ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA

UNA EXCURSION POR LA TEORIA DE FOLIACIONES

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JOSE LUIS VIVIENTE MATEU

EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 12 DE ABRIL DE 1984
Y
DISCURSO DE CONTESTACION POR EL ACADEMICO

Ilmo. Sr. D. JUAN SANCHO DE SAN ROMAN

ZARAGOZA
1984

Excmo. Sr. Presidente

Ilmos. Sres. Académicos

Señoras y Señores:

En el discurrir de nuestra existencia conformada mediante sucesivas experiencias y reflexiones, ciertos principios han permanecido inmutables, nos referimos entre ellos, hoy y aquí, al sentimiento de gratitud y al espíritu de servicio.

Es como zaragozano en el transcurso del 4º centenario de la fundación de nuestra Universidad y con estos sentimientos, que me atrevo a aceptar el honor que supone ser nombrado miembro de esta ilustre Academia. Lejos de toda protocolaria y falsa humildad pero sí abrumado por la responsabilidad que ello supone. Lleno de ilusión y confianza al verificar que personas tan preclaras se hayan fijado en esta mi persona que, con sus múltiples limitaciones, sólo puede ofrecer su fidelidad a sus maestros, su amor y entrega al trabajo y las secuelas de un cierto espíritu quijotesco de la juventud. Pero sabemos que si todo ello nos caracterizó en algún momento es, con nuestro comportamiento y quehacer diario a partir de ahora, como podremos hacernos acreedores a este voto de confianza que todos Vds. han depositado en nuestra persona. Con satisfacción me hallarán siempre dispuesto a colaborar en cuanto esté a nuestro alcance. De nuevo GRACIAS.

Pretendo exponerles en las lineas que siguen las ideas generales, las grandes lineas de los resultados más recientes y aplicaciones más importantes de la denominada "teoría de las foliaciones". El objetivo es así esencialmente informativo pero, como parcela de la matemática hoy en desarrollo, todo lo amena o atrayente que esa información queramos hacerla nos exige su lenguaje y éste, señores, durante los últimos 40 años ha experimentado enormes cambios. Del lenguaje clásico pasó al estructuralista y de él

al de la teoría de las categorías. Precisamente en teoría de foliaciones el formalismo de la teoría de las categorías se introdujo de la mano de su principal artífice el Prof. C. Ehresmann (q.e.p.d.) invadiendo toda su fundamentación y estructuración, lo que si a los estudiosos de aquellos momentos nos exigió un esfuerzo de asimilación, potenció extraordinariamente a la generación siguiente como hoy puede empezarse a comprobar. Nos correspondió vivir los años de eclosión del concepto cuya síntesis y aplicación se empieza ya a efectuar. Dejar patente tal situación es una de las exigencias que nos impusimos cuando decidimos hablarles de él. Así, no hemos dudado en presentar la definición más formal de foliación dada por Ehresmann, aunque otras nociones anejas hayan sido relegadas a una letra pequeña o a mencionar su existencia y persona más caracterizada que la estableció.

La elección del tema entendemos exige un pequeña explicación en cuanto a nuestra razón personal. Si el mismo fué objeto de nuestra atención desde que de él nos habló D. Germán Ancochea (q.e.p.d.) allá por 1957, éste se puede decir que no ocupó más que circunstancialmente nuestro quehacer investigador hasta que hace pocos años nos centramos en él. El periodo en Madrid, pero sobre todo en Paris desde 1960 en el Seminario de Ehresmann en el Instituto Henri Poincaré fué de asimilación de conceptos o bien de adquisición de nuevas técnicas de trabajo en topología algebraica y diferencial, estas especialmente en el Seminario del Prof. H. Cartan en l'Ecole Normale Supérieure de Paris. Pero estamos convencidos de que la formación que durante siete años tuvimos la posibilidad de adquirir en tales Seminarios no hubiera sido posible si, previamente, no hubiéramos tenido la extraordinaria suerte de recibir la formación y confirmación de nuestra incipiente formación matemética, que la rigurosa, luminosa y exigente docencia de la Geometría por D. Pedro Abellanas originaba en todo joven que a él se acercaba con una firme ansia de saber. Esta formación que se inició en Zaragoza en el curso 1946-47, fué reanudada en Madrid al tener la oportunidad de que aceptase

dirigir nuestra tesis doctoral, y ello en un tema que, aunque propio de la Geometría Algebraica, nos acercó a la Topología Algebraica, materia que tan útil habría de sernos más tarde. Nuestro reconocimiento, no por menos expresivo menos sincero y profundo, quiere unirse aquí a la del distinguido y cordial amigo Prof. J. Etayo (*), nuestro predecesor en la cátedra y hoy catedrático en la Universidad Complutense de Madrid, haciendo nuestra la siguiente frase de su reciente discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, de mayor alcance con el que también nos identificamos: *"Me gustaría decirlo -más bellamente y para comperdiarlo todo- con palabras de uno de aquellos discípulos de la primera hora, seguramente, y con cuánta razón, el más querido para él: Juan Sancho Guimerá, catedrático hoy de Salamanca. Para mí siempre admirado y fiel compañero y por encima de todo amigo entrañable y fraternal. Quien mencionaba, en cierta ya lejana ocación, a Don Pedro Abellanas de quien he recibido -escribía- y otros conmigo, el testimonio y la fé de que la ciencia como contemplación es algo que todavía no pertenece al pasado"*.

Ahora bien si nuestra formación inicial fué, sin la menor duda obra de D. Pedro Abellanas, pasando por el ejemplo de laboriosidad y vocación del que fué también nuestro profesor en Zaragoza D. José María Iñiguez Almech,(**) nuestra posterior orientación profesional e investigadora fué en gran parte consecuencia de la elegancia matemática, aguda crítica y habilidad pedagógica con que nos fué llamando la atención D. Germán Ancochea sobre las limitaciones o condicionamientos que presentaba la aplicación del teorema de Frobenius en su forma dual, durante el curso monográfico que desarrolló sobre la obra de E. Cartan *"Les systèmes differentiels exterieures et*

(*) Condiscípulo en aquellos tiempos, junto con los actuales profesores Sancho Guimerá, Arregui, Biarge, etc.

(**) Durante la correción de pruebas de esta publicación, falleció D.José María Iñiguez, que en paz descanse. Sirva esta referencia de humilde homenaje.

leurs applications géometriques". Es casi seguro fruto de aquel curso y del que estuvimos como profesor Adjunto interino de su cátedra, donde se encuentra una razón inicial de nuestro paso de la Geometría Algebraica a la Topología y Geometría Diferenciales. Su prematura desaparición nos ha privado de un gran maestro y de la delicadeza humana de quien supo velar discretamente por que nuestra práctica de un quijotismo -propio de la juventud- intelectual ilusionado, no memoscabara los valores del ideal familiar. Y es que, en efecto, en 1958 marchábamos a Paris becados por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas y Centre National de la Recherche Scientifique para seguir nuestra formación bajo la dirección del Prof. H. Cartan en l'Ecole Normale Supérieure, pero debiendo dejar en España nuestra mujer e hijas. La necesidad de concluir nuestra iniciada tesis nos llevó en principio a frecuentar el Seminario de Geometría Algebraica del Prof. C. Chevalley quien, un día nos ofreció, y ante nuestra ilusionada aceptación, nos propuso para que se nos nombrase Profesor Adjunto de la Universidad de Paris (la actual Paris 7), cargo que ejercimos de octubre de 1959 a 1965 en que nos incorporamos a nuestra cátedra en esta Universidad de Zaragoza. Fué así gracias al Prof. C. Chevalley el que, concluida nuestra tésis, reunida la familia, pudiéramos seguir en París centrándonos en el estudio de la topología algebraica por un lado y en la fundamentación y desarrollo de la teoría de foliaciones por otro. Permítaseme dejar constancia aquí de nuestra profunda gratitud por tan desinteresado y humano proceder.

Fué en el Seminário de C. Ehresmann, con sus consejos, notas

y observaciones, como conseguimos un más asequible conocimiento de la fundamentación de la teoría de foliaciones que en aquellos momentos acababa de gestarse. La orientación que la tésis de Haefliger imprimió a las investigaciones, hizo no obstante que nuestro trabajo desde 1960 se centrase principalmente en el Seminario de H. Cartan, al que debemos no sólo su paciencia y habilidad didáctica ayudándonos en nuestra formación matemática sino el habernos permitido conocer su gran humanidad y sensibilidad, su delicadeza y exigencia, su rigor y poderosa intuición, su elegancia y laboriosidad a través de las múltiples reuniones que nos acordó para aclarar planteamientos u orientarnos en el estudio o solución de éste o aquél otro problema o tema. Son valores a nuestro entender que, por sí y casi sin tener en cuenta su extraordianria e importante obra matemática, le hacen acreedor del reconocido prestigio internacional que disfruta.

Y en esta manifestación de nuestra gratitud a cuantos de un modo u otro, material, afectiva y/o intelectualmente nos ayudaron en nuestra formación, permítanme que dedique un recuerdo a mis padres cuyo amor y entrega a sus hijos corrió pareja con su laboriosidad y honestidad junto a una profunda admiración por la Universidad. Fueron principalmente estos valores los que, en un momento decisivo de mi vida, nos permitieron concurrir a las aulas de nuestra Universidad de Zaragoza . Sin embargo, preciso reconocer que es la identificación de mi esposa con nuestro ideal lo que me permite vivir estos momentos.

En las páginas que siguen se presenta, con los diversos concep
tos de foliación, los nombres de algunos de sus cúltivadores, destacando la obra de Ehresmann. Se precisan algunos de los primeros y esenciales concep-tos: transversalidad, holonomía y estabilidad, para pasar revista a los últimos logros en la teoría cuantitativa, principalmente los relacionados con la obra de Thurston y la incipiente concreción de las ideas de Ehresmann sobre el concepto de estructura transversa en su relación con el espacio de las hojas de una variedad foliada. - La bibliografía lejos de ser exaustiva, espera no obstante ser suficiente. Destacamos desde luego las obras de Ehresmann, Haefliger, Hector, Molinó, Reeb, Reinhart y Thurston y en España las de la escuela creada por Vidal Abascal. Concluimos presentando las, a nuestro juicio, principales direcciones de trabajo futuro en este importante dominio matemático.

U N A E X C U R S I O N

P O R L A

T E O R I A D E F O L I A C I O N E S

por

José L. Viviente

AMS 1980 Mathematical Subjet Classification: Primary 5702/5302/. Secondary 53C12,57R30,57R32,58A17

EL CONCEPTO DE FOLIACION

"Nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensibus"...(*)
..."nisi ipse intellectus" (Leibniz)

Precedentes

Es bien conocido por los especialistas, que los orígenes deben buscarse en la teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales iniciada por Poincaré en 1881 sobre $\mathbb{R}$ y por Painlevé (1895) sobre $\mathbb{C}$ pretendiendo un estudio global, cualitativo, de las trayectorias integrales solución de una ecuación diferencial de 1er grado. De hecho, con la noción de foliación, se pretendió axiomatizar tal teoría geométrica. Sin embargo es preciso recordar que en 1726 Lagrange con sus estudios sobre "pequeñas vibraciones de un sistema dinámico en las proximidades de un estado de equilibrio" puede ya considerarse como un precursor de la teoría en su aspecto local, de modo que realmente puede afirmarse que "su estudio se inició con el de la Mecánica de Newton en el siglo XVII" como recientemente señalaba el Prof. Poenaru.

Si Poincaré trató de determinar cual era la "geometría" o comportamiento y estructura de las curvas integrales de un campo vectorial $\mathcal{C}^\infty$, sobre una superficie $\mathcal{C}^\infty$ o el plano, tanto en sí mismas, como respecto de la variedad ambiente, sentando la mayoría de los conceptos precisos para su

---

(*) Principio de origen aristotélico, admitido por los escolásticos y defendido por Locke, que dice: "nada está en el intelecto que no esté primeramente en los sentidos"... a lo que Leibniz añadió: "a no ser el propio intelecto". (Diccionario de expresiones y frases latinas, V. J.Herrero, Ed. Gredos 1980).

estudio. Fué Birkhoff quien, apoyándose en los trabajos de Poincaré, en 1929 estableció la fundamentación de una teoría topológica de las trayectorias de un sistema dinámico. Como dice Reeb en 1956 "la théorie générale des systémes dinamiques concerne le Chapitre, maintenant classique, de ces etudes que gravitent autour des notions familières suivantes: ensemble invariant, points limites, recurrence, ensemble minimal, stabilité au sens de Poisson, ensemble indecomposable, mouvement central, incomprensibilité, transivité, etc...".

Pero si la teoría central de los sistemas dinámicos topológicos la estructuró Birkhoff, fué preciso esperar a 1949 para encontrar la primera exposición metódica sobre sistemas dinámicos diferenciales con la obra en ruso por Nemyckii y Stepanov, obra en la que se recogen los resultados alcanzados hasta entonces y que fué publicada en inglés por la Universidad de Princeton en 1960. En ella se tienen en cuenta los estudios de Poincaré, Lyapunov, Kneser, Whitney, Denjoy, Andronov y Pontrjagin, Kaplan, etc... particularmente en cuanto a sistemas dinámicos en el plano y las superficies. Por ejemplo, es de destacar que, en 1914, Kneser había ya demostrado que "las únicas superficies compactas que admiten sistemas dinámicos sin singularidades eran las de característica de Euler nula, es decir: el toro, el cilindro, la botella de Klein y la banda de Möbius".

Entre los conceptos fundamentales utilizados para el estudio de los sistemas dinámicos, e introducidos entre 1890 y 1940, destaca también, por sí y por su aplicación posterior al estudio de las foliaciones, el concepto de "estabilidad". Dos son los conceptos principales: el de Liapunov

(1892) y el "estructural" introducido en 1937 por Andronov y Pontrjagin. El primero se refiere a la "estabilidad de un conjunto invariante bajo pequeñas perturbaciones", mientras que el segundo es el concepto de estabilidad asociada a la noción de *conjugación topológica*. Precisamente puede decirse que uno de los fines del estudio cualitativo (o geométrico) de las ecuaciones diferenciales de 1er. orden es el estudio de la estabilidad estructural y en general el de todas las propiedades invariantes por esta "conjugación topológica". Sin embargo resulta curioso observar que uno de los sistemas dinámicos más importantes para la descripción del mundo físico que nos rodea, los hamiltonianos, no son estructuralmente estables. Según Thom (1975) es "la teoría de las catástrofes", es decir, de hecho, la teoría de la bifurcación, la que ofrece un principio de explicación al presentar a los sistemas hamiltonianos en su estudio cualitativo, como *centros organizadores* de las perturbaciones ligadas a la interrogación de los sistemas, así como a las limitaciones de comunicación entre observadores".

Señalemos que si el primer tratamiento metódico de los sistemas diferenciales fué obra de Nemyckii y Stepanov fué preciso esperar a 1967, con la obra de Smale, para que el estudio de los mismos se presentara en el contexto adecuado: la Topología Diferencial. Es en este contexto donde la teoría de los sistemas dinámicos enlaza con la teoría de foliaciones con mutuo enriquecimiento de técnicas y resultados, y que configura hoy uno de los más fecundos campos de investigación.

El primer paso de acercamiento tuvo lugar en 1944 con la introducción del concepto de foliación por Ehresmann y Reeb como primer resultado

del tema de tesis que el primero propuso al segundo en 1942. El momento intelectual era el más adecuado. Justo dos años antes, en 1940, Kaplan resolvía definitivamente el problema de la clasificación de los sistemas dinámicos en el plano $\mathbb{R}^2$, y extendía seguidamente sus resultados a la esfera S^2, considerando sistemas dinámicos admitiendo una o dos singularidades. Así mismo se disponía de numerosos trabajos sobre los sistemas dinámicos sobre la superficie del toro T^2, particularmente los de Denjoy. En la introducción a la tesis de Reeb ésta situación es considerada por que, efectivamente, fueron poderosas intuiciones para abordar el estudio que realizó.

Quizás convenga precisar aquí la incorporación española a tales estudios. Esta tuvo lugar inicialmente hacia 1953 en la Universidad de Santiago de Compostela con la obra del Prof. Vidal Abascal y en la escuela de investigación sobre el tema que supo crear y desarrollar formando en ella la mayoría de los investigadores y directores de investigación sobre el tema hoy existentes en España. Más tarde, hacia 1957, de modo personal e independiente, es en la Universidad Complutense de Madrid donde se comienza a trabajar en este campo de investigación bajo la dirección del Prof. Ancochea a quien debemos nuestra introducción en el tema. Finalmente, en la década de los 70, se incorporan otros estudiosos en las Universidades Central y Autónoma de Barcelona a su consideración directa o como aplicación de otras investigaciones. También en la década de los 70, aunque esta vez de la mano de la escuela de Santiago de Compostela, se aborda la investigación en teoría de foliaciones en las Universidades de Granada, Valencia y La Laguna. En cuanto a la Universidad de Zaragoza, iniciamos las investigaciones sobre teo

ría de foliaciones en el contexto de la teoría de los topos hacia 1974, dominio que después de algunos resultados estructurales debimos abandonar. En 1980 se reiniciaron las investigaciones esta vez centrando la atención en los aspectos cualitativos, que son los que ahora nos ocupan persiguiendo la obtención de invariantes homotópicos propios. También desde 1982 los trabajos de investigación en algunos dominios de la Física Matemática en la Universidad de Zaragoza presentan interesantes aplicaciones o interpretaciones de la teoría de foliaciones.

Pero volvamos al análisis de la evolución del concepto de foliación. Es el propio Reeb, unos años después, en su publicación de 1956 ya citada, quien establece la íntima relación entre la teoría de foliaciones y los sistemas dinámicos con el trabajo titulado *"Sur la théorie générale des systhémes dynamiques"* de modo que, como prueba Ehresmann, las nociones de sistema dinámico generalizado y de foliación topológica localmente simple sin punto límite son equivalentes.

Para Reeb, que desarrolló la primera fundamentación de la teoría y estudió las primeras propiedades en su tesis (1948), construyendo el primer ejemplo de foliación $\mathcal{C}^\infty$ en S^3 que se conoce, y a quien se debe la introducción de los términos *foliación* y *foliada*, en su nota al CRAS de 1947 presentada por E. Cartan, se trata de estudiar o caracterizar las propiedades topológicas del conjunto Q de las variedades integrales de un sistema de Pfaff completamente integrable de un modo análogo a como se venía haciendo con las familias de curvas regulares (Whitney) solución de una ecuación diferencial en $\mathbb{R}^2$, la esfera S^2 y la superficie del toro T^2, considerando y tratando

de extender a dimensión superior, la clasificación que se dió en el plano y superficie a las trayectorias denominándolas *propias*, *densas* (localmente) y *excepcionales*, conceptos recogidos hoy entre las llamadas propiedades cualitativas de las foliaciones.

Es decir, cuando Reeb abordó el tema en 1942, para la dimensión $n \geq 3$, no se disponía de resultado alguno de la sencillez y generalidad de los establecidos por Kneser, Whitney, Denjoy y Kaplan para dimensión $n = 2$. Pero es que, precisamente, es para $n \geq 3$, y con hojas de dimensión al menos 2, donde intervienen las condiciones de integrabilidad de Frobenius y en donde, desde 1944 a nuestros días, se han obtenido los más espectaculares y profundos resultados.

Pero si para $n \geq 3$ Hermann fija el origen de la teoría de foliaciones hacia los años 1920 con los trabajos de E.Cartan en los que, la idea aún no precisada, es patente en su clasificación de los pseudogrupos simples y a propósito de la integración de las ecuaciones diferenciales completamente integrables, para Reeb el actual planteamiento lo fija en 1935 con un problema que, no publicado, asigna lógicamente a H.Hopf, relativo al tema de la existencia de p-campos vectoriales linealmente independientes sobre una variedad y, más concretamente buscando respuesta al siguiente problema: ¿Existe sobre S^3 un 1-campo completamente integrable? problema que, al parecer, conoció en 1942 al consultar un registro-repertorio de problemas abiertos que Ehresmann poseía. Este problema desde luego parece ser fué el que atrajo el interés de Reeb y dió lugar a la nota en el Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris en 1944 por Ehresmann y Reeb y, desde luego es con esta No

ta al CRAS de Paris con la que se inician los actuales estudios en teoría de foliaciones, Nota que fué presentada por E. Cartan.

El concepto de foliación y primeras orientaciones de la teoría

A partir de 1944 se sucedieron toda una serie de notas en el CRAS de París y trabajos por Ehresman y/o Reeb, abordando, por un lado el desarrollo estructural con el planteamiento de los correspondientes problemas cuantitativos (de clasificación y existencia), y por otro los de la determinación de las propiedades topológico-geométricas, en particular los problemas cualitativos que plantea el análisis y caracetrización de la estructura de las hojas, su geometría, cómo son o pueden ser, cómo están relacionadas entre sí y respecto de la variedad foliada.

Si en la Nota de 1944 por Ehresmann y Reeb el concepto se concreta y se dá el ejemplo de foliación $\mathcal{C}^\infty$ de S^3, es necesario llegar a la publicación de la tesis de Reeb para encontrar formalmente introducido el concepto de foliación apoyándose en la definitiva noción de "atlas asociado a un pseudo-grupo de transformaciones locales" ya introducido en la literatura matemática para caracterizar las diferentes estructuras geométricas, en un uso que quizás se deba remontar a Sophus Lie. El correspondiente a la estructura foliada, siguiendo a Ehresmann, Reeb en la pag.29 de la edición de su tesis en 1952 lo establece así:

"Soit V_n une variété à n dimensions et soit A un atlas de V_n, constitué d'une famille de cartes $(f_i, \Omega_i)_{i\in I}$ où les Ω_i sont des ouvertes de V_n, et qui forment un recouvrement de V_n, et où f_i est un homeomorphisme de Ω_i

sur un ouvert de R^n,"...

A deux cartes (f_i, Ω_i) et (f_j, Ω_j) où $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ correspond un changement de coordonnés locales h_{ij} qui est l'homeomorphisme de $f_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $f_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$ défini par la restriction de l'application $f_j \bullet f_i^{-1}$ à l'ouvert $f_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$.

<u>Définition</u>. On dira que l'atlas A jouit de la propriété F_q si chàcun des homeomorphismes h_{ij} jouit de la propriété suivante: (φ_q). Si on designe par $x^r (1<r<n)$ les coordonnées canoniques dans R^r, l'homeomorphisme h_{ij} s'exprime au ovisinage du point $x_0 \in f_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ par n relations $\bar{x}^r = h_{ij}^r(x', \ldots, x^n)$ où les fonctions numeriques h_{ij}^r ne dépendent que des variables $x', \ldots x^{n-q}$ pour $1 < r < n-q$.

Como de costumbre se pasa al atlas completo e introduce (pag. 101) la

<u>Definition</u>. L'estructure définie par l'atlas complet A sera appelée structure d'espace feuilletée de V_n pour la dimension q (*).*

Mediante las cartas define la noción de placa tomando éstas como base de una topología T' (topología hoja), denomina hoja a las componentes conexas de V_n respecto a la topología T', de modo que V_n aparece así como reunión de las hojas que, por tanto, determinan una partición de V_n.

Inicialmente pues el concepto de foliación aparece ligado a la estructura $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, y supone la existencia de una partición de la variedad por subvariedades de igual dimensión. Como en su tesis ya hace notar Reeb, estas subvariedades se pueden obtener también como subvariedades integrales de un sistema diferencial completamente integrable, es decir para un sistema

---

(*) En esta memoria nosotros tomamos q como la codimensión designado p la dimensión.

diferencial o forma de Pfaff que satisfaga el teorema de Frobenius en su enunciado dual, y es con este supuesto como se aborda el tema.

No obstante, pronto Ehresmann introduce una generalización que no hace intervenir estructura diferenciable alguna, que denomina foliación topológica y que la define así: *"Sea M un conjunto provisto de las topologías T y T'. Se dirá que (T,T') define sobre M una foliación topológica o una estructura de espacio foliado topológico si se cumple la siguiente condición:*

Para todo x ∈ M, existe una variedad abierta U' de x relativamente a T' sobre la que T y T' inducen la misma topología.

Es claro que entonces T' (topología de las hojas) es una topología más fina que T, y además se suele suponer T' localmente conexa".

De hecho se puede subordinar a T' una estructura de variedad de clase $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r \leq \infty$, analítica real o compleja según sea la estructura foliada dada.

Siguiendo con la caracterización topológica dada por Ehresmann se denomina hoja de (T,T') toda componente conexa L de M respectivamente a T' provista de la topología traza de la T'. Una hoja se dice regular si T y T' inducen la misma topología sobre L. Las hojas de (T,T') forman una partición de M y la relación de equivalencia correspondiente ρ se denomina relación de equivalencia subyacente a (T,T'). Designa por $M^{\cup} = Q$ el espacio conjunto cociente de M por ρ provisto de la topología cociente de la T. - Es normal que a Q se le diga espacio de las hojas o transverso de (T,T'). Para todo abierto U de E se tiene definido, por restricción de T y T', la noción de foliación inducida que se suele representar por $(T,T')_U$.

Se dice que una *hoja* L de (T,T') es *simple* si todo punto de L posee un sistema fundamental de vecindades U abiertas respecto de T y tales que la aplicación canónica del espacio transverso $U/\rho = U^{\smile}$ de $(T,T')_U$ en el $M/\rho = M^{\smile} = Q$ sea un homeomorfismo sobre un abierto de Q. A tales vecindades se les denomina *abiertos distinguidos* de (T,T'). Si todas las hojas son simples la *foliación* (T,T') se dice *simple y localmente simple* si todo $x \in M$ admite una vecindad U abierta respecto de T tal que $(T,T')_U$ sea simple, a las hojas de tales foliaciones $(T,T')_U$ se les denomina *placas*.

La relación entre el concepto diferencial inicial y el topológico es inmediata. Como hemos dicho el concepto diferencial viene ligado a la verificación del teorema de Frobenius por un campo de p-planos sobre la variedad, ello implica el que por todo punto $x \in M$ pase una subvariedad integral, L_x, u hoja, luego que exista una vecindad abierta U de x, dominio de una carta coordenada con centro en x, $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ llamada *carta coordenada distinguida*, respecto de la que el elemento de subvariedad integral o "placa", $L_x \cap U$, viene dado por las ecuaciones

$$x_{p+1} = a_1,\ x_{p+2} = a_2, \ldots,\ x_n = a_{n-p} \quad \text{con } (a_1, \ldots, a_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}$$

punto fijo de $\mathbb{R}^{n-p}$. Se puede interpretar esta situación como traslado por imagen recíproca sobre U por la carta (U,φ) de la estructura foliada de "*tipo simple conexo*" que sobre $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, q = n-p, proporciona la proyección sobre la segunda componente $pr_2 : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^q$. A las cartas (U,φ) que cumplen esta condición se las denomina *"cartas adaptadas"*. Si se observa que la composición $pr_2 \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ es una submersión, el concepto de "carta distinguida" antes introducido, corresponde trivialmente al caso de una "carta adaptada

con dominio un abierto simple", es decir con dominio U sobre el que la foliación inducida $\mathcal{F}_U$ es simple.

