

Métodos multi-revolución simétricos para propagación de órbitas en intervalos grandes de tiempo

M. Palacios

Grupo de Mecánica Espacial. Dept. Matemática Aplicada.

Universidad de Zaragoza, 50015 Zaragoza, Spain. *

Abstract

As it has been proved, the use of numerical propagators with some properties of symmetry, like symplectic and symmetric linear multi-step methods, is a good practice in the numerical propagation of orbital problems. In the other hand, multi-revolution methods are good candidates for the long-time propagation of quasi-periodic problems. In this paper, we construct multi-revolution methods with some properties of symmetry, based on linear multi-step methods, and with arbitrary order of convergence. We study some of its properties of order. We also perform some comparison with the classical multi-revolution methods for several well-known problems, the perturbed harmonic oscillator and the perturbed Kepler problem formulated in such variables that the equations of motion are regularized and linearized what gives a smaller increment of the errors.

AMS classification: Primary 47A15; Secondary 46A32, 47D20

Key words: symmetric numerical methods, multi-revolution methods, propagation of orbits

1 Introducción

La última parte del siglo veinte ha sido muy fructífera en la construcción de métodos numéricos que mejoran la integración clásica. La mayoría de ellos tratan de adaptarse al problema diferencial en el sentido de construir trayectorias numéricas que presenten propiedades análogas a las trayectorias exactas.

En concreto, está siendo de gran interés el estudio y construcción de métodos numéricos cuyas soluciones muestren el mismo comportamiento asintótico y los mismos invariantes que el problema exacto. Estos son los denominados integradores geométricos [5] que,

*mpala@posta.unizar.es

además de minimizar el error, muestran correctamente los invariantes de las soluciones, es decir, su geometría.

En el problema kepleriano, por ejemplo, dos invariantes interesantes son la energía y la forma simpléctica $dp \wedge dq$, donde p y q representan los momentos y coordenadas. Conviene observar que la conservación de la simplecticidad para un sistema hamiltoniano de dos grados de libertad es equivalente a la preservación del área, lo cual garantiza la existencia de soluciones periódicas. Esto hace que los propagadores simplécticos tengan muchísimo interés en la propagación a largo plazo.

Otros métodos geométricos, aunque no simplécticos, son algunos métodos multipaso lineales con propiedades de simetría. Algunos autores (Quinlan y Tremaine [9]) han constatado su perfecta adecuación para la propagación de órbitas planetarias (cuasi-periódicas). El error de propagación de estos métodos ha sido estudiado, por ejemplo, por Hairer [4].

Para que estos métodos muestren toda su efectividad es necesario que las ecuaciones del movimiento estén formuladas de manera adecuada, concretamente, como las de osciladores armónicos perturbados. Esto se consigue, por ejemplo, en los problemas orbitales, mediante la utilización de una variable temporal relacionada con alguna de las anomalías, lo cual regulariza el problema. En concreto, la regularización K-S (Kustaanheimo-Stiefel [10]) permite expresar la parte principal de las ecuaciones del movimiento como las de un oscilador armónico perturbado cuando se utiliza como variable independiente s una modificación de la anomalía excéntrica. Un simple análisis del error demuestra que el error posicional de la ecuación KS-regularizada crece linealmente con s .

Por otro lado, el error en el tiempo físico, generalmente, contiene términos en potencias pares e impares del paso de integración, h . Los términos en potencias impares crecen proporcionalmente a s^2 , mientras que los otros lo hacen en proporción a s . Pero se puede probar fácilmente que sólo los términos en potencias pares de h permanecen cuando se utiliza un integrador numérico simétrico en el tiempo (“time-symmetric”), como lo son algunos simplécticos y los multipaso simétricos. Así que es natural esperar que el error en el tiempo crezca proporcionalmente a s^2 en los integradores tradicionales, mientras que en los “time-symmetric” lo hará proporcionalmente a s .

