorias en el plano de fases; la inferior muestra el ángulo  $\theta$  como función del tiempo. Se han considerado tres valores para la excentricidad,  $e = 0.1$ ,  $0.2$  y  $0.3$  y las flechas indican la dirección de las familias para valores crecientes de  $e$ .

Nótese que en las soluciones periódicas encontradas, el tether cruza la vertical local justo en el apogeo y en el perigeo de la órbita de  $G$ . Sin embargo, la amplitud máxima no se da en la mitad del intervalo como cabría esperar ( $\nu = \pi/2$ ;  $\nu = 3\pi/2$ ).

La familia  $\mathcal{F}_1$  es la continuación, para valores de  $e \neq 0$ , de la órbita periódica  $\mathcal{P}_1$  del apartado anterior. Para ella, el valor inicial  $\theta'_0$  es *positivo* y la amplitud de la oscilación *decrece* con  $e$ .

La familia  $\mathcal{F}_2$  es la continuación para valores de  $e \neq 0$ , de la órbita periódica  $\mathcal{P}_2$  del análisis anterior (pág. 33). Para ella, el valor inicial de  $\theta'_0$  es *negativo* y la amplitud de la oscilación *crece* con  $e$ .

En la figura 6, las órbitas  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  se etiquetan con  $e = 0$  y comparten la misma trayectoria del plano de fases. Sin embargo, están desfasadas un semi-periodo y tienen diferentes leyes horarias.

Nótese que el flujo de fase de la ecuación (22) no depende del signo de  $\theta'$ . La ecuación (21), sin embargo, no tiene esa propiedad y un cambio en el signo de  $\theta'$  lleva a una órbita diferente del plano de fases. Por ello, de una misma órbita periódica del plano de fases, surgen dos familias diferentes para  $e \neq 0$ .

La familia  $\mathcal{F}_0$  parte de la posición de equilibrio estable ( $\theta = \theta' = 0$ ). Para ella,  $\theta'_0$  es positiva y la amplitud de la oscilación *crece* con  $e$  (y tiende a cero con  $e$ ). Este hecho permite obtener, en el límite  $e \rightarrow 0$ , la siguiente aproximación asintótica:

$$\theta(\nu, e) = \sin \nu \cdot e - \frac{3}{2} \sin 2\nu \cdot e^2 + \left( \frac{13}{12} \sin 3\nu + \frac{3}{4} \sin \nu \right) \cdot e^3 + \mathcal{O}(e^4). \quad (26)$$

La figura 7 muestra la solución asintótica, dibujada con líneas continuas y la numérica, dibujada con línea de trazos. Ambas presentan un gran acuerdo para los valores de  $e$  considerados:  $0.1$ ,  $0.2$  y  $0.3$ . Obviamente, el acuerdo es mayor cuanto menor es el valor

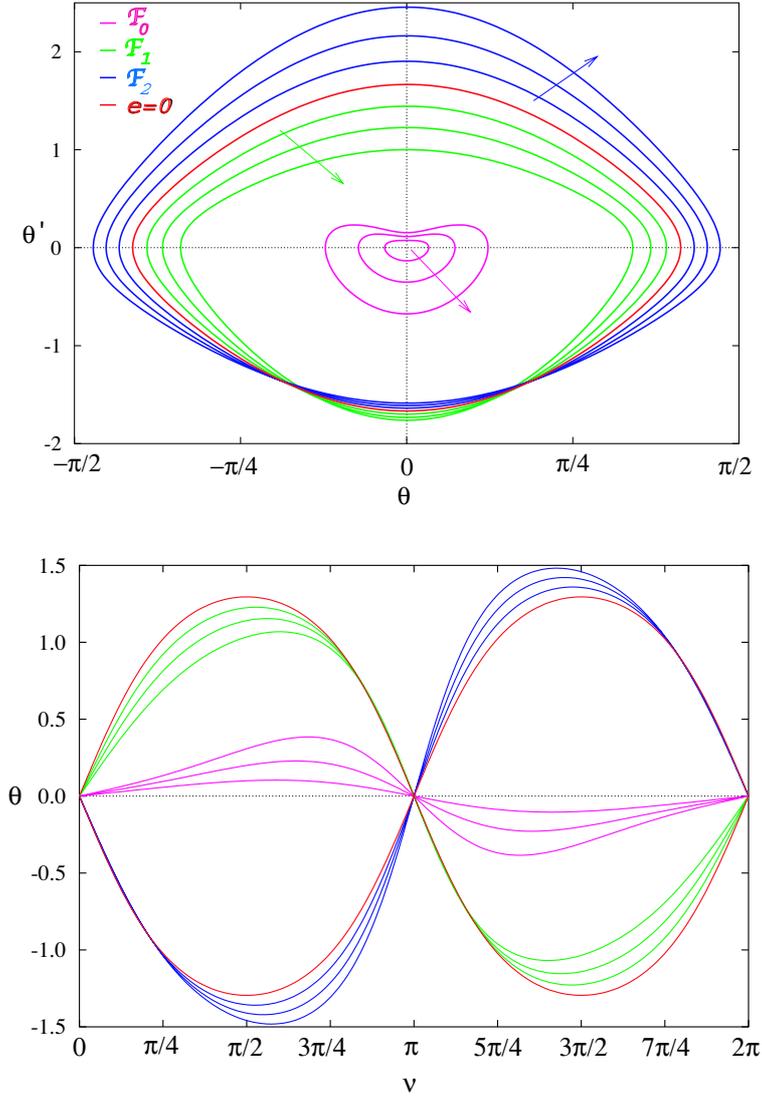


Figura 6: Tres familias de órbitas periódicas de periodo  $2\pi$  para valores crecientes de  $e$ : 0.1, 0.2 y 0.3.

de  $e$ . En caso necesario podría aumentarse la precisión obteniendo más términos del desarrollo asintótico (26). El procedimiento se explica en [13, 14].

Cada órbita está determinada por sus condiciones iniciales  $\theta_0 = 0$  y  $\theta'_0$ . Cada solución periódica está determinada por el valor de  $\theta'_0$  (la integración, en un periodo, de las ecuaciones de evolución proporciona la historia temporal de esa solución particular). La figura 8 muestra las condiciones iniciales correspondientes a las tres familias  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  en función de la excentricidad  $e$ .

