Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza. **20:** 1–8, (2002).

Una nota sobre aproximación simultánea de funciones*

J. M. Almira, N. Del Toro

Depto. de Matemáticas. Universidad de Jaén. E.U.P. Linares. 23700 Linares (Jaén), Spain

email: jmalmira@ujaen.es; ndeltoro@ujaen.es

A. J. López-Moreno

Depto. de Matemáticas. Universidad de Jaén. Las Lagunillas. 23071 Jaén. Spain

email: ajlopez@ujaen.es

Abstract

The main purpose of this note is to prove Müntz's type results on simultaneous approximation of functions with polynomials and also with polynomials with integral coefficients. To achieve our goal, we use some variations of Bernstein's polynomials.

Resumen

El objetivo principal de esta nota es demostrar algunos resultados tipo Müntz sobre aproximación simultánea de funciones con polinomios y también con polinomios de coeficientes enteros. Para ello, utilizamos ciertas variaciones de los polinomios de Bernstein.

Clasificación AMS: 41A10, 41A28, 41A29

1 Introducción y primeros resultados

Dada una sucesión de números naturales $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $m(n) \leq n$ $(n \in \mathbb{N})$, queremos estudiar la convergencia simultánea de las sucesiones de polinomios definidas por

$$P_n(f) = \sum_{k=m(n)}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{1}$$

*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Junta de Andalucía, Grupo de Investigación "Aproximación y Métodos Numéricos", FQM-0178

y

$$\widetilde{P}_n(f) = \sum_{k=m(n)}^{n} \left[f(k/n)\binom{n}{k} \right] x^k(1-x)^{n-k} \tag{2}$$

a la función $f \in C^{(s)}[0,1]$ y sus derivadas. Veremos que bajo condiciones razonables sobre la sucesión de números naturales $\{m(n)\}_{n=0}^{\infty}$, dicha convergencia se produce sobre ciertos compactos $K \subset [0,1]$. Para motivar este problema, quisiéramos exponer antes algunos resultados que han sido demostrados recientemente por Almira y Luther en [1]. En particular, el Teorema 1 y el Corolario 3 de esta nota aparecen en [1], y el Teorema 2 es una versión más fuerte de otro resultado del mismo artículo. Incluimos sus demostraciones por completitud. Empezamos con un resultado que explica por qué necesitamos imponer ciertas restricciones a la sucesión $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, no ya para la aproximación simultánea sino simplemente para la aproximación uniforme de funciones con polinomios $p_n \in \mathbf{span}\{x^{m(n)}, \ldots, x^n\}$.

Teorema 1. *Sea $[a,b]$ un intervalo tal que $0 \notin [a,b]$ y supongamos que para toda función $f \in \mathbf{C}[a,b]$ existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $p_n \in \mathbf{span}\{x^{m(n)}, ..., x^n\}$, $(n \geq 1)$ y $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{[a,b]} = 0$. Entonces $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} < 1$.*

Demostración. Evidentemente, $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} \leq 1$, pues $m(n) \leq n$ para todo n. Si el límite superior fuese igual a 1, entonces existirían números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ tales que $\log \frac{n_k}{m(n_k)-1} \leq 2^{-k}$ para todo $k \geq 1$. Ahora bien, se tiene que la desigualdad

$$\sum_{j=m(n_k)}^{n_k} \frac{1}{j} \leq \sum_{j=m(n_k)}^{n_k} \int_{j-1}^{j} \frac{dx}{x} = \int_{m(n_k)-1}^{n_k} \frac{dx}{x} = \log \frac{n_k}{m(n_k)-1}$$

se satisface para todo $k \geq 1$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m(n_k)}^{n_k} \frac{1}{j} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{n_k}{m(n_k)-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Se sigue entonces del teorema de Müntz clásico que el espacio vectorial

$$\mathbf{H}_{\{m(n_k)\}} = \mathbf{span}\{x^h : h \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{m(n_k), ..., n_k\}\}$$

no es denso en $\mathbf{C}[a,b]$. Ahora, tomemos una función $f \in \mathbf{C}[a,b]$ que no sea uniformemente aproximable por polinomios de $\mathbf{H}_{\{m(n_k)\}}$. Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios tal que $p_n \in \mathbf{span}\{x^{m(n)}, ..., x^n\}$ $(n \geq 1)$ y $\lim_{n\to\infty} ||f - p_n||_{[a,b]} = 0$, entonces $p_{n_k} \in \mathbf{H}_{\{m(n_k)\}}$ para todo k, y $\lim_{n\to\infty} ||f - p_{n_k}||_{[a,b]} = 0$, lo que entra en contradicción con nuestras hipótesis sobre la función f. $\square$

