

Una ley de pérdida de masa en binarias que por efecto periastro produce un aumento secular de la excentricidad.

M. Andrade y J.A. Docobo

Observatorio Astronómico R.M. Aller.

Universidade de Santiago de Compostela.

Apdo. correos 197. 15706 Santiago de Compostela, Spain. *

Abstract

Canonical equations of motion of a decreasing mass two-body problem are integrated considering a mass loss law depending on three small parameters. Two first one take into account the time-dependence of mass for each component, while third one allows us to study the so-called *periastron effect*, i.e., an enhanced of mass loss by gravitational interaction.

1 Introducción

Desde su formación, toda estrella sufre una pérdida continua de masa que depende del tiempo. En el marco de la mecánica celeste, este problema, que ha sido ampliamente estudiado (Prieto y Docobo 1997a, 1997b; Docobo, Blanco y Abelleira 1999; Andrade y Docobo 2001), es conocido como de Gylden-Meščerskiĵ.

En un sistema binario es posible que, a esta pérdida dependiente del tiempo, se superponga otra debida a la interacción gravitatoria entre ambas componentes. Así, podríamos suponer que, en las cercanías del periastro, se produce una disminución de la masa sensiblemente superior a la que tiene lugar cuando las estrellas se encuentran más separadas. A este fenómeno lo denominaremos *efecto periastro*, y será tanto más relevante cuanto mayor sea la excentricidad de la órbita y cuanto menor sea la distancia mínima entre ambas componentes.

Tal efecto es muy interesante porque posiblemente puede explicar las relativamente altas excentricidades que poseen ciertos sistemas binarios fuertemente interactuantes. De hecho, el efecto periastro podría contrarrestar la circularización por efecto de marea predicha por Zahn (1977, 1989).

*oandrade@usc.es, oadoco@usc.es

Aún cuando la formulación analítica que utilizaremos nos permite un tratamiento simétrico de ambas variaciones de masa, pensamos que es más natural considerar el efecto periastro como una perturbación a la pérdida de masa dependiente del tiempo. Por tanto, podemos considerar que la ley de pérdida de masa que analizaremos da lugar a un problema de Gylden-Meščerskij perturbado.

2 Leyes de pérdida de masa con efecto periastro

Nosotros estamos interesados en leyes de pérdida de masa que, teniendo en cuenta el efecto periastro, den lugar a nuevos comportamientos en la evolución de los elementos orbitales, tales como la variación secular de la excentricidad.

De todo el espectro de leyes que dan cuenta del efecto periastro, a través de su dependencia con la distancia, sólo algunas originan variaciones seculares en la excentricidad.

En este trabajo proponemos estudiar la siguiente ley de pérdida de masa dependiente del tiempo y con efecto periastro

$$\dot{\mu}(r, p_\theta, t, \mu_1, \mu_2) = -\alpha_1 \mu_1^n - \alpha_2 \mu_2^q - \beta \frac{p_\theta}{r^2} \quad (1)$$

El primer término representa la pérdida de masa dependiente del tiempo para la primera componente, y de manera análoga el siguiente término para la segunda. Cada una de ellas no es más que la ley de Eddington-Jeans, donde μ_1 y μ_2 son funciones del tiempo, uniformemente decrecientes, continuas y diferenciables; α_1 , α_2 , n y q son cuatro números reales, los dos pequeños parámetros, α_1 y α_2 , próximos a cero y los dos exponentes, n y q , entre 0.4 y 4.4. Por último, el tercer término introduce el efecto periastro, donde r es la distancia entre ambas componentes, p_θ es el momento angular del sistema y β es otro pequeño parámetro próximo a cero.

3 Integración analítica

3.1 Formulación hamiltoniana

La función hamiltoniana correspondiente a este problema dependiente del tiempo y de la distancia puede expresarse en variables polares-nodales de la siguiente forma

$$H(r, \theta; p_r, p_\theta; t) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r} + \beta \frac{\theta}{r} \quad (2)$$

Ésta puede verse como la función hamiltoniana de un problema de Gylden-Meščerskij perturbado, con dicha perturbación dada por el último término.

