

# Bifurcaciones de soluciones particulares en la familia 3D-Hénon & Heiles

J. Martínez, J. Egea, S. Ferrer

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Murcia, 30071 Murcia

## Resumen

En esta comunicación estudiamos perturbaciones cúbicas simétrico-axiales del oscilador isotrópico, que dan lugar a que la tercera componente del momento angular aparezca como nuevo parámetro. En ese escenario, se estudian bifurcaciones de soluciones rectilíneas por el origen y de soluciones circulares alrededor del eje  $Ox_3$  considerando, para distintos valores del parámetro externo, los efectos que produce la variación de la tercera componente del momento angular.

## 1 Introducción

Sea una función Hamiltoniana constituida por el oscilador isotrópico y la perturbación cúbica simétrico-axial más general

$$H(x, X) = \frac{1}{2} (X|X) + \frac{1}{2} (x|x) + \frac{\alpha}{3} x_3^3 + \beta(x_1^2 + x_2^2)x_3 \quad (1)$$

donde  $(\cdot|\cdot)$  denota el producto escalar. Debido al carácter de la perturbación, la tercera componente del momento angular es una integral del movimiento. Como casos destacables comenzaremos citando los integrables, que se dan para  $\lambda := \frac{\beta}{\alpha} = 0, 1, \frac{1}{6}$ . Entre los no integrables, citaremos el caso  $\lambda = -1$  (Hénon-Heiles), estudiado en [2, 3] alrededor del origen, obteniendo órbitas periódicas, movimientos cuasiperiódicos y bifurcaciones en el espacio reducido. Siguiendo en el entorno del origen, en [4] se determina la dinámica de (1), a excepción de 6 ratios,  $\lambda = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 6$ , que presentan un carácter excepcional. En [5] se estudian las bifurcaciones tipo Hopf que ocurren para  $\lambda = \frac{1}{2}$  y cerca de  $\lambda = -1$ , quedando abierta la cuestión de si una tercera ocurre en  $\lambda = \frac{5}{2}$  o en su entorno.

Nuestro objetivo es continuar el trabajo iniciado en [1], donde se consideran, no sólo en el origen, los equilibrios y algunas soluciones periódicas simples de (1). En concreto, en dicho trabajo, se muestra la existencia de soluciones rectilíneas y soluciones circulares alrededor del eje  $Ox_3$ , identificándose algunas bifurcaciones de tipo centro-silla y Hopf de dichas soluciones mediante estudios numéricos.

Sin pérdida de generalidad podemos tomar  $\alpha < 0$ ; en particular, en este trabajo haremos  $\alpha = -1$ , toda vez que para el caso Hénon-Heiles  $\alpha$  toma el valor  $-1$  (y  $\beta = 1$ ) y, además, para  $\alpha = -1$  y  $\beta = 0$  el sistema es integrable. El caso particular  $\alpha = 0$  no queda incluido en esta comunicación. En tales circunstancias, las ecuaciones de Hamilton que estudiaremos serán

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1, & \dot{X}_1 &= -(1 + 2\beta x_3)x_1, \\ \dot{x}_2 &= X_2, & \dot{X}_2 &= -(1 + 2\beta x_3)x_2, \\ \dot{x}_3 &= X_3, & \dot{X}_3 &= -x_3(1 - x_3) - \beta(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Tenemos, por tanto, una familia de Hénon-Heiles controlada por el parámetro (externo)  $\beta$  que, debido a la simetría axial, se convierte en una familia biparamétrica con la tercera componente del momento angular  $N := x_1 X_2 - x_2 X_1$  como segundo parámetro (interno).

Dos puntos aislados y un anillo de puntos constituyen los equilibrios del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= (0, 0, 0), & \mathcal{P} &= (0, 0, 1), \\ \mathcal{A} &= \left\{ \left( x_1, x_2, -\frac{1}{2\beta} \right) / x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2\beta^2} \left( 1 + \frac{1}{2\beta} \right) \right\}, & \beta &\in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty). \end{aligned} \quad (3)$$

Para conocer la dinámica del sistema tenemos que comenzar estudiando soluciones simples, de modo que, siguiendo los trabajos iniciados en [1], vamos a tratar en esta comunicación soluciones circulares horizontales alrededor del eje  $0x_3$  y soluciones rectilíneas por el origen (en adelante las llamaremos circulares y rectilíneas).