Las familias  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_1$  se unen en el valor  $e \approx 0.44561883$  (punto  $C$  en la figura 9) y, para valores mayores de  $e$ , desaparecen. La familia  $\mathcal{F}_2$ , sin embargo, no desaparece y alcanza valores de  $e$  próximos a la unidad. No obstante, su determinación numérica presenta problemas cuando  $e \rightarrow 1$ , ya que la ecuación (21) es singular en  $e = 1$ .

En la familia  $\mathcal{F}_0$ , la matriz de monodromía de la solución periódica tiene dos autova-

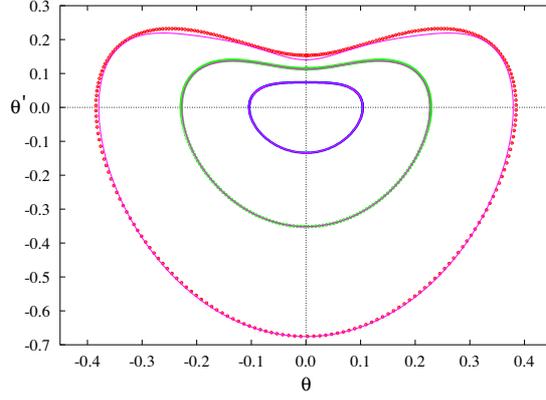


Figura 7: Solución asintótica (26) (líneas sólidas) y numérica para la familia  $\mathcal{F}_0$  ( $e = 0.1, 0.2$  y  $0.3$ ).

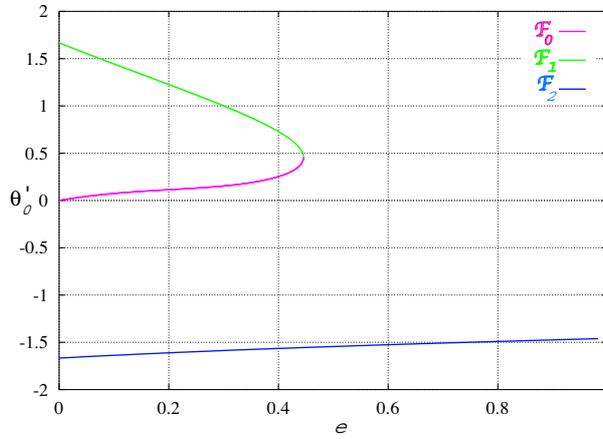


Figura 8: Condiciones iniciales respecto de  $e$  para las familias  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ .

lores. La figura 9 muestra, en el dibujo de la izquierda, los autovalores como función de la excentricidad  $e$ ; en el dibujo de la derecha se muestra su módulo. El módulo de un autovalor es mayor que la unidad en el intervalo  $I_0 \approx [0.3533, 0.4273]$ , donde la familia es **inestable**. Fuera de  $I_0$  la familia es **linealmente estable**. En la frontera de  $I_0$  (puntos  $A$  y  $B$  de la figura 9), ambos autovalores toman el valor  $\lambda = -1$ . Esta situación es típica de las *flip bifurcations*, en las que el periodo de la solución se dobla. Un análisis detallado de esta materia puede encontrarse en [5].

Desde el punto de vista de la operación de un tether electrodinámico, sólo la familia  $\mathcal{F}_0$  tiene interés. Las familias  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  resultan ser muy inestables. La figura 10 muestra el módulo de los autovalores de la matriz de monodromía para estas dos familias. La gráfica de la izquierda corresponde a la familia  $\mathcal{F}_1$ , que termina en  $e \approx 0.44561883$ , donde se une a la familia  $\mathcal{F}_0$ . El módulo del autovalor inestable llega a valores del orden de 20. La gráfica de la derecha corresponde a la familia  $\mathcal{F}_2$  que existe prácticamente en todo el rango  $e \in [0, 1]$ . Es **linealmente estable** en un intervalo pequeño  $\approx [0, 0.046]$  cercano a la órbita circular. Por encima de este intervalo, el módulo del autovalor inestable crece

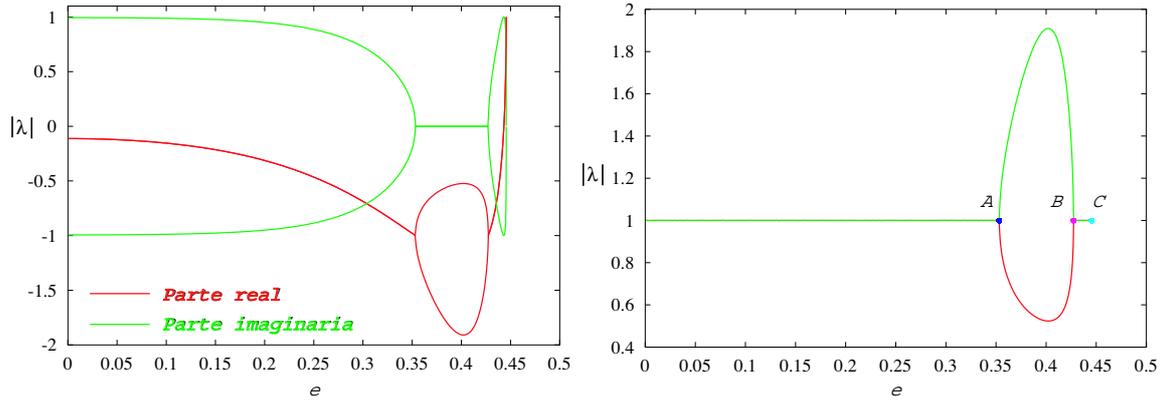


Figura 9: Autovalores y módulo de la matriz de monodromía de la familia  $\mathcal{F}_0$ .

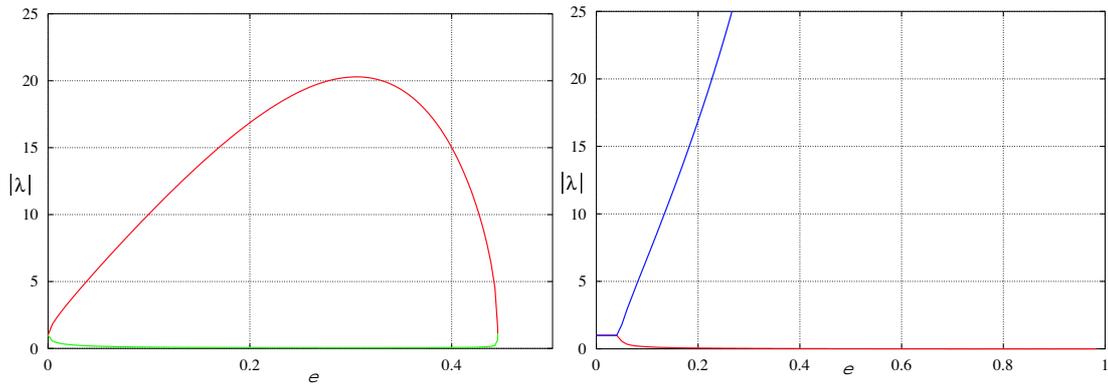


Figura 10: Módulo de los autovalores. Familias  $\mathcal{F}_1$  (izquierda),  $\mathcal{F}_2$  (derecha).

monótonamente hasta llegar a valores muy grandes (del orden de 10000) cuando  $e$  se acerca a la unidad.

