

Ordenación asintótica del potencial terrestre

A. Abad, J. F. San Juan* y S.Serrano

Grupo de Mecánica Espacial. Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza. Spain

*Universidad de La Rioja, 26004 Logroño. Spain

Resumen

The importance of the development of analytical theories for the motion of artificial satellites is well known, however the involved algebra makes very difficult each advance in the efficiency of such theories. We propose here a method to improve the precision of the theories with less computational effort: a detailed study of the relative value of each term of the Hamiltonian will lead to a new asymptotic ordering depending on the initial conditions of the satellite. In this paper we show how such method reduce the computing time of the generation of a theory and the computing time of the ephemeris program.

1 Introducción

La construcción de teorías analíticas en el caso del movimiento del satélite artificial constituye un difícil problema por la complejidad del álgebra de funciones que dicho desarrollo maneja. Cualquier mejora en los métodos de obtención de dichas teorías, es decir que reduzca el tamaño de las expresiones que se generan así como el tiempo empleado en su cálculo, representa un importante avance en este campo.

En este trabajo proponemos un nuevo método que optimiza la generación y, por tanto, la evaluación de los programas de cálculo de efemérides, de las teorías analíticas. Este método está basado en la ordenación de los términos del Hamiltoniano en función de su influencia para cada conjunto de condiciones iniciales. El objetivo es buscar para cada caso la ordenación que mejor refleje la influencia del potencial en esa región del espacio físico. En el último apartado de este trabajo se muestra como mediante una ordenación adecuada de los términos del potencial para un satélite de tipo Quasi-Spot se consigue, por un lado, reducir el tamaño de las expresiones analíticas, y por el otro, mejorar los tiempos de generación de la teoría y de la evaluación de los programas de cálculo de efemérides de la misma.

El Hamiltoniano de un satélite artificial perturbado por el potencial de un planeta y formulado en un sistema rotante puede expresarse como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_\omega + \sum_{n>1} \mathcal{H}_{J_n} + \sum_{n>1} \sum_{m=1}^n (\mathcal{H}_{C_{nm}} + \mathcal{H}_{S_{nm}}),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{H}_\omega &= -\omega N, \\ \mathcal{H}_{J_n} &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n J_n P_n(\text{sen } i \text{ sen } \theta), \\ \mathcal{H}_{C_{nm}} &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n C_{nm} \cos m\lambda P_{nm}(\text{sen } i \text{ sen } \theta), \\ \mathcal{H}_{S_{nm}} &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n S_{nm} \text{sen } m\lambda P_{nm}(\text{sen } i \text{ sen } \theta). \end{aligned}$$

En el caso particular de la Tierra se cumple, además, que los términos dominantes en dicha expresión son \mathcal{H}_K , \mathcal{H}_ω y \mathcal{H}_{J_2} , esto es los términos kepleriano, de Coriolis y el debido al achatamiento terrestre, manteniéndose el resto de los términos con un valor menor que \mathcal{H}_{J_2} .

El desarrollo de teorías analíticas para este problema se basa en el uso de transformaciones de Lie, que permiten transformar la expresión del hamiltoniano con objeto de simplificarlo, o incluso, convertirlo en uno integrable. Como dichas transformaciones son asintóticas, para poder aplicarlas es necesario expresar el hamiltoniano original como un desarrollo asintótico en función de un pequeño parámetro ϵ

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_{s>0} \frac{\epsilon^s}{s!} \mathcal{H}_s. \quad (1)$$

Para obtener la anterior expresión deberíamos hacernos varias preguntas: en primer lugar, ¿qué parte del hamiltoniano debe constituir el término \mathcal{H}_0 ?, por otro lado, ¿cuál es el valor del pequeño parámetro que debe considerarse?, y por último, una vez resueltas las dos preguntas anteriores, ¿en qué orden, s , debo colocar cada uno de los restantes términos del hamiltoniano?. La respuesta clásica a estas preguntas ha sido tomar el término kepleriano como término de orden cero y proponer como pequeño parámetro el valor del coeficiente J_2 , o en todo caso algún parámetro físico con un valor pequeño y, entonces, los términos no dominantes se situaban en un orden superior. Habitualmente \mathcal{H}_{J_2} se sitúa en el orden uno y el resto en el orden dos.