En la figura 1, que tomamos prestada de [1], se representa el error en tiempo (izquierda) y en energía (derecha). Podemos observar el crecimiento cuadrático del error en tiempo cuando se utilizan integradores tradicionales (Adams-Bashford, RK, etc.), mientras que resulta lineal cuando se usan métodos “time-symmetric” (Adams-Bashford simétrico, Evans-Tremaine (ET4), etc.). En lo que respecta a la energía, el crecimiento es lineal con los primeros y prácticamente constante con los segundos. Este comportamiento es natural, ya que el crecimiento cuadrático del error en tiempo no es debido al error de truncación en la ecuación diferencial, sino al valor no nulo del promedio del segundo miembro en las

ecuaciones variacionales.

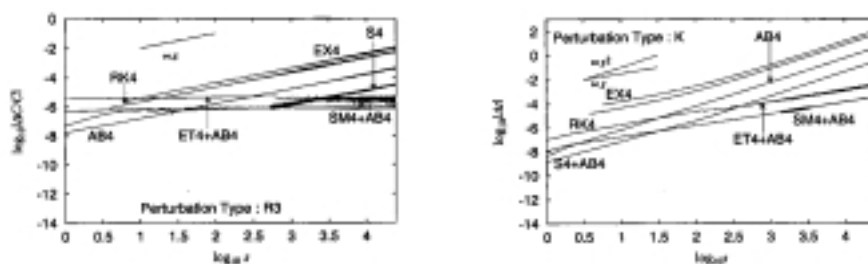


Figura 1.— El error en tiempo y energía para el problema perturbado de Kepler

Quinlan y Fukushima han probado que al emplear métodos multipaso lineales simétricos de orden alto en la integración de EDO no lineales aparece un fenómeno de inestabilidad/resonancia; ocurre así mismo en el problema perturbado de Kepler. En la figura 2 [1], se puede observar la diferencia de comportamiento, en el problema perturbado de Kepler propagado con un método multipaso simétrico, cuando se usa una formulación regularizada o no regularizada.

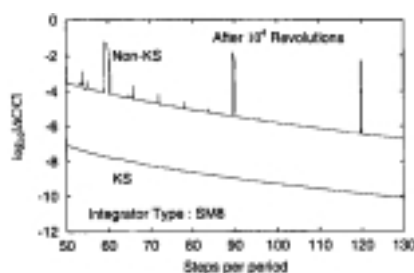


Figura 2.— Problema de Kepler regularizado y no regularizado con un método simétrico

Todo esto muestra que los métodos “time-symmetric”, cuando se utiliza una formulación regularizada, son muy buenos candidatos para la propagación de órbitas.

Este buen comportamiento también se pone de manifiesto (Hairer, [4]) cuando se utilizan para la propagación del problema kepleriano, formulado en forma canónica y considerando un propagador simétrico para las coordenadas y otro para los momentos, con la condición de que los correspondientes polinomios característicos $\rho(\zeta)$ y $\tilde{\rho}(\zeta)$ no tengan ninguna raíz común, salvo $\zeta_1 = 1$. Estos métodos suelen denominarse métodos simétricos particionados. La desviación de la órbita exacta es mínima incluso después de 10.000 revoluciones. Este excelente comportamiento se puede explicar, en este caso, por el hecho de que las llamadas ecuaciones parásitas forman un sistema estable.

Por otro lado, hace algún tiempo, nosotros iniciamos el estudio teórico y práctico de los métodos multi-revolución [6]. Estos métodos fueron introducidos por los investigadores en Astrodinámica (cf. Graf [3]) para la propagación de órbitas de satélites a largo plazo con buena aproximación. Nosotros encontramos cómo construir dichos métodos, a la vez que

analizamos distintas propiedades de orden, convergencia, etc.; también implementamos el algoritmo generalizado de Adams-Bashford-Moulton de orden diez y lo aplicamos a varios problemas, entre ellos un oscilador armónico perturbado y el denominado “main problem” o problema de un satélite artificial perturbado con el primer armónico zonal, formulado como un oscilador armónico, obteniendo resultados que muestran su buen comportamiento sobre arcos largos.