#### 4.2.2 PERTURBACIONES EN EL PLANO PERPENDICULAR A LA ÓRBITA

El análisis anterior, basado en la ecuación (21), no tiene en cuenta los efectos de las perturbaciones normales al plano orbital. Estos efectos se introducen en el esquema numérico incorporando la ecuación (20). *A posteriori*, ha de repetirse el análisis, sustituyendo la ecuación (21) por el sistema (19-20). Dado el carácter inestable de las familias  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ , el nuevo análisis sólo se ha realizado para la familia  $\mathcal{F}_0$ .

La principal novedad radica en un nuevo autovalor de la matriz de monodromía asociado al nuevo grado de libertad. La figura 11 muestra el módulo de los autovalores de la matriz de monodromía, incluyendo el nuevo autovalor, como función de  $e$ .

Nótese que en el intervalo  $\approx [0, 0.3533]$ , donde las soluciones periódicas eran linealmente estables frente a perturbaciones en el plano orbital, se vuelven **inestables**. Así, la familia  $\mathcal{F}_0$  resulta ser estable sólo en el intervalo  $[0.4273, 0.4456]$ . No obstante, para valores pequeños de  $e$ , ( $e < 0.2$  aproximadamente) la inestabilidad es muy débil.

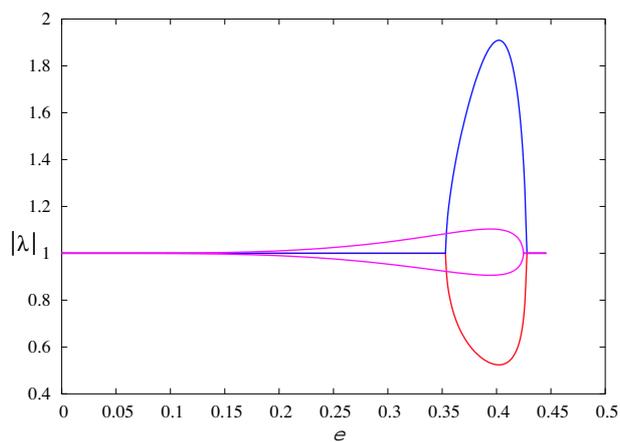


Figura 11: Módulo de los autovalores para la familia  $\mathcal{F}_0$ .

### 4.2.3 ÓRBITAS DE PERIODO $4\pi$

Se han encontrado dos familias cuyo periodo es doble del periodo orbital. En la primera familia, que se denominará  $\mathcal{F}_3$ , el tether realiza tres ciclos de libración cada dos órbitas ( $m = 3$ ). En la segunda familia, denominada  $\mathcal{F}_4$ , el tether sólo realiza un ciclo de libración ( $m = 1$ ). La gráfica izquierda de la figura 12, en la que  $e = 0.2$ , muestra la historia del movimiento, durante dos periodos orbitales, de algunas órbitas periódicas de dichas familias. La gráfica de la derecha muestra estas mismas trayectorias en el plano de fases.

La familia  $\mathcal{F}_3$ , por ejemplo, tiene dos subfamilias: una es continuación, para  $e \neq 0$ , de la órbita periódica  $\mathcal{P}_{3a}$  del caso circular (pág. 33) y para ella  $\theta'_0 > 0$ . La otra subfamilia es continuación, para  $e \neq 0$ , de la órbita periódica  $\mathcal{P}_{3b}$  del caso circular y para ella  $\theta'_0 < 0$ . Ambas subfamilias están desfasadas un periodo orbital y por ello comparten las mismas trayectorias en el plano de fases. La figura 12 muestra, en la gráfica derecha, la trayectoria correspondiente al caso circular (órbitas  $\mathcal{P}_{3a}$  y  $\mathcal{P}_{3b}$ ) y la trayectoria compartida por dos órbitas periódicas de la familia  $\mathcal{F}_3$  dibujadas en la gráfica de la izquierda.

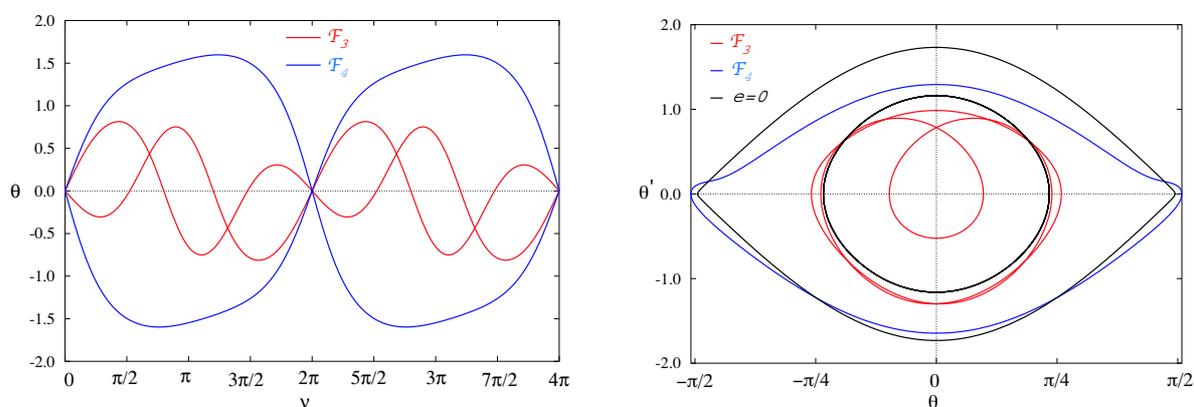


Figura 12: Soluciones periódicas de las familias  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  para  $e = 0.2$ .

