

# Un método de perturbaciones espaciales en dinámica de tethers

J. Peláez and J. M. Hedo

Grupo de Dinámica de Tethers (GDT). Dept. Física Aplicada a la Ingeniería Aeronáutica

Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, Spain.

jpelaez@faia.upm.es, jmhedo@faia.upm.es

## Resumen

En la simulación dinámica de tethers se usan *bead models* que discretizan el cable mediante *cuentas* distribuidas en toda su longitud y cuya evolución temporal se aborda numéricamente. Dependiendo de la precisión deseada, el número de partículas oscila, típicamente, entre 5 y 50. En ocasiones la simulación se extiende sobre tiempos largos (varios años). La complejidad de las interacciones del cable con el medio espacial exige optimizar, en tiempo y precisión, los propagadores que constituyen el núcleo central del proceso. El *método de perturbaciones espaciales* objeto de este artículo conjuga sencillez de programación, rapidez y precisión, y permite propagar la órbita de cualquier partícula material. Describe la evolución de ciertos *elementos orbitales*, constantes del problema *no perturbado* que, en el *perturbado*, evolucionan en la escala de tiempos impuesta por la perturbación. Puede usarse con cualquier tipo de órbita, está libre de singularidades asociadas a inclinación y/o excentricidad pequeñas, y el uso de parámetros de Euler le confiere robustez.

## 1 Introducción

Este artículo se ha desarrollado dentro del proyecto **Estabilidad y Simulación Dinámica de Tethers**, de tres años de duración, cuyo objetivo básico es entender las inestabilidades dinámicas que afectan, cuando operan en órbitas inclinadas, a los tethers electrodinámicos. El control de estas inestabilidades resulta esencial para explotar sus excelentes características en la propulsión fiable, económica y segura de vehículos espaciales (en particular el tether desnudo).

En el proyecto se abordan estudios teóricos para aumentar el conocimiento de la compleja dinámica que exhiben este tipo de tethers. Simultáneamente, se realizará un simulador dinámico de tethers de propósito general, aunque enfocado al estudio de tethers electrodinámicos. Como colofón, se abordará el prediseño de dos tethers electrodinámicos

desnudos. En el primero, concebido para compensar la pérdida de altura de la Estación Espacial Internacional (ISS) debida a la resistencia aerodinámica, se estudian tres órbitas a 300, 400 y 500 Km de altura. En el segundo, se provoca la reentrada de un satélite, inicialmente a 1000 Km de altura, en tiempos razonables. En ambos casos se pondrá especial cuidado en mostrar la controlabilidad del tether.

Para la simulación dinámica de tethers se dispone, fundamentalmente, de tres tipos de modelos: 1) los basados en *elementos finitos*, 2) los modelos *continuos*, con funciones de forma para los diferentes modos, y 3) los modelos de *cuentas* (*bead models* o *lumped-mass models* en terminología anglosajona). En estos últimos, la masa del cable se discretiza en una colección de partículas materiales cuya evolución temporal se desea conocer. Los modelos de los tipos 1) y 2) son preferidos por algunos autores que aducen en su favor una mayor precisión en la descripción de la dinámica lateral del tether, aunque ésta es una cuestión abierta sobre la que no hay consenso.

Los modelos de cuentas, sin embargo, mantienen una conexión muy directa con los efectos físicos involucrados en la simulación, y son preferibles cuando la dinámica no es bien conocida. Además, resultan ventajosos en fases de prediseño y en los preliminares del Análisis de Misión, pues son sencillos de programar y, si el número de cuentas no es muy elevado, rápidos. En caso necesario, puede incrementarse la precisión del análisis aumentando el número de cuentas usadas en la discretización del tether.

Los tethers comienzan su andadura en el espacio en los años 70 y, desde entonces, se han realizado muchas simulaciones dinámicas. La mayor parte de ellas abarcan semanas, quizás meses, pero, con tether flexibles, nunca se ha llegado a simulaciones que duren años. Paradójicamente, los tethers electrodinámicos muestran sus mejores características en misiones *largas*, que involucren *masas grandes*. En ellas, la simulación necesaria es mucho más larga. La Estación Espacial Internacional (ISS) sería un buen ejemplo.

El costo computacional de las simulaciones de tethers se debe a factores muy variados. En primer lugar, *la interacción del tether con el medio espacial*: su complejidad impone la utilización de modelos sofisticados. Por ejemplo, la descripción de las fuerzas que actúan sobre tethers electrodinámicos, exige modelar: 1) la ionosfera, 2) el campo magnético terrestre y, 3) la propia interacción electromagnética entre el plasma ambiente y el cable conductor. Este último punto implica determinar la evolución temporal de la temperatura del cable, que afecta decisivamente a su resistencia eléctrica y, por ende, a la corriente recogida en el sistema, dato esencial en la descripción de las fuerzas.

Con mayores tiempos de simulación, hay que incluir pequeñas perturbaciones que en simulaciones cortas apenas influyen. En simulaciones a largo plazo el *efecto acumulativo* puede llegar a ser importante. Finalmente, la falta de resultados previos invita, también, a aumentar la precisión. El resultado es un incremento del número de cuentas usadas en la discretización del sistema. En resumen, resulta importante optimizar los procedimientos

y las rutinas usadas para propagar las órbitas de las diferentes partículas que componen el tether discretizado. En lo que sigue se presenta el propagador que se usará como núcleo central del simulador a desarrollar en el citado proyecto.

## 2 Ecuaciones para la partícula

Sea  $E x_1 y_1 z_1$  el sistema geocéntrico inercial con origen en el centro de masas  $E$  de la Tierra. Determinar la evolución temporal  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  de una partícula  $M$ , de masa  $m$ , en dicha referencia es un problema de orden 6. Las ecuaciones que gobiernan su movimiento son

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{m\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \mathbf{F}_p \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} = \overrightarrow{EM}$  es el vector posición de la partícula, y  $\mathbf{F}_p$  es la **fuerza de perturbación**, que se define como la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre  $M$  a excepción del término principal del potencial gravitatorio. Para la integración numérica del sistema (1), las variables *naturales* serían, en principio,  $x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1$  y  $\dot{z}_1$ , esto es, las coordenadas de  $M$  en la referencia geocéntrica y sus derivadas temporales. En conjunto definen el estado dinámico de  $M$ . La solución de este sistema de ecuaciones adopta la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$$

Sin pérdida de generalidad, se toman la posición  $\mathbf{x}_0$ , y la velocidad  $\dot{\mathbf{x}}_0$  de  $M$  en  $t = 0$  (instante inicial), como constantes de integración.

Al movimiento de la partícula se le puede asociar el **triedro orbital**  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , cuyo origen  $O$  coincide con la propia partícula  $M$  y cuyos vectores unitarios  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  se definen como sigue:

- $\mathbf{i}$ , con la dirección y sentido del vector posición  $\mathbf{x}$
- $\mathbf{k}$ , contenido en el plano definido por  $E, \mathbf{x}$  y la velocidad  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  de la partícula, y de sentido tal que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \geq 0$
- $\mathbf{j}$ , se elige de forma que el triedro esté *orientado a derechas*

Así, si se conoce la evolución de la partícula se conoce también la evolución del **triedro orbital**, dada por las relaciones:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}}{R}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{h}}{h}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} \quad (2)$$

donde se ha llamado  $R(t)$  a la distancia  $R = |\mathbf{x}|$ , y  $\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$  al momento cinético (por unidad de masa) de la partícula.