La hoja L_x es la subvariedad integral conexa maximal del campo de p-planos que pasa por x. Es una subvariedad *incrustada* pero en general *no regularmente*, de hecho la topología de la variedad L_x no es necesariamente la inducida por la de M ya que la hoja puede pasar, por una carta distinguida dada, una infinidad de veces y acumularse sobre ella misma, es decir, se dispone sobre M de una 2ª topología T' cuya base está constituida por sub-- conjuntos U' de M de la forma

$$\left\{ x \in U' \;\middle|\; x_{p+1}(x) = \text{const}, \ldots, x_n(x) = \text{const.} \right\}$$

donde las x_i son las n-p = q últimas coordenadas de una carta distinguida y U' un subconjunto de U definido por $U' = U \cap \varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{(a_1,\ldots,a_q)\})$, lo que atribuye a M una estructura de variedad p-dimensional no numerable. Es claro así que en esta topología T' las hojas vienen determinadas por las componentes conexas y que T' es localmente conexa.

Obsérvese que si un punto $x \in M$ pertenece a dos cartas distingui-- das (U,φ) y (V,χ), sobre $\varphi(U \cap V)$ el cambio viene dado por

$$(x,y) \longmapsto (\bar{x},\bar{y}) = (\psi_1(x,y), \psi_2(y))$$

con rang d ψ_2 = q, ya que $\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_j} = 0$ para $i = 1,\ldots,q$, $j = 1,\ldots,p$ donde hemos designado con x_j las p primeras coordenadas y con y_i las q últimas, de modo que el jacobiano del cambio de carta es de la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

con $A \in GL(p,R)$, $C \in GL(q,R)$ y B una pxq matriz, que hace de la noción de foliación un tipo de G-estructura integrable.

La expresión del cambio nos dice que sus elementos pertenecen al pseudo-grupo $\mathcal{G}_n^r$ de los $\mathcal{C}^r$-difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ de la forma expresada. Si el borde de M, ∂M, fuese no vacio los cambios de carta $(x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ deben ser tangentes o transversos al borde. Así mismo la foliación se dice orientable si los cambios de carta son elementos del pseudo-grupo $\mathcal{G}_n^{r+}$ de los $\mathcal{C}^r$-difeomorfismos del tipo citado pero que además conservan una orientación de $\mathbb{R}^n$.

Ehresmann generalizó esta noción sustituyendo $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ por espacios topológicos cualesquiera B y F, con cambio de cartas pertenecientes al pseudo-grupo de automorfismos locales del producto B x F que localmente son de la forma $(x,y) \longmapsto (\varphi_x(y), \psi(y))$ donde φ_x y ψ pertenecen respectivamente a los pseudo-grupos de automorfismos locales de B y F.

Esto nos dice que una foliación puede considerarse como el resultado de dar sobre un conjunto M la estructura definida por un atlas asociado a un pseudo-grupo de transformaciones locales de un espacio auxiliar modelo. Ello permite interpretar sobre la teoría de foliaciones los conceptos de *deformación, clases características,* etc...

Pero la noción de variedad foliada como prueba Ehresmann, es también una generalización natural, de un modo más preciso, una localización de la noción de estructura fibrada. Para toda fibración localmente trivial (E, π, B) la aplicación π es sobreyectiva pero la recíproca no es cierta, de modo que cabe preguntar: Dada una aplicación sobreyectiva $\pi \in \mathcal{C}^r(E,B)$, $r \geq 1$,

entre dos **espacios**, ¿cuándo es una fibración?. Si la aplicación π es también una submersión, entonces si dim B = q, la aplicación π induce sobre E una foliación de codimensión q, en virtud del teorema de funciones implícitas, cuyas hojas son las componentes conexas de $\pi^{-1}(x)$ para $x \in B$. A estas foliaciones se les denomina como hemos visto *simples*.

A esta misma motivación responde la clase de foliaciones tales que la partición de la variedad total M se obtiene mediante las orbitas de la acción sobre M de un determinado grupo de automorfismos de M, cuando la dimensión del grupo de isotropía de todo punto $x \in M$ es independiente del punto.

Ahora bien, si no toda foliación puede expresarse por una submersión, sí que podemos afirmar que "toda foliación localmente es una submersión". En efecto, basta observar que si $(M,\mathcal{F})$ es una foliación, luego determinada por un atlas maximal de cartas distinguidas $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ al componer con la proyección $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ les resultan asociadas las submersiones $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ mientras que al cambio de cartas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, elemento del pseudo-grupo de los difeomorfismos de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ de la forma indicada, le aparece asociado para todo $x \in U_i \cap U_j$ el cambio $\psi_j \cdot \psi_i^{-1}(x) = f_{ji}(x)$ elemento del pseudo-grupo de difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^q$ satisfaciendo:

$$\text{i)} \quad \psi_j(x) = f_{ji}(x) \cdot \psi_i(x) \qquad \forall\, x \in U_i \cap U_j$$

$$\text{ii)}\ f_{ji}(x) = (f_{ij}(x))^{-1} \qquad \text{iii)}\ f_{ki}(x) = f_{kj} \circ f_{ji}(x) \quad \forall\, x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

relaciones que caracterizan la noción de cociclo sobre M y que permite "ensamblar" las submersiones locales ψ_i para definirnos la foliación de codi-

mensión q, $\mathcal{F}$, sobre M, de modo que se puede dar la siguiente Definición:

Una foliación $\mathcal{F}$ de clase $\mathcal{C}^r$, $r>1$, y codimensión q sobre la variedad diferenciable n-dimensional M ($n \geq q$) viene determinada por una familia de $\mathcal{C}^r$-submersiones locales $\{\psi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^q\}_{i \in I}$ satisfaciendo las condiciones:

i) la familia $\{U_i\}_{i \in I}$ constituye un cubrimiento de M.

ii) con todo par $(i,j) \in I \times I$ y cada $x \in U_i \cap U_j$ existe asociado un elemento $f_{ji}^x \in \mathcal{G}_q^r$ ($r \geq 2$) del pseudo-grupo de difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^q$ que cumplen las condiciones:

a) $\psi_i(y) = f_{ji}^y \cdot \psi_j(y)$, $\forall\, y \in U_x$ vecindad de x contenida en $U_i \cap U_j$.

b) $f_{ki}^y = f_{kj}^y \circ f_{ji}^y$ para todo $y \in U_k \cap U_j \cap U_i$.

De este modo la noción de foliación aparece como una generalización de la noción de variedad de clase $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 2$) que resulta ser así como una foliación de dimensión 0. - Ahora bien, para operar más facilmente en los problemas de existencia, con la riqueza de las técnicas de la topología algebraica y tomarla como objeto de la categoría homotópica, conviene expresarla asociando la foliación no a un pseudo-grupo sino a un *grupoide* (*) topológico. Pues si recordamos que un grupoide topológico es un grupoide Γ provisto de una estructura topológica (eventualmente diferenciable con aplicaciones fuente y meta submersiones) respecto a la que, las aplicaciones ley de composición $\Gamma \times_B \Gamma \longrightarrow \Gamma$, y la $\Gamma \longrightarrow \Gamma$ que asocia a una flecha su inversa, son contínuas, vemos que el conjunto Γ_q^r, de los gérmenes de secciones

(*) Un grupoide Γ es una categoría pequeña cuyas flechas son todas inversibles y cuyo conjunto de objetos B está constituido por todas las unidades del grupoide. Si $\alpha, \beta : \Gamma \longrightarrow B \times B$ son las aplicaciones fuente y meta, con $\Gamma \times_B \Gamma$ se designa la totalidad de las flechas componibles.

del pseudo-grupo $\mathcal{G}_q^r$ de los $\mathcal{C}^r$-difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^q$ $(r \geq 2)$, posee una estructura de grupoide topológico, mediante el que la definición de foliación ordinaria dada últimamente se expresa diciendo que:

"Una foliación de primer orden $\mathcal{F}$ de clase $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$ y codimensión q en una variedad diferencial n-dimensional M, $(n \geq q)$, viene determinada al dar:

i) Un atlas de $\mathcal{C}^r$-submersiones $\{f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^q\}$, luego con $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de M, dichas aplicaciones distinguidas.

ii) Un grupoide topológico Γ_q^r de gérmenes de $\mathcal{C}^r$-difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^q$, de modo que para todo par $(i,j) \in I \times I$, la aplicación $f_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow \Gamma_q^r$ que a $x \in U_i$ U_{ji} asocia el elemento $f_{ji}^x \in \Gamma_q^r$ es continua y cumple la condición de cociclo $f_{kj} \circ f_{ji} \circ f_{ik} = 1$ para todo $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Enunciando así la definición de foliación, se aprecia su carácter de particularización de la definición de Γ-estructura de Haefliger, concepto que dió entrada a todas las técnicas de la topología algebraica con los profundos resultados sobre problemas de existencia y clasificación obtenidos en los últimos años.

Tal concepto de Γ-estructura, introducido por Haefliger en 1958 en su tesis, surgió cuando al tratar de abordar el problema que Reeb planteara sobre la existencia de una estructura foliada analítica de codimensión 1 sobre la esfera S^3 (que resolvió Haefliger demostrando que con tales hipótesis no puede existir variedad analítica real compacta cuyo primer grupo de homotopía sea finito), se vió conducido a considerar estructuras foliadas que son imágenes recíprocas por una aplicación contínua de una estructura

dada, es decir precisó un concepto que fuera invariante por "pull-back" respecto a aplicaciones con el tipo de singularidades de una aplicación continua (*). Esta noción, sin embargo, como prueba Ehresmann es un caso particular de la noción de foliación de 2º orden por él introducida que veremos más adelante.

Efectivamente, la noción de Γ-estructura, grosso modo, sigue de la de foliación de primer orden u ordinaria enunciada en la última forma, si sustituimos en el atlas el grupoide topológico $\mathcal{T}_q^r$ por un grupoide topológico arbritrario $\mathcal{T}$ y las submersiones $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ por aplicaciones continuas $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^q$ no submersiones en general. Precisemos: siguiendo a Haefliger se observa que para cada $x \in U_i$, el elemento $x \longmapsto [f_{ii}^x]$ de $\mathcal{T}$ *es el germen de la aplicación identidad en una vecindad de* $f_i(x)$ *en* $\mathbb{R}^q$, de modo que conocemos el valor en x de la aplicación f_i y en consecuencia, la aplicación f_i sobre todo U_i, aplicación que resulta ser así contínua en general.

Entonces dado un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de una variedad M y $\mathcal{T}$ un grupoide topológico (en particular el de los gérmenes de secciones del pseudo-grupo de autotransformaciones locales de un espacio B), se denomina *cociclo de Haefliger, de codimensión q sobre* $\mathcal{U}$ *con valores en* $\mathcal{T}$ *a la correspondencia que asocia a cada par* $(i,j) \in I \times I$ *una aplicación continua* $f_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathcal{T}$ *tal que* $f_{ki}^x = f_{kj} \circ f_{ji}^x$ *para* $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Pero entre los cociclos de Haefliger para igual $\mathcal{T}$, se dispone de

---

(*) Obsérvese no obstante que si la aplicación f: N → M es una submersión, o más generalmente es transversa a una foliación $\mathcal{F}$ dada sobre M, su imágen recíproca por f, $f^*(\mathcal{F})$, sigue siendo una foliación sobre N de igual codimensión. Ello proporciona un modo cómodo de construir foliaciones y facilita gran número de demostraciones.

una *relación de equivalencia respecto al cubrimiento* $\mathcal{U}$ *que se considera sobre* M, de modo que *dos* $\mathcal{C}^r$*-cociclos de Haefliger* ($r \geq 0$) *asociados a los cubrimientos* $\mathcal{U}'$ *y* $\mathcal{U}''$ *se dicen equivalentes si se prolongan a un* $\mathcal{C}^r$*-cociclo sobre el cubrimiento unión disjunta* $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$, y en definitiva se tiene la definición:

"Una estructura de Haefliger o Γ*-estructura sobre* M *es una clase de equivalencia de cociclos de Haefliger".*

La totalidad de Γ-estructuras sobre M se designa con la notación $H^1(M;\Gamma)$, en analogía con la notación utilizada para designar la totalidad de las clases de G-fibraciones isomorfas sobre M que resulta si se toma, $\Gamma = G$, el grupo estructural.

Introducida esta noción, Haefliger procede en su tesis a extender a la misma los resultados de la tesis de Reeb y los de Ehresmann-Shih Weissu en su nota al CRAS de Paris en 1956. Por ejemplo las foliaciones de Lie definidos por R. Hermann y estudiados por Fedida corresponden al caso en que Γ es el grupoide de los gérmenes de las traslaciones a la izquierda de un grupo de Lie.

Simultáneamente Reinhart en 1958, reobtiene también los teoremas de estabilidad de Reeb sin necesidad de la hipótesis de compacidad de la variedad total aunque imponiendo la existencia de una métrica de Riemann localmente semejante a la de una fibración (fibre-like metrics), interpretación en foliaciones del hecho de que en una variedad de Riemann el grupo de holonomía de la correspondiente conexión sea reducible, lo que equivale, como es sabido, a que todo punto de la variedad admita una base de abiertos

cada uno de los cuales es producto de dos espacios en el sentido de la estructura riemanniana inducida, concepto que junto a englobar un gran número de foliaciones le permite definir ciertos tipos de grupos de cohomología, cohomología básica, de formas diferenciales sobre el espacio transverso $Q = M/\mathcal{F}$ de la foliación generalizando la cohomología real del espacio base de una fibración.

Una rápida ojeada a los trabajos publicados desde 1944 a nuestros días, nos permite distinguir tres periodos distintos asociados a la incorporación de nuevas técnicas de trabajo o al predominio de determinados modos de abordar el estudio de la teoría de las foliaciones. El 1º cubre la época que podríamos denominar de "fundamentación y estructuración", época en la que predominan las técnicas topológicas y geométricas diferenciales; el 2º periodo iniciado hacia 1960 aparece marcado por la plena incorporación de la topología algebraica incluidas las teorías del cobordismo y la cirugía de variedades, (Boot, Haefliger, Kamber , Tondeur y Thurston); mientras que el tercero o actual iniciado hacia 1970, quizás marcado por la genial obra de Thurston, conoce también interesantes resultados en los aspectos cualitativos en las obras de Conlon, Hector, Lamoureux, Roussarie, etc., para, a partir de 1975 registrar así mismo un fuerte desarrollo de los estudios de la estructura transversa buscando su completa caracterización categorial y geométrica (Barre, Molinó, Bouma + Van Est y Pradines + Wuafo Kanga). En este periodo la atención también se centra en el estudio de las formas con singularidades, es decir el problema general de la integrabilidad completa y relación con la noción de clase (Martinet, Moussu, Lutz, Turiel, Varela, etc.),

o bien en aquel de las formas holomorfas en el campo complejo (Malgrange, Mattei, Moussu, Cordero, Girbau + Nicolau, Montesinos... etc.). Es de señalar que, también en este último periodo, se están obteniendo nuevas e interesantes aplicaciones de la teoría de foliaciones al estudio y solución de determinados problemas de la física teórica y la físico-química, así como de la estructura transversa al estudio de las C^*-algebras.

El trabajo de investigación por nosotros desarrollado, si se excluye la dirección de la tesis del Dr. Vidal Costa situada a caballo entre las técnicas geométrico-diferenciales y topológico-algebraicas, desde nuestra incorporación a los seminarios de H. Cartan y C. Ehresmann se sitúa principalmente en el dominio de las técnicas de la topología algebraica (propias publicaciones y dirección de tesis de los Dres. Saenz, Lozano, Dominguez, Hernandez), llegando incluso a pretender abordar el tema a través de la teoría de topos y el álgebra universal con la tesis del Dr. Sols y los trabajos en el Seminario de la Cátedra de Geometría 5º (Diferencial) por el Dr. Meseguer, aproximación al tema que en este orden de ideas ha sido conseguido finalmente en 1980 por G.M. Kelly. Es en el momento actual, y en colaboración con los Profs. Dominguez y Hernandez, que hemos abordado el estudio cualitativo, apoyándonos en recientes caracterizaciones del concepto de final y cohomología infinita por ellos introducida.

La obra de C. Ehresmann

Ya hemos visto esquemáticamente algunas de las aportaciones de tres de los más destacados investigadores de la primera época, Reeb, Haefli-

gër y Reinhart, pero todas ellas quedan encuadradas en la monumental y pro-
motora obra de C. Ehresmann, a quien se deben los conceptos más fundamenta-
les de la teoría de foliaciones. De Ehresmann resulta dificil destacar unos
trabajos de otros pues todos ellos son de esencial importancia sin qué su
obra haya sido aún agotada como profeta que fué adelantándose a su tiempo
en más de 40 años, pese a la rapidez con que discurre la investigación hoy
día. Así, lo que destaquemos y presentamos mide más bien la limitación nues-
tra para comprender el alcance estructural de su obra. En primer lugar apa-
rece la nota al CRAS de Paris en 1944 con Reeb, pero son quizás las conferen
cias dadas en el Congreso de Roma en 1950 lo que puede darnos un primer co-
nocimiento de su obra hasta entonces. En ellas, después de bien precisar la
noción de estructura local y ordenada, presenta la noción de "foliaciones
de orden superior", que introdujo recurrentemente estableciendo la defini-
ción de las de 2º orden del modo siguiente:

"Dada una $\mathscr{C}^r$-variedad $(r \geq 1)$, M_n, considera la $\mathscr{C}^{r-1}$-variedad M'_n de los p-planos de M_n, variedad fibrada sobre M_n, $\pi : M'_n \longrightarrow M_n$ tal que $\pi^{-1}(x) \cong G_{n,p}(\mathbb{R})$, para todo $x \in M_n$, es la grasmaniana de los p-planos de $\mathbb{R}^n$. Si $r \geq 2$ se puede considerar a su vez la variedad fibrada $(M'_n)'$ de los p-planos de M'_n. Puesto que π es diferenciable, si $r \geq 2$,

$$\pi_* : TM'_n \longrightarrow TM_n$$

aplica un plano de M'_n en un p-plano de M_n, y dice que un p-plano $X' \subset TM'_n$ *prolonga* un p-plano $X \in TM_n$ si $\pi_*(X') = X$. - El conjunto de los p-planos de M'_n prolongación de los de M_n es una subvariedad de $(M'_n)'$. Si (M_p, f) es una $\mathscr{C}^2$-variedad incrustada en M_n, la prolongación de f, aplica $T_x M_p$ en

$f_*(T_x M_p) = X \subset M'_n$ con origen en f(x) que denomina p-plano tangente en x a la variedad incrustada: La aplicación $g : x \longmapsto X$ que así determina es diferenciable e incrusta M_p en M'_p, y dice que la variedad incrustada (M_p, g) *es una prolongación* de (M_p, f). El p-plano X' tangente a (M_p, g) en x ($X' \in (M'_n)'$, $X' \in g_*(T_x M_p) \subset T_x M'_n$) *prolonga* X y se llama *p-plano de 2º orden* tangente a la variedad incrustada (M_p, f) en x. El conjunto de los p-planos de 2º orden de M_n es una variedad $M''_n \subset (M'_n)'$ que le permite definir la noción de "campo de p-planos de 2º orden" como una función continua que hace corresponder a todo $X \in M'_n$ un p-plano de 2º orden que prolonga X. - Precisado este concepto y en analogía con la noción de foliación ordinaria o de primer orden, define la noción de foliación de 2º orden sobre una $\mathcal{C}^2$-variedad M_n como el hecho de dar sobre M un campo completamente integrable Φ' de p-planos de 2º orden. En aquella fecha conocía Ehresmann que en el caso $\mathcal{C}^3$ existe siempre una foliación de 2º orden cuyas hojas son uni-dimensionales, pero no sabía si admitía o no una cuyas hojas fueran de dimensión $p > 1$.

Podríamos citar así mismo las conferencias en Princeton en 1953, Buenos Aires 1959/60 y en Montreal en 1961 en el 5º Congreso de Matemáticas del Canadá, pero la que marca un hito especial en su obra sobre la teoría de las foliaciones es la nota al CRAS de Paris nº 243 en 1956, en colaboración con Shih Weishu, en la que generaliza la noción de estabilidad de Reeb, se introduce la noción de foliación localmente simple, precisa la de espacio transverso e introduce la fundamental noción de grupo de holonomía de una foliación, generalización de la noción de holonomía para un espacio fibrado provisto de una conexión integrable que introdujo el propio Ehresmann en

1950 en el Coloquio de Topología de Bruselas, grupo de holonomía de una foliación que proporciona casi toda la información hoy conocida sobre la vecindad de una hoja y que hace decir a G. Hector y U. Hirsch en su reciente libro sobre foliaciones (1981), pag. 182: *"su introducción por Ehresmann puede ser entendida en algún modo como el comienzo de la teoría de foliaciones como un campo de investigación distinto"*.

También merece ser destacado en este mismo orden de ideas el crucial artículo: "Gatungen von localen struckturen" en 1957, sentando las bases en el lenguaje de la teoría de categorías del concepto de "especies de estructura local" entre las que se encuentra la noción de foliación. Es en efecto en este trabajo donde se introduce la noción de estructura producto local, como un paso hacia la definición categorial de las nociones de foliación y fibración, es decir para, a partir de esta noción de estructura local, poder dar, en el contexto de la teoría de categorías, una axiomatización de las estructuras locales sobre espacios topológicos entendiendo por tales las estructuras topológicas (*) entre las que, como hemos visto, ca-

---

(*) Recordemos que una estructura topológica es la estructura local que sobre un conjunto E está definida al dar un conjunto O de partes de E verificando los siguientes axiomas:

O_1 - La reunión de una familia cualquiera de conjuntos pertenecientes a O pertenece también a O.

O_2 - La intersección de una familia finita de conjuntos pertenecientes a O pertenecen también a O.

Así si $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto de las partes de E, el conjunto O es una parte de $\mathcal{P}(E)$, es decir un elemento $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ que podemos llamar, con Ehresmann, elemento estructural definiendo la topología. Las propiedades O_1 y O_2 definían una parte Ω de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ conjunto de los elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ que poseen estas propiedades. Todo elemento $\mathcal{T}$ de Ω define una topología sobre E; el conjunto Ω define la especie de las estructuras topológicas sobre un conjunto cualquiera. La ley de formación de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ a partir de E y además las dos propiedades O_1 y O_2 son llamados los axiomas de las especies de estructura topológica. Vemos así que, de un modo general, una especie de estructura matemática está determinada al dar:

1º. Una ley de formación de un conjunto M a partir de un conjunto cualquiera E y de un cierto número de conjuntos auxiliares $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Esta ley de formación indica una sucesión de operaciones del tipo siguiente:

a) formación del conjunto de las partes de un conjunto especificado.

racterizó Ehresmann la noción de foliación.

En resumen se puede decir que caracteriza la estructura local de una foliación por el hecho de: Asociar a una especie de estructura $E_\bullet$ las especies de estructuras que son localmente isomorfas, definidas por atlas compatibles con el pseudogrupo $\mathfrak{E}$ de isomorfismos de E.

Concretemos especificando la idea en el caso que nos ocupa, es decir con la noción de foliación topológica introducida al principio de esta memoria. Siguiendo a Ehresmann la especie de estructura foliada queda caracterizada así:

Sea M un *conjunto provisto de una topología T*. La clase de los subespacios (A, T_A), donde T_A es la topología inducido por T sobre el subconjunto A, forma una especie de estructuras locales sobre los subconjuntos de M por la relación: $(A',T_{A'}) \prec (A, T_A)$ si, y sólo si, A' es abierto para T_A y la proyección p: $(A,T_A) \longrightarrow (A',T_{A'})$. Designando esta especie de estructuras por $\langle \mathfrak{B}(M), p, \mathfrak{G} \rangle$. Esta a su vez puede ser completada con una especie de estructuras $\bar{\mathfrak{G}}$ cuyos elementos son las clases completas de C de $\mathfrak{G}$ relativamente a p, es decir las subclases de $\mathfrak{G}$ saturadas por inducción y agregación y tales que, para todo (A, T_A), $(A',T_{A'}) \in C \times C$, $A \cap A'$ sea un abierto relativamente a T_A y $T_{A'}$. $\bar{\mathfrak{G}}$ es una especie de estructura local sobre $\mathfrak{B}(M)$ para la proyección $\bar{p}$: $C \longrightarrow \bigcup_{s \in C} p(s)$ demostrando Ehresmann en particular la

---

b) formación del producto de dos conjuntos ya obtenidos.

2º. Un sistema de axiomas imponiendo condiciones a los elementos de M, es decir determinando una parte de W en M.

La ley de formación dada define un tipo de estructuras; todo elemento de M define una estructura de este tipo sobre E. El conjunto W constituye una especie de estructuras matemáticas sobre E. Todo elemento V de W será una estructura de esta especie sobre E.

Por ejemplo: La clase de foliaciones topológicas sobre los conjuntos, provista de la relación de orden $(T_1,T_1') \prec (T,T')$ si, y sólo si, (T_1,T_1') es una foliación inducida por (T,T') es una especie de estructuras locales sobre los conjuntos.

proposición: *"Dar una foliación topologica* (T,T') *sobre M equivale a dar un elemento* C de $\bar{G}$ tal que $\vec{p}$ (C) = M''.

Precisada la noción de partición local a la que se asocia una foliación, Ehresmann prueba que los sistemas dinámicos generalizados de Reeb corresponden a una clase particular de particiones locales precisamente como, ya hemos indicado antes, demuestra que *"para que una partición local sea un sistema dinámico generalizado, es necesario y suficiente que la foliación asociada sea localmente simple".*

Particularizando las ideas presentadas en el trabajo "Gatungen..." Ehresmann considera: los pseudogrupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ de transformaciones de los espacios numéricos $\mathbb{R}^q$ y $\mathbb{R}^p$ respectivamente, con topologías —— subyacentes $\tau(\mathcal{G})$ y $\tau(\mathcal{G}')$ y los homeomorfismos $h : U'xU \longrightarrow U'xU$ de la forma $(x,y) \longmapsto (\psi'_x(y), \psi(y))$ donde U' es la fuente de $\psi'_x \in \mathcal{G}'$ para todo $x \in U'$ y U es la fuente de $\psi \in \mathcal{G}'$, tal que además h(U'xU) sea abierto para la topología producto $\tau(\mathcal{G}')x\tau(\mathcal{G})$. El conjunto de los homeomorfismos h es la base del pseudogrupo de transformaciones $\mathcal{G}'\#\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^p x\mathbb{R}^q$. Entonces si $\mathcal{A}$ es un atlas maximal de $\mathbb{R}^p x\mathbb{R}^q$ sobre un conjunto M compatible con el pseudogrupo $\mathcal{G}'\#\mathcal{G}$ se dice que $\mathcal{A}$ *define sobre M una estructura foliada de la especie* $\mathcal{G}'\#\mathcal{G}$ *ampliada*, es decir, obtenida por ampliación completa de $\mathcal{G}'\#\mathcal{G}$ sobre el pseudgrupo $\mathfrak{E}$ de las aplicaciones biunívocas de un conjunto sobre un conjunto. En particular si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son los pseudogrupos de todos los automorfismos locales de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ repsectivamente, una estructura foliada de la especie $\mathcal{G}'\#\mathcal{G}$ ampliada se denomina *estructura de variedad foliada.* Se verifica que *"si M*

es una variedad foliada tal que la foliación topológica subyacente sea simple, el espacio transverso $Q = M/\mathcal{F}$ es una variedad no separada".

