

**ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA**

NUDOS Y VARIETADES TRIDIMENSIONALES

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR LA ACADEMICA ELECTA

Ilma. Sra. D^a. María Teresa Lozano Imízcoz

*EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 22 DE ENERO DEL AÑO 1998*

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Ilmo. Sr. D. José Luis Viviente Mateu

ACADEMICO NUMERARIO



ZARAGOZA

1998

Depósito legal: Z-3414-1997

Imprime:

Sdad. Coop. De Artes Gráficas

Librería General

Pedro Cerbuna, 23

50009 Zaragoza

imprentalg@efor.es

NUDOS Y VARIEDADES TRIDIMENSIONALES

POR LA

Ilma. Sra. D^a. María Teresa Lozano Imízcoz

Exmo. Sr. Presidente
Ilmos. Srs. Académicos
Señoras y Señores:

Mi agradecimiento a los Señores Académicos por haber considerado apropiada mi incorporación a la Academia de Ciencias, concediendome con ello un gran honor. Honor que trataré de corresponder con mi esfuerzo y trabajo en todas aquellas cuestiones que la Academia quiera encomendarme.

Quiero agradecer también a todas aquellas personas que han influido en alguna medida, consciente o inconscientemente, a que este acto haya llegado a realizarse: a profesores y compañeros, y en especial a mi familia. Su comprensión, amor y apoyo han hecho posible mi dedicación profesional.

He tenido como predecesor al Ilustrísimo Señor Don Rafael Rodríguez Vidal, de cuyos libros aprendí, durante mis estudios de Bachillerato, las primeras nociones de Matemáticas, y en particular de Geometría, tema que más adelante se convertiría en parte fundamental de mi campo de investigación. También fué mi profesor en asignaturas de mi licenciatura, al igual que muchos de los actuales Señores Académicos. Éstas son más razones, si cabe, para sentirme muy halagada por la elección.

Recordaré, como es preceptivo, una breve biografía del Señor Académico a quien sustituyo: Don Rafael Rodríguez Vidal nació en Ceuta, en 1916, aunque se trasladó pronto a Barcelona, donde se licenció en Matemáticas en 1936 con premio extraordinario. Hizo sus estudios de Doctorado simultaneando puestos de colaborador y agregado en el C.S.I.C. con una cátedra de instituto, primero en Játiva y después en Manresa. En 1950 obtuvo una plaza de profesor adjunto de Análisis matemático y Álgebra en Barcelona y un año después la cátedra de la Universidad de Zaragoza.

Hasta 1963 simultaneó la enseñanza universitaria con la enseñanza media en el Instituto Miguel Servet.

Además de sus publicaciones de investigación matemática, escribió libros de texto de

Bachillerato, trabajos de historia de las matemáticas (recuérdese su monografía sobre el matemático de comienzos del siglo XVI Pedro Ciruelo), el libro “Ecuaciones diferenciales y temas afines” dedicado a la memoria del profesor Dr. José María Orts Aracil a quien Don Rafael admiraba, y en los últimos años, cuatro libros: “Diversiones matemáticas”, “Cuentas y cuentos de los matemáticos”, “Enjambre matemático” y “El mentir de las estrellas”. Sus escritos reúnen virtudes difíciles de encontrar en libros de matemáticos, como son el interés, la claridad y la amenidad.

En 1985 alcanzó su jubilación, pero siguió trabajando incansablemente, hasta poco antes de su fallecimiento ocurrido en Zaragoza el 27 de febrero de 1993. Todos los que le conocimos recordaremos su erudición, su amena conversación, su trabajo constante y su humanidad.

NUDOS Y VARIEDADES TRIDIMENSIONALES

Contents

1. INTRODUCCIÓN	3
2. NUDOS Y ENLACES	4
2.1 Teoría topológica de nudos	5
2.2 Teoría combinatoria de nudos.	11
2.3 Teoría geométrica de nudos	15
2.4 Relación de la Teoría de nudos con otros campos de la ciencia.	15
3. APLICACION DE LA TEORIA DE NUDOS A VARIEDADES TRIDI- MENSIONALES	17
3.1 Métodos topológicos en variedades	18
3.2 Geometría en variedades.	21

1. INTRODUCCIÓN

Mi discurso versará básicamente sobre nudos y enlaces, poniendo de relieve, en la última parte, su utilización como herramienta en el estudio y clasificación de variedades tridimensionales.

