

Una familia de métodos multi-revolución Runge–Kutta explícitos de orden cinco

M. Calvo, J. I. Montijano and L. Rández

Departamento Matemática Aplicada. Universidad de Zaragoza. 50009-Zaragoza, Spain.

email: calvo@posta.unizar.es, monti@posta.unizar.es, randez@posta.unizar.es

Abstract

A three parameter family of multirevolution Runge–Kutta explicit methods with order five and six stages is derived using suitable simplifying assumptions. An optimal method of this family is selected by choosing the available parameters so that vanish the coefficients of some elementary differentials in the leading error term. Numerical experiments are presented to show the behaviour of the new method for some oscillatory problems.

Keywords: Initial Value Problems with almost periodic or highly oscillatory solutions, Runge–Kutta methods, long term integration, multirevolution methods.

AMS classification: 65L05; 65M20

1 Introducción

Los llamados métodos multi-revolución fueron introducidos por Taratynova [16] para la integración numérica de órbitas de satélites artificiales terrestres en largos periodos de tiempo. Como es sabido, la fuerza más importante que actúa sobre un satélite es la debida al término principal del potencial gravitatorio terrestre y, salvo circunstancias especiales, las restantes fuerzas pueden considerarse pequeñas respecto a ésta, lo que implica que dicho problema puede verse como una perturbación del problema de dos cuerpos. En estas condiciones, si llamamos $y(t) = (r(t), r'(t))^T \in \mathbb{R}^6$ el vector de las posiciones-velocidades del satélite y $\psi_t(y) = y(t; 0, y)$ la aplicación flujo definida por el sistema diferencial que describe el movimiento del satélite, dadas unas condiciones iniciales $(t_0 = 0, y_0)$ correspondientes a una órbita periódica elíptica, si $T_0 = T(y_0)$ es el periodo de la órbita osculadora que pasa por y_0 en $t_0 = 0$, es claro que la aplicación $\psi_{T_0}(y)$ será muy próxima a la aplicación identidad en un entorno suficientemente pequeño de y_0 .

Estas observaciones sugieren que para seguir la órbita del satélite en intervalos de muchos periodos será preferible seguir la discretización del flujo en múltiplos enteros nT_0 , $n = 1, 2, \dots$ del periodo osculador en el punto inicial y_0 , ya que $\{\psi_{nT_0}(y_0)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión que varía lentamente, mientras que la versión continua del flujo $\psi_t(y_0)$ va cambiando fuertemente a lo largo de cada periodo. Recordemos al respecto que los métodos numéricos estándar están basados en aproximaciones polinómicas al flujo ψ_t en el punto de partida y en el caso de soluciones periódicas su intervalo de validez no puede exceder dicho periodo.

Métodos multi-revolución lineales multipaso fueron ya considerados en relación con la Mecánica Celeste por Taratynova [16] y Mace y Thomas [11], y posteriormente han sido aplicados a problemas llamados fuertemente oscilatorios procedentes de las más variadas aplicaciones por Gear y Gallivan [4], Gear [5], Petzold [14]. En particular la última autora elaboró un programa basado en las fórmulas Adams–Bashforth–Moulton con orden y paso variable realizando experimentos numéricos con distintos tipos de problemas. Mas recientemente Melendo y Palacios [12] y Melendo [13] han estudiado detalladamente fórmulas multipaso para ecuaciones de primer y segundo orden y han realizado diferentes experimentos numéricos que muestran las posibilidades de estos métodos para problemas cuasi periódicos. Un excelente trabajo recopilatorio que recoge diferentes aplicaciones de los métodos multi-revolución en diferentes ámbitos de aplicación es debido a Petzold, Jay y Yen [15].