Evidentemente, los polinomios $P_n(f)$ y $\widetilde{P}_n(f)$ definidos por (1) y (2), satisfacen las relaciones $P_n(f), \widetilde{P}_n(f) \in \mathbf{span}\{x^{m(n)}, \ldots, x^n\}$. Por tanto, para obtener resultados sobre aproximación uniforme y/o simultánea para dichos polinomios es necesario suponer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = c$ para cierta constante $c < 1$. De hecho, podemos utilizar una ligera variación de los polinomios $P_n(f)$ para demostrar que la condición $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = c < \frac{\min\{|a|,|b|\}}{\max\{|a|,|b|\}}$ es suficiente en todos los casos.

Teorema 2. *Supongamos que $0 < a < b$ y $\limsup \frac{m(n)}{n} = c < \frac{a}{b}$. Entonces toda función $f \in \mathbf{C}[a,b]$ se puede aproximar uniformemente en $[a,b]$ con una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $p_n \in \mathbf{span}\{x^{m(n)}, \ldots, x^n\}$ para todo $n \geq 1$.Además, si $f \in \mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, el mismo resultado se satisface para la aproximación simultánea de f y sus derivadas hasta orden s en el intervalo $[a,b]$. Finalmente, si $a < b < 0$ entonces se tienen resultados análogos si cambiamos $c < \frac{a}{b}$ por $c < \frac{b}{a}$.*

Demostración. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $0 < a < b$ y $c < \frac{a}{b}$. Dada la función $f \in \mathbf{C}[a,b]$, tomamos $\overline{f}$ una extension de f tal que $\overline{f} \in \mathbf{C}[0,b]$ y $\overline{f}_{|[0,(c+\varepsilon)b]} = 0$ para cierto $\varepsilon > 0$ Evidentemente, esto es posible porque $c < a/b$ implica que $cb < a$. Además, si f es de clase $\mathbf{C}^{(s)}$, entonces podemos suponer también que la extensión $\overline{f}$ es de clase $\mathbf{C}^{(s)}$. Se sigue que la sucesión de polinomios de Bernstein de $\overline{f}$,

$$B_n(\overline{f})_{[0,b]} = \sum_{k=0}^{n} \overline{f}(kb/n)\binom{n}{k}\frac{x^k}{b^k}(1-\frac{x}{b})^{n-k},\ n = 1, 2, \ldots$$

converge a $\overline{f}$ (y a sus derivadas de orden $\leq s$, en el caso de que $\overline{f} \in \mathbf{C}^{(s)}[0,b]$) uniformemente en $[0,b]$. Por tanto, se tiene la convergencia (convergencia simultánea, resp.) de $B_n(\overline{f})_{[0,b]}$ a f en $[a,b]$. Ahora bien, como $\limsup \frac{m(n)}{n} = c$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_0$ entonces $\frac{m(n)b}{n} < (c+\varepsilon)b$. Por tanto, fijado $n > n_0$, se tiene que si $k < m(n)$ entonces $kb/n < (c+\varepsilon)b$, y $\overline{f}(kb/n) = 0$. Esto significa que podemos reescribir los polinomios de Bernstein de $\overline{f}$ como

$$B_n(\overline{f})_{[0,b]} = \sum_{k=m(n)}^{n} \overline{f}(kb/n)\binom{n}{k}\frac{x^k}{b^k}(1-\frac{x}{b})^{n-k},\ n > n_0$$

y, por tanto, $B_n(\overline{f})_{[0,b]} \in \mathbf{span}\{x^{m(n)}, \ldots, x^n\}$ para todo $n > n_0$. □

Corolario 3. *Si mantenemos la notación utilizada en la demostración del teorema anterior, y suponemos que $0 < a < b = 1$, $c < a$, $f(1) \in \mathbb{Z}$ entonces la sucesión de polinomios*

$$\widetilde{Q}_n(f) = \sum_{k=m(n)}^{n} \left[\overline{f}(k/n)\binom{n}{k}\right] x^k(1-x)^{n-k} \tag{3}$$

converge uniformemente a la función f en $[a,1]$.