Parece, pues, lógico pensar en métodos de integración numérica para problemas casi-periódicos que exploten las mencionadas características; es decir, que sean de tipo multi-revolución con propiedades de simetría y que se utilicen para integrar problemas casi-periodicos formulados como osciladores armónicos perturbados.

2 Construcción de métodos multi-revolución con propiedades de simetría

Recordemos la construcción de métodos multi-revolución generales. Se considera el problema de valor inicial siguiente:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, L], & y \in \mathbb{R}^m, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

En primer lugar, se realiza una discretización de (1), sustituyendola por la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} - y_n = g_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

obtenida al considerar el cambio experimentado por las variables del problema sobre un periodo, en donde se escribe y_n para la aproximación de la solución $y(t_n)$ en cada uno de los nodos de una red uniforme $\{t_j = t_0 + jT \mid j \geq 0\}$, cuya separación coincide con el “periodo” de la solución.

En segundo lugar, se proporciona la solución a la ecuación (2) en una nueva red

$$\{\bar{t}_j = t_0 + jH \mid j \geq 0, \quad H = MT, \text{ y } M \text{ un entero fijo}\} \quad (3)$$

por medio de una relación lineal, similar a la de los métodos multipaso lineales, entre los valores \bar{y}_{n+j} y \bar{g}_{n+j} , para $j = 0, 1, \dots, \bar{k}$, donde \bar{y}_{n+j} representa la aproximación a $y_{(n+j)M}$, y \bar{g}_{n+j} representa la aproximación a $g_{(n+j)M}$. Esta relación puede ser formulada como

$$\sum_{j=0}^{\bar{k}} \bar{\alpha}_j(1/M) \bar{y}_{n+j} = M \sum_{j=0}^{\bar{k}} \bar{\beta}_j(1/M) \bar{g}_{n+j}, \quad M \geq 1, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

en donde los coeficientes $\bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j$ son funciones analíticas en el origen tales que $\bar{\alpha}_k(0) \neq 0$ y $|\bar{\alpha}_0(0)| + |\bar{\beta}_0(0)| \neq 0$. Habitualmente se le conoce como *algoritmo multi-revolución*.

La caracterización del orden dada por nosotros [6] es constructiva en el sentido de que se pueden conocer todos los coeficientes del segundo polinomio característico, $\sigma(\zeta)$, una vez se ha definido el primero, $\rho(\zeta)$.

Concretamente, un método multi-revolución de orden p , al menos, está completamente determinado si sus coeficientes $\bar{\beta}_j$ se toman como los coeficientes secuenciales del desarrollo truncado de la función

$$\frac{\rho(\zeta)}{M[\zeta^{1/M} - 1]} - \sigma(\zeta) \quad (5)$$

en serie de potencias de $\zeta - 1$.

Utilizando un manipulador simbólico como Mathematica (Wolfram [11]), obtuvimos los coeficientes $\bar{\beta}_j$ de los métodos multi-revolución de Adams-Bashforth y Adams-Moulton (explícito e implícito, respectivamente).

Este método de obtención de los coeficientes del método es equivalente al que resulta de imponer las condiciones de orden siguientes:

$$\bar{C}_q(1/M) = 0, \quad \text{para } q = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad \bar{C}_p(1/M) \neq 0,$$

donde

$$\bar{C}_q(1/M) = \sum_{j=0}^{\bar{k}} \left[\binom{M_j}{q} \bar{\alpha}_j(1/M) - \binom{M_j}{q-1} \bar{\beta}_j(1/M) \right], \quad \forall M \geq M_0$$

Este último procedimiento es el que vamos a emplear para construir métodos simétricos.