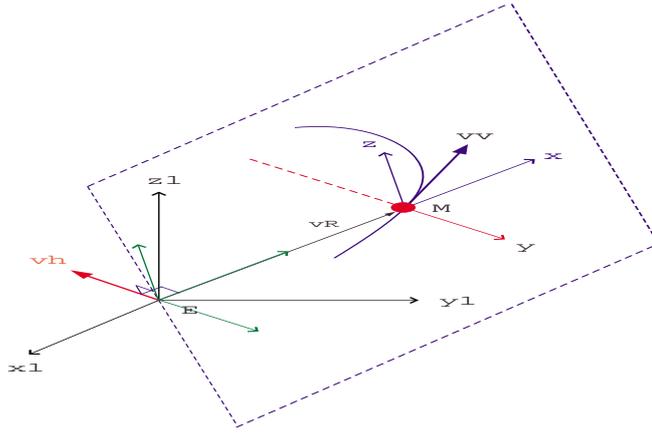


Figura 1: Triedro orbital

A diferencia de la partícula, la evolución de un sólido libre  $S$  en el seno de una referencia dada es, en general, un problema de orden 12, pues hay que determinar la evolución temporal de uno de sus puntos (6 incógnitas), y además, la evolución de su actitud (6 incógnitas más). Sin embargo, la evolución temporal del triedro orbital  $\mathcal{R}$  definido anteriormente está gobernada por un sistema de orden 6, equivalente al sistema (1) que proporciona la evolución temporal de la partícula  $M$ . Éste es un punto básico del método de integración numérica que se propone en estas páginas.

En efecto, sea

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

la velocidad angular del triedro orbital  $\mathcal{R}$ , y  $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ , momentáneamente, los ángulos de Euler que fijan su actitud respecto de la referencia geocéntrica inercial  $Ex_1y_1z_1$ . Determinar la evolución temporal de  $\mathcal{R}$  implica determinar la evolución temporal de  $R$ ,  $(p, q, r)$  y  $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ . Aparentemente el problema es de orden *siete* pero en realidad es de orden *seis*, pues debido a la definición del triedro orbital la componente  $r$  de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  se anula siempre. Esta propiedad fundamental se deduce acudiendo a las derivadas temporales de los versores  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ , que pueden expresarse de dos formas distintas. La primera de ellas se obtiene de la derivación temporal de las ecuaciones (2), y la segunda de las propiedades elementales de la velocidad angular de un sólido.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \frac{\mathbf{v}}{R} - \frac{1}{R^2} \dot{R} \mathbf{x} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \frac{\dot{h}}{h^2} \mathbf{h} - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \end{aligned} \right\} \equiv \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = r\mathbf{j} - q\mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -r\mathbf{i} + p\mathbf{k} \end{aligned} \right.$$

Identificando los valores correspondientes de ambas expresiones se deducen las componentes de la velocidad angular del triedro  $\mathcal{R}$ :

$$p = -\frac{1}{h}(\mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt}), \quad q = -\frac{1}{R}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}), \quad r = \frac{1}{R}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) = 0$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la ecuación de momento cinético

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{x} \times \mathbf{F}_p$$

que se deduce trivialmente de (1), las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  adoptan la forma

$$p = -\frac{R}{mh}(\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{j}), \quad q = -\frac{h}{R^2}, \quad r = 0$$

Como se anticipó, la componente  $r$  es nula *independientemente de la fuerza de perturbación que actúe sobre la partícula*.

Nótese que si la perturbación desaparece, ( $\mathbf{F}_p = \mathbf{0}$ ), el movimiento de la partícula resulta kepleriano,  $\mathbf{h}$  es un vector constante y se cumple la ley de áreas  $R^2\dot{\theta} = h$  característica de los movimientos centrales. Las componentes de la velocidad angular son en ese caso:

$$p = 0, \quad q = -\dot{\theta}, \quad r = 0$$

donde  $\theta$  simboliza la anomalía verdadera.

En lo que sigue, se plantearán las ecuaciones que gobiernan la evolución del triedro orbital y, por tanto, el movimiento de  $M$ . Para ello, se calcularán las derivadas temporales del vector posición  $\mathbf{x} = R\mathbf{i}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \dot{R}\mathbf{i} + R\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \\ \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= \ddot{R}\mathbf{i} + R\{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i})\} + 2\dot{R}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \end{aligned}$$

La ecuación (1) adopta entonces la forma

$$\ddot{R}\mathbf{i} + 2\dot{R}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + R\{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i})\} = -\frac{\mu}{R^2} + \frac{\mathbf{F}_p}{m}$$

y proyectando según los tres ejes de  $\mathcal{R}$ , se obtienen las ecuaciones:

$$\ddot{R} - Rq^2 + \frac{\mu}{R^2} = +\frac{1}{m}(\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{i}) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(R^2q) = -\frac{R}{m}(\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{k}) \tag{5}$$

que, por integración, proporcionan  $R(t), p(t), q(t)$ . A partir de ellas se puede obtener la evolución de  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , mediante las relaciones:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = -q\mathbf{k} \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = +p\mathbf{k} \tag{7}$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = +q\mathbf{i} - p\mathbf{j} \tag{8}$$

Antes de iniciar el desarrollo del método que se propone en estas líneas, se comenzará por simplificar las ecuaciones de partida. Para ello, se introducirán variables adimensionales y se expresará el estado del sistema con coordenadas más apropiadas. Por último, se introducirán parámetros de Euler para simplificar las ecuaciones (6-8).

Para adimensionalizar las ecuaciones, se introducirán tres magnitudes características fundamentales: longitud, tiempo y masa; las restantes magnitudes son derivadas y se obtienen trivialmente de las fundamentales acudiendo a su definición. Se usarán, por tanto, las siguientes magnitudes características en la adimensionalización:

distancias con $R_0$	tiempos con $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}}$
velocidades con $R_0\omega_0$	aceleraciones con $R_0\omega_0^2$
masas con $m$	fuerzas con $mR_0\omega_0^2$

siendo  $R_0$  la distancia inicial del satélite a  $E$ , centro de masas de la Tierra, y  $\omega_0$  la frecuencia orbital de la órbita circular a distancia  $R_0$  de  $E$ . Así, el proceso conduce de forma natural a las variables adimensionales  $\tau, r, P$  y  $Q$  definidas por medio de:

$$\tau = \omega_0 t, \quad R = R_0 r, \quad q = \omega_0 Q, \quad p = \omega_0 P \quad (9)$$

A partir de ahora  $r$  representará una distancia adimensional y no una componente de la velocidad angular  $\omega$ .  $P$  y  $Q$  son las dos componentes adimensionales no nulas de  $\omega$ .