A continuación vamos a plantear opciones diferentes a la clásica. Por un lado, estudiaremos la posibilidad de que el orden cero no sea siempre el término de Kepler, y por otro se propondrán valores de ϵ en función tan sólo de los valores relativos de \mathcal{H}_K , \mathcal{H}_ω

y \mathcal{H}_{J_2} . Por último, estudiaremos en mayor profundidad dónde colocar cada uno de los términos restantes del hamiltoniano, de forma que se optimice el proceso posterior de aplicación de las transformaciones.

2 Estudio comparativo de los términos dominantes

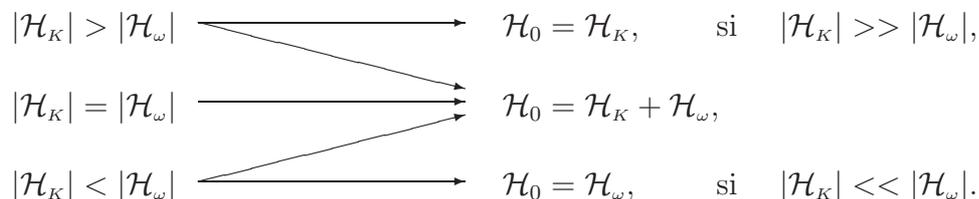
Comenzaremos estudiando el tamaño relativo de los términos \mathcal{H}_K , \mathcal{H}_ω y \mathcal{H}_{J_2} lo que determinará la elección del orden cero, \mathcal{H}_0 , de nuestro Hamiltoniano, así como la posición relativa de los tres con vistas a la elección del pequeño parámetro ϵ que, en nuestro caso, no tiene porqué representar ningún parámetro físico concreto.

2.1 Comparación de \mathcal{H}_K y \mathcal{H}_ω

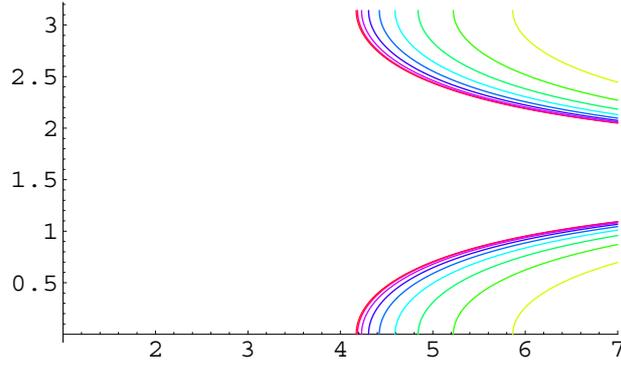
Si expresamos \mathcal{H}_K y \mathcal{H}_ω en función de los elementos orbitales tendremos

$$\mathcal{H}_K = -\frac{\mu}{2a}, \quad \mathcal{H}_\omega = -\omega\sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i.$$

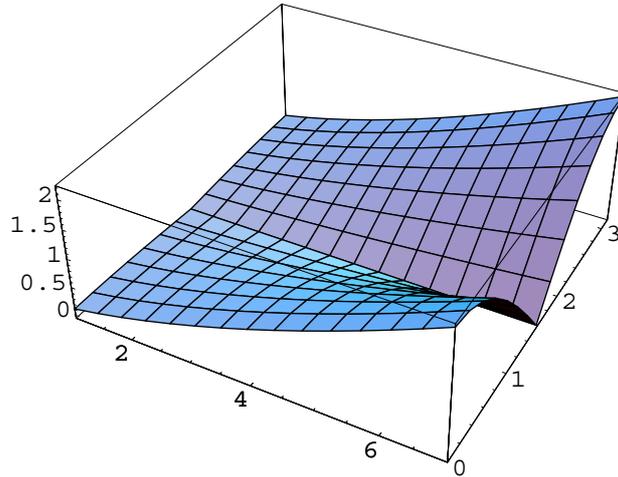
Para diferentes valores del semieje, a , la excentricidad, e , y la inclinación, i , pueden darse tres situaciones distintas, que se muestran en el diagrama siguiente, y que establecen tres posibles elecciones de \mathcal{H}_0 .