Finalizaremos esta breve exposición sobre el concepto de foliación señalando que en el estudio de la teoría de foliaciones, junto a la distinción entre el caso compacto y el no compacto, cerrado del abierto, real de complejo; topológico, diferenciable y analítico con las diversas combinaciones compatibles de todas ellas, es también importante la diferencia entre foliaciones de codimensión $q > 1$ y aquellas de codimensión 1, de todo lo cual presentó una breve y clara visión Lawson en 1974 en el nº 3 del Bull. de la Am. Math. Soc. o bien en la puesta a punto realizada por Fucks en 1980 publicada en el Akad. Nauk. SSSR en 1981, sin olvidar el importante capítulo de las foliaciones con singularidades, hoy centro de interesantes investigaciones. El estudio de las foliaciones de codimensión 1, está hoy lo suficientemente elaborado para que se pretenda el desarrollo de una teoría de las foliaciones extendiendo a ellas todos los métodos de estudio de los sistemas dinámicos topológicos e interpretación geométrica de los correspondientes resultados. Según Nemytkii ello evidencia una vez más la importancia e interés que presenta el estudio y caracterización de las foliaciones mediante invariantes topológicos. Es parcialmente en este orden de ideas en el que, como hemos dicho, se centra nuestro actual programa de investigación con la colaboración de los Profesores Dres. Dominguez y Hernandez.

Destaquemos también que la mayor cantidad de resultados conocidos se tiene en el caso $\mathcal{C}^\infty$, sobre variedades paracompactas sin borde (no necesariamente compactas) y foliaciones $\mathcal{C}^\infty$ sobre ellas, no obstante recientes

estudios de Thurston demuestran que el carácter $\subset_{\mathbb{R}}$ es una restricción no precisa para el tratamiento de las foliaciones.

TRANSVERSALIDAD, HOLONOMIA Y ESTABILIDAD

Fijado el concepto de foliación y su evolución, antes de abordar los problemas de existencia y clasificación presentaremos algunas construcciones útiles para el estudio de las foliaciones así como la descripción de los conceptos de estabilidad, transversalidad y holonomía, noción ésta última que, como afirman Hector y Hirsch en su reciente libro, "su introducción puede ser entendida en algún modo como el comienzo de la teoría de foliaciones como un campo de investigación distinto", como ya hemos indicado.

Transversalidad y construcción de foliaciones

La noción de transversalidad, junto a permitir construir ejemplos de foliaciones a partir de otras conocidas es uno de los más poderosos medios en el estudio homológico del problema de clasificación de foliaciones. Dada una variedad foliada $(M, \mathcal{F})$, una subvariedad S de M se dice transversa a $\mathcal{F}$ o que $\mathcal{F}$ es transversa a S, *si en cada uno de los puntos x de S el espacio tangente es complementario en el espacio tangente a M en x del subespacio tangente a la hoja L que pasa por el punto x*. De hecho el concepto se introduce mejor para una aplicación entre dos variedades diferenciables N y M tal que en una de ellas se tiene definida una foliación $\mathcal{F}$, del modo siguiente: "se dice que $g \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ corta transversalmente a $\mathcal{F}$" lo que se indica con la notación $g \pitchfork \mathcal{F}$, si para todo $x \in N$ y la hoja L de $\mathcal{F}$ que pasa por $g(x)$ se tiene que

$$T_{g(x)}(L) + T_x(g)(T_xN) = T_{g(x)}M$$

En este caso, si la foliación $\mathcal{F}$ se dá mediante un atlas distinguido $\{(U_i, \varphi_i, f_{ji})\}_{i,j \in I}$ una caracterización a veces más práctica se obtiene al observar que la aplicación g es transversa a $\mathcal{F}$, si el rango de las aplicaciones $d(\varphi_i \circ g)$ es igual a la codimensión de $\mathcal{F}$.

Es claro entonces que si (U_i, φ_i) es una carta distinguida para $\mathcal{F}$ en M, $(g^{-1}(U_i), \varphi_i \circ g)$ es carta distinguida para una foliación $\bar{\mathcal{F}} = g^*\mathcal{F}$ definida en N, de igual dimensión que la $\mathcal{F}$, que se le dice imagen recíproca de la $\mathcal{F}$ por la aplicación g.

Un caso particular lo proporciona aquel en que g es la aplicación canónica $\pi: E \longrightarrow M$ de una fibración, si $\mathcal{F}$ es una foliación sobre M, es $\pi \pitchfork \mathcal{F}$ trivialmente, por lo que $\pi^* \mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$ es una foliación sobre E de igual codimensión que la $\mathcal{F}$. Si la foliación $\mathcal{F}$ de M es la trivial "por puntos", la $\bar{\mathcal{F}}$ que se obtiene es una foliación del tipo simple conexo como las asociadas a una submersión. A veces es conveniente suponer una variedad provista de dos foliaciones una transversa a la otra, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\pitchfork}$ lo que significa que cada hoja de la foliación $\mathcal{F}^{\pitchfork}$ es transversa a la foliación $\mathcal{F}$ (y recíprocamente).

Esta noción de transversalidad se generaliza como sigue: sean $(N, \bar{\mathcal{F}})$ y $(M, \mathcal{F})$ dos variedades foliadas, con toda aplicación $g \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ consideremos la aplicación fibrada compuesta entre el subfibrado tangente $\tau(\bar{\mathcal{F}})$ asociado a la foliación $\bar{\mathcal{F}}$ y el fibrado normal $\nu(\mathcal{F}) = {}^{TM}/\tau(\mathcal{F})$

$$\tau(\mathcal{F}) \longrightarrow TN \longrightarrow TM \longrightarrow TM/\tau(\mathcal{F})$$

que designaremos τg. Se dice que *"g es tranversal respecto a las foliaciones $\bar{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{F}$ si el homomorfismo τg es inyectivo"*. De hecho la definición

es válida aunque se establezca entre variedades provistas de distribuciones no involutivas. Gromov con ella precisa y generaliza resultados de Smale y Hirsch sobre caracterización del espacio $i(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ de las aplicaciones $g \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ transversales respecto a $\bar{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{F}$.

Otro concepto relacionado con la *transversalidad* es el de la *orientabilidad*. Una foliación $\mathcal{F}$ es *orientable si en la clase de atlas que define su estructura a partir de la de un pseudogrupo existe un subatlas* $\{(U_i, \varphi_i)_{i\in I}\}$ *tal que los cambios de cartas asociados preserven la orientación*, mientras que se dice *transversalmente orientable si en la clase de atlas de cartas distinguidas que definen su estructura los cambio de cartas asociados preservan la orientación*. Obsérvese:

1º que estos conceptos son consistentes sea o no orientable la variedad M sobre la que se halla definida la foliación.

2º que la definición de foliación transversalmente orientable equivale a que la fibración normal $\nu(\mathcal{F})$ a $\mathcal{F}$ en M sea orientable.

Desde luego si la foliación $\mathcal{F}$ no fuera orientable la foliación $\mathcal{F}^*$, imágen recíproca por una aplicación de recubrimiento de dos hojas de M, sí que es orientable, de modo que se puede siempre suponer que la foliación es orientable. Se puede demostrar por ejemplo que si el primer número de Betti racional de una variedad M a base numerable, es finito, para toda foliación $\mathcal{F}$ de codimensión 1 y orientable por todo punto $x \in$ M pasa una curva transversal a $\mathcal{F}$ que corta cada hoja cerrada en un punto a lo sumo.

Un caso especial de foliaciones transversas a subvariedades de una variedad dada, de gran utilidad en múltiplies ocasiones; es el denominado

precisamente "foliación transversa a una fibración" que describimos a continuación: Sean F y B dos variedades de clase $\mathcal{C}^\infty$, con F conexa y compacta de dimensión q y B de dimensión p. Sea $\tilde{B}$ el espacio recubridor universal del B con $\pi_1(B)$ el grupo fundamental de B y $\varphi : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(F)$ una representación de $\pi_1(B)$ en el grupo de los difeomorfismos de F. Consideremos la variedad diferenciable producto $\tilde{B} \times F$ y la acción natural sobre ella del grupo $\pi_1(B)$(por la derecha sobre B y mediante la representación φ por la izquierda sobre F). Trivialmente es una acción libre y propiamente discontinua. Designemos mediante M la variedad cociente $\tilde{B} \times_{\pi_1(B)} F$ de $\tilde{B} \times F$ por la relación de equivalencia definida por la acción de $\pi_1(B)$. - M es así una variedad p+q dimensional, fibrada sobre B, con fibra F y grupo estructural $\pi_1(B)$. Pero además se tiene que la estructura foliada simple $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre $\tilde{B} \times F$, de hojas $\tilde{L}_x = \tilde{B} \times \{x\}, \forall x \in F$, definida por la proyección de $\tilde{B} \times F$ sobre F, es estable por la acción de $\pi_1(B)$, de modo que pasa al cociente y determina una estructura foliada $\mathcal{F}$ sobre M de codimensión q. Esta foliación resulta así transversa a las hojas de la foliación $\pi: M \to B$, aplicación que, en su restricción a las hojas de la foliación es de recubrimiento de B. Uno de los más sencillos ejemplos no trivial de este tipo de foliaciones nos lo facilita el tomar como B la botella de Klein y como F la circunferencia S^1, en este caso las hojas son cilindros o bandas de Moebius totalmente densas. Como indica Haefliger *"el estudio de estas foliaciones cociente se reduce esencialmente al estudio de las representaciones del grupo fundamental de B en el grupo de los difeomorfismos de F. La hoja L_x corresponde así a la órbita del punto x de F según el grupo $\varphi(\pi_1(B))$".*

Esto nos lleva a considerar otro importante ejemplo de foliaciones: las obtenidas por la *acción de un grupo* G sobre una variedad M. Si la dimensión del grupo de isotropía de los puntos de M es la misma entonces las órbitas de G determinan una foliación de M. En este caso Pasternach ha dado caracterizaciones más restrictivas del criterio de integrabilidad de Bott al considerar la acción por isometrías de grupos de Lie compactos sobre variedades riemannianas M. Las foliaciones determinadas sobre M por estas acciones son las llamadas foliaciones con métrica casi-fibrada introducidas por Reinhart que generalizó Molinó quien las clasificó recientemente hasta la codimensión 3, como veremos. Otro caso particular de foliaciones determinadas por la acción de un grupo se tiene con las clases del mismo respecto a uno cualquiera de sus subgrupos. Señalemos que la condición de que la dimensión del grupo de isotropía sea constante es esencial para tener foliación, cuando ésta condición no se satisface se obtiene un tipo de estratificación de M, concepto mucho más amplio que el de partición definida por una foliación.

Otros modos de construir foliaciones son las determinadas sobre una variedad producto N x M a partir de una dada sobre la variedad M, satisfechas ciertas condiciones por la variedad N. - Ejemplos particulares de esta situación nos los facilitan las foliaciones de Anosov del espacio tangente del plano hiperbólico de Poincaré, la de Reeb de S^3 mediante descomposición de S^3 en dos toros macizos $D^2 \times S^1$ y $S^1 \times D^2$ "pegados" por su borde "única hoja compacta" intercambiando meridianos y paralelos, o las de Reinhart, si bien estas últimas pueden también obtenerse mediante el procedimiento de "ensamblaje de foliaciones" de codimensión 1. Este procedimiento se

aplica cuando se dispone de dos variedades diferenciables o analíticas N y M de borde no vacío de igual dimensión entre los que se puede definir un difeomorfismo $h : \partial N \longrightarrow \partial M$ mediante el que se pueda definir la variedad $W = N +_h M$ ensamblaje de ambas. Dadas sendas foliaciones de codimensión 1, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ en N y M respectivamente, existe una foliación $\bar{\mathcal{F}}$ de codimensión 1 sobre W cuya traza sobre N y M coincide con las de estas: $\bar{\mathcal{F}}|_N = \mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{F}}|_M = \mathcal{F}'$.

Señalemos no obstante, que para el caso de *codimensión* 1 Thurston dió en 1975 un *procedimiento local general* de construcción de una correspondiente foliación quedando así resuelto el problema de existencia de foliaciones en este caso, ya que de hecho lo que hizo es caracterizar las variedades que admiten una foliación de codimensión 1. De todos modos son foliaciones cuya descripción es extraordinariamente complicada.

El problema propuesto por Haefliger en 1962, sobre cuáles eran las **variedades** compactas de dimensión 3 que pueden ser foliadas por superficies quedó así totalmente resuelto.

Hasta el trabajo de Thurston los procedimientos para construir foliaciones eran globales como ya indicamos, o bien el inspirado en técnicas de los sistemas dinámicos como el denominado de "turbillonización" ya utilizado por Reeb en su tesis; método que en esencia consiste en distinguir un "tubo" en el interior de una variedad foliada perturbando la foliación en el interior del mismo y no en el exterior. Así por ejemplo Moussu demuestra que toda foliación casi sin holonomía de S^3 que no posee más que una sóla hoja compacta se obtiene por turbillonización de una fibración sobre S' del espacio complementario de un nudo de tipo finito. Otro modo de construir fo-

liaciones se apoya en las denominadas estructuras "spinables" introducido por Tamura y Winkelnkemper, generalizando a foliaciones la fibración de Milnor.

Una variedad compacta se dice que tiene una estructura "spinable" si existe una subvariedad de codimensión dos, llamada un eje, con fibrado normal trivial, tal que el complemento de la vecindad tubular del eje es el espacio total de una fibración sobre la circunferencia con una cierta condición de compatibilidad sobre el borde.

Holonomía

La noción de holonomía en el contexto que nos ocupa es un concepto cuyo origen se puede fijar en 1926 con la obra de E. Cartan al estudiar los "espacios generalizados" aunque también deba considerarse su importante intervención en el estudio de los sistemas dinámicos. Ambos hechos entendemos deben ser considerados como antecedentes de la noción de la holonomía en teoría de foliaciones, y su introducción precisa en el estudio de las mismas hay que buscarla en la relación existente entre la noción de espacio fibrado con grupo estructural discreto y la noción de conexión generalizada integrable introducida por Ehresmann (Coloquio de Topología de Bruselas en 1950). Señalemos que para Reeb, la noción de holonomía para foliaciones fué introducida por Ehresmann en 1950 en el Congreso de Roma. Realmente, si la primera presentación formalizada del concepto con toda su generalidad hay que buscarla en la nota a los Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris nº 243 de 1956 de C. Ehresmann y Shih W.S., la idea se halla ya implícita en

la **tesis** de Reeb, aún cuando sus motivaciones de base deban buscarse donde indicamos.

En la fundamental comunicación de Ehresmann al Coloquio de Topología de 1950, se introdujo la noción más general de conexión sobre un espacio diferenciable cualquiera (E, π, B, F) al determinarlo mediante una distribución $\mathcal{D}$ complementaria del fibrado vertical o tangente a las fibras, satisfaciendo una condición de homogeneidad. Ehresmann atrae la atención sobre el hecho de que dar una conexión sobre un fibrado diferenciable de base B conexa, origina el que un tal fibrado admita una estructura fibrada subordinada de grupo estructural el grupo de holonomía H. Además en el caso de que la conexión sea plana (es decir definida por una distribución integrable), al determinar ésta un homorfismo del grupo de Poincaré $\pi_1(B,x)$ sobre el grupo de holonomía H_x, resulta que la estrcutura fibrada subordinada posee grupo estructural discreto, con cada variedad integral maximal de la conexión (u hoja de la foliación transversa) constituyendo un espacio recubridor de la variedad base B. Ello conlleva a afirmar que "el espacio E provisto de una estructura fibrada y de una estructura foliada definida por la conexión plana $\mathcal{C}$, está determinado salvo isomorfismo por le hecho de dar B, F y la representación de $\pi_1(B,x)$ sobre el grupo de holonomía H_x". Si tenemos en cuenta que H_x es isomorfo a un subgrupo del grupo de los difeomorfismos de F, resulta que de hecho está determinado por B, F y la representación de $\pi_1(B,x)$ sobre el grupo de los difeomorfismos de F, situación que, como hemos visto, determina la noción de foliación transversa a una fibración. La relación en-

tre ambos conceptos se establece siempre que se puede garantizar la propiedad de "elevación horizontal" de curvas, en particular lazos, en B pasando por x. Esta situación, al menos localmente, siempre se da, sea o no la fibra compacta, si Diff (F) se sustituye por el pseudogrupo de los difeomorfismos $\mathcal{C}^\infty$ de un entorno del origen de $\mathbb{R}^q$ en sí mismo que aplique 0 en 0, $(\mathcal{G}_q)_0$.

La conexión $\mathcal{D}$ determina una aplicación de holonomía $H_{\mathcal{D}}: \Omega^1(B,x) \longrightarrow (\mathcal{G}_q)_0$ que si $\mathcal{D}$ es plana se extiende a $\Omega^0(B,x)$ (espacio de lazos contínuos de B en x) dando una factorización a través de la aplicación canónica $\rho: \Omega^0(B,x) \longrightarrow \pi_1(B,x)$, lo que determina el llamado *Homomorfismo de holonomía* de $\mathcal{D}$, $h_{\mathcal{D}}: \pi_1(B,x) \longrightarrow (\mathcal{G}_q)_0$. Ahora bien, vimos que existe un homomorfismo natural: $d:(\mathcal{G}_q)_0 \longrightarrow GL(q,\mathbb{R})$ que asocia a todo elemento $f \in (\mathcal{G}_q)_0$ la matriz jacobiana de f en 0, de modo que la factorización anterior se completa con el llamado homomorfismo de holonomía lineal $dh_{\mathcal{D}}: \pi_1(B,x) \longrightarrow GL(q,\mathbb{R})$ satisfaciendo la relación $dh_{\mathcal{D}} = d \cdot h_{\mathcal{D}}$.

Pero esta situación se reproduce en el estudio de cualquier foliación. Supongamos que sea $(M,\mathcal{F})$ una variedad $\mathcal{C}^\infty$ n-dimensional provista de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q, y que sea L una hoja. Será una subvariedad $i: L \hookrightarrow M$ de M. Consideremos $\nu(L)$ la fibración normal a L en M, existe una inmersión $j: \nu(L) \longrightarrow M$. Si identificamos L con la sección nula de $\nu(L)$, las fibras de $\nu(L)$ son aplicadas por j transversalmente a la foliación $\mathcal{F}$, de modo que la foliación imágen recíproca $\overline{\mathcal{F}} = j^* \mathcal{F}$ definida sobre $\nu(L)$, es del tipo de las denominadas "foliación transversa a una fibración" mediante la que se puede garantizar la verificación de la propiedad de "elevación horizontal" de lazos de modo que se tienen definidos los homomorfismos

$$h_L: \pi_1(L,x) \longrightarrow (\mathcal{G}_q)_0 \quad \text{y} \quad dh_L: \pi_1(L,x) \longrightarrow GL(q,\mathbb{R})$$

homomorfismos que están definidos salvo automorfismo interior del subgrupo imagen, de ahí la definición:

A las aplicaciones h_L y dh_L se las denomina *homomorfismos de holonomía y holonomía lineal de* L (respectivamente), llamándose *grupo de holonomía de* L (resp. holonomía lineal) La clase de subgrupos de $(\mathcal{G}_q)_o$ conjugados con la imagen de h_L (resp. de dh_L) es decir un subgrupo de $(\mathcal{G}_q)_o$, definido salvo conjugación, imágen de $\pi_1(L,x)$ por h_L (resp. por dh_L). Intuitivamente la noción de elevación de caminos, lazos, puede interpretarse por la de "deslizamiento a lo largo de las hojas", que entenderemos así: sean x_o y x_1 dos puntos de una misma hoja L, S_o y S_1 dos subvariedades de M transversas a la foliación $\mathcal{F}$ pasando respectivamente por x_o y x_1, se trata de definir "una aplicación de una vecindad de x_o en S_o sobre una vecindad de x_1 en S_1.

Si $\mathcal{F}$ es una foliación de tipo simple conexo determinada por una submersión $\pi : M \longrightarrow B$ el deslizamiento se define al imponer que un punto de U_o sea enviado siguiendo un deslizamiento según un camino l sobre un punto de U_1, teniendo ambos igual proyección sobre B, designaremos ϕ_l tal aplicación. En el caso general sea $l^{x_1}_{x_o}$ un camino localmente diferenciable de origen x_o y extremo x_1 de modo que, mediante subdivisión adecuada, reduciendo cada porción al caso de tipo simple conexo y por composición se obtiene un deslizamiento a lo largo de la hoja y a través de un número finito de subvariedades transversas desde aquélla cuyo germen es (S_o,x_o) en x_o hasta la de germen (S_1,x_1) en x_1, deslizamiento que sólo depende de la clase de homotopía de $l^{x_1}_{x_o}$. Es decir curvas homotópicas están asociadas a difeomorfismos que tienen el mismo germen. El conjunto de gérmenes de difeomorfismos trans-

versos que se obtienen de este modo al variar x_o y x_1 en la hoja L posee una estructura de grupoide: *el grupoide de holonomía de la hoja L.* - Si $x_o = x_1$ y $S_o = S_1$ el camino $l^{x_1}_{x_o}$ es un lazo en x_o y si l es la clase de homotopía de este lazo, se define así un homomorfismo h_{x_o} del grupo fundamental $\pi_1(L,x_o)$ en el grupo de los gérmenes en x_o de los difeomorfismos locales de S_o que aplican x_o en x_o, es decir se tiene el llamado homomorfismo de holonomía

$$h_{(S_o,x_o)} : \pi_1(L,x_o) \longrightarrow \mathrm{Diff}(S_o,x_o)$$

y a la imagen de $h_{(S_o,x_o)}$ se le dice *grupo de holonomía de la hoja L en* x_o de la foliación $\mathcal{F}$. Obsérvese que si S'_o es otra subvariedad transversa en x_o a $\mathcal{F}$ se tiene un gérmen de difeomorfismo canónico g de (S_o,x_o) sobre (S'_o,x_o) de donde un isomorfismo de $\mathrm{Diff}(S_o,x_o)$ sobre $\mathrm{Diff}(S'_o,x_o)$ que compuesto con $h_{(S_o,x_o)}$ determina $h_{(S'_o,x_o)}$. Mediante este isomorfismo natural se obtiene la representación de holonomía h_{x_o} de $\pi_1(L,x_o)$ en el grupo de los gérmenes en x_o de difeomorfismos locales de subvariedades transversas de fuente y meta x_o. La relación con la caracterización precedente, sigue si se observa que dada una aplicación distinguida f tal que $f(x_o) = 0 \in \mathbb{R}^q$ y es $\bar{f}$-su restricción a S_o, entonces el germen de $\bar{f} \bullet \phi_l \bullet \bar{f}^{-1}$ en $0 \in \mathbb{R}^q$ es la imágen de l por la representación de holonomía, imagen definida salvo automorfismo interior de $(\mathcal{G}_q)_o$ motivado éste por la relación de equivalencia que determina el grupo de los gérmenes de difeomorfismos locales de subvariedades transversas por un mismo punto.

En la nota al CRAS de Paris de 1956 por Ehresmann y Shih, el con-

cepto lo introducen para foliaciones definidas topológicamente al dar un par de topologías (T, T') sobre la variedad M, verificando un axioma de estructura. Consideran la relación de equivalencia definida sobre M por las hojas, dicha relación de equivalencia de la foliación, y a la variedad cociente de M provista de T, por esta relación de equivalencia, que designan $M^{\smile}$, le denominan *espacio transverso* de la foliación (el $M/\mathcal{F}$ de las foliaciones diferenciables). Sobre todo abierto W de M en T provisto de las trazas de las topologías (T y T') queda det-erminada una foliación inducida y se puede considerar análogamente su espacio transverso $W^{\smile}$. - Mediante ello la noción de hoja simple y localmente simple sigue si la aplicación canónica de $W^{\smile}$ *en* $M^{\smile}$ es un homeomorfismo sobre un abierto de $M^{\smile}$ (respectivamente relativamente a la foliación inducida sobre un abierto que, entonces, se dice simple, para el que las hojas se dicen placas).

Las anteriores nociones de "elevación horizontal y "deslizamiento a lo largo de la hoja" quedan aquí caracterizadas a través de la noción de *"isomorfismo local transverso"* que se establece así: Dada una foliación localmente simple sobre una variedad M y dos puntos x_o, x_1 sobre una misma hoja se consideran sendas vecindades simples U_o, (resp. U_1) se denomina *"isomorfismo local transverso"* a todo homeomorfismo f de $U_o^{\smile}$ sobre $U_1^{\smile}$, isomorfismo que se dice además *estricto* si se establece respecto a las aplicaciones canónicas $q_1: U_1^{\smile} \longrightarrow M^{\smile}$ y $q_o: U_o^{\smile} \longrightarrow M^{\smile}$, es decir si $q_1 \circ f = q_o$.

Sea $x^{\smile} = f(x_o^{\smile})$ y $X = j^{\lambda}_{x_o^{\smile}} f$ el jet local de un isomorfismo local transverso f, con fuente $x_o^{\smile}$. Si se considera la totalidad de vecindades simples de x_o y x_1, y los jets X asociados, en la totalidad de triples

(x_o, x_1, X) tiene así definida una relación de equivalencia cada una de cuyas clases constituye lo que denominan un *jet transverso regular* que se dice *jet transverso regular estricto* si posee un representante f que es un isomorfismo local transverso estricto. De la definición sigue que para todo par de puntos de una placa aparece asociado un jet transverso estricto canónico (x_o, x_1, X). Como antes, al considerar pares de puntos x_o, x_1 que pertenecen a una hoja pero no a una misma placa, es preciso aplicar un proceso análogo al de los caminos localmente diferenciables mediante lo que se suele denominar *cadena transversa de una variedad foliada*, lo que permite definir así mismo la correspondiente noción de *jets transversos estrictos* cuya totalidad constituye el *grupoide de holonomía de la foliación*. El *grupo de holonomía* de la foliación en un punto x_o, H_{x_o}, está entonces constituido por los elementos del grupoide de holonomía de origen y meta x_o, y de modo análogo a los anteriores se prueba que si $\mathcal{L}$ es la hoja que pasa por x_o existe un homomorfismo canónico del grupo fundamental de $\mathcal{L}$ en x_o, $\pi_1(\mathcal{L}, x_o)$, sobre el grupo de holonomía H_{x_o}, homomorfismo determinado salvo automorfismo interior de $(\mathcal{G}_q)_o$.