### 2.1 Variables de estado

Las ecuaciones (3-5) se reescribirán usando como variables de estado  $(r, u, \psi)$ ;  $r$  se ha definido en (9);  $u$  y  $\psi$  están definidas por:

$$u = \frac{dr}{d\tau}, \quad \psi = -r^2 Q$$

Reescritas en estas variables de estado, las ecuaciones a integrar adoptan la forma:

$$\frac{dr}{d\tau} = u \quad (10)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\psi^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) \quad (11)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = r(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad (12)$$

donde

$$\mathbf{f}_p = \frac{1}{mR_0\omega_0^2} \mathbf{F}_p$$

es el valor adimensional de la fuerza de perturbación que actúa sobre la partícula.

Nótese que  $\psi$  coincide con el valor adimensional de la constante de áreas en el problema *no perturbado* ( $\mathbf{F}_p = \mathbf{0}$ ), esto es, resulta ser una magnitud conservada de dicho problema.

Las componentes adimensionales ( $P, Q$ ) de la velocidad angular pueden expresarse en función de las variables de estado por medio de las relaciones:

$$P = -\frac{r}{\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{j}) \quad (13)$$

$$Q = -\frac{\psi}{r^2} \quad (14)$$

## 2.2 Parámetros de Euler

Conocidas  $p$  y  $q$ , las ecuaciones (6-8) proporcionan la evolución temporal de los versores  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  del triedro orbital  $\mathcal{R}$ . En el problema planteado existen **dos** referencias fundamentales: 1) la referencia geocéntrica inercial  $Ex_1y_1z_1$ , o triedro  $\mathcal{R}_1$  cuyos versores se denotan por  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ , y 2) el triedro orbital  $\mathcal{R}$  cuyos versores se denotan por  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . La relación entre los dos conjuntos de versores está dada por la ecuación<sup>1</sup>

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1]Q(t)$$

donde  $Q$  es una matriz cuadrada, **ortogonal**, de orden 3, que evoluciona con el tiempo cuando la partícula se mueve. De los nueve elementos de la matriz  $Q$  sólo **tres** son independientes. No es cómoda la descripción de la matriz mediante tres de sus elementos, entre otras razones, por la necesidad de elegirlos de forma que haya uno de cada fila y uno de cada columna. Habitualmente se expresan los **nueve** elementos de  $Q$  en función de tres coordenadas independientes, por ejemplo, los ángulos de Euler. Desde el punto de vista del cálculo numérico, este artificio tiene un inconveniente: siempre existe una dirección **singular** en la que la representación de la matriz  $Q$  por medio de tres coordenadas generalizadas deja de ser biyectiva. Si a lo largo del cálculo se traspasa la singularidad, o se visitan sus proximidades, la simulación puede fracasar directamente o resultar inaceptable por los errores acumulados.

El número mínimo de parámetros que permite eliminar el problema de la singularidad en la representación de la matriz  $Q$  es **cuatro**. Por este motivo, en este artículo se utilizarán los parámetros de Euler ( $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \eta$ ). En función de dichos parámetros la matriz  $Q$  adopta la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 - 2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\eta\varepsilon_3 & 2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\eta\varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\eta\varepsilon_3 & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2) & 2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\eta\varepsilon_1 \\ 2\varepsilon_1\varepsilon_3 - 2\eta\varepsilon_2 & 2\varepsilon_3\varepsilon_2 + 2\eta\varepsilon_1 & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup>La notación hace uso de *matrices*, por ejemplo  $[\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1]$ , que no son tales (los elementos de una matriz son escalares y no vectores). En las operaciones algebraicas, estas *pseudomatrices* siguen las mismas reglas, *mutatis mutandi*, que las verdaderas matrices. Esta notación es fácil de manejar, y no induce a error si se está advertido

De acuerdo con el teorema de Euler, el paso de la base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  a la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  que tiene lugar a través de la matriz  $Q$ , se consigue, geoméricamente, mediante un giro de valor  $\phi$  alrededor de una dirección del espacio definida por un vector unitario  $\mathbf{a}$ . En este contexto, los parámetros de Euler definen los elementos de dicho giro a través de las relaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} \sin \frac{\phi}{2}, \quad \eta = \cos \frac{\phi}{2}$$

La evolución temporal de los parámetros de Euler está dada por las ecuaciones:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\omega} + \eta\boldsymbol{\omega}), \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

en donde todos los vectores que intervienen han de expresarse en el triedro orbital  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . En términos de las variables adimensionales, las ecuaciones (6-8) adoptan la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\tau} &= +\frac{1}{2}P\eta - \frac{1}{2}Q\varepsilon_3, & \frac{d\varepsilon_3}{d\tau} &= -\frac{1}{2}P\varepsilon_2 + \frac{1}{2}Q\varepsilon_1 \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\tau} &= +\frac{1}{2}P\varepsilon_3 + \frac{1}{2}Q\eta, & \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{1}{2}P\varepsilon_1 - \frac{1}{2}Q\varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

donde las componentes adimensionales  $(P, Q)$  de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  están dadas por las relaciones (13-14), y dependen, sólo, de la perturbación  $\mathbf{f}_p$  que actúa sobre la partícula.

Como es bien sabido, entre los cuatro parámetros de Euler siempre se verifica la condición adicional

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \eta^2 = 1 \quad (16)$$

por tanto, de las cuatro ecuaciones (15) *sólo tres son independientes*. No obstante, la relación (16) no se usará para disminuir el orden del sistema, sino para monitorizar la calidad de la solución numérica obtenida por integración de las ecuaciones (15).

### 2.3 Esquema de generación del método

Las ecuaciones (10-14) y (15) constituyen el punto de partida del proceso que conduce al método de integración objeto de este artículo. El esquema seguido en la deducción de las ecuaciones del método se resume en tres puntos básicos:

- mediante un cambio de variable independiente, análogo a la transformación de Sundmann (ver [2]), primer paso en los procesos clásicos de regularización del problema de dos cuerpos (ver [1]), se introduce un *tiempo ficticio*  $\sigma$  definido por

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -Q(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \tau = - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{Q(\sigma)} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{r^2 d\sigma}{\psi} \quad (17)$$

- se obtiene la solución analítica del problema *no perturbado*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\sigma; \mathbf{E}) \quad (18)$$

Aquí  $\mathbf{X}$  simboliza el estado del sistema, y  $\mathbf{E}$  representa las seis constantes de integración (elementos de la órbita en sentido amplio) que aparecen en la solución del problema *no perturbado*

- se usa la técnica de variación de las constantes para resolver el problema **perturbado**.

Para ello la solución del problema **perturbado** se expresa en la forma (18), pero ahora, los elementos de la órbita ya no son constantes, sino funciones de  $\sigma$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\sigma)$ , a determinar. Equivale a concebir las relaciones (18) como un cambio de variables que permite expresar el estado del sistema  $\mathbf{X}$  en función de los elementos orbitales  $\mathbf{E}$ . Dicho cambio de variables permite reescribir las ecuaciones de evolución del problema **perturbado** en términos de  $\mathbf{E}$ :

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\sigma} = \mathbf{G}(\sigma, \mathbf{E}, \mathbf{f}_p), \quad \mathbf{G}(\sigma, \mathbf{E}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Se obtienen así ecuaciones cuyos segundos miembros se anulan idénticamente con la perturbación.