En la familia  $\mathcal{F}_4$  ocurre una situación similar. También contiene dos subfamilias que

son continuación, para  $e \neq 0$ , de las órbitas periódicas  $\mathcal{P}_{4a}$  y  $\mathcal{P}_{4b}$  del caso circular (pág. 33). La figura 12 muestra las curvas correspondientes para dicha familia.

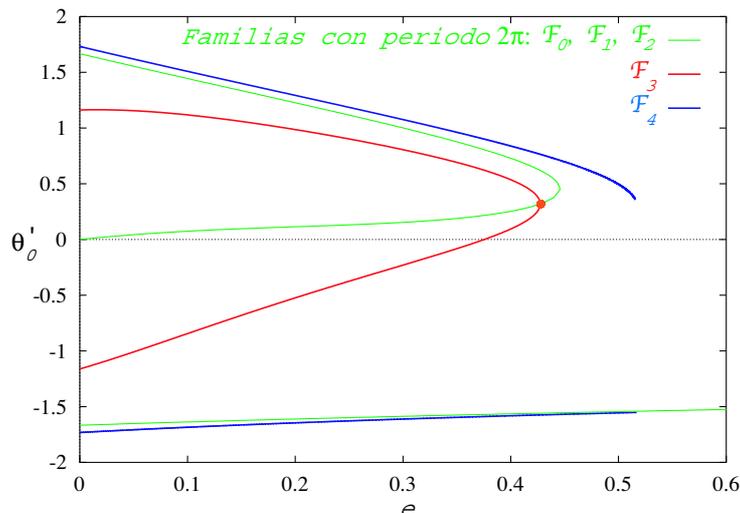


Figura 13: Condiciones iniciales para las familias  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  respecto de  $e$ .

La figura 13 muestra las condiciones iniciales correspondientes a las familias  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  (periodo  $4\pi$ ) y  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  (periodo  $2\pi$ ). Las dos subfamilias de la familia  $\mathcal{F}_3$ , que para  $e = 0$  comienzan en puntos opuestos, se unen en  $e \approx 0.4273$ ,  $\theta'_0 \approx 0.32$ , donde tiene lugar una bifurcación y dos órbitas de doble periodo se bifurcan de la órbita de periodo  $2\pi$ . Las dos subfamilias de la familia  $\mathcal{F}_4$ , que también comienzan en puntos opuestos para  $e = 0$ , nunca se unen. Ambas subfamilias terminan cuando  $e$  alcanza el valor  $e \approx 0.51556$ .

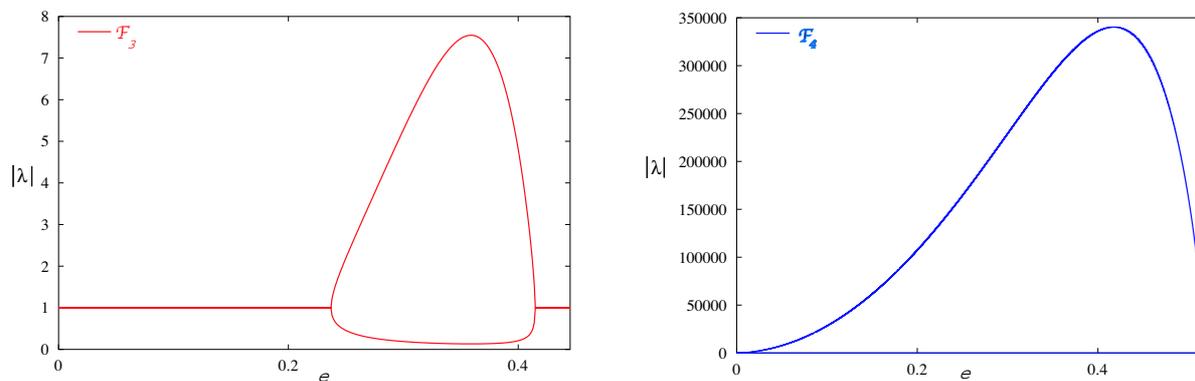


Figura 14: Módulo de los autovalores para las familias  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  respecto de  $e$ .

La figura 14 muestra el módulo de los autovalores de la matriz de monodromía para las familias  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$ . La familia  $\mathcal{F}_3$  es linealmente estable en los intervalos  $[0, 0.237]$  y  $[0.415, 0.4456]$  y muy inestable en el intervalo  $[0.237, 0.415]$ . Las perturbaciones normales al plano orbital no modifican este comportamiento. Debido a su alta inestabilidad, el interés de la familia  $\mathcal{F}_3$  es pequeño. No obstante, podría tomarse como punto de partida

para la operación del tether electrodinámico, pues en el intervalo  $[0, 0.237]$  es más estable que la familia  $\mathcal{F}_0$  de periodo  $2\pi$ .

La familia  $\mathcal{F}_4$  es fuertemente inestable. Como cada familia tiene dos subfamilias, la figura 14 debería contener cuatro gráficas (una por subfamilia). Sin embargo, las dos subfamilias de una familia dada comparten los mismos autovalores. Este resultado numérico ha sido confirmado y probado para la familia  $\mathcal{F}_3$ . Los cálculos para la familia  $\mathcal{F}_4$ , debido a su gran inestabilidad son relativamente complicados y no han sido comprobados. Desde el punto de vista de la operación del tether electrodinámico, el interés de esta familia es escaso.

Podría continuarse el análisis estudiando familias de periodos  $6\pi, 8\pi \dots$ . Sin embargo, y al igual que la familia  $\mathcal{F}_4$ , carecen de interés para tethers espaciales (al menos, a primera vista). Su análisis no se ha incluido en este artículo.

## 5 El Tether Electrodinámico

Cuando el tether está *vivo*, es decir, cuando fluye corriente en el cable, el parámetro  $\varepsilon \neq 0$  y hay *cuatro* parámetros libres en el problema:  $e, \varepsilon, i$  y  $\omega$ . Este último, que representa el argumento del perigeo de la órbita elíptica seguida por el centro de masas  $G$  del sistema, se considerará constante. Por sencillez, en los cálculos se tomará  $\omega = 0$ .

Para mostrar la influencia de la excentricidad, se comenzará por el caso circular ( $e = 0$ ), cuyo análisis se realizó en [10]. Allí se muestra cómo determinar, para cada par de valores de los parámetros  $(\varepsilon, i)$ , la solución periódica básica (periodo  $2\pi$ ). La figura<sup>2</sup> 15 muestra algunas soluciones periódicas para  $i = 25^\circ$  y distintos valores de  $\varepsilon$ .