Estudiaremos los rangos de existencia de las soluciones particulares imponiéndolas en las ecuaciones de movimiento. Trataremos las soluciones rectilíneas, en la Sección 2, en cartesianas, mientras que para las circulares (Sección 3) trabajaremos en cilíndricas, donde aparece de modo explícito  $N$ , lo que pone de manifiesto que el sistema es de dos grados de libertad, de suerte que las soluciones circulares serán puntos de equilibrio en el espacio reducido. En dicho espacio, en la Sección 3, investigaremos la existencia de soluciones circulares dobles en el plano  $N$ - $\beta$  y obtendremos la expresión analítica de las *curvas de bifurcación*. Estas curvas separan el plano  $N$ - $\beta$  en regiones en las que determinaremos el número de soluciones circulares.

Los valores  $\beta = -\frac{1}{2}$  y  $\beta = 0$  suponen valores críticos por cuanto que, además de delimitar el rango de existencia del anillo  $\mathcal{A}$  de puntos de equilibrio y, como veremos, de las soluciones rectilíneas, determinan el comportamiento del punto  $\mathcal{P}$  de equilibrio. En efecto, en el tránsito de  $N = 0$  a  $N \neq 0$ , para  $\beta \leq -\frac{1}{2}$ , de los equilibrios  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{O}$  se bifurcan sendas soluciones circulares que, al llegar a un valor crítico de  $N$ , formarán una solución doble que desaparecerá. Para  $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$  se bifurcarán soluciones circulares de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{O}$ , con una historia similar en lo que a su evolución se refiere que en el caso anterior (nótese

que para  $\beta = -\frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{A}$ ). Para  $\beta > 0$  se bifurcarán sendas soluciones de los equilibrios  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{P}$ , teniendo, la solución bifurcada de  $\mathcal{P}$  una existencia ilimitada, mientras que las bifurcadas de  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{A}$  desaparecerán tras una evolución que desemboque en solución doble.

En la sección 3, y también en la 4 de manera gráfica, trataremos aspectos relativos a la energía. Una vez determinadas las bifurcaciones, es evidente que no todas ellas yacerán en la misma variedad de energía constante, de modo que será conveniente determinar la energía de estas variedades. Asimismo, ya en la Sección 4, estudiaremos gráficamente las curvas de nivel del potencial efectivo (energía de las soluciones circulares horizontales) que nos permitirán conocer ciertos aspectos sobre la estabilidad y las bifurcaciones, a falta de estudios analíticos más precisos en curso.

## 2 Soluciones rectilíneas por el origen

Para el caso integrable  $\beta = 0$  la inspección de (2) nos conduce a dos tipos de soluciones rectilíneas: en el plano ecuatorial y en el eje  $z$ , cualitativamente distintas puesto que las ecuatoriales corresponden al problema isotrópico y no así las del eje  $z$ . En [1] aparecen detalles sobre la evolución de las familias de órbitas periódicas que emanan de las soluciones ecuatoriales.

Sea ahora el caso  $\beta \neq 0$ , que corresponde a soluciones rectilíneas con una cierta inclinación  $\psi$ . Estas soluciones vendrán dadas por una función  $\gamma(t)$  y un vector  $(a, b, c)$  tales que  $(x, y, z) = \gamma(t)(a, b, c)$  satisface las ecuaciones de movimiento. Consideremos las ecuaciones de segundo grado:

$$\ddot{\gamma} + \gamma + \xi\gamma^2 = 0, \quad \ddot{\gamma} + \gamma + \xi\gamma^2 = 0, \quad \ddot{\gamma} + \gamma + \eta\gamma^2 = 0 \quad (4)$$

donde  $\xi = 2c\beta$  y  $\eta = \frac{\beta}{c}(a^2 + b^2) - c$ . Para que tales soluciones existan, debe verificarse que  $\xi = \eta$ , de donde se obtiene la siguiente relación entre las componentes del vector

$$\left(2 + \frac{1}{\beta}\right) c^2 = a^2 + b^2,$$

y dado que  $a^2, b^2$  y  $c^2$  son cantidades positivas, se tiene que  $\left(2 + \frac{1}{\beta}\right) > 0$ , de donde inferimos que el rango de existencia es  $\beta \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$ , el mismo que teníamos para el anillo de puntos de equilibrio.