El objetivo de nuestro trabajo es la deducción de una familia de métodos multi-revolución del tipo Runge–Kutta explícito de seis etapas y orden cinco usando ciertas hipótesis simplificadoras que permiten reducir las 17 condiciones de orden cinco. Recordemos que estas herramientas ha permitido en el caso de los métodos Runge–Kutta estándar obtener fórmulas de integración numérica muy eficientes. Hay que notar que métodos MR–RKE han sido propuestos entre otros por Graf [6], Graf y Bettis [7] y Kirchgraber [10]. En particular este último autor, usando el método de promedios, ha propuesto un método Runge–Kutta multirevolución para ciertos tipos de problemas periódicamente perturbados que ha sido implementado en el código llamado LIPS. Los resultados muestran que, para la clase de problemas considerados, LIPS es mucho mas eficiente y preciso que los códigos Runge–Kutta estándar en intervalos de integración del tamaño $\mathcal{O}(1/\epsilon)$ donde ϵ es el parámetro de perturbación en el problema perturbado.

El trabajo está organizado en la siguiente forma: En la sección 2 se introducen las definiciones básicas y las condiciones que deben verificar los coeficientes de un método MRRK para alcanzar un orden p arbitrario basándose en el trabajo previo de los autores [2]. En la sección 3 se construye una familia de métodos de seis etapas y orden cinco que puede considerarse como una generalización de la familia de Dormand y Prince [3] y se selecciona una fórmula particular de dicha familia atendiendo a la minimización de su error local. Finalmente en la sección 4 se presentan los resultados de algunos experimentos

numéricos para comparar al comportamiento del nuevo método de orden cinco con el integrador estándar basado en el par encajado de fórmulas de órdenes cuatro–cinco.

2 Definiciones básicas y condiciones de orden

Para introducir los métodos multirevolución supongamos problemas de valor inicial en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para los cuales es posible asociar al flujo del sistema diferencial $\psi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ en un entorno \mathcal{U} de un punto fijado $y_0 \in \mathbb{R}^d$ una función de iteración $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ próxima a la identidad de modo que $\varphi(y) = \psi_T(y)$ donde T es un periodo o cuasi periodo de la órbita que pasa por y_0 . En el caso particular mas simple de un sistema lineal tal que todas sus soluciones son periódicas con el mismo periodo T entonces el flujo ψ_t verifica $\psi_T(y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$ y en tal caso la función de iteración φ es la identidad para todo $y \in \mathbb{R}^d$. En el caso mas interesante de problemas diferenciales no lineales con familias de soluciones periódicas como es el problema de los dos cuerpos para las órbitas elípticas, dado un vector inicial $y_0 \in \mathbb{R}^6$ correspondiente a una órbita elíptica con periodo $T_0 = T(y_0)$, por los teoremas de perturbación de ecuaciones diferenciales para todo $y \in \mathbb{R}^6$ tal que $\|y - y_0\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ donde ε es un pequeño parámetro, se tiene

$$\|\psi_{T_0}(y) - \psi_{T_0}(y_0)\| = \|\psi_{T_0}(y) - y_0\| = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

y por tanto se puede asegurar que $\varphi(y) = \psi_{T_0}(y)$ es una aplicación próxima a la identidad en un entorno suficientemente pequeño de y_0 .

Los problemas anteriores son algunos ejemplos particulares en los cuales es posible definir una aplicación φ próxima a la identidad a partir de ciertos problemas diferenciales con condiciones iniciales particulares, pero en general no parece fácil definir de una manera precisa la clase de problemas para la cual es posible definir una tal aplicación φ próxima a la identidad en un entorno de un punto y_0 prefijado, por tanto tomaremos como punto de partida una $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ próxima a la identidad que escribiremos en la forma

$$\varphi(y) = y + \varepsilon f(y), \tag{1}$$

donde ε es un pequeño parámetro positivo y $f(y)$ es una función suficientemente derivable en \mathcal{U} y tal que tanto f como sus derivadas parciales son de tamaño moderado en dicho entorno. Además se supondrá que existe un entero positivo N_0 suficientemente grande y tal que $\varphi^n(y_0) \in \mathcal{U}$ para $n = 1, \dots, N_0$.