Cada una de ellas pertenece a una familia más amplia que continúa para valores de  $e \neq 0$ . Para valores dados de  $(\varepsilon, i)$ , dicha familia puede propagarse partiendo del caso circular e incrementando el valor de  $e$ . Así, se describirá la influencia de una excentricidad no nula en el problema, objetivo principal de este trabajo.

En la mayoría de los casos, la matriz de monodromía tiene cuatro autovalores, que aparecen como dos pares de complejos conjugados. La figura 16 muestra, para  $i = 25^\circ$ , los módulos de los autovalores de la matriz de monodromía como función de  $\varepsilon$  (caso circular). Existe un valor especial de  $\varepsilon$ , cercano a 1.5, para el cual los módulos de todos los autovalores son la unidad. Justo después de este valor, un par de autovalores complejos conjugados pasan a ser reales cuando  $\varepsilon$  alcanza un valor crítico  $\varepsilon^*$ , función de  $i$  (está próximo a  $\varepsilon^* \simeq 1.54$  para  $i = 25^\circ$  en la fig. 16).

La figura 17 muestra esta función  $\varepsilon = \varepsilon^*(i)$ , que divide el plano  $(i, \varepsilon)$  en dos regiones. En una de ellas, la inestabilidad es *débil* y el control del tether electrodinámico factible. Nótese, que esta inestabilidad aparece en ausencia de disipación, amortiguamiento o con-

---

<sup>2</sup>Las figuras 15, 16 y 17 han sido tomadas de [10].

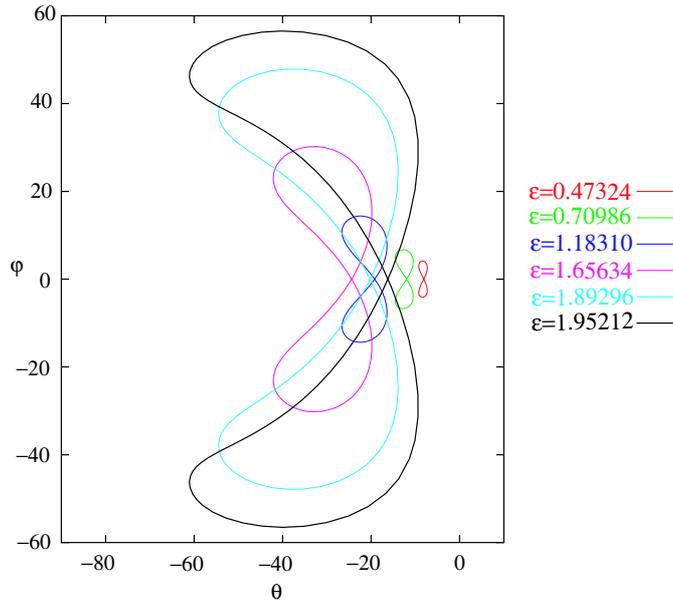


Figura 15: Solución periódica para  $e = 0$ ,  $i = 25^\circ$  y diferentes valores de  $\varepsilon$ .

trol. Introduciendo disipación, o algún tipo de control en el sistema, éste pasa a ser estable en algunos casos (ver [11, 12]).

Nótese el cambio en la forma de la solución periódica (ver fig. 18), cuando sobre el tether actúan ambos efectos: fuerzas electrodinámicas y excentricidad. La figura 18 muestra la forma de la solución periódica en dos inclinaciones:  $i = 25^\circ$ , en los gráficos superiores, e  $i = 45^\circ$ , en los inferiores. En las gráficas de la izquierda  $\varepsilon = 0.5$  y  $e = 0.001$ , 0.01, 0.05, 0.1, 0.2 y 0.3. En las gráficas de la derecha,  $\varepsilon = 0.75$  y  $e = 0.001$ , 0.01, 0.05, 0.1, 0.2 y 0.28. En ambos casos, y para valores pequeños de  $e$ , la solución tiene forma de *ocho* y es similar a la solución obtenida en el caso circular (ver fig. 15). Para valores crecientes de  $e$ , sin embargo, la forma cambia rápido y termina pareciéndose a una  $U$  invertida. Debido, probablemente, al carácter autoexcitado de la ecuación para  $\theta$ , la oscilación en  $\theta$  es más pronunciada que la oscilación en  $\varphi$  (normal al plano orbital).

Estudiar las propiedades de estabilidad de estas soluciones de periodo  $2\pi$ , describiendo su evolución al tomar  $e$  valores crecientes a partir de  $e = 0$ , es de crucial importancia. En el caso elíptico, los autovalores de la matriz de monodromía son, en general, parejas de complejos conjugados.

La figura 19, que describe bien el comportamiento *cualitativo* del sistema, muestra su módulo como función de la excentricidad  $e$ , en el caso particular  $\varepsilon = 0.5$  e  $i = 25^\circ$ . Hasta donde se ha comprobado, valores diferentes de  $(\varepsilon, i)$  conducen a cambios cuantitativos, pero no cualitativos. El punto de partida corresponde al caso circular  $e = 0$  y proporciona valores de referencia para los autovalores. Cuando  $e$  es pequeño, el módulo de los

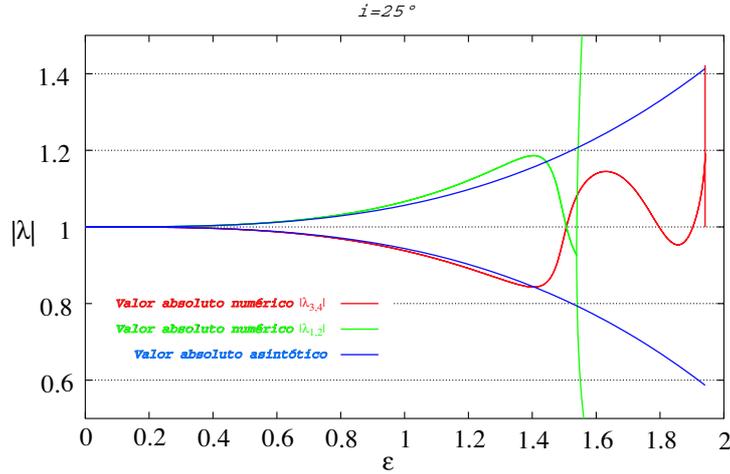


Figura 16: Módulo de los autovalores de la matriz de monodromía para  $e = 0$ . La inclinación es  $i = 25^\circ$ .