En lo que sigue, se desarrollará este esquema básico, primero con las ecuaciones (10-14), y luego con las (15).

### 3 Primer conjunto de ecuaciones

Se comenzará por reescribir el primer conjunto de ecuaciones (10-14) tomando como variable independiente  $\sigma$  definida en (17). Simultáneamente, y por motivos que se comentarán en breve, se tomará como variable de estado

$$z = \frac{1}{r}$$

en lugar de  $r$ . Se obtiene así el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r^2}{\psi} \quad \rightarrow \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{z^2\psi} \quad (19)$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = u \frac{r^2}{\psi} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{d\sigma} = -\frac{u}{\psi} \quad (20)$$

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{\psi}{r} - \frac{1}{\psi} + \frac{r^2}{\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) \quad \rightarrow \quad \frac{du}{d\sigma} = z\psi - \frac{1}{\psi} + \frac{1}{z^2\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) \quad (21)$$

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{r^3}{\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad \rightarrow \quad \frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{1}{z^3\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad (22)$$

al que han de añadirse las relaciones

$$P = -\frac{1}{z\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{j}) \quad (23)$$

$$Q = -\psi z^2 \quad (24)$$

que proporcionan las componentes de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  en función del estado del sistema.

### 3.1 Problema no perturbado

En el problema *no perturbado*,  $\mathbf{f}_p = \mathbf{0}$ , las ecuaciones (20-22) se simplifican, y la solución puede obtenerse analíticamente; resultado nada sorprendente, pues de antemano se sabe que el problema es integrable. Se llega así a las relaciones

$$z = \frac{1}{\psi^2} + A \cos \sigma + B \sin \sigma \quad (25)$$

$$u = \psi(A \sin \sigma - B \cos \sigma) \quad (26)$$

$$\psi = \psi_0 \quad (27)$$

en donde  $\psi_0$ ,  $A$  y  $B$  son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales.

Nótese que, en el problema *no perturbado*,  $\sigma$  tiene un significado geométrico preciso: coincide con *la anomalía verdadera* de la órbita kepleriana seguida por la partícula. En efecto, si se compara la expresión habitual de la ley de áreas con la ecuación (19)

$$\text{ley de áreas} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = C \quad \leftrightarrow \quad r^2 \frac{d\sigma}{d\tau} = \psi_0 \quad \text{ecuación (19)}$$

se deduce de inmediato el resultado mencionado:  $\sigma \equiv \theta$ . De aquí surge de manera natural la condición inicial a imponer a la variable  $\sigma$

$$\text{en } \tau = 0 : \quad \sigma = \theta_0$$

siendo  $\theta_0$  la anomalía verdadera inicial de la partícula. Condición inicial idéntica en ambos problemas, *no perturbado* y **perturbado**, pues no depende de la existencia o ausencia de perturbación.

La introducción de la variable  $z = 1/r$  responde a un hecho bien conocido, esto es, no es caprichosa. La segunda de las fórmulas de Binet de los movimientos centrales

$$\gamma = -\frac{C^2}{r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\}$$

muestra que, en el problema de dos cuerpos, la ecuación que proporciona la trayectoria es *lineal* en  $z$ . Esta linealización es uno objetivos básico de todo proceso de regularización de ecuaciones.

La propia ecuación (19) proporciona, mediante una integración adicional, la relación existente entre el tiempo adimensional  $\tau$  y la anomalía verdadera  $\sigma$ . No obstante, dicha relación no resulta de interés en este contexto. Además, dependiendo del tipo de órbita kepleriana (elíptica, parabólica o hiperbólica), adoptaría formas diferentes.

### 3.2 Problema perturbado

Guiados por la solución (25-27) del problema *no perturbado*, se buscará la solución del problema *perturbado* en la forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\psi^2(\sigma)} + A(\sigma) \cos \sigma + B(\sigma) \sin \sigma \\ u &= \psi(\sigma)(A(\sigma) \sin \sigma - B(\sigma) \cos \sigma) \\ \psi &= \psi(\sigma) \end{aligned}$$

donde, ahora,  $\psi(\sigma)$ ,  $A(\sigma)$  y  $B(\sigma)$  son funciones desconocidas de  $\sigma$  a determinar como parte de la solución. Equivale a considerar las ecuaciones (25-27) como un cambio de variable que permite expresar el estado dinámico del sistema en términos de las coordenadas generalizadas  $\psi$ ,  $A$  y  $B$ .

Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones (19-22) se obtienen las ecuaciones que gobiernan la evolución de  $\psi(\sigma)$ ,  $A(\sigma)$  y  $B(\sigma)$ . Se llega así al sistema

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{1}{z^3\psi}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad (28)$$

$$\frac{dA}{d\sigma} = +\sin \sigma \cdot \frac{1}{\psi^2 z^2}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) + \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\sigma} \left\{ \cos \sigma \left( \frac{1}{\psi^2} + z \right) - A \right\} \quad (29)$$

$$\frac{dB}{d\sigma} = -\cos \sigma \cdot \frac{1}{\psi^2 z^2}(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) + \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\sigma} \left\{ \sin \sigma \left( \frac{1}{\psi^2} + z \right) - B \right\} \quad (30)$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{z^2\psi} \quad (31)$$

en cuyos segundos miembros aparece la fuerza de perturbación  $\mathbf{f}_p$  que es función del estado del sistema. Si  $\mathbf{f}_p$  se anula, se recobra el problema *no perturbado* en el que  $\psi$ ,  $A$  y  $B$  se mantienen constantes. Para el cálculo del segundo miembro de estas ecuaciones, deben tenerse en cuenta las relaciones

$$z = \frac{1}{\psi^2(\sigma)} + A(\sigma) \cos \sigma + B(\sigma) \sin \sigma \quad (32)$$

$$\frac{dz}{d\sigma} = -A(\sigma) \sin \sigma + B(\sigma) \cos \sigma \quad (33)$$

que se satisfacen en todo instante.

## 4 Segundo conjunto de ecuaciones

Las ecuaciones (15), cuando se reescriben tomando  $\sigma$  como variable independiente, adoptan la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\sigma} &= -\frac{1}{2}\lambda(\sigma)\eta + \frac{1}{2}\varepsilon_3, & \frac{d\varepsilon_3}{d\sigma} &= +\frac{1}{2}\lambda(\sigma)\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\sigma} &= -\frac{1}{2}\lambda(\sigma)\varepsilon_3 - \frac{1}{2}\eta, & \frac{d\eta}{d\sigma} &= +\frac{1}{2}\lambda(\sigma)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

donde la magnitud  $\lambda(\sigma)$ , definida por la relación

$$\lambda(\sigma) = \frac{P}{Q} = \frac{1}{\psi^2 z^3} \cdot (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{j}) \quad (35)$$

es el cociente entre las dos componentes no nulas de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  del triedro  $\mathcal{R}$ . Nótese que  $\lambda(\sigma)$  se hace singular si  $z = 0$  ó  $\psi = 0$ . El caso  $z = 0$  surge cuando se alcanza un punto del infinito ( $r = \infty$ ) de la trayectoria; el caso  $\psi = 0$  surge cuando el momento cinético de la partícula respecto del origen  $E$  se anula, es decir, la velocidad de la partícula está contenida en la vertical local. Ninguna de estas situaciones se presenta en dinámica de tethers, ni en la mayor parte de los problemas típicos de Dinámica Orbital. No obstante, el caso de órbita hiperbólica conduciría, cuando la partícula comienza a acercarse a la asíntota, a una situación de posible singularidad, con  $\lambda$  tomando valores progresivamente crecientes; en ese caso podría obtenerse una solución asintótica, en el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ , que, por brevedad, no se desarrolla en estas páginas.