En estas condiciones el objetivo de los métodos multi–revolución MRRK es aproximar $\varphi_N(y_0)$ para N grande ($N \leq N_0$) empleando unas pocas evaluaciones (s) de φ en puntos adecuadamente situados Y_1, \dots, Y_s alrededor de y_0 . En tal caso la aproximación y_N a $\varphi^N(y_0) = y_0 + (\varphi^N(y_0) - y_0)$ viene dada expresando $(\varphi^N(y_0) - y_0)$ como una media

ponderada de los incrementos $\varphi(Y_j) - Y_j$ en dichos puntos en la forma

$$y_N = y_0 + N \sum_{j=1}^s b_j (\varphi(Y_j) - Y_j) = y_0 + \varepsilon N \sum_{j=1}^s b_j f(Y_j),$$

donde b_j son coeficientes constantes que pueden depender de N con $\sum_{j=1}^s b_j = 1$.

En cuanto a la determinación de los puntos estratégicos Y_i , en un método MRRK explícito estos se calculan recurrentemente por las fórmulas

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_0, \\ Y_2 &= y_0 + N a_{21} (\varphi(Y_1) - Y_1) = y_0 + \varepsilon N a_{21} f(Y_1), \\ &\dots \\ Y_s &= y_0 + N \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} (\varphi(Y_j) - Y_j) = \varepsilon N \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} f(Y_j), \end{aligned}$$

donde $a_{ij} = a_{ij}(N)$ son constantes independientes de φ .

Desde un punto de vista general un método MRRK de s etapas define una aproximación y_N a $\varphi^N(y_0)$ donde φ está dada por (1) mediante las ecuaciones

$$y_N = y_0 + \varepsilon N \sum_{i=1}^s b_i f(Y_i) \quad (2)$$

$$Y_i = y_0 + \varepsilon N \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j), \quad (i = 1, \dots, s), \quad (3)$$

donde (\mathbf{A}, \mathbf{b}) con $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^s$ son los coeficientes de Butcher que definen el método MRRK y que ahora pueden depender de N . En el caso $a_{ij} = 0$ para todo $j \geq i$ el método se llama explícito y su aplicación requiere s evaluaciones de φ . En otro caso el método se llama implícito y para el cálculo de los puntos estratégicos Y_i habrá que usar algún esquema iterativo (convergente) cuyo coste computacional no se puede fijar a priori ya que depende del esquema y del número de iteraciones.

Para introducir las condiciones (ver [2]) que deben verificar los coeficientes (\mathbf{A}, \mathbf{b}) de un método MRRK para alcanzar un orden dado p , sea \mathcal{T} el conjunto de los árboles de raíz. Denotamos por τ_{11} el único árbol de orden 1, τ_{21} el único árbol de orden 2, y en general $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots$ los árboles de orden i con la ordenación dada en el libro de Hairer, Norsett y Wanner ([8], pag. 148). Para cada $\tau \in \mathcal{T}$, $\rho(\tau)$ denotará su orden, es decir el número de nodos, y dada una matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ sea $\phi_{\mathbf{M}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la función definida recurrentemente sobre el conjunto de los árboles de raíz por

$$\phi_{\mathbf{M}}(\tau_{11}) = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k,$$

para el único árbol de orden 1 y en general para un árbol cualquiera $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_l]$ generado a partir de los subárboles τ_1, \dots, τ_l

$$\phi_{\mathbf{M}}(\tau) = \mathbf{M} \phi_{\mathbf{M}}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{M} \phi_{\mathbf{M}}(\tau_l),$$

donde $u \cdot v = (u_1v_1, \dots, u_kv_k)^T$ para u y v en \mathbb{R}^k .