Demostración. Es conocido que si $\overline{f} \in \mathbf{C}_0[0,1] = \{h \in \mathbf{C}[0,1] : h(0), h(1) \in \mathbb{Z}\}$ entonces los polinomios de Bernstein modificados,

$$\widetilde{B}_n\overline{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\overline{f}(k/n)\binom{n}{k}\right] x^k(1-x)^{n-k}$$

(introducidos por Kantorovich en 1931) convergen a $\overline{f}$ uniformemente en $[0,1]$. Ahora bien, la función $\overline{f}$ introducida en la demostración del Teorema 2 satisface la identidad $\widetilde{Q}_n(f) = \widetilde{B}_n\overline{f}$ para todo $n \geq n_0$. Esto concluye la prueba. $\square$

El interés principal de los resultados anteriores radica en el hecho de que permiten demostrar de forma sencilla un resultado tipo Müntz para la aproximación con polinomios de coeficientes enteros (también llamada aproximación diofántica). A saber: Si $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión de números naturales que contiene un conjunto de la forma

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\{m(n_j), m(n_j)+1, \ldots, n_j\}$$

para ciertas sucesiones de números naturales $\{n_j\} \to \infty$ y $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = c < a < 1$, entonces $\mathbb{Z}[x] \cap \mathbf{span}\{x^{k_i}\}_{i=0}^{\infty}$ es denso en $C[a,1]$. Este resultado es un teorema tipo Müntz para aproximación diofántica en $[0,1]$. En realidad, no es el mejor resultado posible, ya que en 1976 Ferguson y Golitscheck [3] demostraron que existe un análogo completo del teorema de Múntz para aproximación con polinomios de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}[0,1]$, si los exponentes se toman en $\mathbb{N}$. Sin embargo, el teorema de Golitschek y Ferguson es muy difícil de probar (en contraposición a los que aparecen en este trabajo).

La desventaja, desde nuestro punto de vista, es que para construir los aproximantes de una función $f \in \mathbf{C}[a,b]$, necesitamos antes construir cierta extensión $\overline{f}$ de f, y esto no nos parece natural. Esta es la razón por la que en esta nota nos interesamos por la convergencia de las sucesiones definidas en (1) y (2). La pregunta natural, que pretendemos resolver, es: Si $f \in \mathbf{C}^{(s)}[0,1]$, ¿En qué subconjuntos de $[0,1]$ podemos garantizar la convergencia simultánea a f y sus derivadas de las sucesiones de polinomios $P_n(f)$ y $\widetilde{P}_n(f)$?

2 Resultados principales

Las demostraciones en esta sección están basadas en las propiedades básicas de las funciones analíticas en dominios del plano complejo, así como el uso de los polinomios de Bernstein y sus propiedades de convergencia. En particular, hacemos uso de que si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente sobre compactos en un abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ a una función f, entonces f es analítica en Ω y la sucesión $\{f_n^{(v)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente sobre compactos de Ω a la función $f^{(v)}$, para todo $v \geq 0$. De hecho, una consecuencia inmediata de este hecho, es el siguiente resultado técnico:

Lema 4. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *una función arbitraria. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|(B_n f)^{(v)} - (\widetilde{B}_n f)^{(v)}\|_K = 0$$

para todo compacto $K \subset \Omega := \{z \in \mathbb{C} : \max\{|z|, |1-z|\} < 1\}$ *y todo número natural* $v \geq 0$.