Para que el método multi-revolución sea simétrico es necesario que el primer polinomio característico, $\rho(\zeta)$, sea conservativo, es decir, todas sus raíces deben estar sobre la circunferencia unidad. Sin embargo, esta condición es incompatible con la condición de que el segundo polinomio característico, $\sigma(\zeta)$, sea simétrico.

Propiedad.- Si el primer polinomio característico, $\rho(\zeta)$, es conservativo, el segundo polinomio característico, $\sigma(\zeta)$, no puede ser simétrico.

Dem.: Para probar esto es suficiente plantear el sistema que resulta al imponer las condiciones de orden y comprobar que es incompatible. ■

En consecuencia, nosotros proponemos una variante de la simetría de los métodos en la forma siguiente:

Teniendo en cuenta que los coeficientes del polinomio $\sigma(\zeta)$, en el caso general no simétrico, son combinaciones lineales de las primeras potencias de $1/M$, que escribimos en la forma

$$\beta_j = \sum_{n=0}^k \beta_{jn} \left(\frac{1}{M}\right)^n,$$

exigiremos las siguientes condiciones para la simetría:

$$\beta_{jn} = \beta_{k+1-jn}, \quad \text{si } n \text{ es par}, \quad \beta_{jn} = -\beta_{k+1-jn}, \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

Como ya hemos mencionado, los coeficientes β' s se determinan una vez que se ha fijado el primer polinomio característico. Así que nosotros hemos considerado, para diferentes valores de k , el polinomio

$$\rho(\zeta) = \zeta^k - 1,$$

cuyas raíces son de módulo uno, por lo que definirá un método multi-revolución optimal.

Imponiendo las condiciones de orden para $p = k + 1$, hemos obtenido, con la ayuda de Mathematica [11], que los correspondientes sistemas lineales son compatibles determinados, es decir, tienen una única solución.

Por ejemplo, en la tabla adjunta mostramos los coeficientes del polinomio $\sigma(\zeta)$ correspondiente a $k = 8$, en donde se puede observar la simetría.

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{3956}{14175} - \frac{1}{151200 M^8} + \frac{29}{45360 M^6} - \frac{359}{21600 M^4} + \frac{199}{840 M^2} + \frac{1}{2 M} \\ \beta_1 &= \frac{23552}{14175} + \frac{1}{18900 M^8} - \frac{11}{2268 M^6} + \frac{71}{675 M^4} - \frac{16}{21 M^2} \\ \beta_2 &= -\frac{3712}{14175} - \frac{1}{5400 M^8} + \frac{37}{2268 M^6} - \frac{1673}{5400 M^4} + \frac{14}{9 M^2} \\ \beta_3 &= \frac{41984}{14175} + \frac{1}{2700 M^8} - \frac{361}{11340 M^6} + \frac{377}{675 M^4} - \frac{112}{45 M^2} \\ \beta_4 &= -\frac{3632}{2835} - \frac{1}{2160 M^8} + \frac{179}{4536 M^6} - \frac{1457}{2160 M^4} + \frac{35}{12 M^2} \\ \beta_5 &= \frac{41984}{14175} + \frac{1}{2700 M^8} - \frac{361}{11340 M^6} + \frac{377}{675 M^4} - \frac{112}{45 M^2} \\ \beta_6 &= -\frac{3712}{14175} - \frac{1}{5400 M^8} + \frac{37}{2268 M^6} - \frac{1673}{5400 M^4} + \frac{14}{9 M^2} \\ \beta_7 &= \frac{23552}{14175} + \frac{1}{18900 M^8} - \frac{11}{2268 M^6} + \frac{71}{675 M^4} - \frac{16}{21 M^2} \\ \beta_8 &= \frac{3956}{14175} - \frac{1}{151200 M^8} + \frac{29}{45360 M^6} - \frac{359}{21600 M^4} + \frac{199}{840 M^2} - \frac{1}{2 M}\end{aligned}$$