#### 4.1 Problema no perturbado

En el problema *no perturbado*  $\lambda(\sigma) \equiv 0$ , al ser  $\mathbf{f}_p = \mathbf{0}$ . Las ecuaciones (34) se simplifican y adoptan la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\sigma} &= +\frac{1}{2}\varepsilon_3, & \frac{d\varepsilon_2}{d\sigma} &= -\frac{1}{2}\eta \\ \frac{d\varepsilon_3}{d\sigma} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_1, & \frac{d\eta}{d\sigma} &= +\frac{1}{2}\varepsilon_2 \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones admite solución analítica, que puede expresarse, alterando ligeramente el orden de los parámetros de Euler, como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \eta \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\sigma - \sigma_0) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \eta^0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

donde la matriz  $\mathcal{M}(\zeta)$ , dada por

$$\mathcal{M}(\zeta) = \begin{bmatrix} \cos(\zeta/2) & \sin(\zeta/2) & 0 & 0 \\ -\sin(\zeta/2) & \cos(\zeta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\zeta/2) & -\sin(\zeta/2) \\ 0 & 0 & \sin(\zeta/2) & \cos(\zeta/2) \end{bmatrix}$$

es cuadrada, de tamaño 4 y ortogonal; nótese que  $\mathcal{M}(0) \equiv I$ , siendo  $I$  la matriz unidad de tamaño 4. En (36),  $\sigma_0$  simboliza el valor inicial de  $\sigma$ , y coincide con el valor inicial de la anomalía verdadera de la partícula en la órbita kepleriana que seguiría si se eliminasen

las perturbaciones desde el instante inicial. Los valores  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_3^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  y  $\eta^0$  son constantes de integración que definen la actitud del triedro orbital  $\mathcal{R}$  en el instante inicial.

Nótese que la posición del triedro orbital  $\mathcal{R}$  cambia con el tiempo a partir de una posición inicial. La solución (36) relaciona la actitud de  $\mathcal{R}$  en un instante genérico, con la actitud de  $\mathcal{R}_0$ , esto es, el triedro  $\mathcal{R}$  en el instante inicial ( $t = 0$ ).

#### 4.2 Problema perturbado

Para abordar el problema perturbado conviene escribir las ecuaciones (34) de forma matricial

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1/d\sigma \\ d\varepsilon_3/d\sigma \\ d\varepsilon_2/d\sigma \\ d\eta/d\sigma \end{pmatrix} = S(\sigma) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \eta \end{pmatrix} \quad (37)$$

donde la matriz  $S(\sigma)$  es

$$S(\sigma) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\lambda(\sigma) \\ -1 & 0 & \lambda(\sigma) & 0 \\ 0 & -\lambda(\sigma) & 0 & -1 \\ \lambda(\sigma) & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el problema perturbado se busca una solución de las ecuaciones (37) del tipo

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \eta \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\sigma - \sigma_0) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0(\sigma) \\ \varepsilon_3^0(\sigma) \\ \varepsilon_2^0(\sigma) \\ \eta^0(\sigma) \end{pmatrix} \quad (38)$$

en la que  $\varepsilon_1^0(\sigma)$ ,  $\varepsilon_3^0(\sigma)$ ,  $\varepsilon_2^0(\sigma)$  y  $\eta^0(\sigma)$  son funciones de  $\sigma$  que hay que determinar como parte de la solución. Equivale a considerar las ecuaciones (36) como un cambio de variable que permite expresar el estado dinámico del sistema en términos de las coordenadas generalizadas  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_3^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  y  $\eta^0$ .

Introduciendo las expresiones (38) en las ecuaciones (37), éstas, tras un poco de álgebra, adoptan la forma

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^0(\sigma)/d\sigma \\ d\varepsilon_3^0(\sigma)/d\sigma \\ d\varepsilon_2^0(\sigma)/d\sigma \\ d\eta^0(\sigma)/d\sigma \end{pmatrix} = F(\sigma) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0(\sigma) \\ \varepsilon_3^0(\sigma) \\ \varepsilon_2^0(\sigma) \\ \eta^0(\sigma) \end{pmatrix}$$

donde la matriz

$$F(\sigma) = \left( \mathcal{M}^T(\sigma - \sigma_0)S(\sigma)\mathcal{M}(\sigma - \sigma_0) - \mathcal{M}^T(\sigma - \sigma_0)\frac{d\mathcal{M}}{d\sigma}(\sigma - \sigma_0) \right)$$

introduciendo el valor  $\Omega = \sigma - \sigma_0$ , como

$$F(\sigma) = \frac{\lambda(\sigma)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \Omega & -\cos \Omega \\ 0 & 0 & \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & -\cos \Omega & 0 & 0 \\ \cos \Omega & \sin \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez desarrolladas, las ecuaciones adoptan la forma:

$$\frac{d\varepsilon_1^0}{d\sigma} = -\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\sin(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_2^0 + \cos(\sigma - \sigma_0)\eta^0\} \quad (39)$$

$$\frac{d\varepsilon_2^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\sin(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_1^0 - \cos(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_3^0\} \quad (40)$$

$$\frac{d\varepsilon_3^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\cos(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_2^0 - \sin(\sigma - \sigma_0)\eta^0\} \quad (41)$$

$$\frac{d\eta^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\cos(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_1^0 + \sin(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_3^0\} \quad (42)$$

y deben integrarse a partir de las condiciones iniciales apropiadas.

Observese de nuevo, que si la perturbación desaparece,  $\lambda \equiv 0$ , las coordenadas generalizadas  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_3^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  y  $\eta^0$  se mantienen constantes, es decir, se recobra el resultado correspondiente al problema *no perturbado*. El valor de  $\lambda$  sólo depende de la componente de la perturbación normal al plano orbital (ver (35)), y si ésta es *pequeña* el valor de  $\lambda$  será *pequeño*, esto es,  $\lambda \ll 1$ . En tal caso, la evolución de  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_3^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  y  $\eta^0$  se produce en una escala de tiempos tanto más larga cuanto menor sea la perturbación.