Las variedades tridimensionales constituyen un campo de interés multidisciplinar, puesto que vivimos en un mundo espacial tridimensional, y cada fenómeno científico de la vida real se puede estudiar en la variedad tridimensional que habitamos. Las primeras pregunta que surgen en este contexto son: ¿Cómo es globalmente el mundo que habitamos?. ¿Qué variedades tridimensionales existen?. Estos problemas se sitúan en un marco más general, el de las variedades de dimensión n .

Recordemos que esencialmente una variedad topológica (ó diferenciable) de dimensión n en un espacio topológico que localmente es homeomorfo (ó difeomorfo) al espacio \mathbb{R}^n . Es claro entonces que todas las n -variedades tienen las mismas propiedades locales, pero sin embargo pueden diferir sustancialmente desde el punto de vista global. La parte de las matemáticas que se ocupa de las propiedades globales de las variedades es la Topología (Diferencial). Uno de los problemas más importantes de esta disciplina es

la clasificación de n -variedades. Pensemos, por ejemplo, en variedades cerradas. Esto es, conexas, compactas y sin borde. Analizamos el problema según el valor de la dimensión n . Pensamos además que una clasificación se alcanza cuando se tiene una lista completa y sin repeticiones de n -variedades. Es decir, cuando disponemos de una lista de n -variedades de manera que dos miembros de la lista no son homeomorfos, y dada una n -variedad cualquiera disponemos de un procedimiento para determinar a que n -variedad de la lista es homeomorfa.

Para $n = 1$ la única variedad cerrada es la circunferencia S^1 , como puede probarse por métodos elementales de topología general.

$n = 2$. Las variedades de dimensión 2 se denominan superficies. El problema de clasificación de superficies es un problema resuelto. Las superficies cerradas y orientables fueron clasificadas por Möbius en un trabajo publicado en 1863 ([22]). La primera versión combinatoria del resultado fue publicada en 1907 [4]. El teorema de clasificación dice que una superficie cerrada está determinada por su género y su orientabilidad. La demostración de este hecho se puede hacer hoy, por distintos métodos, algunos de los cuales citaremos más adelante.

Para dimensiones superiores, $n > 3$, no es posible obtener una clasificación en el sentido expuesto. La demostración de que no existe ningún algoritmo para la clasificación de 4-variedades cerradas es un resultado del matemático ruso Markov [18].

El problema está abierto cuando $n = 3$, y en la actualidad es un área de activa investigación. Es de destacar el subproblema conocido como Conjetura de Poincaré : *Una variedad tridimensional cerrada y orientable que es simplemente conexa (su grupo fundamental es trivial) es la esfera S^3* . Periódicamente se publican pruebas de esta Conjetura, pero hasta el momento, en todas ellas se ha encontrado algún error.

El estudio de 3-variedades está íntimamente ligado a la rama de la Topología conocida como Teoría de nudos. Veremos que algunos procedimientos de construcción de todas las 3-variedades cerradas y orientables involucra de manera esencial a nudos y enlaces en la esfera S^3 . Ésta es la razón por la que dedicaremos parte de la exposición a comentar algunos aspectos de Teoría de nudos.

2. NUDOS Y ENLACES

Nudos, enlaces y trenzas son palabras que designan objetos cotidianos y que el hombre ha utilizado desde los tiempos más antiguos. Sin embargo, su significado y estudio como objeto matemático es relativamente reciente. Despertaron interés en Gauss (1777-1855), al considerar espiras enlazadas y utilizar su número de enlace en la fórmula que describe el campo magnético inducido. Es, por tanto, un concepto que entra claramente

en matemáticas desde el campo de la física. Además de Gauss citemos entre los precursores de la Teoría topológica de nudos a Listing, Tait y Kelvin. Recordemos que en realidad Kelvin, que conoció el trabajo de Helmholtz, traducido por Tait, sobre vórtices enlazados en un fluido ideal (1859), creyó en la idea de una materia construida por átomos vórtices enlazados y anudados viviendo en un medio fluido llamado ether. Por esa razón, las primeras tablas de nudos y enlaces estaban pensadas como una tabla periódica de elementos químicos.

Aunque estos primeros estudios de nudos y enlaces son anteriores a este siglo, el desarrollo de la Teoría topológica de nudos empieza a tener importancia en los años 20 con las aportaciones del matemático Alexander. En los años 70 nacen la Teoría combinatoria de nudos y la Teoría geométrica de nudos. Estas tres ramas (topológica, combinatoria y geométrica) siguen hoy caminos paralelos e inciden en otros campos científicos como citaré más adelante.