En la siguiente figura se muestran las curvas $| \mathcal{H}_K | = | \mathcal{H}_\omega |$ para distintos valores de la excentricidad (desde la más oscura, $e = 0$, hasta la más clara, $e = 0.9$) en un plano donde el eje Ox representa el semieje en radios ecuatoriales y el eje Oy la inclinación en radianes. Lo primero que se observa en dicha figura es la escasa influencia de la excentricidad, de hecho, desde $e = 0$ hasta $e = 0.2$ no se distinguen las diferentes curvas, y salvo para excentricidades cercanas a la unidad la diferencia no es suficientemente importante. Por otro lado, comprobamos que en la zona central el término kepleriano es mayor que el ocasionado por la fuerza de Coriolis, mientras que en las dos esquinas de la derecha la situación es la contraria.



Ahora bien, con esta gráfica no podemos conocer la magnitud relativa de un término respecto del otro, hecho que es determinante para saber si les corresponde estar en el mismo orden del Hamiltoniano o no. Como ya hemos observado que la influencia de la excentricidad es baja, representaremos a continuación el cociente $|\mathcal{H}_\omega|/|\mathcal{H}_K|$ en función de (a, i) considerando $e = 0$.



Se observa, entonces, que si bien, conforme nos acercamos a inclinaciones polares, $|\mathcal{H}_\omega|$ es considerablemente más pequeño que $|\mathcal{H}_K|$, la situación contraria no se produce, puesto que el cociente no toma valores suficientemente grandes en ningún caso realista, es por ello que el tercer caso que se mostraba en el diagrama no se presentará nunca en el caso de satélites en torno a la Tierra, mientras que los otros dos dependerán del valor del semieje y la inclinación de la órbita del satélite en estudio.

2.2 Comparación de \mathcal{H}_K con \mathcal{H}_{J_2}

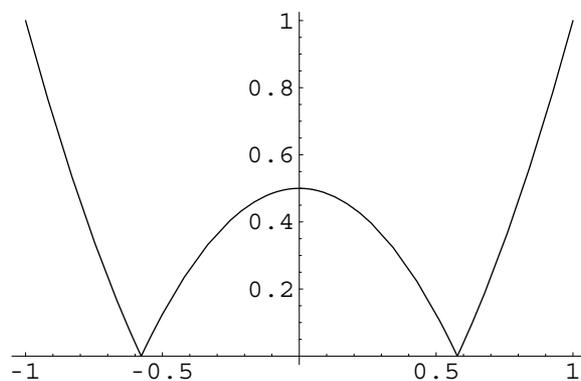
Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_{J_2} = \frac{\mu\alpha^2}{r^3} J_2 P_2(\sin i \sin \theta)$ y que el valor de $|P_2(x)|$ está acotado por 1 en el intervalo $[-1, 1]$, para que $|\mathcal{H}_K| < |\mathcal{H}_{J_2}|$, es necesario que se cumpla $\frac{\mu}{2a} < \frac{\mu\alpha^2 J_2}{r_p^3}$, siendo r_p la distancia del satélite a su paso por el perigeo, además, para evitar órbitas de colisión, dicha distancia ha de ser superior a la unidad (medida en radios

ecuatoriales), se llega a la condición

$$1 < 2\alpha^2 J_2 a \quad \Longleftrightarrow \quad a > 461,$$

siendo la última desigualdad falsa para cualquier satélite orbitando alrededor de la Tierra; es por ello que, en cualquier caso, consideraremos $|\mathcal{H}_K| > |\mathcal{H}_{J_2}|$, pero será conveniente saber el tamaño relativo de ambos en función de los elementos orbitales del satélite con el fin de poder colocar ambos términos en su orden correcto.