Nótese que ahora hay *tres* triedros en el problema: el geocéntrico inercial  $Ex_1y_1z_1$  que es fijo, el triedro orbital  $\mathcal{R}_0$ , cuya actitud está definida por las coordenadas generalizadas  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_3^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  y  $\eta^0$ , y el triedro orbital  $\mathcal{R}$  en la posición real de la partícula, cuya actitud está definida por los parámetros de Euler  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\eta$ .

En el problema *no perturbado* el triedro  $\mathcal{R}_0$  es fijo en la referencia  $Ex_1y_1z_1$ , mientras que en el problema *perturbado* su posición cambia con el tiempo (tanto más lentamente cuanto menor sea la perturbación que actúa sobre la partícula). En ambos casos la actitud del triedro orbital  $\mathcal{R}$  situado en la posición real de la partícula está dada por las ecuaciones (38). Ahora bien, en el problema *no perturbado*  $\mathcal{R}$  evoluciona en una única escala de tiempos; si, por ejemplo, la órbita seguida por la partícula  $M$  es elíptica, esa escala de tiempos única está definida por el periodo orbital. Por el contrario, en el problema *perturbado*  $\mathcal{R}$  evoluciona en dos escalas de tiempo, en principio, diferentes. Una, definida por la órbita osculatriz (escala rápida), y otra definida por la perturbación (escala lenta); cuando ésta es pequeña, la segunda escala es mucho mayor que la primera. La relación entre los dos triedros orbitales,  $\mathcal{R}_0$  y  $\mathcal{R}$ , es muy clara: si en un instante dado se elimina la perturbación, la partícula seguiría, a partir de entonces, una órbita kepleriana: la *órbita osculatriz*; en ella,  $\mathcal{R}_0$  sería el triedro orbital en el instante *inicial* y  $\mathcal{R}$  el triedro orbital en un instante genérico.

Es importante comprender esta estructura del propagador, pues para el cálculo de la perturbación, que interviene en los segundos miembros de las ecuaciones, se necesita usar el triedro orbital  $\mathcal{R}$  situado en la posición real de la partícula, mientras que las ecuaciones que se integran sólo proporcionan el triedro orbital  $\mathcal{R}_0$ . El paso de uno a otro se consigue a través de las relaciones (38).

En definitiva, el método que se propone integra las ecuaciones (28-31) y (39-42) a partir de unas condiciones iniciales apropiadas. En el proceso de integración, y para el cálculo de los segundos miembros de las ecuaciones deben tenerse en cuenta las relaciones (32-33), (35) y (38) que se satisfacen en todo instante.

### 4.3 Cambio de variables

La formulación última del método se alcanza tras efectuar un último cambio de variables definido por las relaciones

$$q_1 = \psi A, \quad q_2 = \psi B, \quad q_3 = \frac{1}{\psi} \quad (43)$$

El cambio está dictado por la estructura de las ecuaciones, en las que aparece de forma natural las derivadas de  $\psi A$  y  $\psi B$ . Además, la energía total del sistema en el movimiento *no perturbado* adopta, como el lector puede comprobar, la siguiente forma simplificada:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\mu}{R} = \frac{m\mu}{2R_0}\{q_1^2 + q_2^2 - q_3^2\}$$

Este último cambio de variable no es imprescindible. Su introducción en el método estuvo guiada, inicialmente, por un razonamiento que resultó ser erróneo.

El cambio de variables puede concebirse como una transformación, en el espacio de fases del problema *no perturbado*, de las variables originales  $R$ ,  $p_R$ ,  $\theta$  y  $p_\theta$ , en las variables  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $\theta$  dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= q_3(q_3 + q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta) \frac{1}{R_0} & \theta &= \theta \\ p_R &= m\sqrt{\frac{\mu}{R_0}}(q_1 \sin \theta - q_2 \cos \theta) & p_\theta &= m\sqrt{\mu R_0} \frac{1}{q_3} \end{aligned}$$

Inicialmente se sospechaba que ésta era una transformación canónica que respetaría la estructura hamiltoniana de las ecuaciones, y generaría un algoritmo más ventajoso. Un cálculo detallado posterior mostró la falsedad de dicho supuesto. La transformación anterior **no es canónica** y no reporta ventaja alguna en la formulación teórica. Sin embargo, en diferentes pruebas realizadas para chequear la bondad del método, se obtuvo una mayor velocidad de cálculo en las simulaciones desarrolladas con la formulación que surge del cambio de variable (43). Y aunque las diferencias no son importantes, se optó por incorporar dicho cambio a la formulación pues tampoco existen razones que lo desaconsejen.

#### 4.4 Resumen de ecuaciones

En definitiva, el método que se propone en estas páginas está basado en el conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = +\frac{1}{q_3 s^2} \quad (44)$$

$$\frac{dq_1}{d\sigma} = +\frac{\sin \sigma}{q_3 s^2} (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) + \cos \sigma \frac{s + q_3}{q_3 s^3} (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad (45)$$

$$\frac{dq_2}{d\sigma} = -\frac{\cos \sigma}{q_3 s^2} (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{i}) + \sin \sigma \frac{s + q_3}{q_3 s^3} (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad (46)$$

$$\frac{dq_3}{d\sigma} = -\frac{1}{s^3} (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{k}) \quad (47)$$

$$\frac{d\varepsilon_1^0}{d\sigma} = -\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\sin(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_2^0 + \cos(\sigma - \sigma_0)\eta^0\} \quad (48)$$

$$\frac{d\varepsilon_2^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\sin(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_1^0 - \cos(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_3^0\} \quad (49)$$

$$\frac{d\varepsilon_3^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\cos(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_2^0 - \sin(\sigma - \sigma_0)\eta^0\} \quad (50)$$

$$\frac{d\eta^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} \{\cos(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_1^0 + \sin(\sigma - \sigma_0)\varepsilon_3^0\} \quad (51)$$

que deben integrarse teniendo en cuenta las relaciones

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{q_3 s^3} (\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{j})$$

$$s = q_3 + q_1 \cos \sigma + q_2 \sin \sigma$$

$$z = \frac{1}{r} = q_3 \cdot s$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\psi \frac{dz}{d\sigma} = q_1 \sin \sigma - q_2 \cos \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \eta \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\sigma - \sigma_0) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0(\sigma) \\ \varepsilon_3^0(\sigma) \\ \varepsilon_2^0(\sigma) \\ \eta^0(\sigma) \end{pmatrix}$$

$$(\varepsilon_1^0)^2 + (\varepsilon_2^0)^2 + (\varepsilon_3^0)^2 + (\eta^0)^2 = 1$$

que permiten calcular los segundos miembros de las ecuaciones.

## 5 Ventajas del método

El método expuesto presenta ventajas de diversa índole. En breve se mostrarán los resultados de chequeos realizados para comprobar la bondad del método. No obstante, algunas de sus ventajas se deducen directamente de la formulación teórica desarrollada,

y conviene subrayarlas antes de entrar en el apartado dedicado a chequear el método. Dichas ventajas son:

Formulación única para los tres géneros de órbitas: elíptica, parabólica e hiperbólica. Se evita así, la singularidad que aparece en las proximidades del movimiento parabólico, en modelos con formulaciones diferentes para órbitas elípticas e hiperbólicas.