2.1 Teoría topológica de nudos

El concepto matemático de nudo es una abstracción de la siguiente imagen física: Se toma un trozo de cuerda, se anuda, y después se identifican los extremos de tal manera que no podamos distinguir donde se ha realizado ese pegado. El resultado es una cuerda circular anudada. Es decir, si nos imaginamos que podemos caminar dentro de la cuerda, y partiendo de un punto concreto, elegimos un sentido de marcha, al cabo de cierto tiempo volveríamos a pasar por el mismo punto, independientemente de que el anudamiento realizado sea más o menos complicado. Matemáticamente, no tiene importancia que la cuerda sea más o menos gruesa ni más o menos larga. Lo importante es que es una línea cerrada. Es decir, para un topólogo, es una circunferencia en el espacio. Recordar que un topólogo está interesado en las propiedades de los objetos que permanecen por deformaciones, que no impliquen cambios drásticos, como son cortar o pegar. Para un topólogo la propiedad que identifica una circunferencia es la de ser una curva cerrada, en el sentido anterior. Podemos definir un nudo (matemáticamente) como una manera de encajar una circunferencia en el espacio. Toda modificación de un nudo que se realice sin cortar ni volver a pegar la cuerda que lo representa producirá un nudo equivalente. Esta relación de equivalencia se traduce matemáticamente en la existencia de una isotopía entre el nudo inicial y el nudo final.

La disciplina llamada Teoría de nudos estudia también enlaces. Un enlace es un encaje de un número finito de circunferencias en el espacio. Responde a la realidad física de varias cuerdas cerradas, que pueden estar anudadas y a la vez enlazadas unas con otras. Un nudo es entonces un enlace con una sola componente. Dos enlaces son equivalentes si

existe una isotopía entre ellos.

Dejando caer una cuerda anudada sobre la mesa, se obtiene de una manera natural una representación bidimensional del nudo. Entonces los nudos y enlaces se representan mediante proyecciones en un plano. Nos referiremos solo a nudos y enlaces que admiten alguna proyección regular, que es aquella que solo tienen un número finito de puntos dobles (cruces) como puntos singulares. Se distingue el tramo superior en un cruce marcándolo con trazo continuo, a diferencia del tramo inferior que se dibuja cortado. Una proyección regular de un enlace se denomina *diagrama*. La figura 1 muestra diagramas de algunos nudos y enlaces con nombre propio.

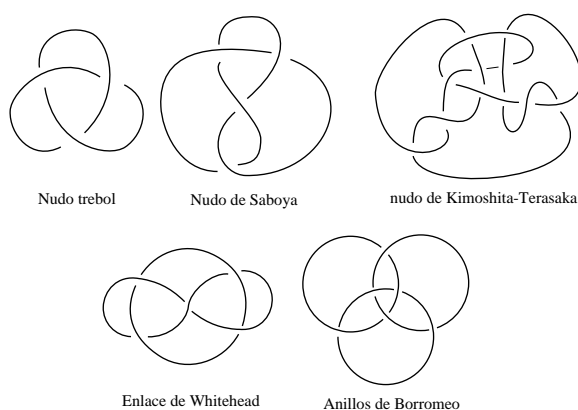


Figura 1.—

La relación de equivalencia entre enlaces se traslada a sus diagramas mediante el siguiente resultado de Reidemester: Dos diagramas representan enlaces equivalentes si y solo si se puede pasar de uno a otro por un número finito de transformaciones de tipo I, II y III, representadas en la figura 2.

El principal problema que se plantea en Teoría de nudos es el de clasificación de nudos y enlaces. Un nudo que admite un diagrama sin cruces es el nudo trivial. Queremos, en particular, saber si un diagrama concreto corresponde o no al nudo trivial. Esto puede ser a veces complicado de averiguar utilizando las transformaciones de Reidemester. La búsqueda de métodos matemáticos que permitan diferenciar unos enlaces de otros y distinguir los que están realmente anudados de los que no lo están, es tema principal de esta rama de la topología. Para avanzar en este problema de clasificación, se buscan lo que denominamos *invariantes* de nudos y enlaces. Son objetos calculables de un enlace, que tienen el mismo valor para todos los posibles diagramas representantes de la misma clase de equivalencia. Los invariantes pueden ser de distinta naturaleza. Por ejemplo, el *número de componentes de un enlace* es un invariante numérico. Éste es un invariante muy débil, de hecho vale 1 para todos los nudos.