Con estas notaciones el método MRRK (\mathbf{A}, \mathbf{b}) tiene orden p si y solo si éste el mayor entero tal que

$$\mathbf{b}^T \phi_{\mathbf{A}}(\tau) = \frac{\beta^T \phi_{\mathbf{A}}(\tau)}{N^{\rho(\tau)}}, \quad (4)$$

para todo árbol $\tau \in \mathcal{T}$ con $\rho(\tau) \leq p$, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y β está dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & \\ 1 & 0 & \dots & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Llamando $\omega(\tau) = \beta^T \phi_{\mathbf{A}}(\tau)$ las funciones escalares que aparecen en el segundo miembro de (4) y $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{e}$, las 17 condiciones para orden 5 se pueden escribir en la forma

$\mathbf{b}^T \mathbf{e} = \omega(\tau_{11})/N$	$\omega(\tau_{11}) = N_1$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{e} = \mathbf{b}^T \mathbf{c} = \omega(\tau_{21})/N^2$	$\omega(\tau_{21}) = N_2$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = \omega(\tau_{31})/N^3$	$\omega(\tau_{31}) = 2N_3 + N_2$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{A} \mathbf{c}) = \omega(\tau_{32})/N^3$	$\omega(\tau_{32}) = N_3$
$\mathbf{b}^T \mathbf{c}^3 = \omega(\tau_{41})/N^4$	$\omega(\tau_{41}) = 6N_4 + 6N_3 + N_2$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \mathbf{c}) = \omega(\tau_{42})/N^4$	$\omega(\tau_{42}) = 3N_4 + 2N_3$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{c}^2 = \omega(\tau_{43})/N^4$	$\omega(\tau_{43}) = 2N_4 + N_3$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{c} = \omega(\tau_{44})/N^4$	$\omega(\tau_{44}) = N_4$
$\mathbf{b}^T \mathbf{c}^4 = \omega(\tau_{51})/N^5$	$\omega(\tau_{51}) = 24N_5 + 36N_4 + 14N_3 + N_2$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{A} \mathbf{c}) = \omega(\tau_{52})/N^5$	$\omega(\tau_{52}) = 12N_5 + 15N_4 + 4N_3$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \mathbf{c}^2) = \omega(\tau_{53})/N^5$	$\omega(\tau_{53}) = 8N_5 + 9N_4 + 2N_3$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^2 \mathbf{c}) = \omega(\tau_{54})/N^5$	$\omega(\tau_{54}) = 4N_5 + 3N_4$
$\mathbf{b}^T (\mathbf{A} \mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \mathbf{c}) = \omega(\tau_{55})/N^5$	$\omega(\tau_{55}) = 6N_5 + 6N_4 + N_3$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{c}^3 = \omega(\tau_{56})/N^5$	$\omega(\tau_{56}) = 6N_5 + 6N_4 + N_3$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \mathbf{c}) = \omega(\tau_{57})/N^5$	$\omega(\tau_{57}) = 3N_5 + 2N_4$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{c}^2 = \omega(\tau_{58})/N^5$	$\omega(\tau_{58}) = 2N_5 + N_4$
$\mathbf{b}^T \mathbf{A}^3 \mathbf{c} = \omega(\tau_{59})/N^5$	$\omega(\tau_{59}) = N_5$

Aquí $N_j = \binom{N}{j}$ son los números combinatorios y vemos que $\omega(\tau)$ son polinomios en N de grado $\rho(\tau)$ que pueden escribirse como combinaciones lineales de los $N_j, j \leq \rho(\tau)$ con coeficientes no negativos.

3 Una familia de métodos MRRK explícitos de 6 etapas y orden 5

Consideremos métodos explícitos $(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^6)$ de seis etapas, es decir $a_{ij} = 0, j \geq i$. Para simplificar las condiciones de orden vamos a introducir hipótesis simplificadoras sobre

los coeficientes del método similares a las usadas por Butcher [1] y Dormand y Prince [3] para la construcción de métodos Runge–Kutta estándar.