Con el fin de probar que las soluciones rectilíneas descansan sobre  $\mathcal{A}$ , debemos obtener la componente  $c$  de dichas soluciones para el radio del anillo  $\mathcal{A}$ , lo cual obtenemos resolviendo

$$\frac{1}{2\beta^2} \left(1 + \frac{1}{2\beta}\right) = \left(2 + \frac{1}{\beta}\right) c^2$$

de donde tenemos que, en efecto, la componente  $c$  coincide con la altura del anillo, esto es,  $c = +\frac{1}{2\beta}, -\frac{1}{2\beta}$ , según sea  $\beta$  negativo o positivo respectivamente. De este modo, de (4) podemos concluir que la frecuencia de oscilación no depende de  $\beta$ .

Obtengamos la inclinación de estas soluciones en función de  $\beta$ . La tangente del ángulo  $\psi$  que formarán con el plano  $x$ - $y$  vendrá dada por  $\tan \psi = c/R$ , siendo  $c$  la componente en el eje  $z$  de las soluciones rectilíneas y  $R$  el radio de  $\mathcal{A}$ :

$$\tan \psi = \pm \sqrt{\frac{\beta}{2\beta + 1}} \quad \begin{array}{l} \beta < -\frac{1}{2} \\ \beta > 0 \end{array} \quad (5)$$

de modo que las soluciones rectilíneas formarán un ángulo  $\psi \approx 35^\circ$  cuando  $\beta \rightarrow -\infty$ , que irá creciendo a medida que  $\beta$  se aproxima a  $-\frac{1}{2}$ , en donde  $\psi = 90^\circ$ , esto es, oscilaciones polares. Cuando, para  $\beta$  arrancando de 0, vuelva a emerger el anillo  $\mathcal{A}$ , las soluciones rectilíneas serán meridianas ecuatoriales,  $\psi = 0^\circ$ , y tenderán a  $\psi \approx -35^\circ$  a medida que  $\beta$  crezca.

### 3 Soluciones circulares horizontales alrededor de $Ox_3$

Dada la simetría del problema, lo formularemos en coordenadas cilíndricas, donde el hamiltoniano (1) viene dado por

$$H(\rho, z, P, Z, N; \beta) = \frac{1}{2}(P^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(\rho^2 + z^2) + \frac{1}{2} \frac{N^2}{\rho^2} + \left(-\frac{1}{3}z^2 + \beta\rho^2\right)z. \quad (6)$$

De [1], los equilibrios del sistema serán los pares  $(\rho, z)$  que satisfagan

$$\rho - \frac{N^2}{\rho^3} + 2\beta\rho z = 0, \quad z - z^2 + \beta\rho^2 = 0. \quad (7)$$

Y dado que de la primera ecuación,  $\rho^2 = \frac{|N|}{\sqrt{1+2\beta z}}$ , sustituyendo en la segunda tenemos una quintica, cuya resolución nos permitirá obtener la altura  $z_c$  de las soluciones circulares

$$(1 + 2\beta z)(1 - z)^2 z^2 = \beta^2 N^2. \quad (8)$$

El radio  $\rho_c$  lo obtendremos a partir de la segunda ecuación de (7),

$$\rho_c = \sqrt{\frac{-z_c(1 - z_c)}{\beta}}, \quad (9)$$

que no es válido para  $\beta = 0$ . Para discutir este caso, hacemos  $\beta = 0$  en (7), de donde tenemos que la altura y el radio vienen dados por

$$z(1 - z) = 0, \quad \rho = \sqrt{|N|}. \quad (10)$$

Para  $\beta = 0$  existen, por tanto, dos soluciones fijas a alturas  $z = 0$  y  $z = 1$ , cuyos radios crecerán con  $N$ . Como veremos más adelante, este comportamiento es exclusivo del caso  $\beta = 0$ .