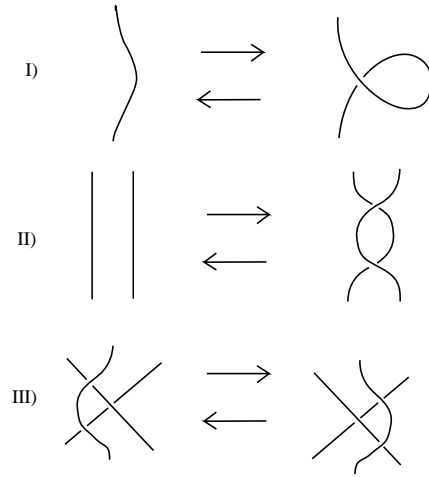


Figura 2.—

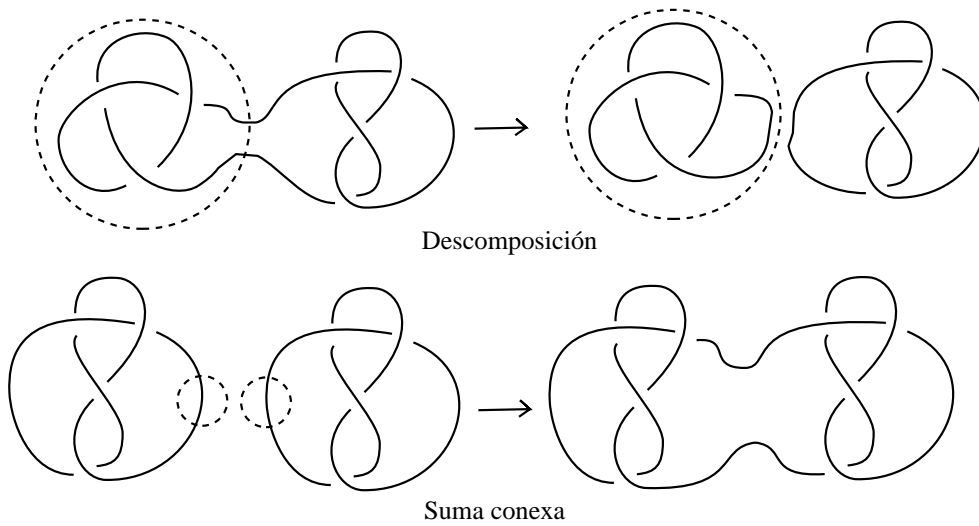


Figura 3.—

Por otra parte, es natural investigar si existe un procedimiento para descomponer un nudo en nudos más simples, y estudiar entonces estos nuevos nudos. En la figura 3 se descompone un nudo mediante una esfera que corta transversalmente al nudo en exactamente dos puntos. Los arcos del nudo que quedan a ambos lados de la esfera se unen por un arco próximo a la esfera para producir sendos nudos. Un nudo para el que no existe una descomposición de ese tipo en dos nudos no triviales se dice que es un nudo primo. Cualquier nudo no primo se obtiene por una operación inversa a la de descomposición, llamada *suma conexa*, a partir de un conjunto finito de nudos primos. Esta operación dota al conjunto de los nudos de una estructura de semigrupo. Existe elemento neutro, que es el nudo trivial. La operación es asociativa. Pero no existe elemento inverso. Es decir, que no existe manera de deshacer un nudo, mediante suma conexa de otros nudos.

Entre otros **invariantes numéricos** citaremos:

El mínimo número de cruces de un nudo o enlace. Si designamos con $c(D)$ el número de cruces de un diagrama D , definimos el número de cruces $c(K)$ de un nudo K , como el mínimo valor de $c(D)$ para todos los posibles diagramas D del nudo K . Es claro que el único nudo con $c(K) = 0$ es el nudo trivial. De hecho el nudo trivial es el único nudo que admite diagramas con 1 ó 2 cruces. La siguiente tabla contiene el número de nudos primos distintos, $n(c)$, que hay con un determinado número, c , mínimo de cruces.

$n(1) = 0$	$n(6) = 3$	$n(11) = 552$
$n(2) = 0$	$n(7) = 7$	$n(12) = 2.176$
$n(3) = 1$	$n(8) = 21$	$n(13) = 9.988$
$n(4) = 1$	$n(9) = 49$	
$n(5) = 2$	$n(10) = 165$	

En esta tabla no se ha distinguido entre un nudo y su imagen en el espejo. Donde la imagen en el espejo se obtiene cambiando en cada cruce de un diagrama del nudo los pasos superiores por pasos inferiores y viceversa, los pasos inferiores por pasos superiores. Esto responde al hecho de considerar que el espejo es el plano de proyección. A veces un nudo es equivalente a su imagen en el espejo (nudos anfiqueirales), pero no es siempre ese el caso. El único nudo de 4 cruces, también llamado “ocho” ó nudo de Saboya, es un nudo anfiqueiral como se demuestra en la figura 4. El nudo de tres cruces, conocido como nudo trébol, no es anfiqueiral pero la demostración de este hecho necesita herramientas no triviales.