Holonomía transversa

Este concepto de holomía transversa de Ehresmann fué generalizado por Godbillon en 1967 con la noción de holonomía transversal cuyo interés principal está manifestándose en el estudio de las estructuras transversas o espacio de las hojas de una foliación. En el grupoide de los gérmenes de aplicaciones distinguidas definidoras de una estructura foliada, considera

el subespacio de aquellas con representantes que son compatibles con la relación de equivalencia ρ, asociada a la foliación, de paso al espacio de las hojas. La relación de equivalencia ς pasa al cociente y define otra σ sobre h(U), vecindad abierta de 0 en $\mathbb{R}^q$. Mediante σ distingue en $(\mathcal{G}_q)_o$ aquellos elementos que son gérmenes de homeomorfismos locales compatibles con σ y es inmediato verificar que su totalidad constituye un subgrupo de $(\mathcal{G}_q)_o$ que designa $\mathcal{H}_{x,h}$, para $x \in U$ dominio de h tal que $h(x) = 0$. - Para otro germen y representante (V,g) compatible con ρ, e $y \in V$ tal que $g(y) = 0$, el subgrupo $\mathcal{H}_{y,g}$ correspondiente, para x, y, en la misma hoja de $\mathcal{F}$, demuestra es conjugado del $\mathcal{H}_{x,h}$ y que se obtienen así todos los conjugados del $\mathcal{H}_{x,h}$, lo que le permite denominar *holonomía transversal de la hoja L* a la clase de subgrupos conjugados del $\mathcal{H}_{x,h}$ en $(\mathcal{G}_q)_o$ y que designa con $\mathcal{H}$. Estudia la relación en algunos casos de esta noción con la introducida por Ehresmann demostrando que para foliaciones de codimensión $q > 1$ en general coinciden los correspondientes grupos $H = \mathcal{H}$, mientras que si son de codimensión 1, por ejemplo, para una hoja conpacta con grupo de holonomía H finito, $\mathcal{H}$ es un subgrupo de H x H, Su interés en este concepto no obstante se centra en obtener caracteres para las foliaciones que gocen de la propiedad de elevación de homotopías.

Otra versión de la holonomía de Ehresmann de una foliación con vistas al refinamiento de los resultados de Bott relativos a la obstrucción topológica a la integrabilidad de las foliaciones riemannianas es la que introduce Pasternack en su tesis denominándola holonomía de 1er. orden: Suponga-mos que M es una variedad $\mathcal{C}^\infty$ con fibrado tangente T(M)=T y $\mathcal{D}$ una subfibra

ción integrable de T. Para L una hoja de la foliación determinada por $\mathcal{D}$, considera la restricción de la $\mathcal{D}$-conexión canónica sobre $\nu(\mathcal{D})$ a una $\mathcal{C}^\infty$-conexión ∇_L sobre $\nu(\mathcal{D})|_L$. La holonomía clásica del fibrado $\nu(\mathcal{D})|_L$ con respecto a la conexión ∇_L le determina la holonomía de 1er. orden para la foliación y el correspondiente grupo de holonomía.

Más importante, como versión, por su superior alcance y caracterización categorial, es la que realiza Winkelnkemper si bien, ésta, a nuestro entender, se hallaba ya en la obra de Ehresmann como puede apreciarse aunque no explícitamente en su comunicación de 1961 al Congreso de Matemáticas de Canadá, donde introduce con toda generalidad la noción del "Pseudo-grupo de holonomía", "grupoide de holonomía" y "grupoide transverso de holonomía". Hemos visto cómo Godbillon para introducir la noción de holonomía transversal lo efectúa haciendo intervenir la relación de equivalencia que sobre la variedad foliada M determina la partición definida por la foliación. Para que tal hecho aparezca implícito en la definición, Winkelnkemper observa que la relación de equivalencia ρ, o mejor su grafo $\rho \subset M \times M$ queda mejor caracterizado por un grupoide $\mathcal{G}$. Este grupoide posee como conjunto de unidades $\mathcal{G}^o$ un subgrupoide que coincide con M de modo que determina a ρ como imagen de $\mathcal{G}$ por el par de aplicaciones fuente α y meta β, $(\alpha, \beta): \mathcal{G} \to M \times M$. Evidentemente la ventaja de operar con $\mathcal{G}$, y no con la relación ρ, es que sobre $\mathcal{G}$ disponemos de una estructura de variedad compatible con su estructura de grupoide, se dispone pues de un grupoide topológico o diferenciable (analítico).

Considera como Haefliger el espacio $\tilde{M}$ de los gérmenes de aplicaciones distinguidas de M en $\mathbb{R}^q$, la aplicación fuente: $\alpha: \tilde{M} \to M$ si se pro

vee a M y $\tilde{M}$ de la topología T' de las hojas de la foliación (que hace sean M y $\tilde{M}$ de dimensión p = n−q igual que las hojas si n es la dimensión de M en la topología de variedad T), es una aplicación recubridora. Si ℓ_x^y es un camino sobre una hoja L de $\mathcal{F}$ uniendo x a y, la holonomía $h(\ell_x^y)$ es la aplicación que a todo $z \in \alpha^{-1}(x)$ asocia el extremo $z' = h(\ell_x^y)z$ de la elevación del camino ℓ_x^y por z en la variedad $\tilde{M}$. Como el grupoide de los gérmenes de homeomorfismos f en el cero de $\mathbb{R}^q$ actúa transitivamente, por composición, sobre $\alpha^{-1}(x)$ se tiene que $h(\ell_x^y)\varphi_0 z = \varphi_0 h(\ell_x^y)z$ en analogía con las versiones precedentes es $h(\ell_x^y \circ \ell_y^t) = h(\ell_x^y)$ o $h(\ell_y^t)$ no dependiendo $h(\ell_y^t)$ más que de la clase de homotopía del camino ℓ. Entonces al grupoide de holonomía buscado $\mathcal{G} = Hol(\mathcal{F})$ de la variedad foliada $(M, \mathcal{F})$ es el cociente del grupoide fundamental de $\mathcal{F}$ por la relación de equivalencia que identifica ℓ_1 y ℓ_2 si y sólo si $h(\ell_1) = h(\ell_2)$. En particular para $x \in \mathcal{G}^0 \cong M$, el grupo $\mathcal{G}_x^x = \mathcal{G}_{\{x\}}$ es el grupo de holonomía de la foliación en el punto x. La variedad $\mathcal{G}$ es de dimensión 2p+q y se halla provista de una foliación $\bar{\mathcal{F}}$ de codimensión q, imagen recíproca por α de la $\mathcal{F}$ sobre $M \cong \mathcal{G}^0$.

Este modo de caracterizar las foliaciones a través de su grupoide de holonomía ha resutlado particularmente útil en la aplicación de la teoría de foliaciones al estudio de las $\mathcal{C}^*$-algebras realizado por Connes y sus seguidores, que a su vez ha dado nuevas luces al estudio de la estructura transversa a las foliaciones. Debemos, no obstante, señalar, que, si no su aplicación, sí la caracterización de las foliaciones mediante su grupoide de holonomía era un concepto ya conocido y analizado por Ehresmann.

Lo anterior puede repetirse casi al pie de la letra, como demostró

Haefliger, para Γ-estructuras foliadas sobre una variedad M que satisfagan, lo que denomina, *"condición de no degeneración"* que dice así: *La aplicación fuente* $\alpha : \mathcal{J}(M) \longrightarrow M$ *entre el espacio de los jets locales de aplicaciones distinguidas, provisto de la topología de las hojas, en la variedad M también provista de la topología de las hojas, es de recubrimiento"*, o lo que es equivalente: *"una* Γ*-estructura sobre M es no degenerada si toda aplicación distinguida f asociada es tal que si, para* h_1 *y* h_2 *difeomorfismos definidos en una vecindad de f(x), se verifica que* $j^{\lambda}_{n}(h_1 \circ f) = j^{\lambda}_{x}(h_2 \circ f)$ *entonces* $j^{\lambda}_{f(x)} h_1 = j^{\lambda}_{f(x)} h_2$ *"*. Con ello es inmediato verificar que dada una $\Gamma_{\mathcal{F}}$-estructura foliada no degenerada sobre M si L es una de sus hojas, entonces la aplicación $h_L : \pi_1(L,x) \longrightarrow \Gamma^{0}_{\mathcal{F}}$ (subgrupo del grupoide $\Gamma_{\mathcal{F}}$ de los elementos que conservan el origen 0) queda bien definida. La imagen de h_L en $\Gamma^{0}_{\mathcal{F}}$ se le denomina *grupo de holonomía de L*, como antes está definido salvo automorfismo interior (es decir que conviene considerar la clase de todos los subgrupos de $\Gamma^{0}_{\mathcal{F}}$ que son conjugados con la $\mathrm{Im}(h_L)$).

Estabilidad

Es quizás la propiedad que primero se consideró en el estudio de las soluciones de un sistema de Pfaff y uno de los tópicos más considerados en el estudio de las foliaciones. Con él se trata de conocer la "rigidez" de ciertas propiedades de las foliaciones y de las hojas de aquella. Es un concepto, en cualquier caso, intimamente caracterizado por la holonomía de la hoja. En principio su introducción aparece como extensión al estudio de las foliaciones de la correspondiente noción establecida en el estudio de

los sistemas dinámicos por Poincaré, Liapunov y por Birkhof en los dinámico-topológicos. - Por otra parte, a su vez, esta noción para los sistemas dinámico-topológicos se amplía con los nuevos conceptos allí introducidos por Hajek en 1970 y hoy objeto de investigaciones relacionándolos con los conceptos de estabilidad de Lyapunov y de equicontinuidad. Pero como señalamos al principio de esta memoria, junto a la noción de estabilidad de Lyapunov se halla la noción de "estabilidad estructural" que como quedó dicho, en los sistemas dinámicos fué introducida por Andronov y Pontrjagin en 1937. Esta noción que surgió al querer agrupar los sistemas dinámicos en clases respecto a la relación de equivalencia denominada "conjugación topológica" (*), es facilmente formalizable, ya que, de hecho, supone tener definida sobre la variedad de las hojas $M/\mathcal{F}$ de una foliación $(M, \mathcal{F})$, una relación de equivalencia o tipo de estructura E. Es claro así que en principio se dispone de tantos conceptos de *estabilidad estructural* como tipos de relaciones de equivalencia o de estructura E se puedan considerar sobre la variedad de las hojas $M/\mathcal{F}$. Dada una relación de equivalencia E se tiene definida automáticamente la E-estabilidad estructural correspondiente. De más aplicación en la teoría cuantitativa que la conjugación topológica, la proporciona la noción de "equivalencia homotópica" de foliaciones: $(M, \mathcal{F}_0)$ y $(M, \mathcal{F}_1)$ de igual dimensión se dicen homotópicas si existe una familia 1-paramétrica de foliaciones sobre M, $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,1]$, tal que $\mathcal{F}_t\big|_{t=0} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_t\big|_{t=1} = \mathcal{F}_1$,

---

(*) Recuérdese que dos sistemas dinámicos X_t, Y_t sobre una variedad M se dicen "topológicamente conjugados" si existe un difeomorfismo $h \in \mathrm{Diff}(M)$ (de hecho un $h \in \mathrm{Homeom}(M)$) que aplica las órbitas del uno en las órbitas del otro. Tal definición es inmediatamente establecida para foliaciones p-dimensionales $p > 1$.

aunque la noción más adecuada es la de *concordancia* que tiene lugar cuando existe una foliación $\mathcal{F}$ sobre M x I de igual codimensión tal que induce sobre M x {o} la foliación $\mathcal{F}_0$ y sobre M x {1} la $\mathcal{F}_1$. Si además $\mathcal{F}$ fuese transversal a las fibras del fibrado trivial M x [0,1] $\longrightarrow$ [0,1], $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ se dicen integralmente homotópicas.

Así la noción de estabilidad se precisa por Epstein en 1974 respecto a una noción de rigidez caracterizada a través de la función volumen para las hojas de una foliación y que comprende en particular el volumen inducido por una métrica riemanniana, concepto que es el considerado por Rummler. Para Rummler una foliación compacta (lo que no exige que la variedad soporte sea compacta) es estable si el volumen de las hojas es localmente acotado. Ello prueba que es equivalente a que los grupos de holonomía sean finitos, también a que cada hoja posea una base de vecindades saturadas con una estructura local muy precisa. Para Ehresmann en 1950 dada una variedad diferenciable provista de una foliación, una hoja L se dice *estable* si verifica que:

i) L admite una vecindad tubular saturada E.

ii) Si F_x es la fibra de E sobre $x \in L$, las trazas sobre F_x de las vecindades tubulares saturadas de L forman un sistema fundamental de vecindades de x relativamente a F_x.

Los primeros resultados explicitamente no relacionados aún con la noción de holonomía aparecen en la tesis de Reeb: Dada una variedad diferenciable M provista de una estructura foliada $\mathcal{F}$ de codimensión q en la que se supone existe una hoja L compacta con grupo de Poincaré finito demuestra que:

a) Toda vecindad de L es saturada (precisamente está constituida por la

reunión de hojas compactas con grupo de Poincaré subgrupos del de L).

b) L es estable respecto a "ligeras modificaciones" de la estructura foliada. Por ejemplo conserva su compacidad.

c) En el caso q = 1, si además M es conexa todas las hojas de la foliación son compactas y tienen grupo Poincaré finito. (Teorema de estabilidad global que deja de cumplirse si q > 1).

Reeb en 1959 establece también el siguiente complemento al teorema de estabilidad: *Si (M,F) es una estructura foliada analitica* (real o compleja) *de codimensión 1 y si L es una hoja compacta cuyo número de Betti* (racional) *en dimensión 1 es nulo, existe una vecindad abierta U de L tal que toda hoja L' que encuentra U es compacta, y tiene número de Betti 1-dimensional igual a cero.*

La relación del teorema de estabilidad con el grupo de holonomía la establece Ehresmann en su comunicación al Coloquio de Topología de Bruselas al considerar vecindades tubulares de una hoja compacta L con grupo de Poincaré finito, repitiendo sus palabras: *"La estructura foliada de la vecindad tubular de L puede entonces precisarse al observar que, el grupo de holonomia, en este caso, es equivalente al menos en la vecindad de un* $x \in L$, *a un grupo finito de rotaciones euclidas de una bola alrededor de su centro. El grupo de holonomia opera entonces sobre una bola de modo tal que cada punto no admite más de un número finito de transformados"* lo que le permite establecer el siguiente:

Teorema: *"Para que una variedad diferenciable L sumergida en una variedad diferenciable M admita una vecindad foliada E teniendo L como hoja, es necesa-*

rio y suficiente que el espacio fibrado diferenciable $\nu(L)$, fibrado normal de L en M, admita una estructura fibrada subordinada con grupo estructural discreto".

La noción de estabilidad donde se configura por primera vez con precisión en teoría de foliaciones, en el orden de ideas que Reeb la utiliza, es en la misma nota al CRAS de Paris presentada por Ehresmann y Shih W. S. en 1956. En ella se formalizó la noción de holonomía y se precisó así el enunciado del teorema de estabilidad en los siguientes términos:

"Sea $(T, T') = \mathcal{F}$ una foliación localmente simple de E verificando las condiciones siguientes:

1º cada punto x de E admite una vecindad compacta relativamente a $\bar{T}$;

2º $\bar{T}'$ es regular y localmente conexa

3º existe un abierto simple U tal que $U^{\smile}$ sea separado.

Sea L una hoja compacta de $\mathcal{F}$ de intersección no vacia con U y tal que el grupo de holonomia de la foliación en $x \in L$ sea finito. Entonces L admite un sistema fundamental de vecindades abiertas saturadas por la relación de equivalencia de la foliación para las que cada hoja es compacta. Si $U^{\smile}$ es regular, L admite también un sistema fundamental de vecindades cerradas cuyas hojas son compactas".

La consideración de la holonomía infinitesimal $\mathcal{G}_{x,r}$, es decir del grupo imagen del grupo de holonomía $\mathcal{G}_x$ en $(\mathcal{G}_q)^o$ por la aplicación natural de $(\mathcal{G}_q)^o$ sobre el grupo $J^r_o(\mathbb{R}^q)$ de los jets de orden r de los homeomorfismos de origen y meta el origen de $\mathbb{R}^q$, permite decidir en ciertos casos si

el grupo de holonomía es finito, concretamente Reeb (1959) establece el siguiente resultado: *En el caso de una estructura foliada analítica (real o compleja), el conocimiento de los grupos $\mathcal{G}_{x,r}$ define completamente $\mathcal{G}_x$.*

En su tésis Reeb planteó el problema de "existencia de una estructura foliada analítica de codimensión uno sobre la esfera S^3", problema que como hemos dicho resolvió haefliger en 1956 demostrando que no puede existir estructura alguna de variedad foliada analítica de codimensión uno sobre una variedad analítica real compacta cuyo primer grupo de homotopía es finito. Este resultado sigue como corolario del teorema que dice: *"Sea M un espacio topológico conexo y localmente conexo por arcas, cuyo primer grupo de homotopía sólo contiene elementos de orden finito. Sea s una $\mathcal{G}_\omega$ estructura sobre M, y σ su $\mathcal{G}_\omega$ estructura foliada subyacente. Entonces:*

a) toda hoja de σ es cerrada.

b) Si σ es una $\mathcal{G}_\omega$ estructura foliada regular, M no es compacta.

c) Si s es orientable y M a base numerable, la $\mathcal{G}_0$ estructura foliada subyacente a σ está determinada por una aplicación de M en $\mathbb{R}$.

d) Si M es además localmente compacto, la $\mathcal{G}_\omega$ estructura foliada subyacente a σ e inducida sobre un abierto U relativamente compacto de M, está determinada por una aplicación de U en $\mathbb{R}$".

Recuérdese que con $\mathcal{G}_\omega$ se designa el pseudogrupo de lo automorfismos locales analíticos de la recta numérica, mientras que por $\mathcal{G}_\omega$-estructura regular entendemos una subyacente a una $\mathcal{G}_\omega$-estructura producto local.

Como señala Reeb un examen de la demostración de Haefliger muestra que, de hecho, la hipótesis de analiticidad puede ser reemplazada por la con

dición de que: *"Para cada hoja L y cada elemento* $\alpha \in \pi_1(L,x)$ *el elemento* $h_L(\alpha)$ *es semejante al jet local de una función analítica"*. Es así que para toda variedad diferenciable compacta M, si (M , $\mathcal{F}$) es una foliación diferenciable cuyas hojas poseen grupo de Poincaré finito, existe en $\pi_1(M)$ un elemento de orden infinito", de modo que no pueden determinarse foliaciones de codimensión 1 de la esfera S^n cuyas hojas sean todas homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$.

Otro notable resultado para el caso de foliaciones de codimensión 1 sobre variedades M compactas con grupos de holonomía triviales, lo dió Sacksteder, demostrando que entonces M *"posee una métrica riemanniana extendiendo, para* $\mathcal{F}$ *transversalmente orientable, un grupo uniparamétrico de transformaciones, sin punto fijo sobre M, que conserva la foliación"*. El propio Sacksteder prueba que en estas condiciones la foliación se puede definir mediante una forma de Pfaff cerrada y sin singularidad. Así mismo prueba que en el caso en que la foliación de codimensión 1 esté definida por las órbitas de una acción localmente libre de $\mathbb{R}^{n-1}$ sobre M, ninguna de ellas compactas, todas ellas son densas y $H^1(M,\mathbb{R}) \neq 0$.

Como una consecuencia más de la caracterización de la estabilidad por la holonomía en 1974 Thurston generaliza el teorema de estabilidad global de Reeb, al observar que la hipótesis sobre el grupo fundamental de la hoja es una condición excesivamente fuerte, estableciendo y demostrando el siguiente enunciado: *Sea M una variedad compacta provista de una foliación* $\mathcal{F}$ *de codimensión uno,* $\mathcal{C}^1$, *transversalmente orientada con una hoja L compacta tal que* $H^1(L,\mathbb{R}) = 0$. *Entonces todas las hojas de* $\mathcal{F}$ *son difeomorfas a L, como fibras de una fibración de M sobre* S^1. *Si se supone a su ves que M*

posee un borde, entonces M es una unión de hojas de $\mathcal{F}$. Este teorema no puede ser extendido a foliaciones no orientadas como probó Sacksteder un año más tarde dando un ejemplo.

Thurston dá análogamente la siguiente generalización del teorema de estabilidad local de Reeb: *"Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión $q > 1$ de una variedad cerrada M, y sea L una hoja compacta de $\mathcal{F}$. Si $H^1(L,\mathbb{R}) = 0$ y $H^1(L,GL(q,\mathbb{R})) = 0$ entonces la holonomía alrededor de L es trivial, y existe una vecindad tubular de L, saturada por $\mathcal{F}$ sobre la que $\mathcal{F}$ introduce una foliación producto"* y reduce la demostración del teorema global a la del local, demostración que, analizada, evidencia es invariante bajo perturbaciones $\mathcal{C}^1$ lo que lleva a Langevin y Rosenberg a establecer el siguiente teorema: *"Sea M una variedad cerrada provista de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q y L una hoja compacta. Existe una vecindad de $\mathcal{F}$ en la $\mathcal{C}^1$-topología sobre el espacio de todas las foliaciones de codimensión q sobre M, tal que para toda $\mathcal{F}'$ en esta vecindad, $\mathcal{F}'$ admite una hoja compacta L' homeomorfa a L y próxima a L. Así mismo alguna vecindad de L' en M está foliada como un producto por $\mathcal{F}'$ "*, teorema que aplican al estudio de foliaciones semejantes a fibraciones y sus deformaciones.

Finalicemos esta rápida exposición de la incidencia de la holonomía en la caracterización de la noción de estabilidad señalando una de las últimas investigaciones en este orden de ideas. Los resultados de Thurston sugieren la siguiente caracterización de la noción de estabilidad: *"Dada una foliación $\mathcal{F}$, de codimensión uno, sobre una variedad cerrada M se dice que una hoja propia L de $\mathcal{F}$ es estable si posee una vecindad abierta en M satu-*

rada sobre la que $\mathcal{F}$ es una foliación producto", noción de estabilidad que lleva a pretender establecer teoremas de estabilidad para hojas propias *no compactas*. Es en este orden de ideas que, recientemente, Inaba establece el siguiente resultado: *Sea M una variedad cerrada de dimensión 3 provista de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión uno. Si L es una hoja propia con grupo de Poincaré finitamente generado, entonces L es estable si y sólo si su grupo de holonomía es trivial"*. La extensión de este resultado a variedades M de dimensión mayor que 3 después de varios trabajos que inutilmente pretendieron resolverlo, ha sido el propio Inaba que, al menos para dimensión 5, ha establecido su no verificación en una publicación de principios de 1.983, publicación en la que se dá un ejemplo de foliación en dimensión cinco que satisfaciendo las hipótesis de un tal teorema de estabilidad no cumple la tesis.

1.- Existencia y clases características

Entre los tópicos iniciales, propios del estudio de la teoría de foliaciones, destacan los de carácter cuantitativo y más precisamente los relacionados con los problemas de existencia y clasificación de las foliaciones sobre una variedad dada. El propio Reeb en su tesis plantea la cuestión de existencia: "Si una variedad V admite un campo de p planos $\mathcal{D}$ de clase $\mathcal{C}^1$, ¿admite un campo de p-planos $\mathcal{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$ completamente integrable?. El mismo señala la *"estabilidad"* de la propiedad de un campo de *no ser completamente integrable*. Pero dado un campo no completamente integrable, ¿podría "deformarse" de modo continuo en otro que fuera completamente integrable?. El problema de existencia de una foliación de dimensión $p > 1$ se traduce así en otros dos: uno previo de existencia de campos de p-planos y el de determinar cual de éstos son completamente integrables o bien el ya indicado de agrupar estos campos en clases *"adecuadas"* de equivalencia, determinando las condiciones, o caracterización dentro de ellas, de aquellos que sean completamente integrables. Si dim **M** = n, para el caso p = 1 es bien conocido que la existencia de un campo vectorial implica la existencia de una foliación de codimensión n-1 de M. Así mismo Phillips en 1969 demostró que *"sobre variedades $\mathcal{C}^\infty$ no compactas n-dimensionales M, todo campo de (n-1)-planos es homótopo al campo de planos tangentes a una foliación de codimensión 1 y de clase $\mathcal{C}^\infty$"*, pero el resultado análogo para variedades com-

pactas no se afianzó hasta 1976 en que Thurston, mediante una hábil y laboriosa construcción local, lo estableció incluso para variedades con borde aunque, en este caso, debió suponer la foliación bien transversa, bien tangente a las componentes del borde. Thurston también abordó el problema de existencia para el caso de las foliaciones de codimensión cualquiera; dado el teorema de obstrucción de Bott se puede asegurar que: *"un campo de (n-k)-planos para $k \geq 2$, no es en general homótopo a un campo completamente integrable"*.

En la primera parte de esta memoria se ha dicho que la noción de Γ-estructura introducida por Haefliger, permitió aplicar al estudio de las foliaciones, los métodos de tratamiento de los problemas de existencia y clasificación de la teoría de espacios fibrados, basados en la existencia de los llamados espacios clasificantes y el fibrado universal sobre él y, en efecto, Haefliger introdujo en 1970 los llamados espacios clasificantes $B\Gamma$ para una Γ-estructura. Su construcción le exigió, como ya hemos dicho, dar una noción de foliación sobre espacios paracompactos. Haefliger a toda Γ-estructura $\mathcal{H}$ de codimensión q sobre una variedad M asocia un espacio fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ de fibra tipo $\mathbb{R}^q$, provisto de una foliación de codimensión q, $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ transversa a las fibras y, con el espacio fibrado (E,π,M), una sección continua distinguida $f : M \longrightarrow E$ tal que $f^*(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$. En realidad Haefliger prueba que el hecho de dar una Γ-estructura de codimensión q es equivalente a dar un microfibrado provisto de una foliación transversa a las fibras.