Demostración. Como $(B_n f)^{(v)}$ y $(\widetilde{B}_n f)$ son funciones enteras, sea quien sea la función $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, el resultado quedará demostrado si probamos que la sucesión $\{(B_n f)^{(v)} - (\widetilde{B}_n f)^{(v)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de Ω. Ahora bien, esto es precisamente lo que se prueba con la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} \left|B_n f(z) - \widetilde{B}_n f(z)\right| &\leq \varphi_n(z) := \sum_{k=0}^{n} |z|^k |1-z|^{n-k} \\ &= \begin{cases} \frac{|z|^{n+1} - |1-z|^{n+1}}{|z| - |1-z|} & \text{si } |z| \neq |1-z| \\ (n+1)|z|^n & \text{si } |z| = |1-z| \end{cases} . \end{aligned}$$

□

Corolario 5. *Si* $f \in \mathbf{C}^{(s)}[0,1]$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|f^{(v)} - (\widetilde{B}_n f)^{(v)}\|_{[a,b]} = 0$$

para todo intervalo $[a,b] \subset (0,1)$ *y todo* $v \in \{0, 1, \ldots, s\}$.

Demostración. Basta tener en cuenta que los polinomios de Bernstein $B_n f$ convergen a f en la norma de $\mathbf{C}^{(s)}[0,1]$, y el Teorema 4. □

Vamos a centrarnos ahora en nuestro problema. Supongamos que hemos fijado la función $f \in \mathbf{C}^{(s)}[0,1]$ y la sucesión de números naturales $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, de modo que $\limsup \frac{m(n)}{n} = c < 1$. Es evidente que el estudio del conjunto de puntos del intervalo $(0,1)$ para los que $P_n(f)^{(v)}$ y $\widetilde{P}_n(f)^{(v)}$ convergen a $f^{(v)}$ para $v \leq s$ es equivalente al estudio del conjunto de puntos de $[0,1]$ donde podemos asegurar que las derivadas $\frac{d^v}{dx^v}(\Delta_n f)(x)$ y $\frac{d^v}{dx^v}(\widetilde{\Delta}_n f)(x)$ de las diferencias

$$\Delta_n f(x) = B_n f - P_n(f) = \sum_{k=0}^{m(n)-1} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

y

$$\widetilde{\Delta}_n f(x) = \widetilde{B}_n f - \widetilde{P}_n(f) = \sum_{k=0}^{m(n)-1} \left[f(k/n) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

convergen a cero para $v \leq s$. Podemos ahora demostrar los resultados principales de esta nota.

Teorema 6. *Supongamos que* $f \in \mathbf{C}^{(s)}[0,1]$ *y* $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *de manera que* $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = c < 1$. *Entonces las sucesiones de polinomios*

$$P_n(f) = \sum_{k=m(n)}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

y

$$\widetilde{P}_n(f) = \sum_{k=m(n)}^{n} \left[f(k/n)\binom{n}{k}\right] x^k (1-x)^{n-k},$$

convergen a f *en la norma de* $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$ *siempre que* $1 - 2^{-1/(1-c)} < a < b < 1$.

Demostración. Sea $a \in (0,1)$ y supongamos que $z \in K_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |1-z| \leq 1-a\}$. Fijemos $c < \alpha < 1$ y sea $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $m(n) < \alpha n$ para todo $n \geq n_0(\alpha)$. Si definimos $M = \|f\|_{[0,1]} + 1$, entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}
\max\{|\Delta_n f(z)|, |\widetilde{\Delta}_n f(z)|\} &\leq M \sum_{k=0}^{m(n)-1} \binom{n}{k} |z|^k (1-a)^{n-k} \\
&\leq M(1-a)^{n-m(n)+1} \sum_{k=0}^{m(n)-1} \binom{n}{k} |z|^k \\
&\leq M(1-a)^{n-m(n)+1}(1+|z|)^n \\
&\leq M(1-a)^{n(1-\alpha)} 2^n \text{ (pues } m(n) < \alpha n)
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0(\alpha)$. Ahora bien, $((1-a)^{(1-\alpha)}2)^n$ converge a cero siempre que $(1-a)^{(1-\alpha)}2 < 1$, lo que equivale a decir que $a > 1 - 2^{-1/(1-\alpha)}$. Si $a > 1 - 2^{-1/(1-c)}$ entonces existe un α lo bastante cerca de c como para que $a > 1 - 2^{-1/(1-\alpha)}$. Esto demuestra que las sucesiones $\{\Delta_n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\widetilde{\Delta}_n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ convergen a cero uniformemente sobre compactos de $\Omega_c = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |1-z| < 2^{-1/(1-c)}\}$. Se sigue, pues, la convergencia a cero de las derivadas de dichas diferencias uniformemente sobre compactos de $(1 - 2^{-1/(1-c)}, 1)$, lo que completa la demostración. □