### 3.1 Rangos de existencia

Una vez tenemos las expresiones (8) y (9), estamos en disposición de calcular las soluciones circulares y estudiar sus bifurcaciones en el plano biparamétrico  $N$ - $\beta$ . Como paso previo, resulta conveniente fijar los rangos de existencia de las posibles soluciones. Para ello, debemos considerar que el radio  $\rho_c$  debe ser una cantidad real y que, de (8),  $1 + 2\beta z_c > 0$ . De esta última condición se tiene que si  $\beta < 0$ , entonces  $z_c < 1/|2\beta|$ ; y si  $\beta > 0$ , entonces  $z_c > -1/2\beta$ . Con esas restricciones, estudiamos los intervalos en  $\beta$  determinados por  $\beta = -\frac{1}{2}$  y  $\beta = 0$ , que son los casos límite que fijan la existencia de  $\mathcal{A}$ . En cada uno de los tres intervalos discutimos  $z_c < 0$  y  $z_c > 0$ . El caso  $z_c = 0$  se corresponde con el límite en que una solución se bifurca del origen, lo cual entenderemos mejor más adelante.

Sea por ejemplo  $\beta \leq -\frac{1}{2}$ . Para  $z_c > 0$ , de (9) se tiene que  $z_c < 1$ ; ahora bien, como para  $\beta < 0$  hemos visto que  $z_c < 1/|2\beta|$  y, a su vez,  $1/|2\beta| < 1$ , concluimos que  $z_c < 1/|2\beta|$ , que es la condición más fuerte. Por otro lado, si que  $z_c < 0$ , de (9) se deduce que  $z_c > 1$ , lo cual es absurdo, y por tanto no existen soluciones con  $z_c < 0$ . Así pues, para  $\beta \leq -\frac{1}{2}$  sólo están permitidas las soluciones que verifiquen  $0 < z_c < 1/|2\beta|$  o, lo que es lo mismo,  $0 < z_c < z_{\mathcal{A}}$ , toda vez que para  $\beta < 0$  se tiene que  $z_{\mathcal{A}} = 1/|2\beta|$ .

Mediante una discusión análoga obtenemos que para  $-\frac{1}{2} < \beta < 0$ , el intervalo en el que están permitidas las soluciones circulares es  $0 < z_c < z_{\mathcal{P}}$ . Asimismo, para  $\beta > 0$  los rangos de existencia son  $z_c > z_{\mathcal{P}}$  y  $z_{\mathcal{A}} < z_c < 0$ . Los resultados obtenidos en esta sección se resumen en la Figura 1 (izquierda).

### 3.2 Curvas de bifurcación

Para obtener soluciones dobles aplicamos el teorema de la resultante. Resolviendo el polinomio derivado de la quintica (8) obtenemos las soluciones dobles

$$z_{d1} = -\frac{2 - 3\beta + \sqrt{20\beta + (-2 + 3\beta)^2}}{10\beta}, \quad z_{d2} = -\frac{2 - 3\beta - \sqrt{20\beta + (-2 + 3\beta)^2}}{10\beta}. \quad (11)$$

Despejando  $N$  de (8) y sustituyendo  $z_{d1}$  y  $z_{d2}$  obtendremos sendas curvas  $N_{z_{d1}}(\beta)$  y  $N_{z_{d2}}(\beta)$ . Considerando las regiones de existencia obtenidas en la Sección 3.1, la expresión analítica de las curvas de bifurcación será

$$N(\beta) = \begin{cases} \text{Si } \beta < 0 : \\ \frac{\sqrt{(3 + 3\beta + \sqrt{4 + \beta(8 + 9\beta)})(-2 - 4\beta + 3\beta^2 + (1 + \beta)\sqrt{4 + \beta(8 + 9\beta)})^2}}{25\sqrt{5}\beta^3} \\ \text{Si } \beta > 0 : \\ \frac{\sqrt{8 + 40\beta + 55\beta^2 + 5\beta^3 + 90\beta^4 + 108\beta^5 + (1 + 2\beta - 4\beta^2)(4 + \beta(8 + 9\beta))^{3/2}}}{25\sqrt{5}\beta^3} \end{cases} \quad (12)$$

En la Figura 1 (derecha) tenemos la representación gráfica de estas curvas. Calculando los límites en (12) concluimos que existe una asíntota horizontal en  $\beta = 0$  para las dos ramas, si bien la correspondiente a  $\beta < 0$  se aproxima mucho más rápido. Observamos que la propia asíntota constituye una curva de bifurcación, además de las dos ramas que tienden a ella. En la siguiente sección estudiaremos algunas de estas bifurcaciones.