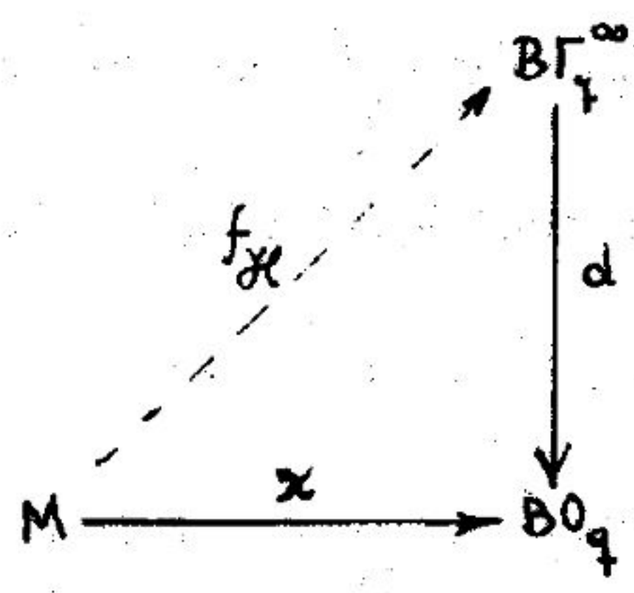
Si fijamos ideas y, como grupoide Γ, tomamos desde ahora el gru-

poide topológico de los gérmenes de difeomorfismos $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^q$, Γ_q^∞, con el espacio clasificante $B\Gamma_q^\infty$ para el grupoide Γ_q^∞, dispone de una aplicación canónica $B\Gamma_q^\infty \longrightarrow BO_q$ que se obtiene del modo siguiente: Dada una Γ_q^∞-estructura, la existencia de una sección $f : M \longrightarrow E$ le permite considerar una fibración vectorial de fibra tipo $\mathbb{R}^q$, espacio total con fibra en cada punto $x \in M$ el espacio $T_{f(x)}E_x$ y espacio base M, con E_x la fibra de E en x. Esta fibración es precísamente la normal a $\mathcal{H}$, $\nu(\mathcal{H})$, con funciones de transición las diferenciales de las de $\mathcal{H}$. Operando sobre estos conceptos, distinguiendo el caso en que M sea ó no compacta, Thurston, en 1975, demostró que: *"Si M es una variedad, τ^{n-q} un campo de (n-q)-planos sobre M, $\nu^q = TM/\tau^{n-q}$ el fibrado normal y $\chi : M \longrightarrow BO_q$ la aplicación clasificante para ν^q, entonces el campo τ^{n-q} es homótopo a una foliación, si y sólo si χ se factoriza por una aplicación en $B\Gamma_q^\infty$. Además cada una de estas factorizaciones es realizada por una foliación cuyo campo de (n-q)-planos tangentes es homótopo a τ^{n-q}".*

Puesto que todo campo sobre una variedad es homótopo al fibrado normal de una foliación de codimensión uno, el resultado anterior nos permite afirmar que: *"Dada una variedad M compacta y sin borde, todo campo de (n-1)-planos sobre M es homótopo al campo de planos tangente a una foliación de codimensión 1 y de clase $\mathcal{C}^\infty$".* En particular se tiene que: *"toda variedad compacta sin borde, de característica de Euler nula, admite una foliación de codimensión 1 y de clase $\mathcal{C}^\infty$".*

Obsérvese que la factorización aludida, sigue si tenemos en cuenta que la aplicación $d : \Gamma_q^\infty \longrightarrow O_q$ nos determina una aplicación, igualmen-

te designada d, $d : B\Gamma_q^\infty \longrightarrow BO_q$ que clasifica el fibrado normal a la Γ_q^∞-estructura universal de Haefliger $\mathcal{H}_o$ sobre $B\Gamma_q^\infty$. Además si $\mathcal{H}$ es una Γ_q^∞-estructura de Haefliger sobre un espacio paracompacto M y $f_{\mathcal{H}} : M \longrightarrow B\Gamma_q^\infty$ clasifica $\mathcal{H}$ (de modo que $f_{\mathcal{H}}^*(\mathcal{H}_o) = \mathcal{H}$), entonces la composición $d \circ f_{\mathcal{H}} : M \longrightarrow O_q$ clasifica el fibrado normal $\nu(\mathcal{H})$ sobre M. Es claro entonces que la condición establecida por el teorema de Thurston, de que χ pueda factorizarse, equivale a que χ pueda elevarse haciendo conmutativo el diagrama de la derecha, hecho al que queda reducido el problema de determinar cuándo un campo de p-planos ($p = n-q$) es homótopo a una foliación. Desde el punto de vista técnico, esta reformulación del problema



no es mucho más fácil de abordar, ya que, como es bien sabido en Topología Algebraica, la existencia o no de tal elevación, la obstrucción a tal elevación, se halla en $H^k(M; \pi_{k-1}(F\Gamma_q^\infty))$, donde con $F\Gamma_q^\infty$ se designa la fibra de $d : B\Gamma_q^\infty \longrightarrow BO_q$ determinada salvo homotopía. Se sigue así el interés que tiene el conocer el tipo de homotopía de los espacios $B\Gamma_q^\infty$ y $F\Gamma_q^\infty$. Casi nada se conoce de ellos, en general los $\pi_j(F\Gamma_q^\infty)$ no son finitamente generados, los espacios $B\Gamma_q^\infty$ son espacios enormes. En el caso $q = 1$, se deben a Mather (1971-1976) los pocos resultados conocidos, resultados que Haefliger ha extendido al caso de codimensión $q > 1$. Señalemos también que en el caso analítico Haefliger demostró que el espacio $F\Gamma_1^\omega$ tiene el tipo de homotopía de un $K(\pi,1)$ (espacio de Eilemberg-McLane) con π un grupo perfecto, libre de torsión y no numerable. Existen interèsantes equivalencias de homología análogas para los grupos de difeomorfismos de una variedad, la diferencia

en este caso se debe a que el grupo de homeomorfismos no es en general contractible. (Ver McDuff).

Es claro que, introducida la teoría de los espacios clasificantes para foliaciones, por el habitual proceso topológico algebraico nos vemos conducidos a estudiar su tipo de homotopía como para los espacios fibrados. En particular el teorema de Haefliger-Thurston nos determina una amplia colección de clases características para las foliaciones. Así, dada $c \in H^*(B\Gamma_q^\infty ; \Lambda)$, donde Λ es un anillo de coeficientes, cada foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q sobre una variedad M determina una única clase de aplicaciones homotópicas $f_{\mathcal{F}} : M \longrightarrow B\Gamma_q^\infty$ y la clase de cohomología inducida $c(\mathcal{F}) = f_{\mathcal{F}}^* (c) \in H^*(M; \Lambda)$ recibe el nombre de *clase característica de* $\mathcal{F}$ ya que depende sólo de $\mathcal{F}$. Estas clases nos miden la *"desviación"* que de la estructura producto nos presenta el tipo de estructura de producto local que es una foliación.

Así, el teorema de integrabilidad de Bott (1968), establece una condición *necesaria* de existencia de foliaciones sobre una variedad dada mediante el anillo de clases características de $\mathrm{Pont}_\chi^* \left(T(M) / \tau(\mathcal{F}) \right)$ engendrado por las clases de Pontrjagin y la clase real de Euler del fibrado normal a la foliación. Su enunciado preciso dice: *"Sea M una variedad n dimensional, si $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión q, entonces las clases de Pontrjagin* $\mathrm{Pont}^r \left(T(M)/\tau(\mathcal{F}) \right) = 0$ para r >2q". Dos años más tarde Pasternack, aunque operando siempre sobre la fibración transversal $T(M)/\tau(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F})$ a la foliación sobre M, al suponer además que la fibración $\nu(\mathcal{F})$ es orientable y que existe una métrica de Riemann proyec-

table sobre $\nu(\mathcal{F})$, obtiene que: $\mathrm{Pont}^r(\nu(\mathcal{F})) = 0$ para $r > q$".

Este refinamiento del resultado de Bott, respecto a los estudios de Molinó (1973) sobre las propiedades topológicas y cohomológicas de las foliaciones con conexión transversa proyectable, puede también interpretarse así: Sea M una variedad $\mathcal{C}^\infty$ n-dimensional, si $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión q, $(M,\mathcal{F})$ admite una conexión transversa proyectable si $\mathrm{Pont}^r(\nu(\mathcal{F})) = 0$ para todo $r > o$", intepretación que realizó un alumno de la escuela del Prof. Vidal Abascal en Santiago de Compostela.

Desde luego estos hechos nos prueban que los resultados cohomológicos están fuertemente condicionados por la superestructura geométrica introducida por la existencia de una conexión aún cuando ésta sea sólo definida sobre el fibrado transverso y de ello son prueba los resultados de Reinhart, de la escuela de Santiago de Compostela y últimamente el de Molinó que reseñamos en el punto siguiente.

Pero los problemas cuantitativos perseguidos son el de existencia y el de clasificación de un concepto que, si surgió en el estudio de las variedades diferenciables, vimos fué pronto caracterizado en el de las variedades topológicas y así Shulman en 1974 consiguió dar un refinamiento del resultado de Bott sin necesidad de introducir nuevas restricciones como hizo Pasternack. Resulta así claro el interés y esfuerzo dedicado por los investigadores por tratar de resolverlo en el nivel topológico. En 1967 surge la tesis de Godbillon en la que se pretende reducir el problema al nivel de una categoría homotópica que permita aplicar los métodos de la topología algebraica y, a través de ellos, obtener un "abord nouveau et fecond de cette

théorie" como dice el propio Godbillon en la introducción de su tésis. Para ello distingue de entre todas las foliaciones aquellas que gocen de una propiedad de "elevación de homotopías" análoga a la que en teoría de fibraciones distingue a las denominadas fibraciones de Serre. La dificultad aquí se halla en no disponer de la noción de "espacio base", dificultad que resuelve operando en la categoría semi-simplicial asociada a la topológica con estructura foliada. Sin embargo su teoría parece sólo poderse aplicar a las foliaciones con holonomía transversa nula.

Resumiendo, se observa así que las técnicas de la Topología Algebraica invaden el estudio de la Teoría de las foliaciones, primero con una marcada influencia geométrico-diferencial de la que cada vez más se tiende a independizar su estudio. En este orden de ideas hacia 1970, principalmente con Thurston, se incorporan las técnicas de la cirugía de variedades que relacionan el estudio de las foliaciones con el de la teoría de nudos incluso de modo muy imaginativo cuando se trabaja en dimensiones bajas como, por ejemplo, puede verse en la tesis de D. Hardorp en 1980 quien, como anécdota, indicaremos que al dedicarla a Thurston, le denomina "el mayor geómetra del mundo" frase que, aún considerada fruto de la admiración de un alumno por su maestro, estimamos debe entenderse como loa a la genial labor de Thurston en teoría de foliaciones.

Recordaremos que el teorema de Haefliger-Thurston permite no sólo dar una clasificación de las foliaciones de una determinada codimensión y clase que puede admitir una variedad dada, sino obtener un gran número de invariantes cohomológicas, así, dada sobre una variedad M de clase $\mathcal{C}^\infty$ una

foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q, se dispone de una única clase de aplicaciones homótopas $f_{\mathcal{F}} : M \longrightarrow B\Gamma_q^\infty$ tal que, con cada elemento $c \in H^k(B\Gamma_q^\infty ; \mathbb{R})$, aparece asociada una bien determinada clase de cohomología de De Rham: $c(\mathcal{F}) = f_{\mathcal{F}}^*(c) \in H^k_{\text{de Rham}}(M;\mathbb{R})$ que si $k > 2q$, por el teorema de anulación de Bott sabemos que es la clase cero. Pero no todas son nulas como prueba la construcción dada por Godbillon-Vey en 1971. En efecto dada una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q sobre una variedad diferenciable M mediante una q forma ω, $\omega \neq o$, sabemos que existe $\theta \in \Lambda^1(M)$ tal que $d\omega = \theta \Lambda \omega$, y es fácil demostrar que $\Omega = \theta \Lambda d\theta \Lambda \overset{q}{\ldots} \Lambda d\theta$ es una forma exacta o ciclo, cuya clase es un elemento del módulo de cohomología de De Rhan de dimensión 2q+1, denominado *"invariante de Godbillon-Vey"*, gv(Ω), invariante que, trivialmente, sólo depende de la foliación, existiendo foliaciones sobre las que tal invariante es distinto de cero según probó Thurston (1972) o mediante la caracterización métrica dada a este invariante por Reinhart y Wood (1973).

El teorema de Bott nos permite construir ciertas clases características para foliaciones, las denominadas *"clases características secundarias o exóticas"*. Tal construcción, de hecho, Bott la realiza para cualquier foliación $\mathcal{F}$ y aplicación clasificante $f_{\mathcal{F}}$ $M \longrightarrow B\Gamma_q^\infty$ demostrando que existe un morfismo canónico $\varphi : H^*(WO_q) \longrightarrow H^*(B\Gamma_q^\infty ; \mathbb{R})$ que factoriza la aplicación $\varphi_{\mathcal{F}} : H^*(WO_q) \longrightarrow H^*_{\text{de Rham}}(M;\mathbb{R})$ determinada por la conexión plana asociada a una foliación a través de la aplicación clasificante $f_{\mathcal{F}} : M \longrightarrow B\Gamma_q^\infty$ de modo análogo a como establece el teorema de existencia de Thurston, y en donde WO_q es el álgebra diferencial graduada $\Lambda(u_1, u_3, \ldots, u_{2\ell-1}) \otimes P_q(c_1, \ldots, c_q)$ producto tensor del álgebra exterior en ℓ variables por el álgebra de poli-

nomios truncados en el grado 2q, siendo ℓ la parte entera de q/2, cuya diferencial viene dada por

$$\delta(u_{2i-1} \otimes 1) = 1 \otimes c_{2i-1} \quad y \quad \delta(1 \otimes c_j) = 0$$

álgebra que es una sub-álgebra diferencial graduada de la dada por

$$W_q = \Lambda(u_1, u_2, \ldots, u_q) \otimes P_q(c_1, \ldots, c_q)$$

con igual diferencial, que surge asociada a toda foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q sobre M con fibrado normal a $\mathcal{F}$ trivial.

En cierto sentido el considerar estas álgebras viene motivado intuitivamente por la idea de obtener en teoría de foliaciones una relación análoga a la existente entre la cohomología del álgebra de Lie de un grupo de Lie G y las clases características de los fibrados con el grupo estructural discreto G.

Precisamente esta consideración es la que lleva, en la construcción homológica de la factorización indicada del morfismo

$$\varphi_{\mathcal{F}} : H^*(WO_q) \longrightarrow H^*_{\text{de Rham}}(M;\mathbb{R})$$

para foliaciones de codimensión q, a servirse de la cohomología de Gelfand-Fucks (1972) o cohomología del álgebra de Lie de los campos de vectores formales sobre $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q} = \mathbb{R}\left[\left[x_1, \ldots, x_q\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_q}\right]$. De hecho puede pensarse que $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q}$ es el "algebra de Lie del pseudo-grupo Γ_q", en el orden de ideas de los trabajos de Van Est.

Véámoslo con algo de detalle: Consideremos el ideal $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q,\{0\}}$ de los elementos de $\mathbb{R}^q$ cuyos jets de orden infinito se anulan en el origen de $\mathbb{R}^q$, y sea $\mathcal{X}_o = \mathcal{X}_{\mathbb{R}^q}/\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q,\{0\}}$. Si designamos $C^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ la correspondiente coálgebra de Lie, ésta es un álgebra diferencial graduada, con diferen-

cial dada por $\delta : C^p(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ donde $c \longmapsto \delta c$ es tal que:

$$\delta c(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_q)$$

El derivado $H^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ es la denominada cohomología de Gelfand-Fucks de $\mathbb{R}^q$. Junto a $C^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ se considera $C^*(\mathcal{X}_o)$ con la diferencial inducida y $C^*(\mathcal{X}_o, O_q)$ que está constituida por cocadenas de $\mathcal{X}_o$, O_q-invariantes que se anulan siempre que alguno de sus argumentos pertenece al álgebra de Lie $\mathcal{O}_q$ del grupo ortogonal O_q. Gelfand-Fucks demostraron que: "existen morfismos de las álgebras diferenciables graduadas $W_q \longrightarrow C^*(\mathcal{X}_o)$ y $WO_q \longrightarrow C^*(\mathcal{X}_o, O_q)$ que inducen isomorfismos entre las álgebras de cohomología correspondientes": $H^*(W_q) \cong H^*(\mathcal{X}_o)$ y $H^*(WO_q) \cong H^*(\mathcal{X}_o, O_q)$. Donde a $H^*(\mathcal{X}_q)$ se le dice cohomología del álgebra topológica $\mathcal{X}_q$. J. Vey en 1971 determinó una base de $H^*(W_q)$ representada por cociclos $\{z_{IJ}\}$ cuyo producto siempre es nulo

$$z_{(I,J)} = [u_{j_o} \wedge u_{j_i} \wedge \ldots \wedge u_{j_k} \otimes c_1^{i_1} \ldots c_q^{i_q}]$$

con $I = (i_1, \ldots i_q)$ y $J = (j_o, \ldots, j_k)$ con $1 \leq j_o < j_1 < \ldots < j_k \leq q$, $k \geq o$;

$j_o + \sum_{h=1}^{q} \ell_{i_h} > n+1$, $\sum_{h=1}^{q} h.i_h \leq n$, e $i_h = 0$ para $h < j_o$.

Ello completó los resultados de Gelfand Fucks para la determinación de $H^*(WO_q)$ así como de $H^*(WU_q)$ (esta última para la determinación de las clases características secundarias sobre el cuerpo complejo. Uq el grupo unitario de las matrices σ sobre $\mathbb{C}$ con q x q elementos, tales que $\bar{\sigma} = {}^t\sigma^{-1}$). Entre estos resultados cabe destacar los siguientes:

a) $H^*(\mathcal{X}_o)$ es de dimensión finita.

b) $H^j(\mathcal{X}_o) = 0$ para $j < 2q+1$ y $j > q^2+2q$

c) para $n \leq 2q$, $H^*(\mathcal{X}_o, O_q)$ es el anillo engendrado por las clases universales de Pontrjagin.

d) existen muchas clases secundarias en la región $2q+1 \leqslant j \leqslant q^2+2q$

e) la estructura multiplicativa en grados elevados es trivial.

Gelfand Fucks dan una interpretación geométrica de tales resultados, demostrando que $H^*(\mathcal{X}_o)$ es la cohomología real del espacio $\hat{E}U_q$ obtenido como la restricción del U_q-fibrado universal (EU_q, π, BU_q, U_q), al esqueleto 2q-dimensional de BU_q.

Para $H^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ Gelfand-Fucks consideran una cierta filtración en $C^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ distinguiendo un complejo diagonal sobre el que operan aplicando las técnicas standard propias a las sucesiones espectrales. Guillemin y Lolasick para calcular la cohomología de este complejo diagonal introdujeron un complejo doble que permite asociar $H^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ isomórficamente a la cohomología real del espacio de las secciones de un cierto fibrado $(E, \pi, \mathbb{R}^q, \hat{E}U_q)$.

Intuitivamente la relación entre las clases características de las foliaciones y la cohomología de los campos vectoriales, siguiendo a Haefliger, puede establecerse así: Sea M una variedad diferenciable, consideremos la variedad diferenciable producto $M \times \mathbb{R}^q$. Se consideran sobre $M \times \mathbb{R}^q$ foliaciones de codimensión q transversas a las fibras de la proyección $pr_1: M \times \mathbb{R}^q \longrightarrow M$. Dos de tales foliaciones, $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$, son integralmente homótopas si existe una foliación $\mathcal{F}$ de igual codimensión sobre $[0,1] \times M \times \mathbb{R}^q$ transversa a la proyección sobre $[0,1]xM$ tal que sobre $\{0\} \times M \times \mathbb{R}^q$ y $\{1\} \times M \times \mathbb{R}^q$ induce respectivamente las foliaciones $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$. Dada una foliación $\mathcal{F}$ se le asocia un morfismo $\varphi_{\mathcal{F}}$ del álgebra diferencial graduada de las formas sobre M, $\Lambda(M)$ del modo siguiente:

Para cada $c \in C^p(\chi_{\mathbb{R}^q})$ si $\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_p \in \chi(M)$ son tales que $\bar{\tau}_i(x) = v_i \in T_xM$, se considera la elevación de v_i a un campo de vectores $\bar{v}_i$ tangentes a la foliación a lo largo de $\{x\} \times \mathbb{R}^q$, su proyección sobre $\mathbb{R}^q$ determina un campo vectorial $\tilde{v}_i^x \in \chi(\mathbb{R}^q)$. Entonces la imagen de c por $\varphi_{\mathcal{F}}$, $\varphi_{\mathcal{F}}(c)$ en $\Lambda(M)$ es la p forma, $\varphi_{\mathcal{F}}(c) \in \Lambda^p(M)$ que asocia a los campos de vectores $\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_p$ la función diferenciable $\varphi_{\mathcal{F}}(c)(\bar{\tau}_1 \ldots, \bar{\tau}_p) = c(\bar{v}_1^x, \ldots, \bar{v}_p^x)$

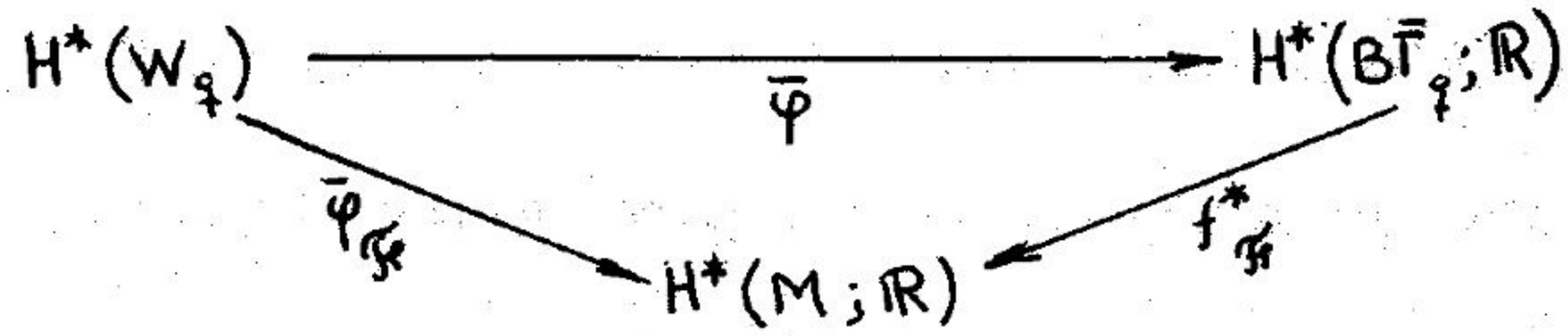
Se dispone así de un homomorfismo:

$$\varphi_{\mathcal{F}} : C^*(\chi_{\mathbb{R}^q}) \longrightarrow C^*_{\text{de Rham}}(M)$$

que al ser compatible con los operadores diferenciales de ambas álgebras pasa al cociente para definir el llamado morfismo característico

$$\bar{\varphi}_{\mathcal{F}} : H^*(W_q) \longrightarrow H^*(M;\mathbb{R})$$

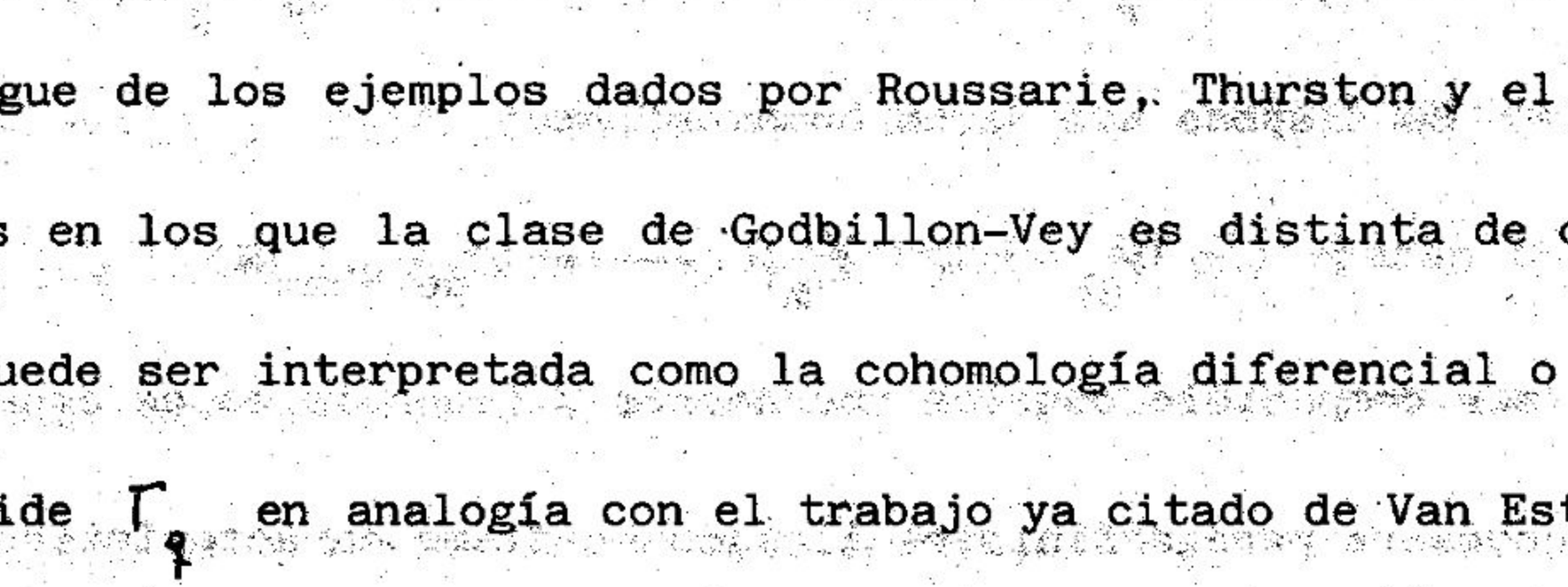
salvo los isomorfismos entre $H^*(W_q)$ y $H^*(\chi_{\mathbb{R}^q})$. Sigue así que $\bar{\varphi}_{\mathcal{F}}$ sólo depende de la clase de homotopía de $\mathcal{F}$ transversa al factor $\mathbb{R}^q$ en $M \times \mathbb{R}^q$. De ello sigue que existe una bien definida aplicación $\bar{\varphi} : H^*(W_q) \longrightarrow H^*(B\bar{\Gamma}_q;\mathbb{R})$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:



donde $B\bar{\Gamma}_q$ clasifica las estructuras foliadas con fibrado normal trivial.

Considerando la restricción de esta aplicación a las cocadenas O_q-invariantes, previo paso al espacio de referencias ortonormales sobre el fibrado normal a la foliación $\nu(\mathcal{F})$ respecto alguna métrica, se puede repetir el proceso anterior y obtener análogamente un morfismo característico, que designamos aún $\varphi_{\mathcal{F}}$, que dependiendo sólo de la clase de homotopía de $\mathcal{F}$ determina la aplicación φ correspondiente, haciendo conmutativo el diagra-

ma:



En ambos diagramas la Im(φ) es el conjunto de clases características exóticas universales o clases secundarias universales. Que en general Im(φ) $\neq$ 0 sigue de los ejemplos dados por Roussarie, Thurston y el propio Bott, ejemplos en los que la clase de Godbillon-Vey es distinta de cero. - Esta Im(φ) puede ser interpretada como la cohomología diferencial o continua del grupoide Γ_q en analogía con el trabajo ya citado de Van Est, o la cohomología contínua de un grupo de Lie en el sentido de Hu.

La construcción de $\varphi_{\mathcal{F}}$ que hemos expuesto siguiendo a Haefliger, de hecho, como hemos detallado, consiste en asociar a un campo $\xi \in \chi(M)$ el campo $\bar{v}^x \in \chi(\mathbb{R}^q)$ lo que se puede considerar como el valor $\theta(\xi_x)$ de un elemento $\theta \in A^1(M;\mathbb{R}^q)$ del espacio de las 1-formas sobre M con valores en $\mathbb{R}^q$. Esta 1-forma θ se denomina *"forma de conexion asociada a* $\mathcal{F}$ *"*. Todas estas construcciones pueden generalizarse a otras álgebras $\mathcal{g}$ de campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^q$, por ejemplo $\mathcal{g}$ podría ser el álgebra de Lie de un grupo de Lie actuando efectivamente sobre M, o bien la subalgebra de χ_{R^q} de los campos de vectores que dejan invariante un volumen o forma simplectica sobre M, y obtener el correspondiente morfismo característico y clases características.

Otra relación, que a su vez proporciona una motivación geométrica más, justificando el interés que en topología algebraica se dedica al estudio del espacio de lazos iterado, resulta si en lugar de considerar χ_{R^q},

se considera una subálgebra de Lie de los campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^q$ con soportes compactos. Haefliger demostró en 1970 que *"la cohomología del álgebra de Lie de los campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^q$ con soporte compacto es isomorfa a la cohomología del q-ésimo espacio de lazos iterado de un ramo de esferas"*. En realidad este resultado aparece como consecuencia de los resultados análogos de Thurston sobre el tipo de homotopía del espacio clasificante de Haefliger para foliaciones, resulta-do que a su vez generaliza uno obtenido por Mather en 1971 para el caso de codimensión $q = 1$.