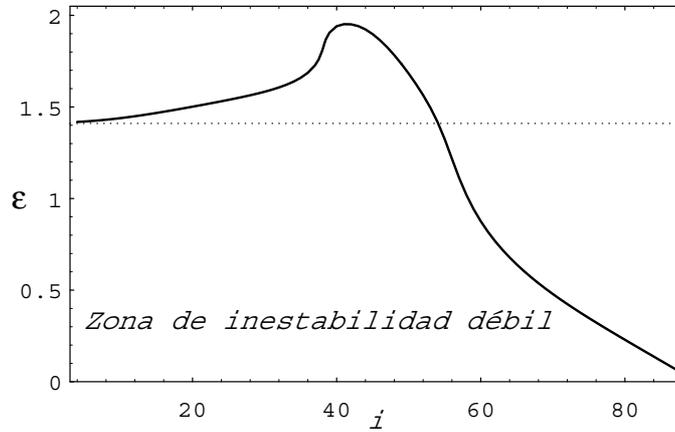


Figura 17: Regiones de inestabilidad débil y fuerte en el plano  $(i, \varepsilon)$  para el caso circular.

autovalores no cambia significativamente al crecer  $e$ , hasta que se alcanza el punto  $A$  de la figura 19, que corresponde a un valor crítico  $e^*$  de la excentricidad (en la figura 19,  $e^* \approx 0.281$ ). En él, un par de complejos conjugados se separan en dos números reales y uno de ellos crece de manera significativa y abrupta. Así, para valores de  $e < e^*$ , la inestabilidad asociada con las fuerzas electrodinámicas permanece prácticamente igual que en el caso circular, pero para  $e > e^*$ , la inestabilidad se vuelve más pronunciada. Como consecuencia, el valor crítico  $e^*$  será de utilidad para separar los casos de inestabilidad débil y los de inestabilidad fuerte.

El valor crítico  $e^*$  es función de tres parámetros:  $e^* = e^*(\varepsilon, i, \omega)$  (en este trabajo  $\omega$  se fija en  $\omega = 0$ ). Para una inclinación dada, el valor crítico define una curva del plano  $(e, \varepsilon)$  que lo divide en dos regiones: en una de ellas, la inestabilidad es *débil*. En la otra, sin embargo, la inestabilidad se intensifica. En la región de inestabilidad débil, el control del tether electrodinámico sería más sencillo.

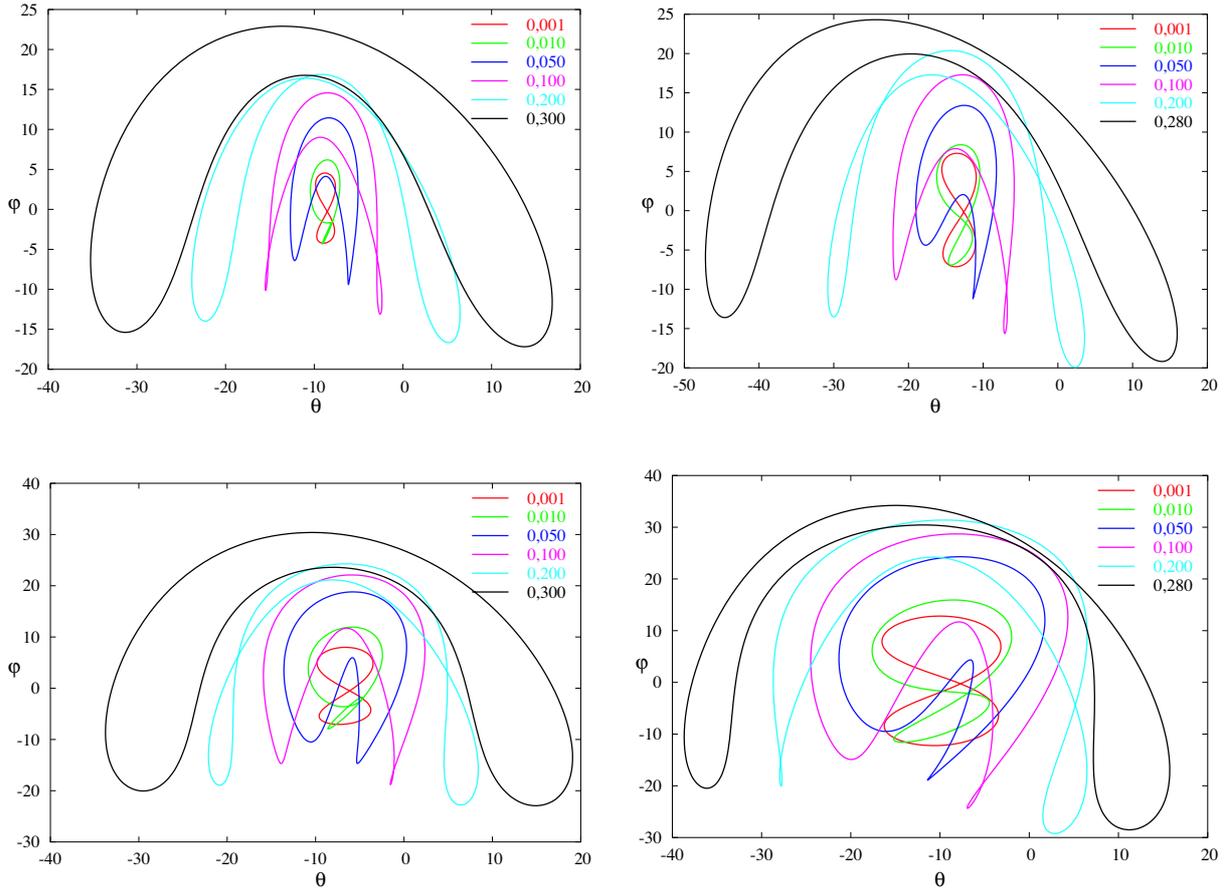


Figura 18: Solución periódica básica para  $\varepsilon = 0.5$  (izquierda) y  $\varepsilon = 0.75$  (derecha). En las gráficas superiores  $i = 25^\circ$  y en las inferiores  $i = 45^\circ$ . Se consideran diferentes valores de  $e$ .

La figura 20 muestra las curvas  $e^* = e^*(\varepsilon, i)$  para los siguientes valores de la inclinación:  $i = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$  y  $35^\circ$ . Para diferentes inclinaciones, las curvas están muy próximas entre sí, por tanto, la influencia de la inclinación es, en este punto particular, pequeña.