Además, hemos comprobado que para $k = 2, 4, 6, 8$ también se cumple que

$$C_{k+1}(1/M) = 0, \quad C_{k+2}(1/M) = 0, \quad C_{k+3}(1/M) \neq 0,$$

consecuentemente, el método en estos casos es de orden $p = k + 2$. Mientras que, para $k = 3, 5, 7$,

$$C_{k+1}(1/M) = 0, \quad C_{k+2}(1/M) \neq 0,$$

por lo que, ahora, el método es de orden $p = k + 1$. Recogemos este resultado en el teorema siguiente.

Teorema.- Los métodos multi-revolución simétricos definidos por el polinomio $\rho(\zeta) = \zeta^k - 1$ tienen orden $p = k + 2$, si k es par y orden $p = k + 1$, si k es impar.

Obviamente, será mucho más interesante utilizar métodos de MRS con un número par de etapas.

Los métodos recién construidos son implícitos, por lo tanto, para su implementación es conveniente utilizar la clásica formulación predictor-corrector, por lo que hace falta una fórmula similar explícita. Para construirla, consideraremos un método explícito del mismo número de etapas engendrado por el mismo primer polinomio característico $\rho(\zeta) = \zeta^k - 1$, es decir, resolveremos el sistema de ecuaciones de orden con la condición $\beta_k = 0$.

En la tabla adjunta presentamos los coeficientes del polinomio $\sigma(\zeta)$ correspondiente a $k = 8$, en donde se puede observar que el método es muy próximo a uno simétrico

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M} \\
& \frac{736}{189} + \frac{1}{3780 M^6} - \frac{1}{36 M^4} + \frac{17}{15 M^2} - \frac{4}{M} \\
& - \frac{848}{105} - \frac{1}{630 M^6} + \frac{7}{45 M^4} - \frac{457}{90 M^2} + \frac{14}{M} \\
& \frac{1952}{105} + \frac{1}{252 M^6} - \frac{67}{180 M^4} + \frac{97}{9 M^2} - \frac{28}{M} \\
& - \frac{19672}{945} - \frac{1}{189 M^6} + \frac{22}{45 M^4} - \frac{41}{3 M^2} + \frac{35}{M} \\
& \frac{1952}{105} + \frac{1}{252 M^6} - \frac{67}{180 M^4} + \frac{97}{9 M^2} - \frac{28}{M} \\
& - \frac{848}{105} - \frac{1}{630 M^6} + \frac{7}{45 M^4} - \frac{457}{90 M^2} + \frac{14}{M} \\
& \frac{736}{189} + \frac{1}{3780 M^6} - \frac{1}{36 M^4} + \frac{17}{15 M^2} - \frac{4}{M} \\
& 0
\end{aligned}$$

3 Implementación de los métodos multi-revolución simétricos

La implementación de los métodos multi-revolución simétricos, al igual que los no simétricos, suele realizarse en el modo P(EC) m E, aunque no es inmediata, ya que requiere una *fase de iniciación* que permita, duplicando el número M de periodos saltados, llegar hasta el valor máximo de M que se va a utilizar en la parte ordinaria (*fase de progreso*) de la propagación. Como en los métodos clásico, la predicción se realiza con un método explícito, mientras que la corrección se lleva a cabo con uno implícito.

Cada aplicación del método multi-revolución necesita la evaluación de la solución en el nodo $t_n + T$, que llamaremos propagación interior, lo que se puede conseguir mediante un método de un paso o mediante un multipaso simétrico tradicional.

La propagación normal o *fase de progreso* se aplica hasta un instante t_M , múltiplo del número M de periodos que se van saltando, inmediatamente anterior al instante final.

La propagación se termina con una *fase final* que, mediante el método de un paso, lleva la órbita hasta el instante final t_f .