Conviene señalar aquí que todos estos aspectos cohomológicos asociados a las clases características exóticas suelen pasar desapercibidos en su mayoría cuando el estudio de la foliación se realiza apoyándose en una superestructura geométrica, por ejemplo Morita, en 1978, estableció la nulidad de casi todas las clases características secundarias de las foliaciones conformes y proyectivas, mientras que en el caso de las foliaciones riemannianas ya hemos visto (Pasternack) que las clases características exóticas son todas nulas.

Terminamos esta breve reseña sobre las clases características de las foliaciones señalando que, entre ellas, es posible distinguir unas que son variables. El fenoméno fué descubierto por Thurston, en 1972, al demostrar que sobre S^3 existía una familia 1-paramétrica de foliaciones de codimensión 1 para las que la clase de Godbillon-Vey varía cuando el parámetro lo hacía. Roussarie así mismo lo verifica sobre la variedad compacta $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$, con Γ un subgrupo discreto, al considerar la foliación inducida por el álgebra de Lie de las matrices triangulares en $SL(2,\mathbb{R})$. El pro-

pio Bott en 1970 observó que, en el caso analítico complejo, la foliación sobre $\mathbb{C}-\{0\}$, $\mathcal{F}_\lambda = \left\{ \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right\}$ tiene como invariante de Godbillon-Vey:

$$\int_{S^3} \omega(\mathcal{F}) = \mathbf{C}\left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2 \right\}$$

que por tanto varía continuamente con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, pero no pudo afirmar nada en el caso real.

Junto a esta situación, Heitsch en 1973 ha demostrado que ciertas clases características son rígidas. Precisamente para la codimensión q, son rígidas las que se obtienen como imágenes por φ de los elementos de $H^*(\mathcal{X}_q)$, (resp. $H^*(\mathcal{X}_q, 0_q)$) que son imágenes de los de $H^*(\mathcal{X}_{q+1})$ (resp. $H^*(\mathcal{X}_{q+1}, 0_{q+1})$) por la inclusión canónica. Así recientemente (1982) Hurder estableció la independencia de las clases secundarias rígidas para foliaciones holomorfas. Muchas de las restantes clases características variarían en función de los parámetros de que dependiera la foliación.

La variación de las clases características secundarias sigue por variación o deformación de la foliación cuando ésta depende de una familia de parámetros. Por ejemplo y en particular, dadas dos foliaciones $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ de igual codimensión q sobre una variedad M, por una deformación de una en otra entenderemos una familia 1-paramétrica $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,1]$, de foliaciones de codimensión q sobre $M \times [0,1]$ transversas a las fibras sobre $[0,1]$. Así si $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ son homotópicas están relacionadas por una deformación, pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, en 1977, Fuchs demostró que todas las clases características de las foliaciones de Bernstein-Rosen-

feld y Boot-Haefliger eran variables, naturalmente excepto las rígidas. En 1978 Heitsch establece sobre varios ejemplos, el hecho de que la variación tiene lugar de modo linealmente independiente. Rasmussen también en 1978 prueba que algunas de las clases exóticas descomponibles pueden variar y, en 1979, construyó sobre una variedad M de dimensión 5 una foliación de codimensión 2 para la que las clases características secundarias varían de modo contínuo. Finalmente en 1981, Hurder extiende los resultados de Heitsch y prueba, entre otros resultados, que todas las clases secundarias descomponibles de las foliaciones riemannianas son linealmente independientes. Señalemos que si hemos afirmado que dos foliaciones $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$, en general, pueden estar relacionadas por una deformación sin ser homotópicas, es porque *las clases características secundarias* de una foliación diferenciable sobre una variedad son *invariantes de las clases de concordancia de la foliación* (*).

Estas situaciones confirman la necesidad e interés de abordar el estudio homotópico y cohomológico de las foliaciones sin superestructura geométrica alguna. Por otra parte existen estudios en los que se analiza la incidencia de la topología de la foliación en sus clases características, como los realizados por el propio Hurder en una reciente publicación, lo que, a su vez, le permite construir muchos ejemplos de foliaciones con clases características secundarias universales no nulas. Ello confirma una vez

---

(*) Recuérdese que la noción de concordancia es más amplia que la de homotopía en cuanto que a la familia $\mathcal{F}_t$ no se le exige que sea transversa a las fibras $M \times \{t\}$ para $t \in [0,1]$.

más nuestra idea y programa de trabajo que venimos sosteniendo desde que nos introdujimos en el tema, con los métodos de la Topología Algebraica, hacia 1960 en el seminario de Geometría y Topología del Prof. Ch. Ehresmann. Uno de los procedimientos que quizás permita desarrollar un tratamiento y estudio completo directo, independiente de superestructura geométrica alguna, análogo al hoy existente para la teoría de los espacios fibrados, debe de apoyarse en el estudio preciso y caracterización topológica completa del espacio de las hojas $Q = M/\mathcal{F}$ o espacio transverso asociado a una variedad foliada $(M, \mathcal{F})$, bien determinando su relación íntima con el fibrado normal $\nu(\mathcal{F}) = TM/\tau\mathcal{F}$, bien precisando un tipo de invariantes homotópicos asociados a los tipos de hojas que puede admitir una foliación. El problema extraordinariamente ambicioso sólo podrá resolverse, si acaso, mediante aproximaciones sucesivas, pero esas aproximaciones sería de desear se realicen con la introducción de condiciones topológicas o topológico diferenciales sin super estructura geométrica alguna.

Señalemos que el estudio de Gelfand-Fucks de $H^*(\mathcal{X}_{\mathbb{R}^q})$ ha sido extendido por Roger en 1980 demostrando que la cohomología del álgebra de Lie de los campos de vectores de contacto formales es de dimensión finita en todo grado y nula a partir de uno en adelante, resultados que simultáneamente eran obtenidos por Fucks de modo independiente. No obstante se nos comunica mientras escribimos esta memoria, que el problema de la cohomología de las álgebras de Lie de los campos de vectores de contacto formales acaba de ser *completamente resuelto* en 1.983 por B.L. Feigin, un alumno de D. B. Fucks del Laboratorio de Métodos Matemáticos en Biología de la Universidad de Mos-

cú, estudio que no ha sido aún publicado.

G-estructuras, cohomologías y clasificación

Entre las estructuras geométricas globales que más se presentan en el análisis sobre variedades diferenciables se encuentran las denominadas G-estructuras integrables con G un grupo de Lie, por ejemplo se tiene las ordinarias con $G = GL(n,\mathbb{R})$ ó $G = GL(n,\mathbb{C})$. Pero también como es sabido, las foliaciones son un tipo de G-estructura integrable, con G un subgrupo de los anteriores que, precisamente en su representación matricial está constituido por matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & c \\ o & b \end{pmatrix}$, donde $a \in GL(p,\mathbb{R})$, $b \in GL(q,\mathbb{R})$ y c una matriz p x q cualquiera y o la matriz p x q nula, con p + q = n. Haefliger en 1958 en su tesis observa que en toda foliación se puede introducir una estructura adicional controlando el modo en que las hojas están relacionadas dando así lugar a las denominadas *"estructuras --- geométricas transversales"* a una foliación, lo que supone el que las funciones de transición transversas a $\mathcal{F}$ tomen valores b en un subgrupo de Lie G del $GL(q,\mathbb{R})$ (o del $GL(q,\mathbb{C})$ en el caso de las transversalmente holomorfas). De modo análogo mediante apropiada elección del grupo G se obtiene la noción de foliación conforme, simpléctica, etc. Como ya hemos indicado el que primero abordó el estudio de las foliaciones apoyándose en una estructura geométrica diferencial extra, precisamente introduciendo la noción de métrica casi-fibrada, fué Reinhart quien, justamente con el nº 99 del Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, acaba de publicar una completa fundamentación y puesta a punto del método y principales resultados por éste obtenidos.

De todos modos creemos que el germen del método se encuentra ya en la comunicación de Ehresmann al Coloquio de Topología del CBRM en Bruselas de 1950.

Ya hemos hecho notar anteriormente cómo los resultados sobre las clases características están fuertemente condicionados por la superestructura geométrica, aún cuando la índole del problema sea topológica diferencial y parezca natural esperar deba poderse resolver un día completamente sin apoyarse en superestructura geométrica alguna. Volveremos sobre este planteamiento en el apartado próximo.

El refinamiento del resultado de Bott por Pasternack, ya citado, es un ejemplo de la notoria utilidad que para caracterizar efectivamente las foliaciones y conseguir una clasificación de ellas ha proporcionado a la teoría de foliaciones, desde casi los primeros trabajos, la introducción de una estructura extra: métricas casi fibradas de Reinhart, geometría transversa de Molinó, G-foliaciones de Kamber-Tondeur, condiciones de minimalidad de Sullivan, etc.

En España es en este contexto donde se sitúan los trabajos de investigación en este campo bajo la pionera y extraordinaria acción y dirección del Prof. D. Enrique Vidal Abascal. Los trabajos de la Escuela de Santiago de Compostela se centran pues en el "estudio de determinación de invariantes homotópicos o geométricos para foliaciones provistas de una superestructura geométrica". Los primeros trabajos sobre el tema por el propio Prof. Vidal Abascal de 1955 a 1966 vienen ligados a la Geometría Integral tal como quedó estructurada por el Prof. Santaló (*). En la tesis del Prof.

(*) Finalizada esta memoria y entregada al Ilmo.Sr. Académico que ha de efectuar la recepción, nos enteramos, y nos es grato consignar en la edición, que el día 22 de junio de 1983 le fué asignado al Prof.D. Luis A.Santaló Sors el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica 1983.

Echarte (1965) se aborda el problema de extender a los espacios de Riehmann los resultados relativos a la Geometría Integral desarrollados por Chern en su trabajo de 1942 titulado *"Geometría Integral en un espacio de Klein"*. Como dice el propio Prof. Echarte en la introducción a su tésis *"desde un principio el objetivo que nos propusimos fué pasar a un espacio conveniente en donde las figuras que se desea medir sean subvariedades integrales de un sistema de Pfaff completamente integrable, para lograr una teoría que comprendiese como caso particular la de Chern relativa a los espacios homogeneos"*. El problema es así próximo al estudiado por el Prof. Vidal Abascal (1966) para determinar las condiciones necesarias y suficientes para que el espacio transverso a la foliación, $M/\mathcal{F}$, posea una medida dada por una forma diferencial ω sobre M. En ambos el papel jugado por la estructura transversa de la foliación es esencial.

En su tésis el Prof. Naveira (1968) sigue igual pauta al estudiar la cohomología básica, en este caso considerando la superestructura, introducida por Reinhart (1959), conocida como foliaciones con métrica casi-fibrada, es decir variedades foliadas que admiten una métrica cuya expresión local es la de la forma $ds^2 = \Sigma g_{ij}(x,y)\,\omega^i\omega^j + \Sigma g_{\alpha\beta}(y)dy^\alpha dy^\beta$ por lo que en cierto sentido localmente son foliaciones que se comportan semejantemente a fibraciones provistas de una métrica. Recientemente Escobales (1982) ha dado condiciones suficientes para que una variedad foliada compacta que admite una métrica casi-fibrada sea localmente isométrica a un producto. Destaquemos aquí la clasificación que de las variedades casi-producto hace Naveira (1982) y el trabajo relacionado desarrollado por Montesinos (1982). Si nues-

tra visión de la teoría de las foliaciones ha perseguido abordar su estudio directamente, es decir buscando realizar un estudio de los invariantes homotópicos para foliaciones sin apoyarnos en superestructura alguna, nuestra relación con el grupo de Santiago, y proximidad a esta idea del tema en estudio por el Prof. Vidal Costa, nos llevaron a dirigir su tesis en la que se introdujeron unas ciertas conexiones que generalizan las de Walker y Willmore para variedades casi producto, conexiones, por otra parte, muy relacionadas con las "basic conections" de Bott para establecer su teorema de integrabilidad, o las denominadas conexiones transversas proyectables introducidas por Molinó. Destaquemos también la tesis del Prof. Cordero (1971) dirigida por el Prof. Vidal Abascal. Cordero realiza un estudio semejante al de la cohomología de De Rham pero asociada a una descomposición de la diferencial exterior, originada por la estructura casi producto, de modo análogo a como Dolbeault se sirve de la descomposición de Hodge originada por la estructura compleja, es decir determina un operador diferencial sobre las formas escalares tal que la anulación de su cuadrado es equivalente a la integrabilidad de una sola de las dos distribuciones que establecen la estructura extra. De tipo análogo es la tesis del Dr. Benome Dopico (1976) y, en general, la mayoría de los trabajos de la escuela de Santiago de Compostela sobre foliaciones. La problemática que el planteamiento dual del tema, a lo E.Cartan diríamos, en el orden de ideas de Martinet, Lutz, etc., en España está siendo también objeto de investigaciones entre las que cabe destacar las de Turiel y Varela.

Señalemos que un resultado análogo al del Prof. Cordero fué obte-

nido independientemente por el Prof. Veismann en 1971, quien opera también sobre una cohomología a lo Hodge con coeficientes en un haz determinado por la distribución integrable de las dos que determinan la estructura casi producto. La limitación de esta cohomología, fruto de su relación con la estructura casi producto, es que no se halla construida sobre una resolución canónica por formas diferenciales. Una resolución semejante es utilizada por Heitsch en 1975, y por Gomez Mont en 1980, en este caso operando sobre foliaciones transversalmente holomórfas.

El primer trabajo de la Escuela de Santiago de Compostela, que apartándose de la anterior línea más se ciñe a nuestra visión del problema, es decir la de abordarlo sin estructura geométrica extra, se halla en la tesis del Prof. Masa (1973), alumno también del Prof. Vidal Abascal. No obstante como dice Masa: "es una primera fase" y en ella se "centra más en el estudio de una sucesión espectral asociada a la cohomología de la foliación" que a estudiar la estructura foliada misma. Quízás el interés de la idea de la construcción del Prof. Masa podamos descubrirla con la cohomología de Sarkaria (1974). Esta cohomología se construye sobre una resolución canónica del haz de gérmenes de las formas invariantes transversas sobre la variedad, pero se refiere a foliaciones de codimensión 1.

Otro modo de operar también desarrollado por la Escuela de Santiago, sigue a partir del concepto de multifoliación introducido por Kodaira-Spencer en 1961. Recientemente esta linea de trabajo se ha centrado en la consideración de familias o banderas de estructuras foliadas sobre una variedad foliada, siguiendo a Feigin y, en particular, la que se ha dado en

llamar *subfoliación*. Sobre las subfoliaciones el Prof. Cordero, el Prof. Masa y alguno de sus alumnos están obteniendo interesantes resultados, en particular respecto a sus clases características. No obstante ello supone considerar así mismo una G estructura extra como hemos señalado al principio de este apartado. Un tipo de foliaciones que puede considerarse en este contexto es el introducido por Blumenthal en 1979 en la variedad q dimensional B sobre la que se "modela" la foliación de codimensión q. Blumenthal introduce una estructura de espacio homogéneo G/K exigiendo que las funciones de transición sean G translaciones de G/K. Blumenthal a estas foliaciones las denomina *transversalmente homogéneas*. No obstante para su estudio considera una métrica riemanniana G invariante sobre G/K. Los ejemplos de Roussarie de $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ -foliaciones son de este tipo.

Señalemos que en 1982 Masa parece perseguir de nuevo el estudio directo topológico habiendo realizado, en unión de uno de sus discípulos, un trabajo de análisis de las cohomologías de Cordero, Veisman, Heitsch ó cohomología diferenciable de una foliación, la discreta de Shikata y la continua de Mostov (Harvard 1975) determinando relaciones entre ellas a nivel de las correspondientes sucesiones espectrales.

De los diferentes estudios sobre foliaciones con una estructura geométrica extra, es de destacar el ya citado de Molinó sobre la denominada "geometría riemanniana transversa de las foliaciones" y que corresponde a la O(q) estructura transversal (foliaciones con métrica casi fibrada de Reinhart), compendio del cual apareció recientemente publicado en el vol. 85 (1982) de los Proceed. on the Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen, cuyo resul-

tado principal consiste en dar una *"clasificación completa de las foliaciones riemannianas de codimensión* ≤ 3 *sobre las variedades compactas conexas"* así como *"una descripción precisa del espacio de las adherencias de las hojas en el caso en que la variedad es simplemente conexa"*. Como indica Molinó la clave del estudio se apoya en el *espacio librado principal de las referencias transversas* $(e_T, M, p_T, O(q))$ provisto de la foliación relevada que resulta ser *transversalmente paralelizable*. Otro concepto, que resulta de interés práctico en la discusión final para caracterizar el espacio de hojas, es el de *morfismo con pliegue* de codimensión l, que introduce entre las variedades de Sataké, y le resulta un poderoso útil en el logro de la clasificación.

Aunque la índole de esta memoria nos excusaría entretenernos en ello, el interés del resultado entendemos justifica el que del modo más breve posible presentemos aquí ambos conceptos.

Según Kamber-Tondeur todo espacio fibrado principal sobre una variedad foliada $(M, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ de codimensión q, admite canónicamente una foliación relevada. Si suponemos que se trata del fibrado principal de las referencias transversas, $(E_T, M, p_T, GL(q,\mathbb{R}))$ luego en el que un "punto" de E_T, z, es un isomorfismo: $z : \mathbb{R}^q \longrightarrow \nu(\mathcal{F})_{p_T(z)}$ fibra en $x = p_T(z)$ del $\nu(\mathcal{F})$ fibrado normal o transverso a $\mathcal{F}$, resulta que la foliación relevada $\mathcal{F}_T$ de $\mathcal{F}$ a E_T sigue de la conmutatividad del diagrama asociado al

$$\begin{array}{ccc} TE_T & \xrightarrow{\pi_T} & E_T \\ \downarrow{\scriptstyle p_{T*}} & & \downarrow{\scriptstyle p_T} \\ TM & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

functor espacio tangente y tomar como subfibrado del (TE_T, π_T, E_T) definidor de la foliación relevada aquél que, en cada $z \in E_T$ tiene como fibra

$P_z \hookrightarrow T_z E_T$ el subespacio vectorial del $T_z E_T$ tal que $p_T*|_{P_z}$ sea un isomorfismo de P_z sobre $T_{p(z)}(\mathcal{L}_{p(z)})$. En estas condiciones, dar una G-*estructura transversa* sobre una variedad foliada con $\mathcal{F}$ de codimensión q, es dar: un subgrupo de Lie G del GL(q, $\mathbb{R}$) y con él un subfibrado principal (e_T, M, p_T, G) del $(E_T, M, p, GL(q, \mathbb{R}))$ que a su vez será foliado en la foliación inducida por $\mathcal{F}_T$ sobre él. Si recordamos que, según Conlon, un paralelismo transverso sobre $(M, \mathcal{F})$ es dar una $I_{\mathbb{R}}q$ estructura transversa (con $I_{\mathbb{R}}q$ el subgrupo identidad del GL(q, $\mathbb{R}$), uno de los resultados obtenidos por Molinó implica que $(e_T, M, p_T, O(q), \mathcal{F}_T)$ es trivial o que es transversalmente paralelizable.

El otro concepto que destacamos intervenía en el logro de la clasificación obtenida por Molinó es el de *morfismo con pliegue* entre dos variedades de Sataké. Molinó adapta a su estudio la definición de esta última diciendo que, una *variedad de Sataké de dimensión* q *es un espacio topológico* W *separado, conexo, con base de abiertos numerable, provista, para todo* x, *de una vecindad abierta* U de x *y de un homeomorfismo:* $\varphi_x : U_x \longrightarrow \Omega_o$ *de* U *sobre el cociente de una vecindad abierta de* 0 *en* $\mathbb{R}^q$ *por un grupo finito de difeomorfismos, con la condición de que: "para todo par* x, x' en W, $\varphi_{x'} \cdot \varphi_x^{-1}$ se obtiene por paso al cociente a partir de un difeomorfismo local de $\mathbb{R}^q$, en el dominio en que está definido".

Demuestra que precisamente el espacio de las hojas $M/\mathcal{F}$ de una foliación riemanniana con hojas compactas está provista de una estructura de variedad de Sataké, compacta, de dimensión la codimensión de la foliación. Recordada la noción local de morfismo entre variedades de Sataké por

paso al cociente de una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}^q$, define la noción de "pliegue de codimensión k", de una variedad de Sataké en otra, como aquella que localmente se obtiene por paso al cociente de una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^q$ sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^q$ del tipo $(x,y) \longmapsto (||x||, y)$ (la *línea de pliegue* alrededor de la que se efectua el pliegue viene determinada por los puntos de $R^{k+1} \times R^q$ de la forma (0, y)), de modo que un morfismo con pliegue de codimensión k aparece como la composición de un morfismo y de un pliegue de codimensión k.

La consideración de los distintos valores que puede tomar la codimensión de $(e_T, \mathcal{F}_T)$, $q_T = q(q+1)/2$, y la de la dimensión básica de esta foliación y la foliación $\bar{\mathcal{F}}$ definida por las adherencias de las hojas, el abierto U complementario en M al conjunto de las hojas compactas, junto al valor de holonomía de una hoja, y el tipo de variedad de Sataké que es el espacio de hojas de la foliación más las orientaciones, le permite establecer el enunciado:

"Si $(M, \mathcal{F})$ es una foliación riemanniana de codimensión ≤ 3 sobre una variedad compacta conexa, existe una aplicación continua $\pi : M \longrightarrow W$, de M sobre una variedad de Sataké compacta tal que la preimagen de un punto cualquiera de W es la adherencia de una hoja de $\mathcal{F}$. Si $(M, \mathcal{F})$ es regular, π es una submersión de variedades de Sataké. Sino π es una submersión con pliegue cuya línea de pliegue es el complementario del abierto regular U de $(M, \mathcal{F})$. Los únicos casos no regulares son de hecho los siguientes:

i) $q = 2$; $W = [0.1]$; *existen dos o una hojas compactas según que* $\bar{\mathcal{F}}_U$ *sea o no transversalmente orientable.*

ii) q = 3; W = [0,1] ; *existen dos o una hojas compactas según que* $\bar{\mathcal{F}}_U$ *sea o no transversalmente orientable, el pliegue alrededor de las hojas compactas es de codimensión 2.*

iii) q = 3; W = [0,1] ; *existen dos o una adherencia singular (de codimensión 2 en M) según que* $\bar{\mathcal{F}}_U$ *sea o no transversalmente orientable. El pliegue alrededor de las adherencias singulares es de codimensión 1.*

iv) q = 3, W *es de dimensión 2; las hojas compactas engendran una subvariedad de codimensión 2 de M. El pliegue, de codimensión 1, tiene por línea de pliegue esta subvariedad".*

En la demostración junto a las consideraciones previas al enunciado se sirve de los resultados generales siguientes:

a) Sea e_T el fibrado de las referencias transversas ortonormales, $\mathcal{F}_T$ la foliación relevada sobre e_T. Entonces $(e_T, \mathcal{F}_T)$ es transversalmente *paralelizable.* Las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}_T$ son las fibras de una fibración localmente trivial $\pi_T: e_T \longrightarrow W_T$. La acción por la derecha de $O(q, \mathbb{R})$ sobre e_T se proyecta en una acción por la derecha sobre W_T cuyo espacio de órbitas se identifica el cociente de M por la relación de equivalencia definida por las adherencias de las hojas.

b) Las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$ subvariedades de M; la foliación inducida por $\mathcal{F}$ sobre una de estas adherencias es una foliación *transversalmente homogénea* en el sentido de Blumenthal.

c) Existe sobre M un haz localmente trivial $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{F})$ de álgebras de Lie de gérmenes de isometrías infinitesimales transversas, cuyas "órbitas transversas" son las adherencias de las hojas. La fibra tipo de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{F})$

es un álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{G}^-$ cuya opuesta se dice álgebra de Lie estructural de $(M,\mathcal{F})$. Si M es completamente conexa, $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{F})$ es trivial y $\mathfrak{G}^-$ abeliana.

En la obtención de este tercer punto reobtiene a su vez todos los resultados de Fedida sobre álgebras de Lie.

Podría decirse que todos estos estudios, salvados los resultados geométricos, tratan de algún modo de salvar la limitación que en teoría de foliaciones, frente a la de fibraciones, supone la no existencia de una variedad base en la adopción de un método cohomológico del tipo del de la sucesión espectral, donde sólo se dispone del fibrado normal $\nu(\mathcal{F}) = TM/\tau\mathcal{F}$ a la foliación habida cuenta del resultado de Haefliger-Thurston y Mather. El espacio que podría jugar el papel de variedad base es el denominado espacio transversal $Q = M/\mathcal{F}$ (o espacio de las hojas), pero éste sólo en casos muy particulares y con adecuadas restricciones o condiciones permite ser considerado de modo constructivo. El problema general sigue abierto, aunque si se observa cómo en todos los resultados hasta hoy obtenidos interviene la estructura transversa mediante el fibrado normal $\nu(\mathcal{F})$ a la foliación, nos parece natural el que la formalización y solución definitiva del problema deba buscarse analizando y determinando relaciones geométricas y topológicas entre ν y Q. Quizás ello se logre a través de la noción de QF-variedad y su cohomología de escalas introducidas por Pradines recientemente ó mediante la introducción de invariantes homotópicos nuevos para las hojas como pretendemos realizar en colaboración con los Profs. Dominguez y Hernandez, distinguiendo particulares propiedades topológicas comunicadas por estos últi-

mos al Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris en 1981 en nota presentada por el Prof. H. Cartan.

Estructura transversa

Hemos visto hasta ahora que la estructura transversa juega un papel fundamental en el estudio de las foliaciones, de modo análogo a cómo lo juega en el estudio de los sistemas dinámicos. Precisamente es en ella que hay que buscar la razón que condujo a Poincaré y Birkhoff a estudiar los difeomorfismos (homeomorfismos) de las superficies para desarrollar más fácilmente la teoría cualitativa o geométrica, como han demostrado los estudios posteriores de Denjoy, Kaplan, etc.

El método ha resultado eficaz no sólo en los sistemas dinámicos en el plano o foliaciones del plano, sino incluso en el estudio de las foliaciones de codimensión uno sobre una variedad abierta n dimensional con $n \geq 3$, quizás ello se deba a que se opera en ambos casos con 1 campos transversos o curvas transversas a la foliación, lo que supone el que, en este caso, se disponga de una bien determinada relación entre el fibrado normal a la foliación $\nu(\mathcal{F})$ y el espacio de las hojas $Q = M/\mathcal{F}$. Por ejemplo, en el caso de una foliación del plano, Haefliger y Reeb en 1957 demostraron ya que *"El espacio cociente Q es una variedad de dimensión 1, conexa, simplemente conexa, con base numerable y en general no separada"*. Los puntos de esta variedad no separados se dicen de *ramificación*. Pero si el estudio de Q en este caso permite caracterizar la existencia de las curvas integrales primeras de la foliación, Haefliger y Reeb prueban también que *la única consider-*

ración del espacio Q no basta para caracterizar la foliación sino que es preciso además introducir una relación de orden entre los puntos de ramificación, es decir, "a toda variedad Q orientada, provista de una estructura de orden, corresponde una foliación del plano".