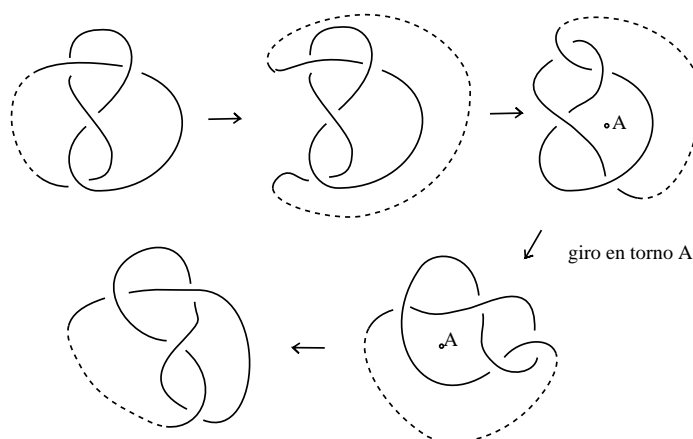


Figura 4.—

El número gordiano de un nudo. Es el mínimo número de cruces que hay que cambiar en un nudo para obtener el nudo trivial. La figura 5 demuestra que este número es 1 para el nudo trébol y el nudo de Saboya. Este invariante no es fácil de calcular en general. Si

cambiando en un diagrama de un nudo K , s cruces obtenemos una proyección del nudo trivial, solo podemos asegurar que su número gordiano $g(K)$ es menor o igual que s .



Figura 5.—

Otro importante conjunto de invariantes se obtiene de la topología del complemento: Hasta este momento hemos considerado los nudos y enlaces en el espacio tridimensional, \mathbb{R}^3 , que es una variedad abierta. Por razones técnicas es más útil pensar que los nudos y enlaces están en la esfera S^3 , que es una variedad compacta, compactificación de \mathbb{R}^3 con un punto en el infinito. Cada nudo o enlace, L , determina totalmente su complemento en la esfera S^3 . Esta es una variedad de dimensión 3, $C(L) = S^3 - L$, y todo invariante del complemento es un invariante del enlace. Es de destacar que ningún invariante del complemento, que no considere orientación, puede distinguir entre un nudo y su imagen en el espejo. El primer invariante del complemento que se considera es su grupo fundamental, que se denomina grupo del enlace, $G(L) = \pi_1(C(L))$. Existen algoritmos que producen una presentación del grupo a partir de un diagrama. El grupo del enlace es un **invariante topológico-algebraico**. Decir si dos diagramas corresponden al mismo enlace usando su grupo es una tarea casi imposible, puesto que es muy difícil averiguar si dos presentaciones distintas corresponden al mismo grupo. Sin embargo, usando representaciones puede, en muchos casos, demostrarse que se trata de grupos distintos y por tanto de enlaces distintos. Del cálculo y uso de este tipo de invariantes es de lo que trata la Topología Algebraica. En Teoría topológica de nudos, usamos Topología Algebraica sencilla para resolver problemas topológicos, como reconocimiento y clasificación.

Invariantes polinómicos: En 1928, el matemático Alexander, probablemente estudiando la topología del complemento de un nudo, K , encontró un polinomio de Laurent en una variable t (con potencias positivas y negativas), que resultó ser un invariante del nudo. Sin embargo en su trabajo solo utiliza álgebra lineal, determinantes, y transformaciones de Reidemester. Es conocido como polinomio de Alexander y denotado por $\Delta_K(t)$. Este polinomio tiene un claro significado geométrico relacionado con la homología del espacio recubridor cíclico infinito del complemento. Poco después Fox desarrolló el *cálculo diferencial libre*, técnica que sirve para calcularlo directamente de la presentación del grupo del nudo. El descubrimiento de este polinomio fue un importante avance en Teoría de nudos, puesto que es un invariante calculable y bastante potente. El polinomio

de Alexander del nudo trivial es 1, pero también hay nudos no triviales, como el conocido nudo de Kinoshita-Terasaka de la figura 1 que tienen polinomio de Alexander 1. De hecho existen infinitos ejemplos de pares de nudos distintos con el mismo polinomio de Alexander, como demostré en 1984 en un trabajo realizado en colaboración con Morton [17]. Luego el polinomio de Alexander no es un invariante completo.