En el siguiente párrafo aplicaremos este esquema a algunos ejemplos. Para ello consideraremos, en primer lugar, $m = 2$, es decir, utilizaremos el modo P(EC) 2 E. Como predictor consideraremos un método multi-revolución optimal con $k = 8$ etapas y orden $p = 8$, mientras que como corrector usaremos un método multi-revolución optimal con propiedades de simetría con $k = 8$ etapas y orden $p = 10$. Ambos han sido introducidos en la sección anterior.

Para la propagación interior utilizaremos un método multipaso lineal simétrico tradicional (LMM), cuyos coeficientes se han obtenido como límite de los multi-revolución

anteriores, cuando $M \rightarrow \infty$, lo que ahorra abundante trabajo. Para inicializar este LMM consideraremos el ya clásico RK8(7) de Dormand & Prince [2].

4 Algunos resultados numéricos

4.1 Problema oscilatorio de Petzold

Como primer problema test, consideramos el bien conocido problema altamente oscilatorio, propuesto por Petzold, definido como el problema de valor inicial siguiente:

$$y'' + \omega^2 y = A \text{sen}(\omega t), \quad t \in [0, 10] \quad \text{con} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -0.05$$

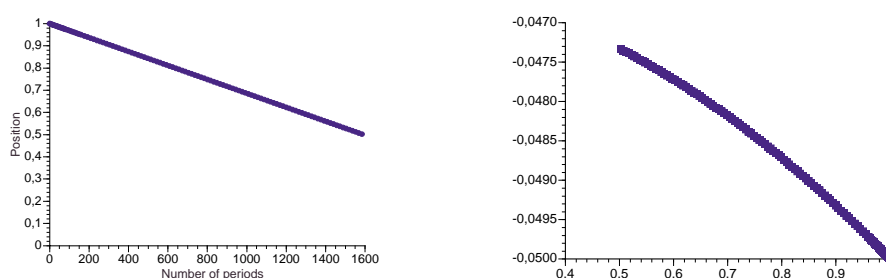


Figura 3.— Solución del problema de Petzold a lo largo de 1600 periodos y la aplicación de Poincaré cada 16 periodos.

En la figura 3, a la izquierda, se muestran los valores de la solución, y_n , sobre la red de nodos más clara (3), generados por el método multi-revolución en el intervalo $[0, 10]$, lo que equivale a 1584 periodos de oscilación.

En la figura 3, a la derecha, se presenta la aplicación de Poincaré generada por el método multi-revolución en el intervalo $[0, 10]$, habiendo tomado $M = 16$, es decir, que sólo se ha calculado la solución una vez cada 16 periodos y se ha dibujado el correspondiente punto en el espacio fásico (y, y') .

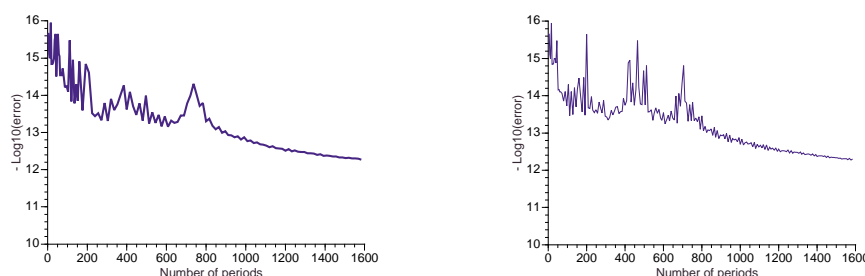


Figura 4.— Error con un MR no simétrico y con un MR simétrico para el problema de Petzold a lo largo de 1600 periodos.

Las figuras 4, izquierda y derecha, muestran el error (solución analítica menos numérica), en escala logarítmica, generada por un método MR no simétrico y por el simétrico mencionado, respectivamente; el primero de $k = 10$ etapas y el segundo de $k = 8$ etapas para que ambos sean de orden $p = 10$. Se puede observar que la aproximación obtenida por ambos métodos es muy similar, pues son del mismo orden, aunque la variación del error es menor en el caso simétrico, como cabía esperar.