El valor crítico  $e^*$ , cuando es pequeño lo que ocurre para valores altos de  $\varepsilon$ , no separa apropiadamente las zonas de inestabilidad débil y fuerte, debido al comportamiento de los autovalores para valores crecientes de  $\varepsilon$ . Al crecer  $\varepsilon$ , la figura 19 cambia: el punto  $A$  se mueve hacia la izquierda y el óvalo central decrece. La figura 21 muestra los módulos de los autovalores para  $\varepsilon = 0.9$  e  $i = 25^\circ$ . Nótese que, justo después del punto  $A$ , el módulo de los autovalores *no es elevado*. En  $B$ , el módulo de todos los autovalores complejos es la unidad y poco después de  $B$  los módulos de un par de complejos conjugados crecen abruptamente y la inestabilidad se hace más intensa. Así, para valores pequeños de  $e^*$ , el punto  $B$  separa mejor que el  $A$  las zonas de inestabilidad débil y fuerte.

La figura 20 muestra, también, las curvas descritas por el punto  $B$  en el plano  $(e, \varepsilon)$  para los mismos valores de  $i$ . Resultan ser, igualmente, poco sensibles a los cambios de

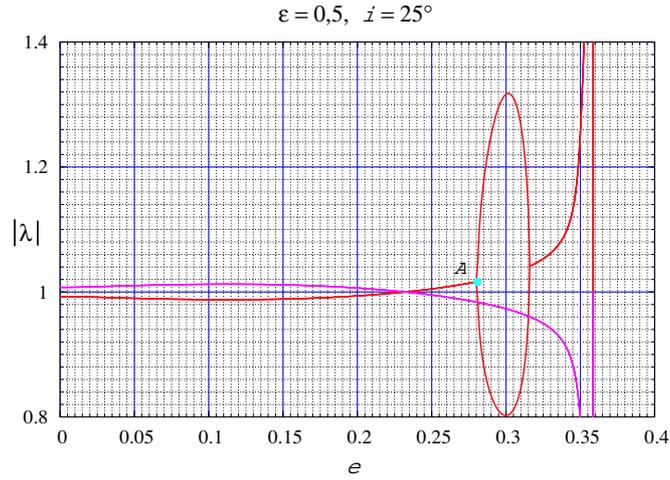


Figura 19: Módulo de los autovalores versus  $e$  para  $\varepsilon = 0.5$  e  $i = 25^\circ$ .

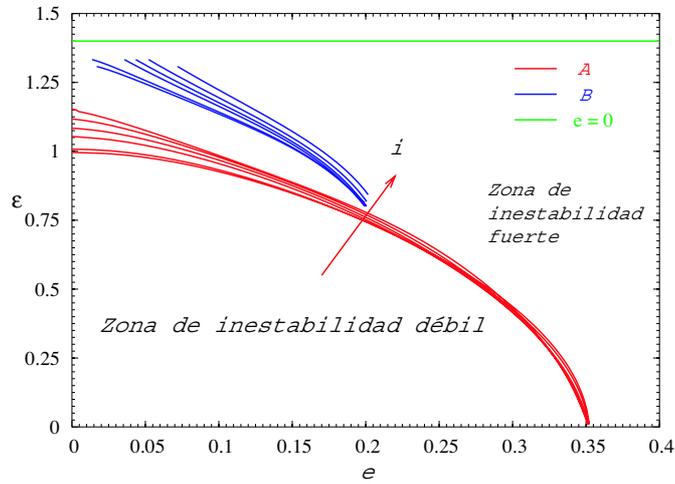


Figura 20: Regiones del plano  $(e, \varepsilon)$  con diferentes propiedades de estabilidad.

inclinación. Aproximadamente, para  $e > 0.2$  la frontera entre las zonas de inestabilidad débil y fuerte está bien descrita por las curvas  $A$ ; para  $e < 0.2$ , sin embargo, es mejor utilizar las curvas  $B$ .

En la figura 20, la línea horizontal superior proporciona el orden de magnitud del valor crítico de  $\varepsilon$  (ver figura 17) que separa las zonas de inestabilidad débil y fuerte en órbita circular.

De este análisis se deduce que, globalmente, la zona de inestabilidad débil *decrece* cuando la órbita es elíptica. Además, si la excentricidad es mayor que  $\approx 0.35$ , el tether electrodinámico se vuelve fuertemente inestable. Este resultado es particularmente interesante, pues en posibles misiones a los planetas gigantes, en las que se contemplan órbitas elípticas, los tethers electrodinámicos se han considerado como la fuente primaria de propulsión. En estos casos, *la excentricidad de la órbita debe de ser menor que el valor crítico 0.35 para evitar las inestabilidades fuertes puestas de manifiesto en este trabajo.*

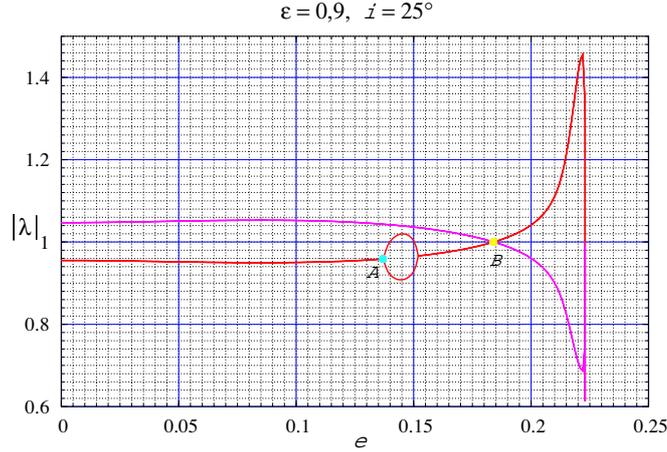


Figura 21: Módulo de los autovalores versus  $e$  para  $\varepsilon = 0.9$  e  $i = 25^\circ$ .

## 6 Conclusiones

Se ha estudiado el efecto conjunto de excentricidad orbital y fuerzas electrodinámicas en la dinámica de actitud de un tether electrodinámico. En las ecuaciones que gobiernan el movimiento relativo al centro de masas del sistema aparecen términos forzantes periódicos, de periodo igual al orbital, que impiden la existencia de posiciones de equilibrio a lo largo de la vertical local. En su lugar, hay órbitas periódicas estudiadas numéricamente en este artículo.

El análisis numérico utiliza un algoritmo basado en el método de Poincaré de continuación de órbitas periódicas. El algoritmo proporciona diferentes familias de órbitas periódicas y, utilizado conjuntamente con la ley de arrastre de frecuencias para sistemas forzados periódicamente, permite un análisis exhaustivo de las mismas.