El término \mathcal{H}_{J_2} toma diferentes valores según la posición del satélite a lo largo de la órbita, al contrario que \mathcal{H}_K y \mathcal{H}_0 que son constantes para unos elementos orbitales dados. Con objeto de calcular el valor relativo entre ellos será preciso considerar el valor del máximo de \mathcal{H}_{J_2} a lo largo de toda la órbita. Para ello, teniendo en cuenta, por un lado la desigualdad $1/r^3 \leq 1/[a^3(1-e)^3]$, y por otro que, atendiendo a la gráfica siguiente del polinomio de Legendre P_2



y de acuerdo con sus propiedades, se puede demostrar que se verifica

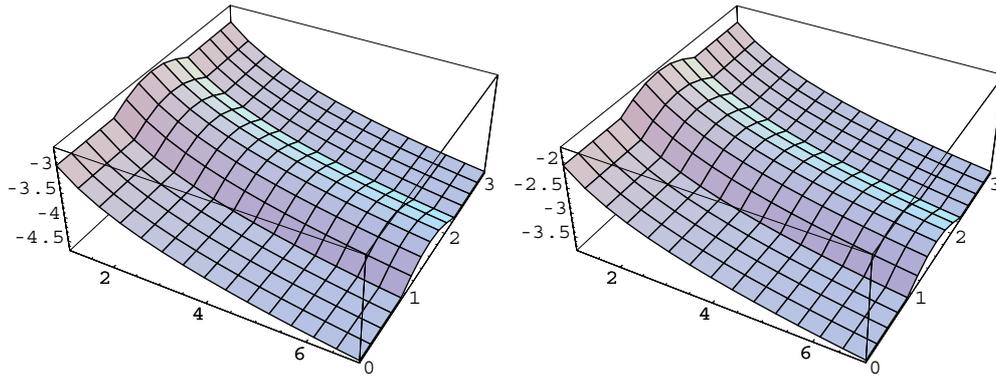
$$|P_2(\sin i \sin \theta)| \leq p_m(i) = \begin{cases} 1/2, & |\sin i| \leq \sqrt{2/3}, \\ |P_2(\sin i)|, & |\sin i| > \sqrt{2/3}, \end{cases}$$

y por tanto llegaremos finalmente a la relación

$$|\mathcal{H}_{J_2}| \leq \mathcal{H}_{J_2}^{\circ} = \frac{\mu\alpha^2}{a^3(1-e)^3} J_2 p_m(i).$$

Estamos ahora preparados para comprobar la magnitud del término kepleriano en relación con $\mathcal{H}_{J_2}^{\circ}$, que corresponde al máximo valor del término \mathcal{H}_{J_2} a lo largo de la órbita, y por tanto será usado para determinar el orden de \mathcal{H}_{J_2} .

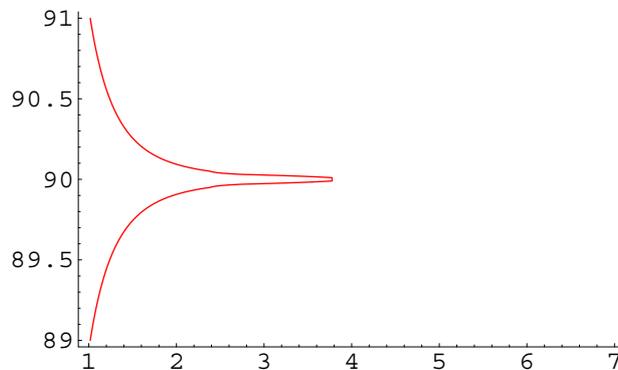
Las dos gráficas siguientes muestran el valor de $\log(\mathcal{H}_{J_2}^{\circ}/|\mathcal{H}_K|)$ para $e = 0$ y $e = 0.5$, respectivamente, en función del semieje y la inclinación.



Como se puede observar, el tamaño relativo se encuentra entre 10^{-2} y $10^{-4.5}$, por lo que podemos elegir un valor de ϵ menor que el de J_2 o situar el término \mathcal{H}_{J_2} en un orden mayor que uno.

2.3 Comparación de \mathcal{H}_{J_2} y \mathcal{H}_ω

Por último, nos falta comparar estos dos términos entre sí, como ya hemos dicho, el término debido al achatamiento terrestre siempre es pequeño con respecto al kepleriano, mientras que el término de Coriolis es del mismo orden que éste último salvo para órbitas bajas u órbitas casi polares, será en esas circunstancias cuando \mathcal{H}_{J_2} y \mathcal{H}_ω podrán ser similares. En la siguiente gráfica se muestran los puntos, para $e = 0$, en función de la inclinación (en grados) y el semieje, en los cuales se da la igualdad de ambos términos.



Como se puede observar, salvo para valores de la inclinación prácticamente iguales a $\pi/2$, el término de Coriolis será superior en tamaño al ocasionado por el achatamiento.