Sobre el coste computacional de estos métodos se puede decir, por ejemplo, que para construir la figura 3 izquierda han sido necesarias 652.260 evaluaciones de función, mientras que si la propagación hubiese sido realizada con el RK8(7) de Dormand & Prince [2] hubieran sido necesarias 1.618.240 evaluaciones de función; esto indica que los métodos multi-revolución son muchos más baratos que los métodos paso a paso tradicionales.

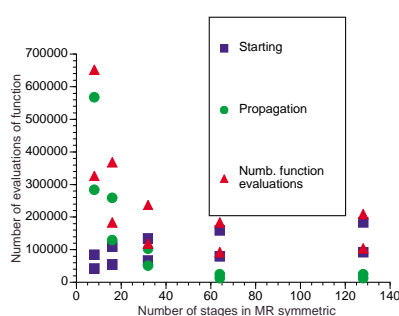


Figura 5.— Número de etapas frente a número de evaluaciones de función en un método MR a lo largo de 1600 periodos para el problema de Petzold.

Un análisis del coste computacional de estos métodos MR en función del número de periodos M que se saltan en cada iteración se puede observar en la figura 5. En ella se han representado dos series de valores del número de evaluaciones de función para el método MRS de $k = 8$ etapas y $M = 8, 16, 32, 64$ y 128 ; en la parte de arriba aparecen los correspondientes a una propagación interior de 80 puntos por periodo y en la de abajo están los correspondientes a una de 40 puntos; los cuadrados representan el número de evaluaciones de función en el proceso de iniciación, los círculos representan las evaluaciones en la fase de progreso y los triángulos representan el número total de evaluaciones.

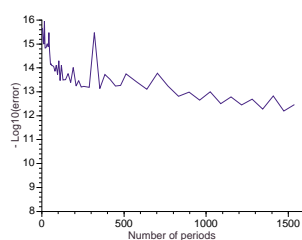


Figura 6.— Error con un MR simétrico para el problema de Petzold a lo largo de 1600 periodos con $M = 64$

Se puede observar que, mientras que el número de evaluaciones de función en el proceso de iniciación crece linealmente, el número total de evaluaciones alcanza un mínimo cuando el número de periodos que se saltan es $M = 64$.

La figura 6 muestra la solución del problema de Petzold obtenida con el método MRS y el valor óptimo de $M = 64$.

4.2 El problema de Kepler

El segundo problema que se considera es el conocido problema de Kepler que puede ser formulado en la forma:

$$\begin{aligned} p' &= -H_q(p, q), & q' &= H_p(p, q) \\ H(p, q) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales: $q_1(0) = 1 - e$, $q_2(0) = 0$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = \sqrt{(1 + e)/(1 - e)}$ de manera que la solución sea una elipse de excentricidad e .

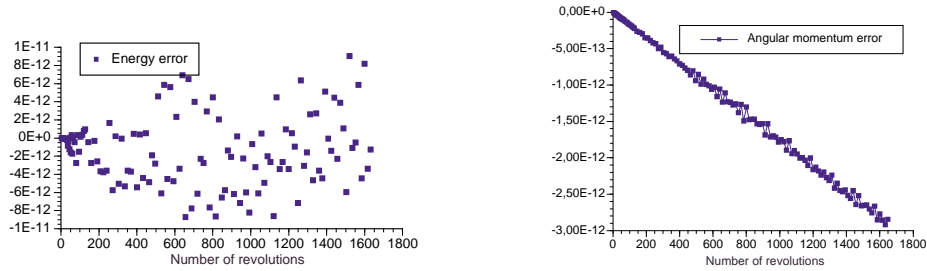


Figura 7.— Error en energía y momento angular para el problema perturbado de Kepler

La figura 7 muestra el error en la energía (izquierda) y momento angular (derecha) alcanzados al propagar la órbita con un método MRS, tomando $M = 16$ (número de periodos saltados) y 160 puntos en el propagador interior, es decir, paso de integración $h = \frac{\pi}{180} = 0.039827$ radianes = 2.25 grados. Se puede apreciar la buena conservación tanto de la energía como del momento angular, quedando el error por debajo de 10^{-12} , cosa que también sucede con los propagadores “time symmetric”.