Al principio de los años 60, el uso del ordenador como un eficiente instrumento de cálculo, indujo a los investigadores a buscar nuevos algoritmos para calcular los invariantes conocidos. Esto es lo que hizo J.H. Conway, definiendo un nuevo polinomio de Laurent, $\nabla_L(z)$, para un enlace orientado, que está determinado por una simple definición recursiva basada en tres axiomas:

1. Si O designa el nudo trivial, entonces $\nabla_O(z) = 1$.
2. Denotemos por D_+ , D_- , D_0 tres diagramas de enlaces orientados que coinciden fuera de una bola, y en cuyo interior difieren como indica la figura 6. Los enlaces representados por los diagramas los designamos por L_+ , L_- , L_0 respectivamente. Entonces sus polinomios están relacionados por la siguiente ecuación:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = \nabla_{L_0}(z).$$

3. $\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z)$ si los enlaces L y L' son equivalentes.

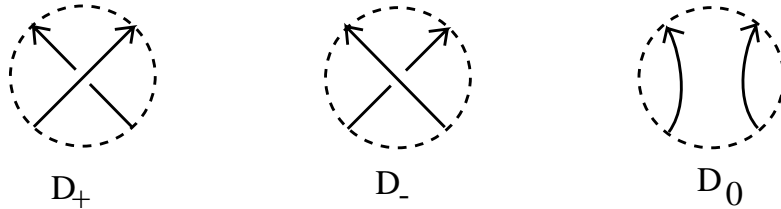


Figura 6.—

Si partimos de un nudo K , lo orientamos y calculamos su polinomio de Conway utilizando estos tres axiomas, el resultado es independiente de la orientación elegida. Esto significa que el polinomio de Conway de un nudo es un invariante del nudo. En realidad este polinomio de Conway está relacionado con el de Alexander por un cambio de variable.

$$\Delta_K(t) = \nabla_L \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

La figura 7 muestra, como ejemplo, un árbol que permite calcular el polinomio de Conway del trébol.

$$\nabla_K(z) = 1\nabla_O(z) + z\nabla_{OO}(z) + z^2\nabla_O(z) = (1 + z^2)\nabla_O(z) + 1\nabla_O(z) = (1 + z^2)$$

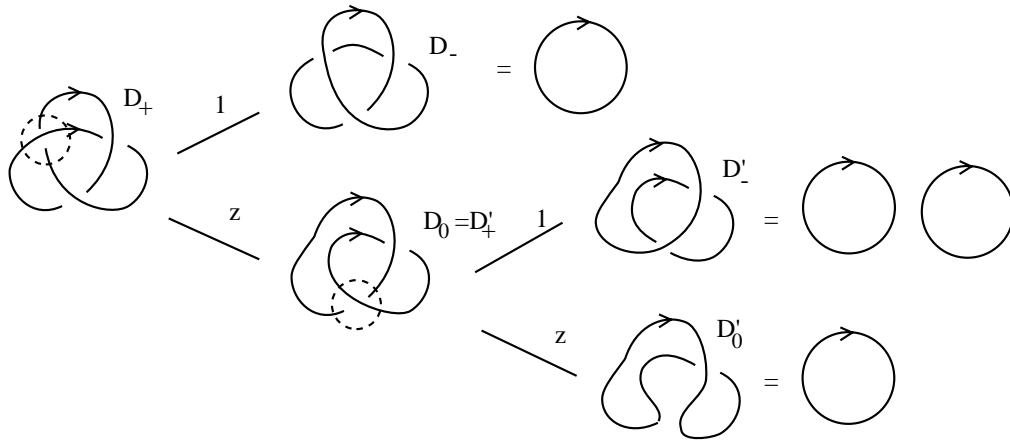


Figura 7.—

Éste pudo haber sido el principio de lo que hoy conocemos como Teoría combinatoria de nudos, si algún investigador hubiera tenido la idea de cambiar ligeramente el segundo axioma introduciendo nuevas variables. Pero esto sucede mucho más tarde, tras el descubrimiento de un nuevo polinomio por V. Jones en 1984.

2.2 Teoría combinatoria de nudos.

V. Jones encontró en 1984 el invariante polinómico de enlaces que después llevaría su nombre. El hecho tuvo una gran difusión en el mundo científico y comenzaron a encontrarse nuevos invariantes combinatorios de nudos y enlaces, así como aplicaciones desconocidas hasta entonces de la Teoría de nudos a otras ciencias. El trabajo de V. Jones abrió nuevas líneas de investigación en diversos campos, y le hizo merecedor de la medalla Fields, el máximo galardón que se concede a jóvenes investigadores matemáticos, en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Kyoto en 1990.