Veremos como, con esta ley, seremos capaces de cuantificar la pérdida de masa en un sistema binario con efecto periastro por medio de tres pequeños parámetros.

3.2 Aplicación de un método triparamétrico de perturbaciones

Dada la dependencia de la función hamiltoniana con los tres parámetros α_1 , α_2 (relacionados con el tiempo) y β (relacionado con la distancia), es razonable considerar su expansión en función de éstos para luego aplicar un método adecuado de perturbaciones.

Con este fin será útil expresar la función hamiltoniana en variables canónicas de De-launay

$$H = -\frac{\mu^2(t)}{2L^2} + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}eL \sin E + \beta\frac{\mu(t)}{G^2}(g + f)(1 + e \cos f) \quad (3)$$

El desarrollo asintótico para la masa vendrá dado por la siguiente expresión

$$\mu(t) = \mu_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \mu_0^{(p)}(t - t_0)^p \quad (4)$$

Hasta primer orden obtenemos, para cada una de las componentes

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &\simeq \mu_{10} + \dot{\mu}_{10}(t - t_0) = \mu_{10} - \alpha_1 \mu_{10}^n(t - t_0) \\ \mu_2(t) &\simeq \mu_{20} + \dot{\mu}_{20}(t - t_0) = \mu_{20} - \alpha_2 \mu_{20}^q(t - t_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Tal que al sustituir estos desarrollos en la expresión (3) obtenemos la hamiltoniana desarrollada en función de los tres pequeños parámetros

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \alpha_1 H_{100} + \alpha_2 H_{010} + \beta H_{001} \\ H_0 &= -\frac{\mu_0^2}{2L^2} \\ H_{100} &= -\frac{\mu_{10}^{n+1} + \mu_{10}^n \mu_{20}}{L^2}(t - t_0) - \frac{\mu_{10}^n}{\mu_0} eL \sin E \\ H_{010} &= -\frac{\mu_{20}^{q+1} + \mu_{20}^q \mu_{10}}{L^2}(t - t_0) - \frac{\mu_{20}^q}{\mu_0} eL \sin E \\ H_{001} &= -\frac{\mu_0}{G^2}(g + f)(1 + e \cos f) \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\mu_0 = \mu_{10} + \mu_{20}$.

Procedemos a aplicar un método triparamétrico de perturbaciones (Andrade 2002) con el fin de, mediante transformaciones canónicas del tipo $(L, G, l, g) \rightarrow (L^*, G^*, l^*, g^*)$, obtener una nueva función hamiltoniana más fácilmente integrable al haber eliminado en esta última las variables angulares. Las ecuaciones del método son las siguientes

$$\begin{aligned} H_0 &= H_0^* \\ \{H_0; W_1^1\} + \frac{\partial W_1^1}{\partial t} &= H_{100}^* - H_{100} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\{H_0; W_1^2\} + \frac{\partial W_1^2}{\partial t} &= H_{010}^* - H_{010} \\ \{H_0; W_1^3\} + \frac{\partial W_1^3}{\partial t} &= H_{001}^* - H_{001}\end{aligned}$$

La hamiltoniana transformada en función de los parámetros será entonces

$$\begin{aligned}H^* &= H_0^* + \alpha_1 H_{100}^* + \alpha_2 H_{010}^* + \beta H_{001}^* \\ H_0^* &= -\frac{\mu_0^2}{2L^{*2}} \\ H_{100}^* &= -\frac{\mu_{10}^{n+1} + \mu_{10}^n \mu_{20}}{L^{*2}}(t - t_0) \\ H_{010}^* &= -\frac{\mu_{20}^{q+1} + \mu_{20}^q \mu_{10}}{L^{*2}}(t - t_0) \\ H_{001}^* &= -\frac{\mu_0}{G^{*2}} g^*\end{aligned}\tag{8}$$