La figura 8 muestra el error relativo global en energía para el mismo problema y condiciones. Es evidente el buen comportamiento y la buena conservación de las integrales del movimiento de este problema con los métodos MRS.

5 Conclusiones

No es difícil construir métodos multi-revolución simétricos con propiedades de simetría con la ayuda de algún manipulador simbólico, como Mathematica. La estructura de estos métodos no es más complicada que la de los no simétricos. Ha sido probado que, para

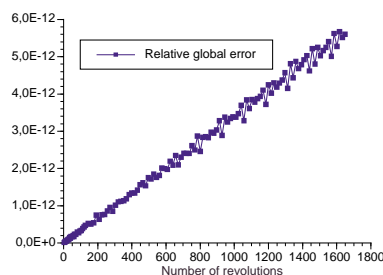


Figura 8.— Error relativo global con un métodoMR simétrico, $M = 16$, a lo largo de 1650 revoluciones para el problema de Kepler

algunas familias de métodos multi-revolución simétricos, si el número de etapas k es par, su orden es $p = k + 2$, mientras que si k es impar, el orden es $p = k + 1$.

Han sido construidos métodos de este tipo con diferentes valores de k y ha sido encontrada la constante del error.

Finalmente, han sido desarrollados varios tests para un problema altamente oscilatorio y para un problema de Kepler que muestran que los métodos multi-revolución con propiedades de simetría tienen un mejor comportamiento que los clásicos multi-revolución no simétricos cuando son aplicados a la propagación de soluciones de problemas orbitales formulados en una forma regularizada y linearizada.

Referencias

- [1] Arakida, H. and Fukushima, T.: Long-term integration error of Kustaanheimo–Stiefel regularized orbital motion, *Astron. J.* **120**, 3333–3339, 2000.
- [2] Dormand, J. R. and Prince, P. J.: High order embedded Runge-Kutta formulae, *J. Comp. Appl. Math.*, **7**, 67-75, 1981.
- [3] Graf, O. F.: Multirevolution methods for orbit integration, *Lecture Notes in Mathematics 362*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 471–490, 1973.
- [4] Hairer, E.: Backward error analysis for multistep methods, *Numer. Maths.*, **84**, 199–232, 1999.
- [5] Hairer, E. & Lubich, C.: Geometric numerical integration, *Lect. Notes in Maths. Springer-Verlag*, Berlin, 2002.
- [6] Melendo, B. and Palacios, M.: A new Approach to the Construction of Multirevolution Methods, *Applied Numerical Mathematics*, **23**, 2, 259–274, 1996.
- [7] Palacios, M. and Calvo, C.: Ideal Frames and Regularization in Numerical Orbit Computation, *J. Astronaut. Sci.* **44**, n. 1, 63–77, 1996.

- [8] Palacios, M.: Symplectic versus other Propagators in the Ideal Formulation of the Earth Satellite Problem, *Proc. Intern. Symposium Space Dynamics*, Biarritz, France, **MS 00-36**, 2000.
- [9] Quinlan, G. D. & Tremaine, S.: Symmetric multistep methods for the numerical integration of planetary orbits, *Astron. J.*, **100** (5), 1694–1700, 1990.
- [10] Stiefel, E. L. & Scheifele, G.: *Linear and regular celestial mechanics: perturbed two-body motion, numerical methods, canonical theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [11] Wolfram, S.: *Mathematica: A tool for doing mathematics by computer*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1988.