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A} = \left(\frac{N-1}{N} \right) \mathbf{b}^T - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{c}^2 - \left(\frac{1}{2N} \right) \mathbf{c} - \left(\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_2}{2N} \right) \mathbf{e}_2, \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{c}^2 = \left(\frac{1}{3} \right) \mathbf{c}^3 - \left(\frac{1}{2N} \right) \mathbf{c}^2 - \left(\frac{c_2^3}{3} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{6N^2} \right) \mathbf{c}, \quad (8)$$

$$b_2 = 0. \quad (9)$$

Entonces se puede ver que todas las condiciones de orden 5 son consecuencia de las hipótesis simplificadoras (6)–(9) salvo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T \mathbf{c}^{j-1} &= \frac{\omega(\tau_{j1})}{N^j}, \quad j = 1, \dots, 5 \\ \mathbf{b}^T (\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^2 \mathbf{c}) &= \frac{\omega(\tau_{54})}{N^5}. \end{aligned} \quad (10)$$

Además esta última ecuación se puede sustituir por su equivalente

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^T \mathbf{A} \mathbf{e}_2 = 0. \quad (11)$$

Por consiguiente tenemos como parámetros libres los 15 coeficientes a_{ij} , $1 \leq j < i \leq 6$ y los 6 coeficientes b_i , $i = 1, \dots, 6$ (Notemos que $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ están determinados por los a_{ij}).

Del estudio de las condiciones y los parámetros libres se concluye que existe una familia dependiente de tres parámetros y para facilitar la construcción explícita de métodos conviene elegir como parámetros c_3 , c_4 , c_5 . Entonces el cálculo explícito de todos los coeficientes se puede realizar con el siguiente algoritmo:

Tomar $c_1 = 0$, $c_6 = (N-1)/N$ (desde (6)₆).

calcular $b_2 = 0, b_1, b_3, b_4, b_5, b_6$ desde (10).

calcular a_{32} y c_2 desde (7)₃ y (8)₃.

calcular a_{42} y a_{43} desde (7)₄ y (8)₄.

calcular a_{53} y a_{54} desde (7)₅ y (8)₅.

calcular a_{52} y a_{62} desde (11) y (6)₂.

calcular a_{65} desde (6)₅.

calcular a_{63} y a_{64} desde (7)₆ y (8)₆.

donde se ha denotado con $(E)_j$ la componente j de la ecuación vectorial E como es el caso de (6), (7), (8).

La elección de los parámetros libres se ha llevado a cabo de una manera similar a la seguida por Dormand y Prince [3] para la deducción de una fórmula óptima de orden

cinco para el par DOPRI5(4). En nuestro caso los valores de c_3, c_4 y c_5 resultan

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{4N^2 - 15N + 1}{5N(N - 3)}, \\ c_5 &= \frac{24N^4 - 271N^3 + 887N^2 - 1077N + 237}{3N(9N^3 - 97N^2 + 307N - 419)}, \\ c_3 &= \frac{3N}{10(N - 1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

4 Experimentos numéricos

En esta sección presentamos dos ejemplos numéricos que muestran las propiedades del método multi-revolución construido en la sección anterior. Hay que notar que para el cálculo de las etapas del método multi-revolución se ha utilizado el DOPRI5(4), y para establecer una comparación se ha usado este mismo método para integrar de manera estándar los P.V.I.

En primer lugar se ha considerado el problema de un péndulo plano unido con un muelle a un punto fijo (eje de giro) con constante recuperadora $1/\epsilon^2$, que en coordenadas polares tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} r'' = -\lambda r + r\theta'^2 + \cos \theta, \\ \theta'' = (-2r'\theta' - \sin \theta)/r, \\ \lambda = (r - 1)/(\epsilon^2 r). \end{cases} \quad t \in [0, t_{\text{end}}]$$

Tabla 1.1

tol	error $N = 8$	nfcn $N = 8$	error DOPRI5(4)	nfcn DOPRI5(4)
10^{-4}	$6.53e - 3$	364044	$4.92e - 3$	423661
10^{-5}	$6.53e - 5$	383244	$4.91e - 5$	424219
10^{-6}	$3.81e - 7$	410442	$3.46e - 7$	432067
10^{-7}	$1.38e - 7$	479724	$1.36e - 7$	506665
10^{-8}	$6.50e - 8$	714924	$6.32e - 8$	812767
10^{-9}	$1.23e - 8$	1030506	$9.77e - 9$	1233055