3 Elección de un pequeño parámetro y determinación del orden de cada término

Una vez determinada la relación de tamaños entre los términos dominantes, se nos plantea el problema de tomar un pequeño parámetro para realizar la ordenación asintótica. En el caso clásico, la mayoría de los autores se inclinaban por tomar como pequeño

parámetro el coeficiente del achatamiento terrestre, que efectivamente es pequeño, y no solían entrar en más consideraciones; más recientemente, y de cara a estudiar el problema tesimal se planteó la opción de considerar ω/n , cociente que es pequeño para satélites bajos.

En cualquiera de los casos anteriores, se establece como pequeño parámetro alguna constante física que, por las condiciones propias del problema puede considerarse pequeña. En [7] se analiza la posibilidad de elección del cociente entre los dos términos dominantes o incluso el de un valor *teórico* cualquiera sin significado físico.

En cualquiera de estos casos, el hamiltoniano inicial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_n \mathcal{K}_n$, debe ser expresado como un desarrollo en serie de potencias en ϵ igual que en (1), para lo cual debe determinarse en qué orden se situará cada término \mathcal{K}_n . Tomemos \mathcal{K}_n^o como el máximo de \mathcal{K}_n a lo largo de una vuelta para unas condiciones iniciales dadas, entonces, a dicho término le corresponde un orden s cuando

$$|\mathcal{K}_n^o| \approx \epsilon^s |\mathcal{H}_0| \Leftrightarrow \frac{|\mathcal{K}_n^o|}{|\mathcal{H}_0|} \approx \epsilon^s \Leftrightarrow \log_\epsilon \frac{|\mathcal{K}_n^o|}{|\mathcal{H}_0|} \approx s.$$

Como la función logaritmo es continua en su dominio, en la práctica, lo que se impone es

$$s - \delta < \log_\epsilon \frac{|\mathcal{K}_n^o|}{|\mathcal{H}_0|} < s + 1 - \delta, \quad \delta \in [0, .5],$$

donde el valor concreto de δ se determina en función de diversos factores del problema a tratar y del esquema de integración que pretenda seguirse.

4 Aplicación a un satélite de tipo Quasi-Spot

Para finalizar este trabajo, presentamos un ejemplo en el cual se muestran las ventajas de una adecuada ordenación del potencial terrestre. Para ello vamos a considerar las condiciones iniciales de un satélite de tipo Quasi-Spot,

$$\begin{aligned} a_0 &= 7200.141 \text{ km}, & e_0 &= 0.01, & i_0 &= 98^\circ, \\ \omega_0 &= 20^\circ, & \Omega_0 &= 30^\circ, & l_0 &= 40^\circ. \end{aligned}$$

En un trabajo previo [6], se efectuó la integración del problema para un modelo tesimal completo de orden 2. Tres transformaciones fueron necesarias para la integración de este modelo: eliminación de la paralaje, normalización de Delaunay y finalmente una doble normalización. Tras aplicar estas tres transformaciones el Hamiltoniano se convierte en uno integrable por medio de simples cuadraturas. Es este caso, el pequeño parámetro seleccionado fue $\frac{\omega}{n_0} \approx \frac{1}{14} \approx 0.070566$. La ordenación que se efectuaba en dicho trabajo situaba el término kepleriano a orden cero, a orden uno el término de Coriolis, en el siguiente orden el término ocasionado por el achatamiento, y el resto del potencial a

orden cinco. Un estudio más detallado de los términos, como se indica en el apartado anterior permite una ordenación más adecuada que conduce a un modelo optimizado cuya diferencia con el anterior se observa en la tabla siguiente

		Orden asintótico					
		0	1	2	5		7
Modelo optimizado	\mathcal{H}_K	\mathcal{H}_ω	\mathcal{H}_{J_2}	$\mathcal{H}_{C_{22}} \mathcal{H}_{S_{22}}$		$\mathcal{H}_{C_{21}} \mathcal{H}_{S_{21}}$	
Modelo no optimizado	\mathcal{H}_K	\mathcal{H}_ω	\mathcal{H}_{J_2}	$\mathcal{H}_{C_{21}}$	$\mathcal{H}_{S_{21}}$	$\mathcal{H}_{C_{22}}$	$\mathcal{H}_{S_{22}}$