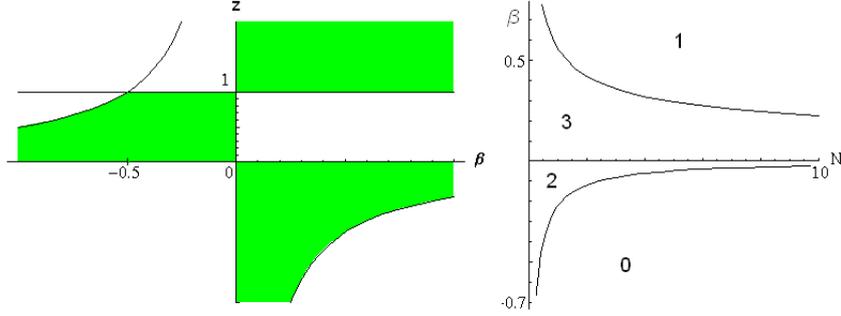


Figure 1: Izqda: Rangos de existencia en  $z_c$  de las soluciones circulares. Dcha: Curvas de bifurcación y número de soluciones circulares en cada región.

Para obtener el número de soluciones existente en cada región de la Figura 1 (derecha) tenemos que resolver numéricamente la quintica (8) para pares de valores  $(\beta, N)$ , y determinar qué soluciones se encuentran dentro de los rangos permitidos (Figura 1 izquierda). Para ello programamos con *Mathematica* una función cuyas variables dependientes serán  $\beta$  y un vector de valores de  $N$  que va desde  $N = 0$  hasta un valor de  $N$  más allá del  $N_c$  correspondiente a la solución doble.

### 3.3 Evolución de las soluciones. Bifurcaciones de equilibrios y soluciones dobles

Con esta misma función que acabamos de mencionar en la sección anterior, estudiaremos en detalle la evolución de las soluciones (ver Figura 2), que se bifurcan de los equilibrios  $\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{A}$ , los cuales existen sólo para  $N = 0$ . Estudiaremos algunos casos particulares en las cinco regímenes determinadas por  $\beta = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  y los tres intervalos que definen.

Comenzaremos con  $\beta = -1 (< -\frac{1}{2})$ . Cuando  $N = 0$  tenemos que la altura de  $\mathcal{A}$  es  $z_{\mathcal{A}} = 0.5$ . Si resolvemos (8) para  $N = 0$  tenemos dos soluciones dobles en  $z = 0$  y  $z = 1$  y una solución simple en  $z = 0.5$ . Cuando  $N$  deja de ser 0, por ejemplo  $N \sim 10^{-6}$ , tres de las soluciones de la quintica no son válidas, ya sea porque son complejas o porque no pertenecen a los rangos de existencia permitidos. Las dos soluciones permitidas, una bifurcada del origen (siempre con energía  $E \sim 0$ ) y otra del anillo (con  $E \simeq 0.083$ ), evolucionan hasta que para  $N = 0.133748$  resulta una solución doble que desaparece (con  $E \simeq 0.12$ ) al aumentar  $N$ .

Para  $\beta = -0.55$  tenemos un comportamiento similar, si bien destacamos que, al ser el radio del anillo de puntos de equilibrio menor que en el caso anterior, las soluciones