Por otra parte, la función generatriz de esta transformación viene dada por

$$\begin{aligned}W &= \alpha_1 W_1^1 + \alpha_2 W_1^2 + \beta W_1^3 \\ W_1^1 &= \frac{\mu_{10}^n}{\mu_0^3} e^* L^{*4} (-2 + e^* + e^* \cos E^*) \sin^2 \frac{E^*}{2} \\ W_1^2 &= \frac{\mu_{20}^q}{\mu_0^3} e^* L^{*4} (-2 + e^* + e^* \cos E^*) \sin^2 \frac{E^*}{2} \\ W_1^3 &= \frac{L^*}{\mu_0} \left\{ \frac{\eta^{*2} - 1}{\eta^{*2}} g^* l^* + (g^* + f^*) e^* \sin E^* + \frac{l^{*2}}{2} + \frac{G^{*2} L^*}{\mu_0^2} \frac{1}{1 + e^* \cos f^*} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^* G^{*3}}{2\mu_0^2} \frac{1}{(1 + e^* \cos f^*)^2} - \frac{G^* L^{*2}}{\mu_0^2} \left[(f^* - l^*) \frac{e^* \sin f^*}{1 + e^* \cos f^*} + \log(1 + e^* \cos f^*) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{L^{*3}}{\mu_0^2} \left[Li_2 \left(\frac{e^*}{1 + \eta^*} e^{-iE^*} \right) + Li_2 \left(\frac{e^*}{1 + \eta^*} e^{iE^*} \right) \right] - \eta^* \log \frac{1 + e^*}{1 + e^* \cos f^*} \right\}\end{aligned}\tag{9}$$

donde $\eta^* = \sqrt{1 - e^{*2}}$.

Los términos W_1^1 y W_1^2 se pueden integrar mediante las cuadraturas $\int \cos f dl$, $\int f dl$ y $\int f \cos f dl$ (Kelly 1989).

A fin de obtener en forma cerrada el término W_1^3 hemos introducido también la función dilogaritmo de argumento complejo, definida por (Osácar y Palacián 1994, Osácar, Palacián y Palacios 1995):

$$Li_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = -\int_0^z \frac{\log(1-s)}{s} ds\tag{10}$$

Con objeto de eliminar la segunda variable angular g^* aplicamos de nuevo el método de perturbaciones antes utilizado. La función hamiltoniana que se obtiene es

$$\begin{aligned}
H^{**} &= H_0^{**} + \alpha_1 H_{100}^{**} + \alpha_2 H_{010}^{**} + \beta H_{001}^{**} & (11) \\
H_0^{**} &= -\frac{\mu_0^2}{2L^{**2}} \\
H_{100}^{**} &= -\frac{\mu_{10}^{n+1} + \mu_{10}^n \mu_{20}}{L^{**2}}(t - t_0) \\
H_{010}^{**} &= -\frac{\mu_{20}^{q+1} + \mu_{20}^q \mu_{10}}{L^{**2}}(t - t_0) \\
H_{001}^{**} &= -\frac{\mu_0}{G^{**2}}\pi
\end{aligned}$$

En este caso la función generatriz será

$$\begin{aligned}
W^* &= \alpha_1 W_1^{*1} + \alpha_2 W_1^{*2} + \beta W_1^{*3} & (12) \\
W_1^{*1} &= 0 \\
W_1^{*2} &= 0 \\
W_1^{*3} &= -\frac{L^{**3}}{\mu_0 G^{**2}}(\pi - g^{**})t^{**}
\end{aligned}$$

Actualmente estamos trabajando en la evaluación de las funciones polilogarítmicas que aparecen en W_1^3 con la intención de resolver analíticamente este problema.

4 Integración numérica

Alternativamente a la aproximación analítica, y mientras ésta no se pueda conseguir, es posible analizar el comportamiento del sistema realizando una integración numérica con la ayuda de un manipulador algebraico.

4.1 Aplicación de un método Runge-Kutta

Recuperamos de nuevo la función hamiltoniana en variables polares-nodales dada por (2) para, a partir de ella, obtener las ecuaciones canónicas del movimiento

$$\begin{aligned}
\frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\beta}{r} & (13) \\
\frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{\mu(t)}{r^2} + \beta \frac{\theta}{r^2} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2} \\
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones, junto con otras dos para la pérdida de masa dependiente del tiempo, una para cada componente

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_1(t)}{dt} &= -\alpha_1\mu_1^n \\ \frac{d\mu_2(t)}{dt} &= -\alpha_2\mu_1^q\end{aligned}\tag{14}$$

forman un sistema diferencial de seis ecuaciones. La integración de este sistema mediante la aplicación de un método Runge-Kutta de cuarto orden nos permitirá obtener las coordenadas, los momentos y los elementos orbitales, los cuales dependerán del tiempo y de la distancia.