En realidad, el teorema anterior no permite afirmar nada para intervalos $[a,b]$ con $0 < a \leq 1/2$, pues $1 - 2^{-1/(1-c)} \geq 1/2$ para todo $c \in [0,1]$. Sin embargo, parece razonable pensar que si $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = 0$, entonces será posible la aproximación simultánea cerca del origen de coordenadas. El siguiente resultado proporciona una respuesta parcial a dicho problema.

Teorema 7. *Si* $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)\log_2 n}{n} = c < 1$, *entonces las conclusiones del Teorema* 6 *también se satisfacen en los intervalos* $[a,b]$ *tales que* $1 - 2^{-c} < a < b < 1$. *En particular, si* $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)\log_2 n}{n} = 0$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\|_{\mathbf{C}^{(s)}[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n(f) - f\|_{\mathbf{C}^{(s)}[a,b]} = 0$$

para toda función $f \in \mathbf{C}^{(s)}[0,1]$ *y para todo* $0 < a < b < 1$.

Demostración. podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $1-2^{-c} < a < 1/2$, pues el Teorema 6 garantiza, en el caso que estamos estudiando, la convergencia simultánea sobre compactos de $(1/2, 1)$ (ya que por hipótesis $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = 0$). Así pues, sólo tenemos que demostrar la convergencia simultánea en $[a, 1/2+\varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$. Con este objetivo en mente, definimos $\alpha \in (0,1)$ mediante la identidad $a = 1-2^{-\alpha}$ y tomamos $M = ||f||_{[0,1]} + 1$. Entonces, para todo $z \in K_\alpha^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2^{-\alpha}, |1-z| < 2^{-\alpha}\}$, podemos estimar las diferencias $\Delta_n f(z)$ y $\widetilde{\Delta}_n f(z)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\max\{|\Delta_n f(z)|, |\widetilde{\Delta}_n f(z)|\} &\leq M \sum_{k=0}^{m(n)-1} \binom{n}{k} |z|^k |1-z|^{n-k} \\
&\leq 2^{-\alpha n} M \sum_{k=0}^{m(n)-1} \frac{n^k}{k!} \leq 2^{-\alpha n} n^{m(n)-1} M \sum_{k=0}^{m(n)-1} \frac{1}{k!} \leq 2^{-\alpha n} n^{m(n)-1} M \exp(1) \\
&= n^{-1} \left(2^{-\alpha} n^{m(n)/n}\right)^n M \exp(1) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\limsup \frac{m(n)\log_2 n}{n} = c$, entonces $\frac{m(n)\log_2 n}{n} \leq \alpha$, para todo $n \geq n_0(\alpha)$, para cierto $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$. Se tiene, por tanto, que

$$2^{\frac{m(n)\log_2 n}{n}} = 2^{\log_2 n^{\frac{m(n)}{n}}} = n^{\frac{m(n)}{n}} \leq 2^\alpha$$

para todo $n \geq n_0(\alpha)$, lo que implica que la cota superior que hemos estimado en (4) converge a cero para $n \to \infty$. Esto demuestra que las sucesiones $\{\Delta_n f(z)\}_{n=0}^\infty$ y $\{\widetilde{\Delta}_n f(z)\}_{n=0}^\infty$ convergen a cero uniformemente sobre compactos de $\Omega_c^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2^{-c}, |1-z| < 2^{-c}\}$. Se sigue, pues, la convergencia a cero de las derivadas de dichas diferencias uniformemente sobre compactos de $(1-2^{-c}, 2^{-c})$, lo que completa la demostración, ya que habíamos reducido el problema a estudiar el caso $2^{-c} > 1/2$. □