La complejidad del espacio de las hojas de una foliación aumenta extraordinariamente cuando la codimensión de la foliación es $\geq$ 2 como prueba, por ejemplo, el trabajo de Molinó últimamente citado y ello pese a que, el estudio de la foliación, se vea favorecido por la consideración sobre ella de la estructura extra proporcionada por una métrica casi-fibrada, lo que hace que la foliación sea transversalmente completa, propiedad que, en cierto modo, puede considerarse como una generalización a codimensión cualquiera del concepto de 1-campo transverso.

Conviene recordar aquí el trabajo de Godbillon en 1967, puesto que fué un modo elegante de superar la complejidad del espacio de las hojas. En él extendió la noción de fibrado de Serre a determinadas foliaciones (precisamente a aquellas de holonomía transversa nula). Para estas foliaciones, la relación de equivalencia ρ determinada sobre la variedad M, induce una sobre la categoría semi-simplicial, que seguiremos designando ρ, tal que si S(M) es el complejo singular de M, la aplicación $\pi : S(M) \longrightarrow S(M)/\rho$ es un fibración de Kan, y como en la teoría de las fibraciones de Kan se tiene definida una sucesión exacta de homotopía, sucesiones espectrales de homología y cohomología, operaciones de Steenrod, torres de Postnikov, etc..., consigue así introducir en el estudio de estas foliaciones todo el aparato de la topología algebraica. Es de señalar, como hace Godbillon, que el espacio

semi-simplicial cociente $S(M)/\rho$ aunque en general es distinto del complejo singular del espacio de las hojas $S(M/\mathcal{F})$, ambos complejos son del mismo tipo de homotopía.

Es preciso indicar también aquí que Ehresmann actúa, una vez más, sobre su tiempo y publica, en 1963, un estudio sobre las categorías estructuradas cociente. El estudio, hecho en su habitual modo de trabajo, lo realiza en el contexto de la teoría de las categorías de homomorfismos formadas de los homomorfismos entre clases multiplicativas estructuradas, entre grafos orientados estructurados y entre grafos multiplicativos estructurados, particulamente aquellos de las equivalencias regulares, cuyo alcance y total aplicación aún se está lejos de haber conseguido. Es en este contexto que se sitúan las nociones de Q-variedad, F-variedad o follage, esquema de variedad de Van Est y QF varieda, que analizamos a continuación.

Conviene iniciar este análisis recordando que un ejemplo común a todas estas nociones, aunque respecto a algunas de ellas sólo sin lugares de ramificación, lo proporcionó Sataké en 1956 al introducir la noción de variedad que lleva su nombre y que hemos recordado en el apartado precedente al reseñar el trabajo de Molinó sobre las foliaciones riemannianás.

La noción de Q-variedad

Barre en 1973 en su tesis, conforme con las ideas de Ehresmann, caracteriza la relación de equivalencia definida por una foliación mediante su grafo lo que le conduce a considerar el diagrama

$$M \times_S M \rightrightarrows M \xrightarrow{\pi} M/\mathcal{F} = S$$

y de él a establecer la siguiente definición:

Sea S un conjunto; un Q-atlas para S consta de una aplicación sobreyectiva $\pi: M \longrightarrow S$, *donde M es una variedad diferenciable, (resp. analítica) y sobre* $M \times_S M$ (producto fibrado sobre S) *una estructura de variedad diferenciable* (resp. analítica) *tal que*

i) *Las proyecciones* $pr_i: M \times_S M \longrightarrow S$ $(i=1,2)$ *son étales.*

ii) $M \times_S M$ *es una subvariedad inmersa de* $M \times M$.

Mediante este concepto, y como es habitual, se tiene definido el concepto de Q-variedad sobre todo conjunto S.

Un precedente se tiene en la teoría de los "sitios" y su aplicación a la construcción de los pre-esquemas cocientes en Geometría Algebraica por Grothendieck con su cohomología étale, Demazure, Raynaud, etc., precedente sobre el que M. Artin en 1970 desarrolló un curso en la Universidad de Yale, precisando el concepto de Q-variedad en el contexto de los "Espacios Algebraicos" introducidos por Moishezon y él mismo. Anteriormente, Matsusaka estableció una primera aproximación a la teoría de las Q-variedades que fué recogida en 1965 en el nº 8 en las "Publications of the Mathematical Society of Japan".

El concepto introducido por Barre comprende dos vertientes: la *geométrica* de las foliaciones de Lie estudiadas por Fedida y la *cohomológica* que supone la introducción en Geometría Diferencial de la cohomología "etale" cuyo estudio fué hasta entonces del dominio exclusivo de la Geometría

Algebraica. Es así que, entre los ejemplos de tales Q-variedades, figuran las variedades diferenciales ordinarias, las V-variedades de Sataké (pero sin singularidades), las variedades cociente por la relación de equivalencia definida por una foliación que goce de la propiedad de "elevación de homotopías" distinguidas por Godbillon, las variedades cociente de una variedad compacta por una foliación de Lie, etc. En su tesis Barre estudia la cohomología de estas variedades introduciendo, con su adaptación de la cohomología étale a las variedades diferenciables, unos grupos mediante los que construye una sucesión espectral de Leray para la proyección $M \longrightarrow M/\mathcal{F}$ de una variedad foliada M sobre su espacio de hojas, estableciendo la relación con la cohomología de De Rham y con la cohomología de los espacios de operadores. Dos años más tarde Morel (1975), en nota al CRAS de Paris presentada por H. Cartan, demostró que esta cohomología de las Q-variedades coicide con la cohomología del complejo singular cociente estudiado por Godbillon. En 1977, el propio Morel, en nota al CRAS también presentada por H. Cartan, construye una solución al problema de las cocadenas conmutativas racionales para una Q-variedad S, estableciendo una relación con las formas simpliciales básicas en el caso de que S sea el espacio de hojas de una foliación de las caracterizadas por Godbillon. La idea de Barre aún no ha dado todo el fruto que puede obtenerse en Geometría Diferencial de ella, particularmente en cuanto a la noción de Q-variedad en grupo y álgebra, pero sobre todo en cuanto a su relación con los espacios o álgebras de operadores, en el orden de ideas de los trabajos de Girbau y Nicolau.

La noción de F-variedad

Es así que pese al formalismo y alcance de la presentación categorial, la limitación en cuando a modelos geométricos de foliaciones a que aplicar las ideas de Barre, hace que las técnicas geométricas, mejor dicho, el estudio de la teoría de las foliaciones mediante la consideración de una superestructura geométrica, sigan desarrollándose al tratar de incorporar las ideas de Ehresmann. En efecto, se debe a Molinó, en 1975, la introducción del concepto de *F-variedad ó foliage*, como consecuencia de observar que en determinadas condiciones *la geometría transversa de una variedad foliada coincide con la geometría de la variedad espacio de las hojas* $Q = M/\mathcal{F}$ lo que le conduce a establecer la siguiente relación de equivalencia: *Dadas dos foliaciones* $(M, \mathcal{F}_1)$, $(M, \mathcal{F}_2)$ *sobre la misma variedad y de igual codimensión* q, *se dicen transversalmente equivalentes si existe una foliación* $(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$ *y submersiones* $\hat{p}_i : \hat{M} \to M, (i=1,2)$ *tales que*

a) Para todo $m \in M$, $\hat{p}_i^{-1}(m)$ *sea conexo*

b) $\hat{\mathcal{F}} = (\hat{p}_1)^{-1}(\mathcal{F}) = (\hat{p}_2)^{-1}(\mathcal{F})$

Entonces si Q es una variedad en general no Hausdorff y con base numerable un F-atlas q-dimensional sobre Q consiste en dar para todo cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ *de Q una estructura tal que:*

i) cada U_i *sea el espacio de hojas de una foliación simple* $(M_i, \mathcal{F}_i)$ *con* $\pi_i : M_i \to U_i$ *la aplicación canónica y* $\pi_i^{-1}(h)$ *conexo* $\forall\, h \in U_i$.

ii) para todo $(i,j) \in I \times I$ *con* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *las foliaciones inducidas por* $\mathcal{F}_l$ *sobre* $\pi_l^{-1}(U_i \cap U_j)$, $l = i, j$ *son transversalmente equivalentes.*

Como de costumbre se tiene una noción de F-atlas maximal, y una

estructura de F-variedad sobre Q. Definidos los follages con ayuda de atlas, es inmediato, a través de la correspondiente relevación de un paso al cocien_ te definir la noción de morfismo, aunque aquí debe hacerse atención a que, de hecho, se trata no de paso al cociente sino de obtener un inverso por la derecha de la proyección canónica del paso al cociente, lo que exige ciertas precauciones. Ejemplos de tal estructura lo proporcionan las mismas varieda- daes ordinarias con las foliaciones puntuales, las Q variedades de Barre son ejemplos de follages si estos corresponden a clases de equivalencia de folia_ ciones sin holonomía transversal en el sentido de Godbillon, también lo son cualquiera de las clases de foliaciones q-dimensionales $(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$ provistas con una estructura transversa proyectable.

Se dispone así de las correspondientes nociones de:

a) holonomía de un follage

b) campo vectorial y el correspondiente módulo de campos vectoriales sobre un follage

c) formas básicas y álgebra de las formas diferenciales sobre $Q = \hat{M}/\hat{\mathcal{F}}$ con la correspondiente cohomología

d) fibración

e) teoría de conexiones,

etc...

Aunque el concepto se halla bastante estructurado con posteriores publicaciones de Molinóó, la riqueza geométrica del concepto nos permite afirmar que el número e interés de los problemas abiertos y aplicaciones del mismo es enorme.

La noción esquema de variedad

Más directamente ligada con la noción inicial de variedad foliada y de su espacio de hojas, sin considerar superestructura geométrica extra, en diciembre de 1977, mediante tres comunicaciones a la Academia de Ciencias de Holanda por Bouma y Van Est, aparece la noción de "esquema de variedad" y que, "grosso modo", surge directamente de la noción de atlas para la estructura de variedad.

Un esquema de variedad es un par $(A, \mathcal{G}_n)$ con A una variedad n dimensional y $\mathcal{G}_n$ el pseudogrupo de los difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ asociados al atlas estructural de A, $\mathcal{A} = \{(P_i, T_{ji})\}_{i,j \in I}$. En este atlas los P_i son abiertos de R^n denominados "páginas" o "cartas" y los $T_{ji} : P_i \longrightarrow P_j$ elementos de $\mathcal{G}_n$ llamados *transiciones* o aplicaciones parciales, con dominio el abierto U_i de P_i e imagen un abierto V_j de P_j.

El espacio topológico subyacente a la variedad A es homeomorfo al espacio topológico $\mathrm{Top}(\mathcal{A})$, determinado por el atlas, es decir el espacio cociente del espacio unión disjunta de los abiertos P_i de $\mathbb{R}^n$, $P = \coprod P_i$, módulo de la relación de equivalencia $\rho: x \sim \tau(x)$ para $\tau \in \{T_{ji}\}$. Es decir $A \cong \mathrm{Top}(\mathcal{A}) \cong P/_\rho$. El atlas $\mathcal{A}$ se le suele representar por $\mathcal{A} = (P, T)$ donde $T = \coprod T_{ji}$, atlas que a nivel topológico caracteriza completamente la variedad A.

Sigue de la definición, como hacen constar los mismos Bouma y Van Est en su comunicación, que los caracteres topológicos de un esquema de variedad son los del espacio A relacionado con el espacio P mediante la aplicación canónica $P \longrightarrow A \cong \mathrm{Top}(\mathcal{A})$ que es contínua y abierta. Así A es Haus-

dorff si y sólo si $\bigcup_{\tau \in \{T_{ji}\}}$ grafo (τ) es subconjunto cerrado de P x P. Se tiene de este modo caracterizada la noción de *"esquema de variedad"* compacto, conexo,..., la de punto regular y singular, la de dominio o abierto fundamental, etc. Se dispone de una noción de espacio de recubrimiento, de grupo fundamental, de forma diferencial, etc. Sin embargo la estructura diferenciable se presenta algo complicada. Ya en su primera comunicación, Bouma + Van Est, dando dos ejemplos de $\mathcal{C}^k$-esquema de variedad con $k \geq 1$ que son sólo equivalentes como $\mathcal{C}^\bullet$-esquemas. El estudio cohomológico se inicia en el orden de ideas de Haefliger a coeficientes en grupoides con teorías no conmutativas. Los esquemas de variedad se designan más bien con el atlas estructural $\mathcal{A} = (P;T)$.

Son ejemplos de esquemas de variedad citados ya por Bouma + Van Est:

a) el denominado toro de Poincaré 1 dimensional, $\mathcal{A}'_k = (\mathbb{R},T)$ donde T, grupo de las traslaciones sobre $\mathbb{R}$ con k generadores libres, se toma como conjunto generador de las transiciones, $\mathcal{A}^1_k$ es también una variedad de Barre. En este caso $A = \mathrm{Top}(\mathcal{A}'_k)$ es un espacio con la cardinalidad del continuo y cuya topología consta del conjunto vacío y el espacio total.

b) Las "plumas" y "plumas compuestas" consideradas por Haefliger + Reeb en su trabajo sobre el espacio cociente de las foliaciones del plano.

También lo son las V variedades de Sataké, las Q-variedades de Barre y las F-variedades de Molinó.

Precisando el concepto de *"esquema de variedad"* la noción de morfismo $\Phi : A \longrightarrow B$ entre los esquemas de variedad $(A, \mathcal{G}_n)$ y $(B, \mathcal{G}_m)$ definidos

por los atlas $\mathcal{A} = \{(P_i, T_{ji})\}$ y $\mathcal{B} = \{(P_r, T_{sr})\}$ respectivamente, viene determinado por una familia de aplicaciones parciales $\varphi : P \to \tilde{P}$ (luego de un abierto U de algún $P_i \subset \mathbb{R}^n$ en un $\tilde{P}_r \subset \mathbb{R}^m$) tales que cumplen las c-ondiciones:

M_1 - Si $\varphi \in \Phi$ y $\psi \subset \varphi$ (*) entonces $\psi \in \Phi$.

M_2 - Si $\psi^k \in \Phi$ es tal que $\cup \psi^k$ está definido, entonces $\cup \psi^k \in \Phi$

M_3 - Si $\varphi \in \Phi$, $\tau \in T$ y $\tilde{\tau} \in T$, entonces $\tilde{\tau}\varphi, \tau\varphi \in \Phi$ siempre que estén definidas estas composiciones.

M_4 - Si $\varphi, \psi \in \Phi$ y $\varphi(x)$, $\psi(x)$ están definidos, entonces existe un $\varphi' \subset \varphi$ y un $\tilde{\tau} \in \tilde{T}$ tales que $\varphi'(x)$ y $\tilde{\tau}\varphi'(x)$ están definidos y $\tilde{\tau}\varphi' \subset \psi$.

M_5 - Para todo $x \in P$, $\varphi(x)$ está definido para, al menos, un $\varphi \in \Phi$.

A esta categoría se le designa M.S. ó S.V.

Esta caracterización de la categoría de los *"esquemas de variedad"* admite naturalmente la siguiente formulación más cómoda en la categoría de los haces: Sea P una variedad y Γ el grupoide topológico de los gérmenes de transiciones. El conjunto de las unidades de Γ se identifica a P como espacio topológico y así $\alpha, \beta : \Gamma \to P \times P$ son las aplicaciones fuente y meta, *un par* $(P, \Gamma_\circ)$, *donde* $\Gamma_\circ$ *es un subgrupoide abierto de* Γ, *con igual conjunto de unidades, se llama un esquema de variedad con* P *como variedad página* (o variedad carta) *y* $\Gamma_\circ$ *como grupoide de los gérmenes de difeomorfismos locales o transiciones;* las componentes de P se denominan *páginas o cartas.*

(*) Con $\psi \subset \varphi$ se quiere expresar que ψ es la restricción de φ a un subconjunto abierto de su dominio.

Sean P y $\tilde{P}$ variedades y M el haz de los gérmenes de aplicaciones locales de P en $\tilde{P}$. Un subhaz $\Lambda \hookrightarrow M$ se dice que es un *morfismo* del *esquema de variedad* (P,T) *en el esquema de variedad* $(\tilde{P},\tilde{T})$ si:

i) $T \wedge \tilde{T} \hookrightarrow \Lambda$

ii) la aplicación fuente $\alpha : \Lambda \to P$ es sobreyectiva,

iii) para todo $p \in P$, $\alpha^{-1}(p)$ es un T-órbita.

Las *inmersiones* vienen caracterizadas por subhaces del haz de gérmenes de inmersiones locales, en particular las *inmersiones abiertas* son subhaces del haz de los gérmenes de las funciones de transición de P en P, inmersiones que llegan a ser *incrustaciones abiertas* si para todo $q \in \tilde{P}$, $\beta^{-1}(q)$ es vacía o una T-órbita.

Todo esquema de variedad $\mathcal{A} = (P,T)$ se representa también por el par (A,T) donde $A = Top(\mathcal{A}) = P/_{\rho}$ es la variedad topológica determinada por el esquema de variedad $\mathcal{A} = (P,T)$ la que caracteriza las propiedades topológicas del esquema de variedad. Es fácil ver que todo esquema de variedad $\mathcal{A} = (P,T)$ es S.V. equivalente con un esquema $(\tilde{P},\tilde{T})$ cuyas páginas P_i, son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ simplemente conexos.

Dado un esquema de variedad $\mathcal{A} = (P,T)$, un grupo G de automorfismos de $\mathcal{A}$ está constituido por subhaces del haz Γ satisfaciendo i), ii) y iii), de modo que $T \cup (\bigcup_{\pi \in G} \pi) = \tilde{T}$ es aún un subgrupoide topológico del Γ. El esquema de variedad $\tilde{\mathcal{A}} = (P,\tilde{T})$ es el denominado *cociente* del $\mathcal{A} = (P,T)$ respecto a G. - Al morfismo $\tilde{T} : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ se le denomina *epimorfismo canonico* dado que determina una sobreyección de $Top(\mathcal{A})$ sobre $Top(\tilde{\mathcal{A}})$.

La noción de QF variedad

Como último intento de caracterización de la estructura transversa, se tiene la noción de *QF-variedad*, noción que si fué introducida en 1976 por Pradines y Wuafo-Kanga en nota al CRAS de Paris presentada por Lichnerowicz, no se vió encuadrada en la correspondiente categoría hasta 1979 en la nota al CRAS de Paris por los mismos autores fijando la noción de morfismo.

Los autores con el concepto de *QF-variedad o sombra* buscan, por un lado, enriquecer geométricamente la noción de Q-variedad de Barre sin perder la elegancia y potencia del formalismo categorial, el cohomológico étale particularmente, y por otro lado tratar de extender este formalismo a la riqueza geométrica que para la estructura transversa supone la noción de F-variedad de Molinó. La noción de QF-variedad parece así surgir como síntesis de las dos citadas. Naturalmente ello les exigió debilitar la caracterización de la noción de equivalencia regular en que se apoya la noción de Q-variedad, aunque conservando lo esencial en cuanto que esté caracterizada por propiedades del grafo, papel que pasa a ser jugado por el grupoide de holonomía transversal.

La noción es lo suficientemente fina y potente para justificar que entre la noción de objeto y la de morfismo fuera preciso transcurrieran tres años. Es claro que la razón principal que exigió el transcurso de este lapso de tiempo se debe a la resistencia que presentó introducir una noción, la de QF-morfismo, que satisfaciera propiedades de estabilidad interna análogas a las de morfismos de la categoría de las Q variedades pero conservando la geometría de las F-variedades.

Por seguir el "folklore linguístico" precedente y en el que creemos justificar el título de esta memoria, Pradines y Wuafo Kanga introducen sus conceptos con calificativos forestales. Así denominan "variedad cortada" todo triple X = (M,P,Q), donde M es una variedad, Q un conjunto y p: M ⟶ Q un epimorfismo. Designando por M' la variedad M provista de una estructura foliada (luego supuesta provista con la topología de las hojas), introducen la noción de *QF-atlas* ó de aplicación p-foliante, ó lo que también denominan un *árbol* X (sobre Q), si existe una única foliación M' de M tal que:

i) las fibras de p son subvariedades abiertas de M' (luego M' reunión de hojas) y subvariedades *estrictamente inmersas* de M.

ii) para todo (x,y) ∈ M x M, perteneciente a la misma fibra de p, existe un jet local de difeomorfismo, de fuente x y meta y, entre subvariedades de M transversas a M' en x e y, enviando todo punto sobre un punto equivalente. Un tal jet local se dice: *"jet local de holonomía transversal"*.

Seguidamente definen de un modo natural una noción de *QF-atlas equivalentes* de igual meta Q y, del modo habitual, tienen definida la noción de *QF-variedad o sombra* sobre la meta Q.

Si M' es la foliación trivial, más fina o discreta, entonces el *árbol* se dice *discreto o étale*.

Son ejemplos de QF variedades:

a) las Q-variedades (de hecho se puede probar que la categoría de las Q-variedades es una subcategoría plena de las QF-variedades, Wuafo Kamga, (1979)).

b) las F-variedades (como antes, estas también constituyen una

subcategoría plena de las QF-variedades, Viviente, a))

c) los esquemas de variedad de Bouma-Van Est (subcategoría de la categoría de las QF-variedades, Viviente, b)).

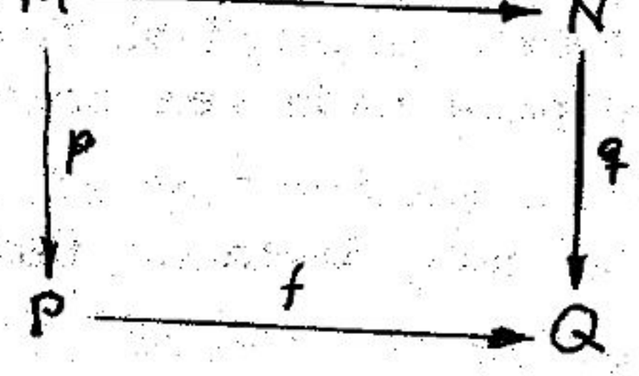
d) los espacios cocientes de variedades paracompactas foliadas,

e) las V-variedades de Sataké (también su categoría es una subcategoría plena de la de las QF-variedades).

f) las variedades ordinarias, como elementos que pueden ser considerados V-variedades y Q-variedades.

La noción de morfismo quedó así:

Dadas dos QF-variedades P, Q, se dice que la flecha $f : P \to Q$ es un QF-morfismo de fuente P y meta Q, si f es una aplicación de P a Q, tal que existen árboles $X = (M,p,P)$ de P, $Y = (N,q,Q)$ de Q y una $u \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ tal que hacen conmutativo el diagrama de la derecha.



Como en el caso de los follages "u" se dice una relevación de "f." Con ella se introducen las nociones de *QF-submersión*, *QF-inmersión*, *QF-étalamiento*. Sin embargo, introducida la noción de *QF-fibrado*, al tratar de definir la noción de espacio tangente a una QF-variedad, éste no es un QF-fibrado. Pero el problema esencial es que en la categoría de las QF-variedades no se ha podido definir una noción de producto fibrado de QF-morfismos, ni siquiera para QF-submersiones en general, ya que en principio el functor olvido hacia la categorfía de los conjuntos no es fiel en los casos conocidos.

Ello no obstante, no ha impedido el que Pradines en 1981 extienda a las QF-variedades el procedimiento de Barre para la construcción de haces

dando los *QF-haces* y, mediante la cohomología de las escalas de Cartier, definir la cohomología de las QF-variedades, el cálculo detallado de la misma lo realizó Cumenge, quien a su vez estableció al igual que Barre, la correspondiente sucesión espectral de Leray para QF-variedades y un teorema del tipo de De Rham.

Sería interesante obtener un desarrollo metódico completo topológico diferencial, primero, y en la estructura geométrica admisible después.

Existen algunos estudios parciales sobre el primero por los mismos creadores de los conceptos o por alumnos de ellos, y así mismo en cuanto a las superestructuras geométricas, principalmente por Molinó a través de la noción de "estructura transversa proyectable" noción que, como señala Molinó, *se halla totalmente definida en cuanto se dá la variedad foliada* sin que para nada sea preciso hipótesis alguna sobre la foliación. En este sentido cabe destacar también los recientes trabajos de Rasmussen generalizando los de Conlon sobre G-estructuras transversas integrables y los de Hurder estudiando las *G-foliaciones G-referenciadas*, pero ambos se centran más en el aspecto cuantitativo que en el cualitativo geométrico.

El número hoy de problemas abiertos es enorme y pese al gran número de investigadores volcados sobre estos temas, su magnitud y diferentes modos para abordarlos permite augurar a la teoría de foliaciones un futuro lleno de posibilidades, futuro que no es independiente del gran impulso proporcionado a la teoría por los trabajos de Thurston, por un lado, y por otro de aquel, que, aparte los trabajos de Ruelle y Sullivan sobre el espacio transverso, han conducido a la reciente y prometedora vía investigadora creada por A. Connes en relación con las álgebras de Neumann.

EPILOGO

Con esta rápida "incursión" en la teoría de las foliaciones hemos pretendido dar una visión general de la misma presentando los conceptos básicos y algunas de las últimas realizaciones. Concluiremos presentando también alguna de las direcciones en que hoy se orientan las investigaciones y aplicaciones de las mismas.

El distinto lenguaje matemático que ha sido, y es. utilizado en el estudio de esta teoría desde los años 40, y al que hemos aludido en la introducción, se evidencia a poco que se observen las publicaciones matemáticas sobre el tema pero, también quedó de manifiesto en los trabajos que se presentaron a las Jornadas de la Sociedad Matemática de Francia desarrolladas en Toulouse en 1981 de-dicadas principalmente a la "Estructura transversa de las foliaciones" con asistencia de más de 150 estudiosos de todo el mundo, entre los que figurábamos 9 alumnos del Prof. Ehresmann. En estas Jornadas se puso de manifiesto, a través de las distintas intervenciones, que las investigaciones en teoría de foliaciones tienen lugar principalmente, como puntualizó P. Cartier en su intervención en la sesión de clausura de las Jornadas, con los métodos ó en los dominios siguientes:

i) La teoría de base de las foliaciones operando en el cuadro de los grupoides.

ii) la teoría de las clases características

iii) con los métodos de la Geometría Diferencial

iv) la extensión de los estudios sobre sistemas dinámicos al estu-

dio de las foliaciones de codimensión uno.

Pero fijados estos dominios, el lector no familiarizado con el tema puede preguntarse: ¿por qué y para qué estudiar y desarrollar una investigación en teoría de foliaciones? ¿Existe alguna razón otra que la de la teoría del conocimiento matemático o de la especulación?.

Desde luego una especulación en el orden de ideas de la "contemplación de la matemática" es una poderosa razón y, no sólo en la matemática en sí, sino en cuanto a la persona que la practica, pese a los sacrificios materiales e incomprensiones que pueda exigirle su práctica. Pero en el caso de la teoría de las foliaciones también existe una razón que podríamos llamar utilitaria "técnica", de interés social o colectiva como hoy se suele decir. Veremos que ambas razones, hoy, nos ofrecen prometedoras posibilidades.