4.2 Representación gráfica

Con el fin de ilustrar el comportamiento de las variables del problema a lo largo del tiempo, tomaremos un conjunto de condiciones iniciales (elementos orbitales) y unos valores fijos para los exponentes que aparecen en las ecuaciones (14) dados por

Condiciones iniciales	P_0	T_0	f_0	ω_0	a_0	e_0	μ_{10}	μ_{20}	n	q
		2π	0.0	0.0	0.0	1.0	0.2	0.7	0.3	2

A continuación pasamos a describir cuatro casos que creemos representan ampliamente la fenomenología del problema que estamos analizando

Valores de los parámetros	CASOS	1	2	3	4
	α_1		10^{-6}	0	10^{-5}
α_2		10^{-7}	0	10^{-6}	10^{-7}
β		0	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}

4.2.1 PÉRDIDA ÚNICAMENTE DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Este es el conocido como problema de Gylden-Meščerskij en el que el sistema pierde masa a medida que el tiempo avanza. Por tanto, el parámetro β , que acopla la pérdida de masa dependiente de la distancia, será nulo.

Como ya era sabido, el momento angular del sistema es una constante del movimiento.

En lo que se refiere a los elementos orbitales, el argumento del periastro y la excentricidad exhiben una evolución periódica, mientras que el semieje mayor y el período muestran un comportamiento secular (ver figura 1)

4.2.2 PÉRDIDA ÚNICAMENTE POR EFECTO PERIASTRO

Supongamos un caso extremo en el que tenemos un fuerte aumento de la pérdida de masa en las proximidades del periastro sin dependencia temporal, esto es, *efecto periastro puro*.

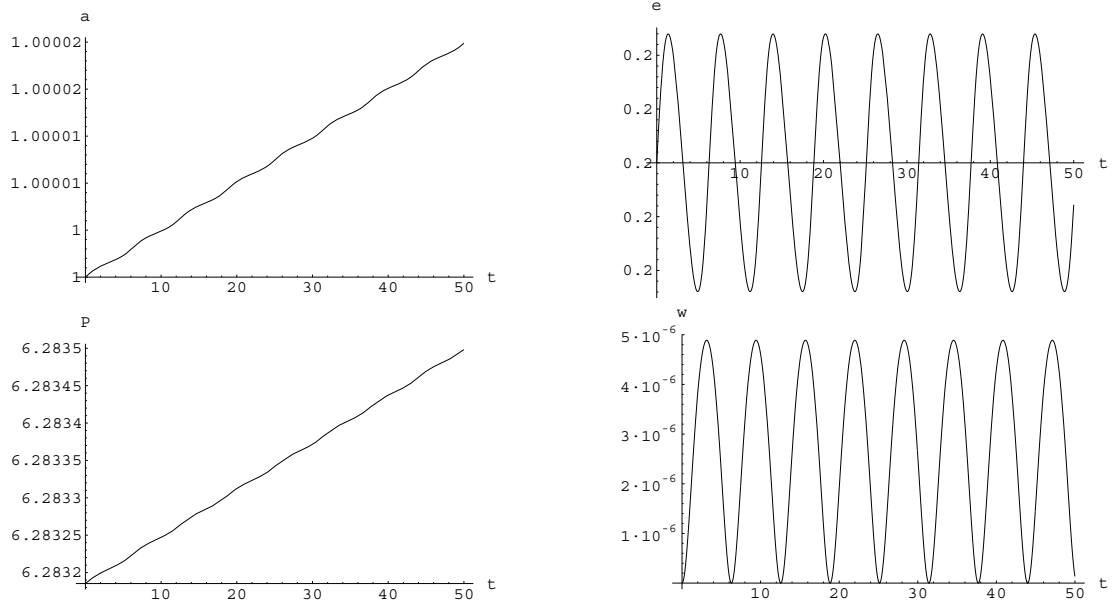


Figura 1: Elementos orbitales (caso 1)

Ahora, los parámetros α_1 y α_2 , que dan cuenta de la pérdida de masa con el tiempo, serán nulos.