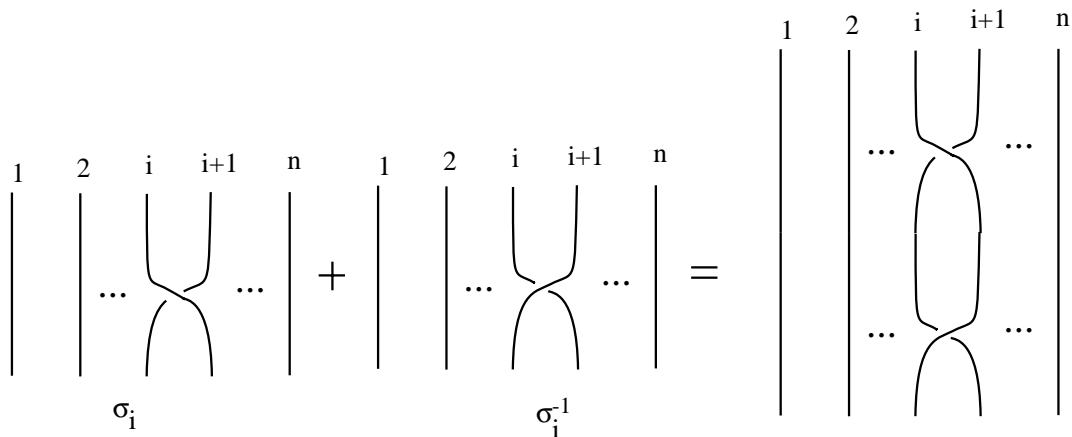


Figura 8.—

V. Jones trabajaba en mecánica estadística, y estudió ciertas funciones traza de C^* -álgebras. Observó que podía encontrar representaciones del grupo de trenzas en C^* -álgebras. Una n -trenza es un conjunto de n arcos disjuntos que unen n puntos en un plano $z = a$ con sus proyecciones en otro plano paralelo $z = b$, de tal manera que ningún arco presenta máximos o mínimos. Las trenzas se pueden componer como indica la figura 8, donde también se muestran las trenzas elementales σ_i y σ_i^{-1} , $i = 1, \dots, n - 1$. Se observa que el conjunto de n -trenzas forma un grupo, llamado también grupo de Artin, B_n , generado por las trenzas elementales. Una trenza produce un nudo o enlace si se añaden arcos que unen los puntos extremos sin introducir nuevos cruces. Por otra parte todo nudo o enlace se puede poner como una trenza, aunque no de manera única. Existe un conjunto de transformaciones, llamadas transformaciones de Markov, que permiten pasar de una trenza a otra que represente el mismo enlace. Pues bien V. Jones probó que la asignación de cierto polinomio a cada trenza, era invariante por transformaciones de Markov, con lo que se obtiene un invariante de enlaces. Inmediatamente se demostró que cumplía una propiedad que puede utilizarse como axioma (2) para su definición. El axioma (1) es de normalización. Así el polinomio de Jones de un nudo o de un enlace orientado, $V_L(t)$, cumple los siguientes axiomas:

1. $V_O(t) = 1$

- 2.

$$\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{L_0}(t).$$

Se puede demostrar que el polinomio de un enlace orientado, definido por estos axiomas, no cambia por transformaciones de Reidemester. Luego puede ser tratado y calculado de forma análoga al polinomio de Conway o de Alexander. En un principio se pensó que podía estar también relacionados con ellos por un cambio de variable. Pero es fácil comprobar, por la simetría del axioma 2, que el polinomio de Jones de la imagen en un espejo de un nudo es el polinomio de Jones del nudo inicial cambiando t por su inverso, t^{-1} . Esto implica que un nudo anfiqueiral tiene un polinomio de Jones invariante por la transformación que envía t a t^{-1} , digamos simétrico. Y recíprocamente que si un nudo tiene un polinomio de Jones no simétrico, el nudo no es anfiqueiral y además el polinomio de Jones distingue este nudo de su imagen en el espejo. Este es el caso del nudo trébol, K, cuyo polinomio de Jones se calcula a partir del árbol de la figura 9, análogo al de la figura 7.

$$V_K(t) = t^2 V_O(t) + t^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{O_0}(t) + t^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 V_O(t) = t + t^3 - t^4.$$