En efecto, ya hemos visto cómo su estudio originariamente fué motivado por la mecánica clásica y más particularmente por la mecánica celeste. Estos motivos iniciales han adquirido hoy un renovado interés, y así desde la aplicación al estudio de las soluciones de la ecuación de Van der Pool que rige las vibraciones de un oscilador electrónico, al reciente estudio de las órbitas bajo la acción "Hamiltoniana" de un grupo de Lie compacto sobre la variedad de las subvariedades Lagrangianas del espacio de fase considerado por Guillemin y Sternberg, o el estudio de las foliaciones coisotrópicas asociadas a la polarización compleja sobre variedades simplécticas definida por Konstant como proceso geométrico de cuantización, pasando por el estudio de los campos gauge, o aquél de la forma de Pfaff completamente in-

tegrable que representa el calor elemental cedido en una modificación infinitesimal reversible, existe una amplia y prometedora gama de aplicaciones prácticas o teórico-prácticas.

En este orden de ideas merece una mención especial el estudio de los cristales líquidos. Desde el punto de vista de la Química Orgánica, ellos constituyen el tema del discurso de ingreso en esta Academia del Ilmo. Sr.D. Enrique Melendez Andreu, nuestro distinguido querido amigo y colega, para nuestra exposición ellos constituyen un ejemplo práctico de estructura foliada de gran interés e importancia en sus aplicaciones tecnológicas actuales y las que se esperan de ellos de aquí a unos veinte años. Es bien conocido que un cristal está caracterizado por una cierta ordenación de sus moléculas según una red geométrica rígida tridimensional contrariamente a lo que sucede con la disposición de las moléculas de un líquido. Pero, como en la citada memoria nos expuso el Dr. Melendez, existen cuerpos orgánicos de moléculas alargadas que presentan durante su fusión estados intermedios por su comportamiento entre el sólido y el líquido isótropo: son los llamados estados *mesomorfos*. Se distinguen tres estados mesomorfos principales, luego tres tipos de cristales líquidos, aunque existen cuerpos que pueden pasar por los tres estados mesomorfos o mesofases. Brevemente recordemos que el primero corresponde al llamado estado *nemático* caracterizado por que en él los ejes mayores de las moléculas se presentan paralelamente a una dirección. El segundo se conoce por estado *colestérico*, en él las moléculas se disponen en capas, presentando los ejes mayores distinta dirección de paralelismos en cada capa. Finalmente en el tercer estado, dicho *smectico*, pro-

ximo ya al estado sólido, además de alinearse los ejes según una dirección común presentan una agrupación de los centros de las moléculas según planos sucesivos a modo de un pastel de hojaldre. Así los llamados cristales líquidos en las mesofases colestérica y esmectica las moléculas aparecen ordenadas según un esquema de dimensión uno o dos, precisamente según hojas de una foliación de dimensión uno o dos respectivamente como precisa Gennes y Langevin. Las hojas de estas foliaciones *inmersas* en el espacio ambiente lo hacen satisfaciendo interesantes propiedades geométricas de minimización de su curvatura total, propiedades que intervienen en la caracterización de las denominadas "foliaciones tensas" de las que casi nada se conoce. Una buena referencia sobre cristales líquidos se dispone en la obra de Chandrasekhar.

Otro campo de aplicación de la teoría de foliaciones, con resultados recíprocos, es el creado por A. Connes al dar un potente y útil modo de servirse del grupoide de holonomía de una foliación confirmando una vez más el alcance y acierto de la obra de C. Ehresmann. - A.Connes con el trabajo "Sur la théorie non conmutative de l'integration" (L.N.M.S. 725/1978 pp.19-143) y siguientes publicaciones consigue que, como dice P. Cartier (*) "les outils les plus récents de la geometrie et de 1'Analyse se marient harmonieusement, et une folue d'application se presentent, qui ne sont explorées que partiellement". Brevemente Connes, dada una variedad foliada $(M, \mathcal{F})$ le asocia a una $\mathcal{C}^*$-álgebra, $\mathcal{C}^*(M, \mathcal{F})$. Este algebra juega el papel de las

---

(*) Exposición del Prof. P.Cartier con ocasión de la presentación de los laureados con la medalla Fields 1982 efectuada en octubre de 1982. Recuérdese que la medalla Fields es el nombre que se dá al Premio Nobel en Ciencias Matemáticas.

funciones continuas sobre el espacio de las hojas $Q = M/\mathcal{F}$. La representación de esta álgebra de funciones corresponde a dar una medida transversa sobre Q y una representación del grupoide de holonomía. Los resultados obtenidos hasta hoy muestran que tal idea está enriqueciendo ambas teorías: Por ejemplo, en 1982, en un trabajo de Fack y Skandalis, entre otros resultados demuestran que:

a) $\mathcal{C}^*(M, \mathcal{F})$ es simple si y sólo si Q está provisto de la topología grosera.

b) $\mathcal{C}^*(M, \mathcal{F})$ es primitiva si y sólo si Q posee un punto denso, esto es si la foliación es topológicamente transitiva.

c) En determinados casos de medidas casi invariantes, $\mathcal{C}^*(M, \mathcal{F})$ posee una representación de imágen los operadores compactos si y sólo si Q posee un punto cerrado, es decir si la foliación posee una hoja compacta.

Se ha abierto así una prometedora línea de enriquecimiento mutuo entre dos teorías que hasta hoy eran consideradas bastante alejadas una de otra. Es así que, y dado el origen de las algebras de Von Neumann, caracterizando la totalidad de observables físicos -entre los que destacan por su caracter irreducible los factores- no consideramos atrevida la afirmación con que Cartier finaliza su exposición a propósito de la obra de Connes al decir: "Sans se hasarder trop, on peut prevoir le jour, où les mathematiciens paieront leur dette aux physiciens. J'ose esperer que le modèle de l'Univers physique qui s'élabore -à coup de milliards de dollars- sous nos

yeux dans les grands centres de Physique Nucleaire, portera la trace des speculations des mathematiciens sur des objets aussi insolites que les facteurs, et que les découvertes de Connes convenablement completées, s'y trouverent incorporées".

Debemos precisar que la medalla Fields 1982 concedida a Alain Connes lo fué por su obra hasta 1975, es decir aquella que trata de los problemas de clasificación de los sistemas físicos a través de las algebras de Von Neumann o anillos de operadores. Así uno de los principales resultados de A. Connes se refiere a la completa y definitiva caracterización de la categoría de las "Algebras de Von Neumann inyectivas". Aunque parece claro el que sólo un matemático de las características de Connes y con un conocimiento de la problemática de la Física como la que ha demostrado poseer con su obra sobre las Algebras de Von Neumann, podría ser capaz de establecer la relación entre dos teorías matemáticas como las C^*-álgebras y las foliaciones.

Este acercamiento entre el mundo experimental y el matemático "puro", nos conduce de nuevo al campo de la actividad especulativa rico de sentido geométrico en la teoría de foliaciones, a través de otro de los medallas Fields 1982, William P. Thurston. Determinados resultados por él alcanzados han sido ya comentados a lo largo de la memoria, pero no podemos dejar de reproducir aquí alguna de las frases que con motivo de la presentación de la obra de Thurston pronunciaba Poenaru el pasado octubre: "Pendant une periode d'environ cinq années, entre 1970 et 1975, W. Thurston apparait sur la scene, et avec des méthodes complètement nouvelles, une très grande par-

tie de ces problemes, que personne ne savait comment attaquer, se trouvent resoulus, comme sous la baguette d'un magicien", para añadir más tarde: "Les voies que Thurston a ouvertes en théorie des feuilletages vont certainement donner beaucoup de choses à faire, à beaucoup de chercheurs pendant long-temps".

Un primer contacto informativo con la teoría de las foliaciones, atrayendo la atención sobre algunos de sus tópicos, resultados y aplicaciones hasta hoy alcanzados o que se estudian ha sido, repetimos, nuestro objeto al redactar esta breve reseña sobre tal teoría. Si lo hemos conseguido, pese a nuestras limitaciones, nos consideramos satisfechos.

Muchas gracias.

BIBLIOGRAFIA

Andronov, A. y Pontrjagin, L.	: Systems grosiers	Dokl.Akad. Nauk.SSSR (1937) pp. 247-251
Artin, M.	: Algebraic spaces	Yale Univ.Press,1971
Barre, R.	: De quelques aspects de la théorie del Q-variétés differentielles et analytiques	Ann.Inst.Fourier 23 (1973) pp. 227-312
Bernstein, I.N. y Rosenfeld, B.I.	: Sur les classes characteristiques des feuilletages	Funct.Anal.Applica-- tions 6 (1972), pp. 60-62
Birchoff, G.D.	: Dynamical systems	AMS Colloq. Publ. 9 (1927)
Blumenthal, R.A.	: Transversaly homogeeous foliations	Ann.Inst. Fourier 29
"	: Foliated manifolds with flat basic connection	J.Diff.Geometry, 16, (1981), 401-406
"	: Riemannian Foliations with paral lel curvatura	Nagoya Math. J. 90 (1983), 145-153
Bonome Dopico, A.	: Cohomología módulo torsión en va riedades casi-producto	Tesis Univ.Santiago Compostela (1976)
Bott, R.	: On topological obstruction to integrability	Proc. Int.Congr.Mat. Niza 1970
Camacho, C. y Neto, A.L.	: Teoria geométrica das folheacoes	I.M.P.A. Rio Janeiro 1979
Cariñena, J.F. e Ibort, L.A.	: On Lax equations arising from Lagrangian foliations	To appear in Leth. Math.Phys.(preprint)
Cartier, P.	: Presentation des travaux d'Alain Connes, Medaille Fields 1982	Gazzete des Math., 1983
Connes, A.	: Sur la théorie non conmutative de l'integration	LNMS 725 (1979) pp. 19-143
Castro Bolaño,R.	: Geometria diferencial de los fi- brados -vectoriales. Aplicacio nes a las variedades casi-produc to complejo	Tesis Univ. Santiago Compostela (1976)
Chandrasekhar,S.	: Liquid Crystals	Univ.Press, Cambrid- ge, 1977
Cordero, L.A.	: Cohomología en las variedades ca- si producto y foliaciones	Tesis Univ. Santiago Compostela (1971)
" y Prada, M.A.	: Sur un feuilletage dans le fibré tangent a une variété feuilletée	CRAS Paris 275 A (1972), 831-833

Cordero, L.A.	: The extension of G-foliations to tangent bundles of Higher order	Nagoya Math.J. 56 (1974), 29-44
"	: Special connections on almost multifoliate structures	Mathematische Annalen 216, (1975) pp. 209-215
" y Gadea, P.M.	: Exotic charasteristic classes and subfoliations	Ann.Inst. Fourier 26 (1976) 225-237
Cordero, L.A. y Masa, X.	: Charasteristic classes of subfoliations	Ann.Inst. Fourier 31 (1981) pp. 61-86
Cordero, L.A.	: Sheaves and cohomologie associated to subfoliations	Preprint
Cumenge, C.	: Faisceaux et cohomologie des espaces quotients du feuilletage	CRAS Paris 297 (1983) pp. 195-198
Denjoy, A.	: Sur les courbes définies par les equations differentielles a la surface du tore	J.Math.Pures Appl.11 (1932) pp. 333-375
Echarte, F.J.	: Medida en espacios foliados y en espacios homogéneos, aplicación a la geometría integral	Tesis Univ. Zaragoza (1965)
Ehresman, Ch., y Reeb, G.	: Sur les champs d'elements de contact de dimension p completement integrables dans une variété continuement differentiable V	CRAS Paris 218 (1944) pp. 955-957
Ehresmann, Ch.	: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré differentiable	CBRM Colloque de Top. Bruxelles juin 1950 pp. 29-55
"	: Sur la théorie des variétés feuilletées	Rend.di Math. e delle sue appli. Serie V, vol.X. Roma, 1951, p. 64-82
"	: Introduction a la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie	Coll.CNRS Strasbourg 1953, pp. 97-110
"	: Structures locales	Annali Mat.Pura e Applicata 36, (1954), pp. 133-142
" y Shih Weisu	: Sur les espaces feuilletées: Théoreme de stabilité	CRAS Paris 243 (1956) pp. 344-346
Ehresmann, Ch.	: Structures feuilletées	Proc. Fifth Canadian Math.Congress (1961)
"	: Especes de structures locales, elargissement de categories (traducción del artículo Gattungen von Lokalen Strukturen, 1957)	Seminaire C. Ehres--mann 1961

Ehresmann, Ch.	: Groupoides sous-inductifs	Ann.Inst. Fourier 13 (1963) pp. 1-60
"	: Structures quotients	Comm. Math. Helv. 38 (1963). pp.219-283
"	: Categories ordonnées, holonomie et cohomologie	Ann.Inst. Fourier 14 (1964)
Fucks, D.B.	: Non trivialité des classes caracteristiques de G-structures. Applications aux variations des classes caracteristiques des feuilletage	CRAS 284 (1977) pp. 1105-7 A
"	: Foliations	Akd.Nauk.SSSR 18 (1981) pp. 151-214
" y Gelfand, I.M.	: The Cohomology of Lie algebra of tangent vector fields of smoth manifold I, II	Functional Analysis 3 (1969) pp. 32-52 y 4 (1970) pp. 23-32
Gil Cordeiro,F.J.	: Holonomía de foliaciones y conexiones adaptadas	Tesis Univ. Santiago Compostela (1976)
Girbau, J. & Nicolau, M.	: Pseudo-differential operators on V-manifolds and foliations, I	Collect.Math.31(1980) pp. 247-265
"	" " " " , II	Collect.Math.32(1980) pp. 63-95
Girbau, J. & Haefliger, A., Sundararaman	: On deformations of transversely Holomorphic foliations	Journal de Crelle nº 345, (1983) pp.122-147
Godbillon, C.	: Feuilletages ayant la proprieté du prolongement des homotopies	Ann.Inst.Fourier Grenoble, pp.219-260;17, 2 (1967)
Godbillon, C. y Vey, J.	: Un invariant des feuilletages de codimension 1	CRAS Paris Serie A 273 (1971) pp.92-95
Godbillon, C.	: Holonomie transversale	CRAS Paris 264 (1967) pp. 1050-1052 Serie A
Gomez Mont, X.	: Transversal holomorphic structures	J.Diff.Geometry 15 (1980), 161-186
Haefliger, A.	: Sur les feuilletages analytiques	CRAS Paris 242(1956) pp. 2808-2910
"	: Structure feuilletée et cohomologie	Comm.Math.Helv. 32 (1958) pp. 248-329
"	: Variétés feuilletées	Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa (3) 16, pp.367-397 (1962)

Haefliger, A.	: Sur la cohomology the Gelfand-Fucks	Ann.Scient.E.Norm. Sup. 9(1976) pp.503-532
"	: Feuilletages avec feuilles minimales	Proc. of the IV Int. Coll. on Diff. Geom. 1978 Santiago Comp.
Hardorp, D.	: All compact orientable thre dimensional manifolds admet total foliations	Memoirs AMS 233(1980)
Hector, G.	: Quelques exemples des feuilletages espéces rares	Ann.Inst.Fourier Grenoble 26 (1976), pp. 239-264
Hector, G. y Hirsch, U.	: Introduction to the Geometry of foliations, part A	Vieweg & Sons, Braunschweig, R.F.D.(198T)
Hector, G.	: Elementos de la teoría cualitativa de las foliaciones	Curso Cátedra G.Diferencial, Univ.Zaragoza, mayo 1983
Heitsch, J.	: A Cohomology for foliated manifolds	Comm.Math.Helv. 50 (1975) pp. 197-218
Hermann, R.	: On the differential geometry of foliations	Ann.of Math.72(1960) pp. 445-457
Hurder, S.E.	: Independent Rigid Secondary classes for holomorphic foliations	Inv.Math. 66 (1982) pp. 313-323
Inaba, T.	: Reeb stability for non compact leaves	Topology 22 (1983) pp. 105-118
Johnson, D.L. & Naveira, A.M.	: A topological obstruction to the geodesibility of a foliation of odd dimension	Geom. Dedicata 11 (1981) pp. 347-352
Kamber, F.W. y Thondeur, P.T.	: Foliated Bundles and characteristic classes	LNMS 493 (1975)
Kamber, F.W. y Thondeur, P.T.	: G-foliations and their characteristic classes	Am.Math.Soc.84(1978) pp. 1086-1124
Kaplan, W.	: Regular curve families filling the plane I	Duke Math.J. 7(1940) pp. 154-185
Kelly, G.M.	: A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves and so on	Bull.Austr.Math.Soc. 22 (1980) pp. 1-83, and Vol.26 (1982) pp 221-237
Lawson, H.B., Jr.	: Codimension one foliations of spheres	Ann.Math. 94 (1971) pp. 494-503
"	: Foliations	Bull.Am.M.S.80. 1974 pp. 369-418

Liapunov, A.	: Probléme générale de la stabilité du mouvement	Kharkov, 1892, edición en francés: Ann Fac.Sci.Univ.Toulouse (2) 9,1907, pp. 203-474
Masa, X.	: Sur la cohomologie des variétés feuilletées avec métrique presque -fibrée	IRMA Strasbourg 1972
"	: Sucesión espectral de cohomología asociada a variedades foliadas	Tesis Univ.Santiago Compostela 1973
"	: Cohomología de fibrados principales foliados	III Jorn.Matem.Hisp. -Lusi. (1974)
"	: Quelques propriétés des feuilletages de codimension 1 a connexion transverse projetable	CRAS Paris 284(1977) pp. 811-812 A
"	: Cohomologie differentiable, continue et discrete associée a une variété feuilletée	Preprint
Mattei, J.F. et	: Holonomie et intégrales premières	Ann.Scien.Ec.Norm. Sup. 4º S.,t.12,1980 pp. 469-523
Matsusaka, T.	: Theory of Q-Varieties	The Math. Soc. Japan (1965)
Molinó, P.	: Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages a connexion transverse projetable	Topology 12 (1973) pp. 317-325
"	: Sur la géometrie transverse des feuilletages	Ann.Inst. Fourier 25 (1975) pp. 279-284
"	: Feuilletages transversalement parallelisables et feuilletages de Lie	CRAS Paris 282 A (1976) pp. 99-101
"	: Probleme d'equivalence pour les -structures et probleme de Darboux	IV Int. Colloq. on Diff.Geom.Snt.Comp. (1978) pp. 206-215
"	: Géometrie globale des feuilletages riemanniens	Proc.Kon.N.Ak.V.Wet. A, 85 (1982) pp. 45-76
Montesinos, A.	: Conformal curvatura for the normal bundle of a conformal foliation	Ann.Inst.Fourier 32 (1982) pp. 261-274
Morel, F.	: Type d'homotopie rationnelle des Q-variétés et formes simpliciales basiques	CRAS Paris 285(1977) pp. 11-14

Morel, F.	: Cohomologie singuliére et cohomologie des Q-variétés	CRAS Paris 281(1975) pp. 309-312
Mostow, W.A.	: Continuous cohomology of spaces with two topologies	Memoirs AMS 175(1976)
Moussu, R.	: Classification des equations de Pfaff completement integrables à singularité isolée	Invent.Math.73(1983) pp. 419-436
Naveira, A.M.	: Variedades foliadas con métrica casi-fibrada	Tesis Univ. Santiago Compostela Coll.Math 21 (1970)
"	: A classification of Riemannian almost product manifolds	Rend. de Mat.7(1982)
Nemyckii y Stepanov	: Qualitative theory of Differential Equations	P.U.P.Princeton(1960)
Pasternack, J.S.	: Topological obstructions to integrability and the Riemannian geometry of smooth foliations	Ph. Tesis Princeton (1970)
"	: Residues and charasteristic clases for Riemann foliations	J. Diff. Geom.(1977)
Poenaru	: L'oeuvre de Thurston (Medaille Fields 1982)	Gazzette des Maths, (1983)
Poincaré, H.	: Sur les courbes définies par une equation differentielle	CRAS Paris 90 (1980) pp. 673-675
"	: Sur les courbes définies par les equations differentielles	J.Math.Pur.et Appl. S.3 vol.7 (1881) pp. 375-422; S.3 vol.8 (1882) pp. 251-296; S.4 vol.1 (1885) pp. 167-244; S.4 vol. 2 (1886) pp. 151-217
Prada, Mª.A. de	: Estructuras foliadas y casi-foliadas. Prolongación al fibrado tangente	Tesis Univ. Santiago Compostela (1973)
Pradines, J.	: Building categories in which a Godement's Theorem is available	Coll. Cat. Amiens, (1975)
Pradines, J. y Wuafo Kanga, J.	: Relations d'equivalence transversalement differentiables	CRAS Paris 283 A (1976) pp.25-28 A
Pradines, J.	: Sur une classe remarcable de relations d'equivalence sur des variétés	Actas IV J.M. Luso-Español. Jaca, 1977, pp. 365-371
Pradines, J. y Wuafo Kanga, F.	: La catégorie des QF-variétés	CRAS 288, A (1979) pp. 717-720

Pradines, J.	: Echelles et faisceaux sur les quotients de feuilletages	Cahiers de Top.et G. Diff. 22 (1981) pp. 73-83
Rasmussen, O.H.	: Non-vanishing and continuous variation of exotic charasteristic classes, for foliations	Ph.D. Thesis Princeton (1976)
"	: Foliations with integrable transverse G-structures	J.Diff.Geom.16(1981) pp. 699-710
Reeb, G.	: Variétés feuilletées, feuilles voisines	CRAS Paris 224 (1947) pp. 1613-1614
"	: Sur certaines proprietés topologiques des variétés feuilletées	A.S.I. Hermann Paris (1952)
"	: Sur la théorie géneral des systemes dynamiques	Ann.Inst.Fourier Grenoble 6 (1955) pp. 89-115
"	: Feuilletages, resultats anciens et nouveaux	Univ.Montreal 1972
Reinhart, B.L.	: Foliated manifolds with bundle-like metrics	Ann.Math.69 (1959) pp. 119-132
"	: Differential Geometry of foliations	Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb., 99, Springer-Verlag 1983
Roger, C.	: Sur la cohomologie de l'Algebra de Lie des champs de vecteurs de contact formels	Ann.Inst. Fourier 30 (1980) pp. 249-257
Roussarie	: Constructions de feuilletages (d'aprés W. Thurston)	Seminaires Bourbaki nº 499 (1977)
Saksteder, R.	: Foliations and Pseudogroups	Am.J.Math. 87 (1963) pp. 79-102.
Satakê, I.	: On a generalization of the notion of manifold	Proc. Nat. Acad. Sc. USA 42 (1956) pp.359 -363
Sarkaria, K.S.	: The de Rham cohomology of foliated manifolds	Ph.D. Thesis 1974
Shulman	: Charasteristic classes and foliations	Ph.D. Thesis 1972
Smale	: Differentiable Dynamical Systems	BAMS 73 (1967), pp. 747-817
Sullivan, D.	: A homological characterization of foliations	Comm. Math. Helv. 54 (1979) pp. 218-223

Shikata, Y.	: On a homology theory associated to foliations	Nagoya Math.J. 38 (1970) pp. 53-61
Thurston, W.	: Foliations and group of diffeomorphisme	BAMS 80 (1974), pp. 304-307
"	: The Theory of foliations of codimension greather than one	Comm.Math. Helv. 49 (1974) pp. 214-231
"	: A generalization of the Reeb stability Theory	Topology 13 (1974) pp. 347-352
Turiel, F.J.	: Modeles locaux de 3-formes fermées transitives sur les 5-variétés: cas où dim E = 3 et nilpotente	CRAS Paris 293(1981) pp. 533-536
Van Est y Bouma, L.G.	: Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle, I	Proc. Kon. Ned. Akad V.Wet. Series a, 81 (1978) pp. 313-347
Van Est	: Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variété a une dimension	Ann.Ins.Fourier,Grenoble 30 (1980) pp. 45-77
Veismann, I.	: Sur la cohomologie des variétés riemannienes feuilletées	CRAS Paris 268(1969) pp. 720-723
"	: Variétés riemanniennes feuillettées	Czechosl. Math. J.21 (96) 1971, pp. 46-75
"	: Cohomology and differential formes	M. Dekker (1973)
"	: A coordinatowise formulation of geometric quantization	Ann.Inst. H.Poinc.31 (1979) pp. 5-24
"	: Conformal foliations	Kodai Math.J.2(1979) pp. 26-37
Varela, F.	: Formes de Pfaff, classe et perturbations	Ann.Inst. Fourier 26 (1976) pp. 239-271
Ver Eecke, P.	: Introduction a la théorie des variétés feuilletées	Amiens, 1982
Vey, J.	: Sur la cohomologie de l'algebre des champs de vecteurs sur une variété	CRAS Paris 273(1971) pp. 850-852 Serie A
Vidal Abascal,E.	: Sobre algunos problemas en relación con la medida en espacios foliados	I Coll.Int.Geom.Diff Sant.Comp. 1964 pp. 63-77
"	: Mesures définies sur les spaces de feuilles d'un feuilletage	Rendiconti del Circ. Mat. Palermo XV 1966 pp. 247-255

Vidal Abascal, E.	: Sur les feuilletages réguliers et les problemes qui s'y rapportent	Preprint
"	: On regular foliations	Ann.Inst. Fourier 17 (1967) pp. 129-133
Vidal, E. y Vidal-Costa, E.	: Special connections and almost foliated metrics	J.Diff.Geom. 8(1973) pp. 297-304
Vidal-Costa, E.	: Conexiones en las variedades casi-producto y foliaciones	Tesis Univ. Zaragoza (1971)
Vidal A., E.	: Sur les connexiones basiques transversales et projectables dans les variétés presque pro duit complexes	CRAS Paris, 277, A, (1973) pp. 461-463
Viviente, J.L.	: Sur la géometrie transverse des feuilletages	Communication I.C.M. 82, Varsovia
"	: Des V-variétés aux QF-variétés: quelques remarques	Communication Seminar on Foliations, University Jagiellon ski, Krakov, 1983
Whitney, H.	: On singularities of mapping of Euclidean Spaces, I, mappings of the plane into the plane	Ann. of Maths. 62 (1955) pp. 374-410
Winkelnkemper,H.E.	: The graph of a foliation	Ann. Global Anal. and Geom. (1982)
Yamato, K.	: Cualitative Theory of codimension one foliations	Nagoya Math.49(1973) pp. 155-229
Yorozu, S.	: Behavior of geodesics in folia ted manifolds with bundle-like metrics	J.Math.Soc. Japan 35 (1983) pp. 251-272

****

I N D I C E

Pags.

Prólogo 5-10

I.- El concepto de foliación

Precedentes 13

El concepto y primeras orientaciones de la teoria 19

La obra de Ehresmann 31

II.- Transversalidad, holonomía y estabilidad

Transversalidad y construcción de foliaciones 39

Holonomía 45

Holonomía transversa 51

Estabilidad 55

III.- Teoría homotópica y geométrica diferencial

Existencia y clases caracteristicas 64

G-estructuras, cohomología y clasificacón 81

Estructura transversa 92

Epílogo 107

Bibliografía 115

Indice 125