Al igual que las ecuaciones planetarias de Lagrange, usa *elementos orbitales* como coordenadas generalizadas. Por ello, el error de truncación se anula en el problema *no perturbado*, y en el *perturbado* está escalado por la propia perturbación

La propagación de errores no es exponencial, como en los métodos de Cowell o de Encke (ver [2]).

A diferencia de las ecuaciones planetarias de Lagrange, el método no presenta singularidades para inclinación y/o excentricidad pequeñas. La actitud del plano orbital está determinada por parámetros de Euler, y no por ángulos de Euler que siempre presentan una dirección singular para inclinación nula.

La utilización de los parámetros de Euler le confiere, además de robustez, fácil autocorrección. En efecto, cuando la suma del primer miembro de (16) se separe de la unidad más allá de un cierto límite, se pueden *normalizar* los parámetros de Euler dividiendo por el módulo del cuaternio al que están asociados

Fácil programación, pues usa las componentes de la fuerza de perturbación en el triedro orbital. Esto facilita la utilización de los modelos usados en Dinámica Orbital

Integrando con una rutina de paso variable, tipo Runge-Kutta-Fehlberg o Dormand-Prince, que permita un control efectivo del paso, se obtiene un simulador preciso y rápido

No es necesario resolver la ecuación de Kepler en el caso elíptico, ni la ecuación equivalente en los casos hiperbólico y parabólico, dado que el *tiempo* es una de las variables de integración determinadas por el propio método

Nótese finalmente que el método integra un sistema de *ocho* ecuaciones diferenciales para resolver un problema de orden *seis*, y ésta es una característica que comparte con los métodos de regularización. Aunque aumentar el orden del sistema en dos unidades pudiera parecer problemático, no hay ninguna desventaja en ello, como ponen de manifiesto los mencionados métodos de regularización y los resultados de la siguiente sección.

## 6 Chequeo del método

El método se ha usado para reproducir los resultados obtenidos en el *Ejemplo 2b* del libro de Stiefel & Scheifele (ver [1], pág. 122). Se trata de un satélite en órbita elíptica inclinada,  $i = 30^\circ$ , de gran excentricidad  $e = 0.95$  y sujeto únicamente a dos fuerzas de perturbación: 1) la perturbación gravitatoria asociada a la oblicuidad terrestre, y 2) la perturbación lunar.

Los parámetros asociados a la gravitación terrestre, necesarios para desarrollar la simulación son:

$$J_2 = 1.08265 \cdot 10^{-3}, \quad R_E = 6371.22 \text{ Km}, \quad \mu = 398601.0 \text{ Km}^3\text{s}^{-2}$$

La perturbación lunar se modela con una fuerza de valor:

$$\mathbf{F}_{PL} = -m\mu_L \left\{ \frac{\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}|^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right\}, \quad \mu_L = 4902.66 \text{ Km}^3\text{s}^{-2}$$

donde  $\mathbf{R}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  son los vectores posición del satélite y la Luna, respectivamente, en la referencia geocéntrica inercial. La posición de la Luna se supone dada por las siguientes efemérides:

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \left\{ \sin \Omega_L t \mathbf{i}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \Omega_L t \mathbf{j}_1 - \frac{1}{2} \cos \Omega_L t \mathbf{k}_1 \right\}$$

donde  $\rho$  y  $\Omega_L$  son constantes que toman los valores:

$$\rho = 384400 \text{ Km}, \quad \Omega_L = 2.665315780887 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

y corresponden a una órbita circular inclinada.

A partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &= (0.0, -5888.9727, -3400.0) \text{ Km} \\ (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1) &= (10.691338, 0.0, 0.0) \text{ Km/s} \end{aligned}$$

que corresponden al perigeo, situado a una distancia  $R = 6800$  Km del centro de masas de la Tierra, se determina numéricamente la posición del satélite después de 288.12768941 días solares medios, tiempo que tarda en describir 50 revoluciones. El cálculo más preciso de la posición final  $(x_{1f}, y_{1f}, z_{1f})$  dado en la referencia [1] es:

$$(-24219.0503, 227962.1064, 129753.4424) \text{ Km} \tag{52}$$

usando un esquema de integración numérica de 498 pasos por revolución. El cálculo más preciso de la posición final  $(x_{1f}, y_{1f}, z_{1f})$  realizado en nuestro grupo conduce a:

$$(-24219.0501159, 227962.1063730, 129753.4424001) \text{ Km}$$

Este mismo problema se usa en la referencia [2] para comparar diferentes métodos de integración. Para ello, se toma la solución (52) dada en [1] como la *auténtica*, y se define el error de un método como la distancia, en Km, entre la posición final proporcionada por el método y la *auténtica*. En todos los casos se usan algoritmos de Runge-Kutta de paso variable. En las cinco primeras columnas del Cuadro 1, tomadas de la referencia [2], se muestran los resultados proporcionados por diferentes métodos de cálculo. La última columna corresponde a los resultados obtenidos usando el método que aquí se ha expuesto.

Método	Stiefel	Sperling	Kustaanheimo		GDT
	Scheifele [1]	Burdet [3]	Stiefel [4]	Cowell [5]	
x(Km)	-24219.050	-24218.818	-24219.002	-24182.152	-24219.279
y(Km)	227962.106	227961.915	227962.429	227943.989	227962.207
z(Km)	129753.442	129753.343	129753.822	129744.270	129753.492
Pasos/rev	500	62	62	240	62
Error		0.318	0.501	42.5	0.250

Tabla 1: Comparación de métodos de integración (tomado de [2])

Nótese que el método de Cowell exige trabajar con un mayor número de pasos por revolución (240) y, a pesar de ello, es el que proporciona la menor precisión, debido a la propagación exponencial de los errores (ver [2]). El método de Sperling & Burdet, considerado el de mayor eficiencia en el libro de V. Bond [2], proporciona un error de 318 m usando 62 pasos por revolución. Como se ve en la última columna del Cuadro 1, el método desarrollado dentro de nuestro grupo compite claramente con el método de Sperling & Burdet, en cuanto a precisión se refiere, pues proporciona un error menor, de 250 m, usando 62 pasos por revolución.

Estos resultados se han obtenido integrando las ecuaciones del método con una rutina Runge-Kutta-Fehlber 4(5), de paso variable, tomada de la referencia [6]. Para el control de paso usa un algoritmo que involucra cuatro parámetros diferentes. Para mostrar mejor las características del método, se ha resuelto el problema usando diferentes valores de los parámetros de la rutina de control de paso. Los resultados se muestran en la figura 2 donde se recoge el error cometido (en Km), en función del número medio de pasos por revolución empleados en cada intento. Entre 60 y 65 pasos por revolución hay muchas combinaciones de valores de los parámetros de la rutina de control de paso, que proporcionan precisión mayor que la obtenida con el método de Sperling & Burdet.