La primera consecuencia es que el momento angular del sistema deja de ser una constante del movimiento teniendo lugar un decrecimiento uniforme del mismo.

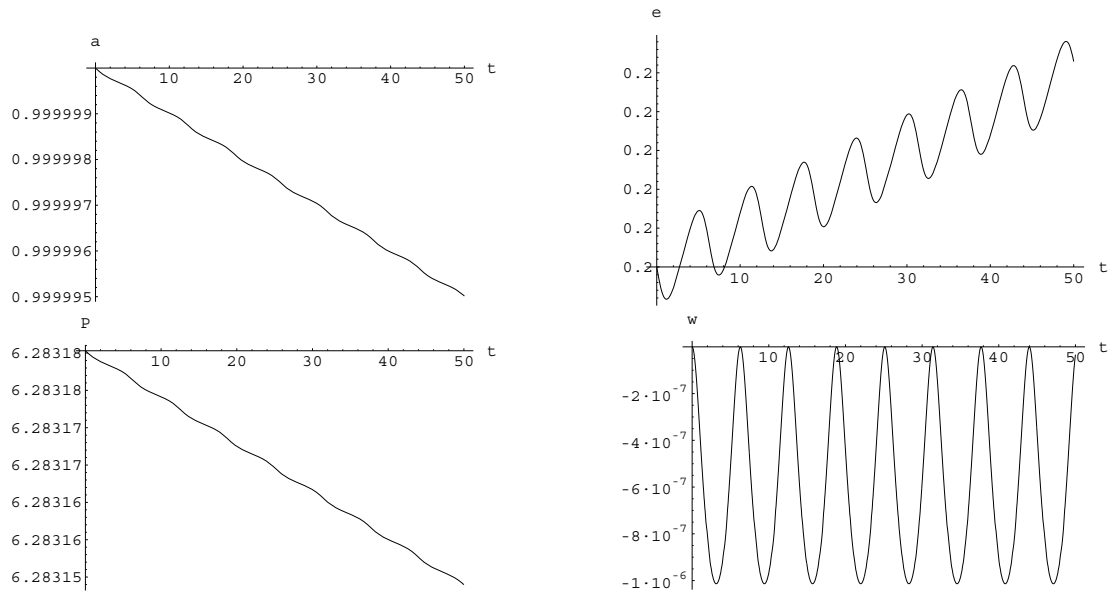


Figura 2: Elementos orbitales (caso 2)

El efecto periastro provoca una regresión periódica del argumento del periastro. Sin embargo, las variaciones más novedosas y sorprendentes tienen lugar tanto en la excentricidad, que ahora muestra un fuerte crecimiento secular, como en el semieje mayor y el período que, al contrario que en el ejemplo anterior, pasan a tener un marcado decre-

imiento secular (ver figura 2).

4.2.3 PÉRDIDA DEPENDIENTE DEL TIEMPO + EFECTO PERIASTRO

Supongamos que el parámetro β es ligeramente menor que los α 's. En ese caso podemos considerar que tenemos pérdida de masa dependiente del tiempo más efecto periastro como una perturbación.

Como en el caso anterior, y siempre que β es distinto de cero, el momento angular del sistema no será una constante del movimiento.