Se ha supuesto que la longitud del muelle sin alargamiento es la unidad, masa unidad y aceleración de la gravedad uno. Puesto que no se conoce la solución teórica, consideraremos el error en la integral de la energía,

$$(r'^2 + r^2\theta'^2)/2 + r(r/2 - 1)/\epsilon^2 - r \cos \theta = C.$$

Para la integración numérica se han tomado los valores de $\epsilon = 10^{-3}$ con periodo $T = 2\pi\epsilon$ y $t_{\text{end}} = 8400T$.

En las Tablas 1.1 y 1.2 se muestran los resultados numéricos obtenidos con varios valores de N , notando que, aproximadamente, se reduce el costo computacional respecto de la integración estándar en un factor $7/N$ para lograr el mismo error.

Tabla 1.2

tol	error $N = 10$	nfcn $N = 10$	error $N = 14$	nfcn $N = 14$
10^{-4}	$7.17e - 3$	292086	$9.09e - 3$	215598
10^{-5}	$6.49e - 5$	305718	$6.47e - 5$	219582
10^{-6}	$3.86e - 7$	328290	$3.83e - 7$	234402
10^{-7}	$1.35e - 7$	383826	$1.36e - 7$	274074
10^{-8}	$6.27e - 8$	571920	$6.38e - 8$	408552
10^{-9}	$1.00e - 8$	824412	$1.11e - 8$	588864

El siguiente experimento es el relativo a dos osciladores armónicos acoplados con frecuencias muy distintas k_1/ϵ y $k_2\epsilon$ que tiene por ecuaciones

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & k_1/\epsilon & a & 0 \\ -k_1/\epsilon & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & \epsilon k_2 \\ 0 & b & -\epsilon k_2 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Se han tomado los siguientes valores $k_1 = k_2 = 1$, $a = 1/10$, $b = 1/20$, $\epsilon = 10^{-2}$, $t_{\text{end}} = 100$.

Tabla 2.1

tol	error $N = 8$	nfcn $N = 8$	error DOPRI5(4)	nfcn DOPRI5(4)
10^{-4}	$1.74e - 1$	86724	$2.10e - 1$	97819
10^{-5}	$2.02e - 2$	129492	$2.25e - 2$	156709
10^{-6}	$2.17e - 3$	200772	$2.31e - 3$	248767
10^{-7}	$2.21e - 4$	307692	$2.29e - 4$	394369
10^{-8}	$2.21e - 5$	478764	$2.26e - 5$	625081
10^{-9}	$2.21e - 6$	756756	$2.23e - 6$	990721

En las Tablas 2.1 y 2.2 se presentan los errores globales cometidos por el método multi-revolución, así como el relativo a la integración estándar con el DOPRI5(4). Finalmente, la figura 1 muestra el gráfico del error global en términos del número de evaluaciones de función derivada para los valores de N utilizados.

Tabla 2.2

tol	error $N = 12$	nfcn $N = 12$	error $N = 16$	nfcn $N = 16$
10^{-4}	$1.74e - 1$	57816	$2.10e - 1$	43362
10^{-5}	$2.02e - 2$	86328	$2.25e - 2$	64746
10^{-6}	$2.17e - 3$	133848	$2.31e - 3$	100386
10^{-7}	$2.21e - 4$	205128	$2.29e - 4$	153846
10^{-8}	$2.21e - 5$	319176	$2.26e - 5$	239382
10^{-9}	$2.21e - 6$	504504	$2.23e - 6$	378378