Esta comparación es incompleta, pues no contempla un punto esencial en simulaciones dinámicas, como es el tiempo invertido en la misma. Carecemos de datos que permitan comparar la velocidad de los diferentes métodos y esperamos subsanar esta dificultad en un futuro inmediato. No obstante, en cuanto a rapidez se refiere, creemos que este método es mejor por una razón esencial: en el método de Sperling & Burdet, y en otros

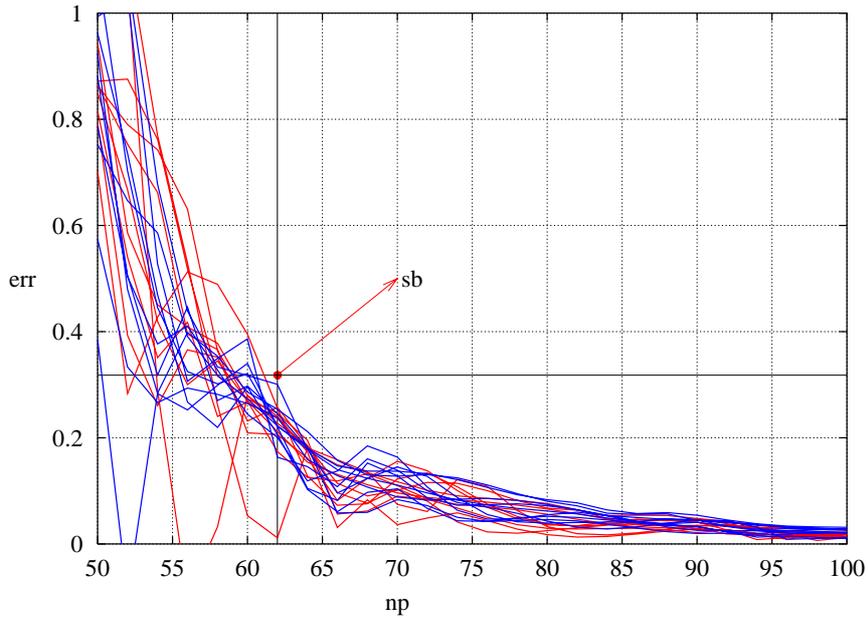


Figura 2: Error vs. número de pasos por revolución

similares basados en técnicas de regularización como pueda ser el de Kustaanheimo & Stiefel, obtener los segundos miembros de las ecuaciones que se integran, exige someter a las fuerzas de perturbación a tratamientos numéricos de cierta longitud. Sin embargo, en el método expuesto en este artículo las fuerzas apenas sufren manipulación, pues en los segundos miembros de las ecuaciones aparecen sus componentes en el triedro orbital  $\mathcal{R}$ , y éstas se obtienen con simples productos escalares. Además, la facilidad de programación, unida a la limpieza y sencillez de las ecuaciones que gobiernan la evolución de los parámetros de Euler, refuerza nuestra creencia en la superioridad del método.

### 6.1 Formulaciones similares

Un análisis de la literatura disponible sobre el tema revela la existencia de formulaciones similares a la expuesta en este artículo, aunque en contextos diferentes. En particular, en el Departamento de Astronomía de la Universidad de El Cairo se usan formulaciones casi idénticas, recogidas en las referencias [7, 9]. Igualmente, en el Grupo de Mecánica Espacial de la Universidad de Zaragoza se han formulado esquemas similares, siendo el más cercano el desarrollado en la referencia [11].

En cualquier caso, es claro para nosotros que este método resulta ventajoso en múltiples aspectos cuando se compara con los métodos tradicionales. Las razones por las cuales esto es así no están perfectamente claras y, desde luego, no son sencillas de esbozar. El lector interesado en profundizar en el tema, puede encontrar en la referencia [10] un extenso análisis sobre los aspectos más profundos de la regularización y linealización, técnicas avanzadas que han guiado la elaboración de los nuevos métodos de perturbaciones en las

últimas décadas.

## 7 Conclusiones

Se han expuesto con detalle los desarrollos que conducen a la formulación de un método de perturbaciones especiales. Un análisis de la estructura de las ecuaciones, pone de manifiesto algunas de las ventajas inherentes al método, como son:

- formulación única para los tres tipos de órbitas: elípticas, parabólicas o hiperbólicas
- error de truncación nulo en el problema *no perturbado*
- error de truncación escalado por la propia perturbación en el problema *perturbado*
- no es singular para inclinación y/o excentricidad pequeña
- no hay propagación exponencial de errores
- robusto y de programación sencilla

Se ha puesto de manifiesto que el método presenta ventajas indudables, en cuanto a precisión se refiere, cuando se compara con métodos clásicos, como pueden ser el método de Cowell o el de Encke. Iguala o mejora la precisión de métodos más sofisticados, como pueden ser el método KS (Kustaanheimo & Stiefel) y el de Sperling & Burdet.

Aunque en la actualidad no se han desarrollado simulaciones que confirmen una mayor rapidez del método frente a los anteriormente reseñados, existen importantes razones que anticipan ese resultado.

Todos estos motivos, hacen especialmente apropiado este método de perturbaciones para ser usado en la simulación dinámica de tethers, donde se precisa seguir la evolución temporal de un número elevado de partículas.

## Agradecimientos.

Los trabajos incluidos en este artículo forman parte del proyecto de investigación **BFM2001-3663**, titulado **Estabilidad y Simulación Dinámica de Tethers**.

## Referencias

- [1] E. L. Stiefel & G. Scheifele, *Linear and regular celestial mechanics: perturbed two-body motion, numerical methods, canonical theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1971
- [2] Victor R. Bond & Mark C. Allman, *Modern astrodynamics: fundamentals and perturbation methods*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996
- [3] V. R. Bond & M. F. Fraietta, *Elimination of Secular Terms from the Differential Equations for the Elements of the Perturbed Two-Body Problem*, Proceed. of the Flight Mechanics and Estimation Theory Symposium, NASA, 1991

- [4] V. R. Bond, *The uniform, regular differential equations of the KS transformed perturbed two-body Problem*, Celestial Mechanics, #10, 1974
- [5] V. R. Bond & M. K. Horn, *The Burdet formulation of the perturbed two body problem with total energy as an element*, JSC Internal 73-FM-86, NASA, 1973
- [6] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky & William T. Vetterling, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- [7] Mohammed Adel Sharafa, Mervat El-Sayed Awad & Samiha Al-Sayed Addullah Najmuldeen, *Motion of artificial satellites in the set of Eulerian redundant parameters (III)*, Earth, Moon and Planets, Vol. 56, pp. 141-164, 1992
- [8] Mervat El-Sayed Awad, *Oblateness and drag effects on the motion of satellites in the set of Eulerian redundant parameters*, Earth, Moon and Planets, Vol. 62, pp. 161-177, 1993
- [9] Mervat El-Sayed Awad, *Analytical Solution to the perturbed  $J_2$  motion of artificial satellites in terms of Euler parameters*, Earth, Moon and Planets, Vol. 69, pp. 1-12, 1995
- [10] André Deprit, Antonio Elipe & Sebastian Ferrer, *Linearization: Laplace vs. Stiefel*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 58, pp. 151-201, 1994
- [11] M. Palacios & C. Calvo, *Ideal Frames and Regularization in Numerical Orbit Computation*, The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 44 (# 1), pp. 63-77, 1996