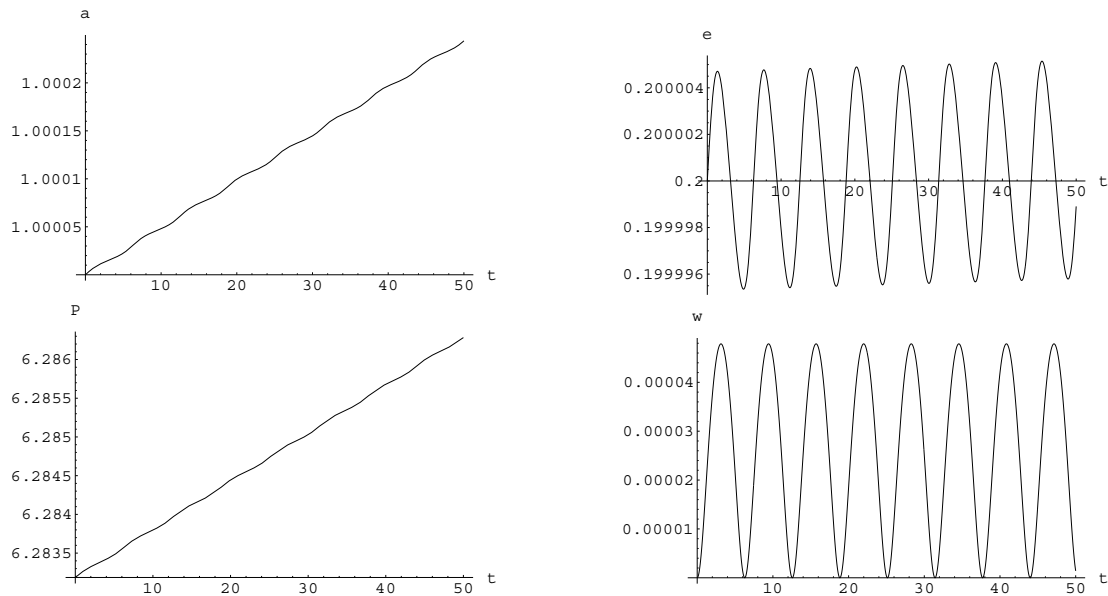


Figura 3: Elementos orbitales (caso 3)

Como era de esperar, la pérdida de masa dependiente del tiempo es dominante, y así, el argumento del periastro, el semieje mayor y el período exhiben un comportamiento similar al del primer caso. No obstante, es de destacar que, de nuevo, la excentricidad muestra una suave variación secular, que será más importante según el valor de β aumente. Es decir, dependiendo de como se ajusten los tres parámetros la perturbación será más o menos fuerte, originando así mayores o menores variaciones seculares de la excentricidad (ver figura 3).

4.2.4 PÉRDIDA DEPENDIENTE DEL TIEMPO Y EFECTO PERIASTRO

En el último ejemplo supondremos que β es del mismo orden que los α 's.

Casi todos los elementos orbitales presentan un comportamiento similar al del segundo caso, donde teníamos efecto periastro puro. De esta manera, la excentricidad también presenta incremento secular. Sin embargo, a pesar de que el semieje mayor muestra un

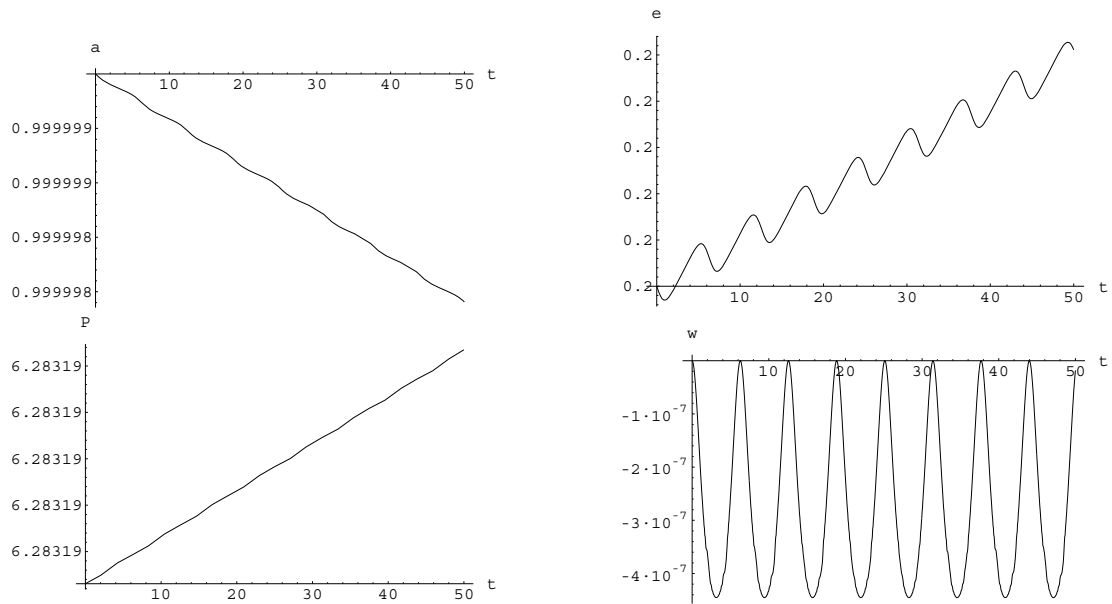


Figura 4: Elementos orbitales (caso 4)