3 Notas finales y algunos problemas abiertos

Los resultados que se han expuesto en esta nota admiten una generalización obvia para la aproximación con polinomios de varias variables. Más concretamente, si consideramos los operadores de Bernstein en el cubo multidimensional,

$$B_{(n_1,\ldots,n_d)} f(x_1,\ldots,x_d) = \\ = \sum_{i_1,\ldots,i_d=0}^{n_1,\ldots,n_d} f\left(\frac{i_1}{n_1},\ldots,\frac{i_d}{n_d}\right) \prod_{j=1}^d \binom{n_j}{i_j} \prod_{j=1}^d x_j^{i_j}(1-x_j)^{n_j-i_j}$$

y definimos

$$\widetilde{B}_{(n_1,\ldots,n_d)} f(x_1,\ldots,x_d) = \\ = \sum_{i_1,\ldots,i_d=0}^{n_1,\ldots,n_d} \left[f\left(\frac{i_1}{n_1},\ldots,\frac{i_d}{n_d}\right) \prod_{j=1}^d \binom{n_j}{i_j}\right] \prod_{j=1}^d x_j^{i_j}(1-x_j)^{n_j-i_j},$$

entonces es fácil comprobar que

$$\left|B_{(n_1,\ldots,n_d)}f(z_1,\ldots,z_d)-\widetilde{B}_{(n_1,\ldots,n_d)}f(z_1,\ldots,z_d)\right|\leq$$
$$\leq \sum_{i_1,\ldots,i_d=0}^{n_1,\ldots,n_d}\prod_{j=1}^d |z_j|^{i_j}(|1-z_j|^{n_j-i_j}=\prod_{j=1}^d\left(\sum_{i_i=0}^{n_j}|z_j|^{i_j}|1-z_j|^{n_j-i_j}\right)=\prod_{j=1}^d\varphi_{n_j}(z_j)$$

y, por tanto,

$$B_{(n_1,\ldots,n_d)}f(z_1,\ldots,z_d)-\widetilde{B}_{(n_1,\ldots,n_d)}f(z_1,\ldots,z_d)$$

converge uniformemente a cero sobre compactos de Ω^d. Ahora bien, es conocido (ver [4, pag. 12]) que las funciones de varias variables complejas también poseen la propiedad de que si una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ de funciones holomorfas en un abierto W de $\mathbb{C}^d$ converge uniformemente sobre compactos de W a cierta función f, entonces f es holomorfa en W y las derivadas parciales $\left\{\frac{\partial^{v_1+\cdots+v_d}f_n}{\partial z_1^{v_1}\ldots\partial z_d^{v_d}}\right\}_{n=0}^\infty$ convergen a $\frac{\partial^{v_1+\cdots+v_d}f}{\partial z_1^{v_1}\ldots\partial z_d^{v_d}}$ uniformemente sobre compactos de W para todo $v_1,\ldots,v_d\geq 0$. Teniendo esto en cuenta, es ahora fácil definir aproximantes que generalizan a los P_n, $\widetilde{P}_n$ y para los que se satisfacen resultados análogos a los Teoremas 6 y 7 de este trabajo. En particular, se sigue que se pueden demostrar resultados tipo Müntz para la aproximación diofántica simultánea de funciones de varias variables en compactos del cubo unitario d-dimensional abierto, incluso eliminando un conjunto infinito de monomios de $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_d]$.

Terminamos esta nota estableciendo los siguientes problemas abiertos:

- Estudiar si la condición $\limsup_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n}=0$ es suficiente para garantizar que las sucesiones de polinomios definidas en (1) y (2) convergen simultáneamente sobre compactos de $(0,1)$ a funciones $f\in\mathbf{C}^{(s)}[0,1]$.

- Estudiar si los intervalos de convergencia que aparecen en el Teorema 6 son óptimos.

- Estudiar los dos puntos anteriores en el caso de varias variables.

- Analizar otras versiones de los operadores multidimensionales de Bernstein definidas en otros dominios con objeto de extender los resultados conseguidos en este trabajo.

Referencias

[1] J. M. Almira and U. Luther, "A note on simultaneous diophantine approximation", *Applied. Math. E-Notes* **2** (2002) 29-35.

[2] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer (1993).

[3] O. Ferguson and M. V. Golitscheck, "Müntz-Szász Theorem with integral coefficients, II", *Transactions of the AMS* **213** (1975) 115-126.

[4] L. Kaup and B. Kaup, *Holomorphic Functions of Several Variables*, de Gruyter (1983).