Se ha mostrado la efectividad del algoritmo en la obtención de soluciones periódicas. Algunas de ellas se han obtenido de nuevo para un tether inerte (sin corriente) en órbita elíptica (fueron detectadas en 1969 por Mody & Brereton, ref. [7, 8], para un satélite general). En este análisis, forman parte de una familia más amplia de órbitas periódicas. El algoritmo proporciona, además, las propiedades de estabilidad de las soluciones periódicas detectadas.

Además de mostrar los parámetros adimensionales esenciales en el problema, el principal resultado del análisis es mostrar los efectos de la excentricidad orbital en un tether con corriente. La forma de las órbitas periódicas cambia drásticamente respecto al caso circular y también sus propiedades de estabilidad, aunque de un modo más complejo.

Cuando la excentricidad es pequeña, no hay cambios cualitativos en las propiedades de estabilidad de las soluciones periódicas y ambos casos, el circular y el elíptico, resultan similares. Sin embargo, para valores crecientes de la excentricidad, la inestabilidad

dinámica se vuelve más y más pronunciada. Más allá de un valor crítico de  $e \approx 0.35$ , la inestabilidad se hace muy intensa. Por tanto, misiones que utilicen órbitas de una gran excentricidad,  $e \approx 0.5 - 0.8$ , deberán encarar grandes problemas de control si emplean tethers electrodinámicos.

No se incluye aquí la influencia del argumento del perigeo,  $\omega$ , que se ha supuesto nulo. Además, se han introducido simplificaciones de validez limitada: tether rígido, modelo dipolar del campo magnético terrestre, ausencia de amortiguamiento, corriente del tether constante a lo largo de la órbita, etc. Así, han podido deducirse conclusiones interesantes de carácter general. El análisis podría mejorarse en el futuro, eliminando algunas de las simplificaciones más restrictivas. Por ejemplo, en órbita elíptica sería importante considerar las variaciones de la corriente del tether a lo largo de la órbita, asociadas a la diferencia de altura entre el apogeo y el perigeo. Las diferencias en la densidad del plasma ionosférico producen cambios importantes en la corriente del tether, suavizando las inestabilidades detectadas. Sin embargo, un análisis detallado de ese tipo debe de ir acompañado de una configuración concreta del tether (bare tether, por ejemplo) y es, por su propia naturaleza, de alcance limitado.

## Agradecimientos

La contribución de Yago N. Andrés es parte del trabajo de doctorado *Mecánica Orbital de Tethers Electrodinámicos. Simulación Dinámica* desarrollado en la ETSI Aeronáuticos de la UPM (curso 2002/03). La contribución de J. Peláez se encuadra en el proyecto BFM2001-3663, titulado *Estabilidad y Simulación Dinámica de Tethers*, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología.

## Referencias

- [1] Barkin, Yu. V. and Pankratov, A. A.: 1977, ‘Periodic motions of an axisymmetric satellite with respect to its center of mass in an elliptical orbit’, *Cosmic Research* **15**, 453–459.
- [2] Beletskii, V. V.: 1966, *Motion of an Artificial Satellite About its Center of Mass*, Mechanics of Space Flight, Israel Program for Scientific Translation, NASA & NSF, Jerusalem, *translated from Russian*.
- [3] Demin, V. G. and Singkh, R. B.: 1973, ‘Nonlinear plane oscillations of a satellite in an elliptical orbit’, *Cosmic Research* **11**, 172–176.
- [4] Dobrowolny, M.: 2002, ‘Lateral oscillations of an electrodynamic tether’, *The Journal of the Astronautical Sciences* **50**, 125–147.

- [5] Gulyaev, V. I., Zubritskaya, A. L. and Koshkin, V. L.: 1989, ‘Universal sequence of bifurcation of doubling of the oscillation period for a satellite in an elliptical orbit’, *Mechanics of Solids* **24**, 1–6.
- [6] Lara, M. and Peláez, J.: 2002, ‘On the numerical continuation of periodic orbits: An intrinsic, 3–dimensional, differential, predictor–corrector algorithm’, *Astronomy and Astrophysics* **389**, 692–701.
- [7] Modi, V. J. and Brereton, R. C.: 1969, ‘Periodic solutions associated with gravity–gradient–oriented systems: Part II. Analytical and numerical determination’, *AIAA Journal* **7**, 1217–1225.
- [8] Modi, V. J. and Brereton, R. C.: 1969, ‘Periodic solutions associated with gravity–gradient–oriented systems: Part II. Stability analysis’, *AIAA Journal* **7**, 1465–1468.
- [9] Murdock, J. A.: 1991, *Perturbations: Theory and Methods*, Classics in Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York.
- [10] Peláez, J. and Lara, M.: 2000, ‘Periodic solutions in rigid electrodynamic tethers on inclined orbits’, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **26**, 395–406.
- [11] Peláez, J. and Lara, M.: 2003, ‘Damping in the dynamic stability of deorbiting bare tethers’, *13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*.
- [12] Peláez, J. and Lorenzini, E. C.: 2003, ‘Libration control of electrodynamic tethers in inclined orbit’, *13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*.
- [13] Peláez, J., Lorenzini, E. C., López-Rebollal, O. and Ruiz, M.: 2000, ‘A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers’, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, *Advances in the Astronautical Sciences* **105**, 1367–1386.
- [14] Peláez, J., Lorenzini, E. C., López-Rebollal, O. and Ruiz, M.: 2000, ‘A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers’, *The Journal of Astronautical Sciences* **48**, 449–476.
- [15] Peláez, J., López-Rebollal, O., Lara, M. and Hedo, E. A.: 2002, ‘Dynamic stability of a bare tether as a deorbiting device’, em 12th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting.
- [16] Petrov, A. L., Sazonov, V. V. and Sarychev, V. A.: 1983, ‘Stability of periodic oscillations of a quasi–axisymmetric satellite in the plane of an elliptical orbit’, *Mechanics of Solids* **19**, 37–47.

- [17] Sarychev, V. A., Sazonov, V. V. and Zlatoustov, V. A.: 1977, 'Periodic oscillations of a satellite in the plane of an elliptical orbit', *Cosmic Research* **15**, 698–719.
- [18] Siegel, C. L. and Moser, J. K.: 1971, *Lectures on Celestial Mechanics*, Classics in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.