se bifurcan con un radio menor; hasta que en  $\beta = -\frac{1}{2}$ , el radio es 0 y las soluciones se bifurcan del eje  $z$ . Así en  $\beta = -\frac{1}{2}$ , para  $N = 0$  tenemos una solución triple en  $z = 1$ , y una doble en  $z = 0$ . De  $z_A = z_P = 1$  se bifurca una solución, mientras que del origen se bifurca otra. Ambas se aproximan hasta desaparecer cuando  $N = 0.371806$  ( $E \simeq 0.35$ ). Para  $\beta \geq -\frac{1}{2}$  siempre se bifurca una solución permitida de  $z = 1$ , lo cual ocurre siempre en una variedad con  $E \simeq \frac{1}{6}$ . En efecto, para  $\beta = -0.0002$ , se bifurca una solución de  $z_P = 1$  con  $E \simeq \frac{1}{6}$ , y otra del origen, que tienen su límite de existencia en la solución doble que se produce para  $N = 1249.87$  con  $E \simeq 1249.83$ . Comprobamos que, en este caso,  $E \simeq N$ , lo cual, contra lo que pudiera parecer, es casual.

$\beta = 0$ , junto con  $\beta = -\frac{1}{2}$  constituye un caso límite, o de transición, con la particularidad de que para  $\beta = 0$  el sistema es integrable y se observa que las soluciones bifurcadas permanecen a altura fija y no se produce ninguna solución doble.

Para  $\beta = 1 (> 0)$  la altura del anillo es negativa y se bifurcarán soluciones de todos los equilibrios. Las soluciones bifurcadas de  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{A}$  evolucionan hasta formar una doble y desaparecer ( $E \simeq 0.22$ ), mientras que la solución bifurcada de  $\mathcal{P}$  ( $z_P = 1$ ), existe siempre. En la Figura 2 resumimos gráficamente estos resultados.

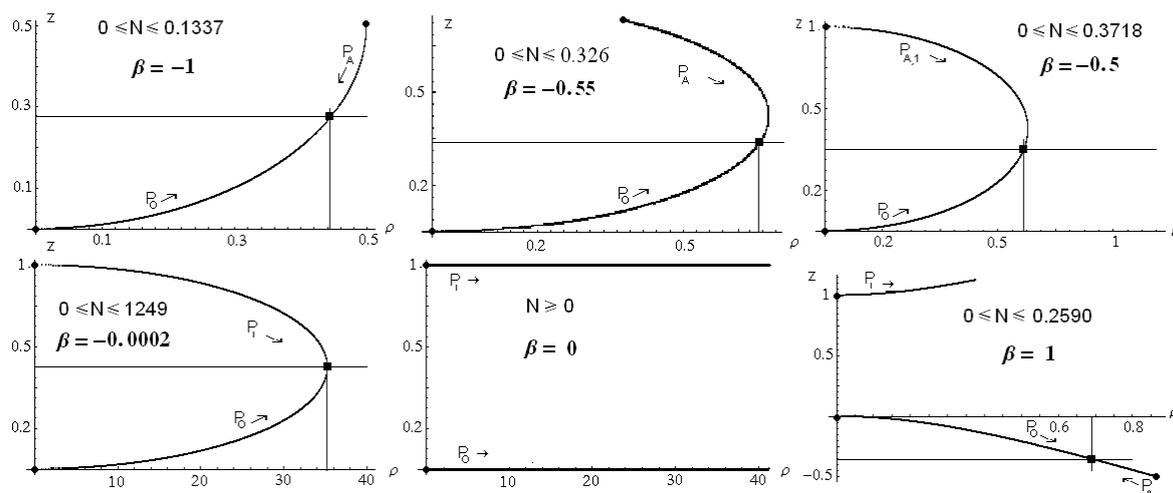


Figure 2: Evolución en  $N$  de las soluciones (representadas por  $\bullet$  en su punto inicial) bifurcadas de los equilibrios hasta que alcanzan la solución doble (representadas por  $\blacksquare$ ) dada por  $N_c = N(\beta)$ .  $P_{A,O,1}$  indica si la solución se ha bifurcado del anillo  $\mathcal{A}$ , del origen  $\mathcal{O}$  o del punto  $\mathcal{P}$  del eje  $z$  con altura 1.