Ambos modelos proporcionan la misma precisión en el cálculo de efemérides, sin embargo, como puede verse en las dos tablas siguientes, el tamaño de los sucesivos hamiltonianos generados en el modelo optimizado es mucho menor

Tamaño de los hamiltonianos								
Orden	\mathcal{H}_{ini}		\mathcal{H}_{par}		\mathcal{H}_{del}		\mathcal{H}_{dn}	
0	3	3	3	3	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	2	2	2	2	2	2
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	9	9	17	17	15	15
5	14	24	2	4	2	4	0	0
6	0	0	72	112	125	133	103	103
7	10	0	40	78	72	136	0	0
8	0	0	928	1592	696	944	432	432

Asimismo, el tamaño de las series de las distintas transformaciones, directas e inversas son considerablemente mayores en el modelo no optimizado

Tamaño de las transformaciones						
Eliminación de la paralaje	r_{par}	θ_{par}	ν_{par}	R_{par}	Θ_{par}	N_{par}
Directa	748	2809	2650	723	1504	683
	968	4193	3388	947	1992	1171
Inversa	748	2770	2572	723	1475	683
	968	4146	3310	947	1963	1179
Normalización de Delaunay	l_d	g_d	h_d	L_d	G_d	H_d
Directa	28112	29369	12995	26047	5330	4231
	36084	39227	18305	32765	7970	7645
Inversa	27915	29197	9707	25955	5326	4231
	35867	39055	15021	32665	7966	7645
Doble normalización	l_{dn}	g_{dn}	h_{dn}	L_{dn}	G_{dn}	H_{dn}
Directa	6820	10760	8732	1	5888	2809
	10254	16307	13038	1	7978	5227
Inversa	6688	11010	8866	1	5929	2519
	10090	16755	13272	1	8125	4655

Tal y como se muestra en las dos tablas siguientes, la reducción del número de términos de las series implica un menor tiempo de cómputo, tanto en la generación de las teorías como en la evaluación de los programas de cálculo de efemérides¹.

	Orden 7		Orden 8	
Paralaje	699.1	1036.8	2468.2	3765.6
Ev. Par.	2483.2	3684.9	10006.9	16043.2
Delaunay	830.6	944.4	7508.6	9101.6
Ev. Del.	4988.2	5543.1	28528.7	35149.4
Doble N.	106.	135.	689.4	933.1
Ev. D. N.	3569.3	4611.5	29893.2	41124.3
Total	12688.5	15967.7	79165.4	106188.
Tiempo de cálculo de las teorías (segundos)				

Orden	Tiempos	
7	0.147083	0.261611
8	1.812	4.399
Tiempo de cálculo de efemérides (segundos)		

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos PB98-1576 y BFM 2002-03157 y por el Centre National d'Études Spatiales (CNES).

Referencias

- [1] Abad, A., San Juan, J. F., ATESAT: software tool for obtaining automatically ephemeris from analytical simplifications, *Conseil de L'Europe. Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie. Edited by A. Elife and P. Pâquet. Luxembourg.* **10**, 93–98 (1995).
- [2] Alfried, K. T. and Coffey, S. L., Elimination of the Perigee in Satellite Problem, *Celestial Mechanics*, **32**, 163–172 (1984).
- [3] Deprit, A., The elimination of the parallax in Satellite Theory, *Celestial Mechanics*, **24**, 111–153 (1981)
- [4] San Juan, J. F., ATESAT: Automatization of theories and ephemeris in the artificial satellite problem, Tech. rep., CNES CT/TI/MS/MN/94-250

¹Tanto la teoría analítica como los programas de cálculo de efemérides fueron ejecutados en una estación de trabajo UltraSPARC I a 167 MHz

- [5] San Juan, J. F., *Manipulación algebraica de series de Poisson. Aplicación a la teoría del satélite artificial*, Ph.D. thesis, Universidad de Zaragoza (1996).
- [6] Serrano, S., *Modelos analíticos para órbitas de satélites artificiales de tipo Quasi-Spot* Tesina, Monografías del Seminario Matemático García Galdeano N 22 (2001).
- [7] Serrano, S., Tesis doctoral en preparación. Universidad de Zaragoza.