decrecimiento secular, ahora no ocurre lo mismo con el período. Al contrario que en el caso anterior, éste presenta un aumento secular con el tiempo (ver figura 4).

5 Conclusiones

Una vez superadas las dificultades en la evaluación de las funciones polilogarítmicas de argumento complejo esperamos, con este enfoque analítico, ser capaces de calcular la evolución temporal de los elementos orbitales a largo plazo e incluso para altas excentricidades, cuando la aproximación numérica puede presentar algunos problemas.

Además, con este modelo perturbativo de pequeños parámetros, creemos que será posible explicar ciertas anomalías halladas en algunos sistemas binarios (Kennedy 2000; Soker 2000).

Digamos, finalmente, que nuestra intención es llevar a cabo un exhaustivo examen de otras leyes de pérdida de masa con efecto periastro mediante métodos de integración analíticos para, posteriormente, ir añadiendo sucesivas perturbaciones, tales como aquellas debidas al intercambio de masa entre las componentes, la influencia de los discos de acreción y la existencia de campos electromagnéticos.

Referencias

- [1] Andrade, M. & Docobo, J.A.: 2001 ‘The influence of decreasing mass on the orbits of wide binaries: an approach to the problem’, *Highlights of Spanish Astrophysics II*, Eds. J. Zamorano, J. Gorgas y J. Gallego, p. 273. Kluwer Academic Publishers.

- [2] Andrade, M.: 2002 ‘Método triparamétrico de perturbaciones’, *Métodos de dinámica orbital y rotacional*. Eds. S. Ferrer, T. López Moratalla y A. Viguera. Prensas Universitarias, Murcia, España.
- [3] Docobo, J.A., Blanco, J. & Abelleira, P.: 1999 ‘Sobre el problema de Gylden-Meshcherskii’, *Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza*, **14**,: 33-37.
- [4] Kelly, T.J.: 1989 ‘A note on first-order normalizations of perturbed Keplerian systems’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **46**: 19-25.
- [5] Kennedy, H.D.: 2000 ‘The Long-Term Period Behaviour of Contact Binaries. IV. Comparison of Systems.’, *Royal Astronomical Society of New Zealand*, **38**(7): 201-211.
- [6] Osácar, C. & Palacián, J.: 1994 ‘Decomposition of functions for elliptic orbits’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **60**: 207-223.
- [7] Osácar, C., Palacián, J. & Palacios, M.: 1995 ‘Numerical evaluation of the dilogarithm of complex argument’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **62**: 93-98.
- [8] Prieto, C. & Docobo, J.A.: 1997a ‘Analytic Solution of the Two-Body Problem with Slowly Decreasing Mass’, *Astronomy and Astrophysics*, **318**: 657-661.
- [9] Prieto, C. & Docobo, J.A.: 1997b ‘On the Two-Body Problem with Slowly Decreasing Mass’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **68**: 53-62.
- [10] Soker, N.: 2000 ‘Eccentric orbits of close companions to asymptotic giant branch stars’, *Astronomy and Astrophysics*, **357**: 557-560.
- [11] Zahn, J.-P.: 1977 ‘Tidal friction in close binary stars’, *Astronomy and Astrophysics*, **57**(3): 383-394.
- [12] Zahn, J.-P.: 1989 ‘Tidal evolution of close binary stars. I - Revisiting the theory of the equilibrium tide’, *Astronomy and Astrophysics*, **220**(1-2): 112-116.
- [13] Zahn, J.-P. & Bouchet, L.: 1989 ‘Tidal evolution of close binary stars. II - Orbital circularization of late-type binaries’, *Astronomy and Astrophysics*, **223**(1-2): 112-118.