Para concluir con el análisis de las posibles bifurcaciones que se muestran en la Figura 1 comentaremos el paso por la recta  $\beta = 0$ , que constituye la frontera entre regiones con 2 y 3 soluciones. En efecto, para  $\beta$  próxima a 0 por la izquierda tenemos dos soluciones bifurcadas de  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{P}$  (p.e, caso  $\beta = -0.0002$ , Figura 2); en el caso  $\beta = 0$  podemos decir que las curvas precedentes se rompen en dos, que para  $\beta > 0$  se corresponden a una solución

perenne que se bifurca de  $\mathcal{P}$  y a las dos soluciones que terminan la doble antes discutida, constituyendo 3 soluciones. Por tanto, la tercera solución que aparece se corresponde con una bifurcación del infinito en la dirección  $-35^\circ$ .

### 3.4 Velocidad angular

Si consideramos el problema en cartesianas, se puede comprobar que las oscilaciones en el plano  $x-y$  están caracterizadas por una frecuencia angular  $\omega = \sqrt{1 + 2\beta z_c}$ , donde  $z_c$  es, como sabemos, la altura de las soluciones circulares. El periodo será, por tanto

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 2\beta z_c}}.$$

Para el caso  $\beta = -1$  la solución bifurcada del origen arranca con un periodo  $T = 2\pi$  que va creciendo a medida que  $z_c$  aumenta, lo cual significa obviamente que la velocidad angular decrece. La solución bifurcada del anillo arranca con velocidad 0, esto es, su periodo tiende a infinito, pues  $z_c \sim 0.5$ ; y va aumentando su velocidad a medida que  $z_c$  disminuye. Contrasta, pues, el comportamiento de ambas soluciones, por cuanto que una arranca con velocidad angular constante y otra con velocidad 0, evolucionando ambas hasta tener la misma velocidad en el punto donde se forma la solución doble. Una discusión análoga podemos hacer para el resto de casos en  $\beta$ .

Todas las soluciones que parten del origen lo harán con la misma velocidad angular constante distinta de cero, mientras que todas las que emanan del anillo lo harán con velocidad cero. Para las que arrancan del punto  $\mathcal{P}$  tendremos que todas arrancan con velocidad constante (distinta en cada caso), a excepción del caso particular  $\beta = -\frac{1}{2}$ , para el que arrancan con velocidad cero. Nótese que en ese caso  $\mathcal{P} = \mathcal{A}$ .

## 4 Potencial efectivo, estabilidad y bifurcaciones

La energía de las soluciones circulares horizontales, únicas soluciones circulares consideradas en este trabajo, coincide con el potencial efectivo. Si pintamos las curvas de nivel del potencial efectivo, podemos determinar de manera cualitativa cuál es el carácter de las soluciones bifurcadas y tener una primera visión de cómo es la dinámica alrededor de estas soluciones.

En este trabajo hemos mostrado dos tipos bien distintos de bifurcaciones. Por un lado las que se producían en el tránsito de  $N = 0$  a  $N \neq 0$ , donde teníamos que de los equilibrios se bifurcaban soluciones circulares horizontales alrededor de  $0x_3$ ; por otro lado, teníamos que para ciertos valores de  $N$  (que dependían de  $\beta$ ) se formaban soluciones dobles que desaparecían, lo cual, viendo la evolución en sentido decreciente en  $N$ , corresponde al caso en que aparece una solución doble que se bifurca en dos.

El caso de estas soluciones dobles es siempre el mismo, de un centro (el origen  $\mathcal{O}$ ) se bifurca una solución circular que en el espacio reducido también es un centro. Dicha solución evoluciona hasta encontrarse con una silla bifurcada de  $\mathcal{P}$  o del anillo  $\mathcal{A}$ , según sea el valor de  $\beta$ . En la figura 3, para  $\beta = -1$ , podemos observar la evolución de sendas soluciones bifurcadas del origen y del anillo. La solución doble que se forma, vista en sentido inverso, constituye una bifurcación *centro-silla*. El valor crítico de  $N$  para el que se produce la solución doble es 0.133748. Podemos observar como en la cuarta imagen de la figura 3 las soluciones circulares han desaparecido.