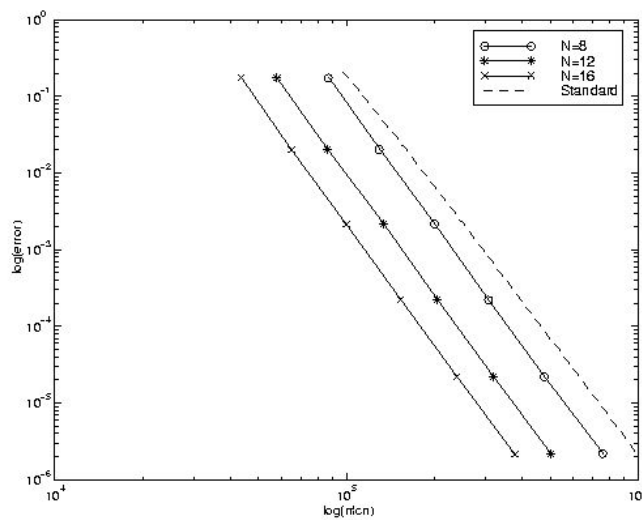


Figura 1: El error global en términos del número de evaluaciones de función derivada para los valores de N utilizados.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido apoyada por el Proyecto BFM 2001–2562 de DGI.

Referencias

- [1] J.C. BUTCHER, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, J. Wiley & Sons, 1987.
- [2] M. CALVO, J.I. MONTIJANO AND L.RÁNDEZ, *On multirevolution Runge–Kutta schemes*, Tech. Rep. Dept. Matemática Aplicada, Uniz. Zaragoza, 2001.
- [3] J. DORMAND AND P. PRINCE, *A family of embedded Runge–Kutta formulae*, J. CAM 6 (1980), 19–26.

- [4] C.W. GEAR AND K.A. GALLIVAN, *Automatic Methods for Highly Oscillatory Ordinary Differential Equations*, In: Numerical Analysis Proceedings Dundee 1981, Lect. Notes Math., p. 912, 1982.
- [5] C.W. GEAR , *Automatic Detection and Treatment of Oscillatory and/or Stiff Ordinary Differential Equations*, In: Numerical Integration of Differential Equations and Large Linear Systems. Proceedings, Bielefeld 1980, Lect. Notes Math., p. 968, 1982.
- [6] O.F. GRAF, *Multirevolution methods for orbit integration*, Lecture Notes in Mathematics 362, Springer, Berlin (1973), pp. 471–490.
- [7] O.F. GRAF AND D. G. BETTIS, *Modified multirevolution integration methods for satellite orbit computation*, Celestial Mechanics 11, (1975), pp. 443–448.
- [8] E. HAIRER, S.P. NØRSETT, G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Second Revised Edition, Springer Verlag 1993.
- [9] L.O. JAY AND L.R. PETZOLD, *Highly oscillatory systems and periodic stability*, Tech. Rep.
- [10] U. KIRCHGRABER, *An ODE solver based in the method of averaging*, Numer. Math. 53 (1988), pp. 621–652.
- [11] D. MACE AND L. H. THOMAS, *An extrapolation method for stepping the calculations of the orbit of an artificial satellite several revolutions ahead at a time*, Astronomical Journal 65, (1960), #1280.
- [12] B. MELENDO AND M. PALACIOS, *A new approach to the construction of multirevolution methods and their implementation*, Appl. Numer. Math. 23 (1997), pp. 259–274.
- [13] B. MELENDO, *Long term numerical integration of quasi periodic problems*, Ph.D.Thesis, Univ. Zaragoza, (2000).
- [14] L.R. PETZOLD, *An efficient numerical method for highly oscillatory ordinary differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. 18 (1981), pp. 455–479.
- [15] L.R. PETZOLD, L.O. JAY AND J.YEN, *Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations*, Acta Numerica (1997), pp. 437–483.
- [16] G.P. TARATYNOVA, *Numerical solution of equations of finite differences and their application to the calculation of orbits of artificial earth satellites*, ARS Journal supplement, from Artificial Earth Satellites 4 (1960), pp. 56–85.