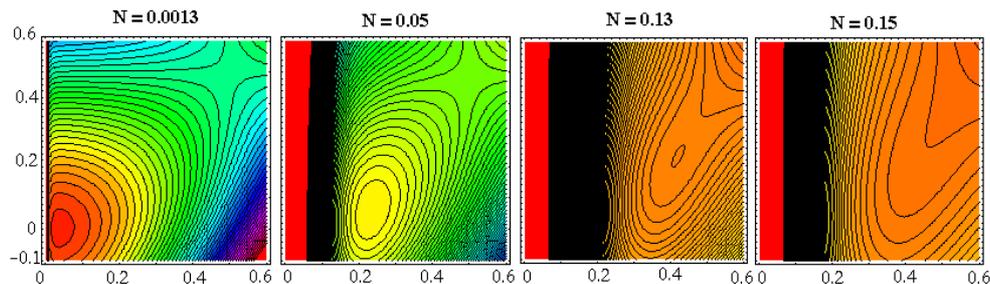


Figure 3: Bifurcación *saddle-center* de soluciones circulares alrededor de  $0x_3$  para  $\beta = -1$ .

En los casos  $\beta = -\frac{1}{2}$ ,  $-0.0002$ ,  $1$  también se formaban soluciones dobles, que constituyen, de manera similar, bifurcaciones tipo *centro-silla* como la que presentamos en la figura 3. En todos los casos se bifurca un *centro* del origen y un punto de silla de  $\mathcal{P}$  o del anillo  $\mathcal{A}$ .

## 5 Conclusión y futuros trabajos

En este trabajo se han estudiado los rangos de existencia de las soluciones rectilíneas por el origen y de las soluciones circulares horizontales alrededor de  $0x_3$ , así como sus elementos característicos. Para las soluciones circulares se ha hecho un estudio de sus bifurcaciones de los equilibrios y de las soluciones dobles que forman dando lugar a bifurcaciones *centro-silla*. Hemos estudiado estos casos representativos, además de los casos límite  $\beta = -\frac{1}{2}$  y  $\beta = 0$ , para tener una idea general del comportamiento de estas soluciones circulares en el plano biparamétrico  $N$ - $\beta$ . Se ha mostrado también como las soluciones rectilíneas por el origen se bifurcan de oscilaciones polares y de oscilaciones ecuatoriales.

Como trabajo pendiente tenemos el estudio de regiones particulares del plano biparamétrico, en las que podemos realizar un estudio de la dinámica mediante formas normales, superficies de sección de Poincaré, etc. Concretamente, el entorno de  $z = 1$  requiere un estudio más detallado que el aquí recogido, lo cual es necesario para conocer la dinámica global que determinan éste punto y el origen.

Relacionado con la solución bifurcada del origen, queda pendiente conectar la dinámica en torno a dicha solución con los trabajos realizados (ver [4, 5]) en torno al origen, lo cual constituye un trabajo en curso.

## Agradecimientos

Al Dr. López-Moratalla por sus observaciones y sugerencias. Y al Ministerio de Educación de Educación, Cultura y Deporte, cuya ayuda a través del Proyecto PB98-1576 ha financiado parcialmente esta investigación.

## Referencias

- [1] M. Lara, S. Ferrer, J. Martínez y J.M. Pérez, 2001, Osciladores cúbicos en resonancia 1-1-1 con simetría axial. Soluciones simples y órbitas periódicas. *Métodos de dinámica orbital y rotacional. Serv. de publicaciones Universidad de Murcia*, 137-144.
- [2] S. Ferrer, M. Lara, J. Palacián, J.F. San Juan, A. Viartola y P. Yanguas, 1998, The Hénon and Heiles Problem in Three Dimensions. I. Periodic Orbits Near the Origin, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng*, 8, 1199-1213.
- [3] S. Ferrer, M. Lara, J. Palacián, J.F. San Juan, A. Viartola y P. Yanguas, 1998, The Hénon and Heiles Problem in Three Dimensions. II. Relative equilibria and bifurcations in the reduced system, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng*, 8, 1215-1229.
- [4] S. Ferrer, H. Hanßmann, J. Palacián y P. Yanguas, 2002, On perturbed Oscillators in 1-1-1 Resonance. The Case of Axially Symmetric Cubic Potentials, *J. Geometry and Physics* 40, 320-369.
- [5] H. Hanßmann y J.C. van der Meer, 2002, On the Hamiltonian Hopf bifurcations in the 3D Hénon-Heiles family, *J. Dynam. Differential Equations*, 14, 675-695.