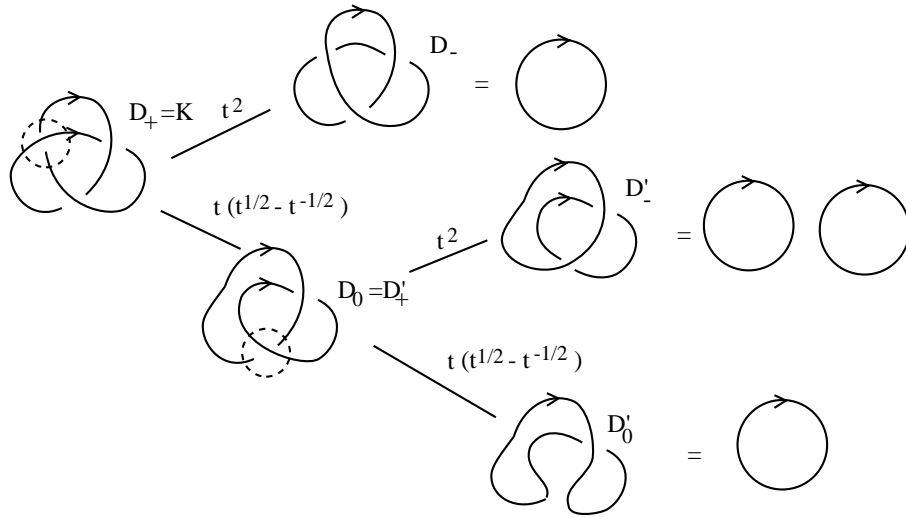


Figura 9.—

El polinomio de Jones del nudo K^* , imagen en el espejo de K , es $V_{K^*}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$. Éste es el primer invariante numérico ó polinómico conocido, que distingue el treból a derecha del treból a izquierda. Tampoco el polinomio de Jones es un invariante completo. Pronto se comprobó que algunos nudos con el mismo polinomio de Alexander, tienen también el mismo polinomio de Jones, como es el caso de los encontrados en [17]. Luego el nuevo polinomio no es tampoco un invariante completo. Pero cabe preguntarse: ¿es el polinomio de Jones un invariante más fuerte que el polinomio de Alexander?. La respuesta se obtiene observando que existen parejas de nudos con distinto polinomio de Alexander, luego nudos distintos, que sin embargo tienen el mismo polinomio de Jones. Entonces se concluye que los polinomios de Alexander y de Jones, son invariantes distintos.

Varios especialistas en Teoría de nudos descubrieron independientemente, pero casi al mismo tiempo, que ambos polinomios son caso especial de un invariante combinatorio más general definido para enlaces orientados ó nudos no orientados, por dos axiomas análogos, pero introduciendo dos variables, v, z , en lugar de una. Se le llamó polinomio HOMFLY, palabra formada por las iniciales de los matemáticos que lo definieron, y se designa por $P_K(v, z)$. Los axiomas de definición son los siguientes:

1. $P_O(v, z) = 1$

- 2.

$$\frac{1}{v} P_{L_+}(v, z) - v P_{L_-}(v, z) = z P_{L_0}(v, z).$$

Su relación con los polinomios anteriores esta dada por:

$$V_K(t) = P_K\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

$$\nabla_K(t) = P_K\left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

lo que implica que ambos polinomios, el de Alexander y el de Jones, son casos particulares del polinomio HOMFLY. También está probado que $P_K(v, z)$ no es un invariante completo del nudo, de hecho está probado que siempre que se defina un polinomio por axiomas del tipo combinatorio utilizado en los polinomios descritos, siempre existirá una pareja de enlaces distintos con el mismo polinomio.

En esta nueva rama en la Teoría de nudos, la Teoría combinatoria de nudos, investigan ahora un gran número de matemáticos y aquí los avances se producen a gran velocidad. Buscan nuevos invariantes combinatorios, sus relaciones, problemas que resuelven, etc. Si hay que destacar a alguien, es justo decir que las ideas más originales, y los avances más novedosos en esta nueva rama de las Matemáticas son debidas a Louis Kauffman que ha escrito varios libros y numerosos artículos sobre estos temas. Realmente Louis Kauffman trabajaba ya en Teoría de nudos desde el punto de vista combinatorio desde los años 70, pero este enfoque no despertaba todavía mucho interés. Sus recientes incursiones con Teoría de nudos a distintas ramas de la física han sido fructíferas para las dos vertientes: la Teoría de nudos y las teorías físicas.

Avances recientes en problemas clásicos de Teoría de nudos:

Usando los nuevos polinomios de nudos se ha conseguido probar conjeturas establecidas por Tait en el siglo pasado referentes a nudos alternantes. Citaremos algunas como ejemplo.

Un diagrama de un enlace es alternante si cuando se recorre cada componente del enlace K_i a partir de cualquier punto fijo $P_i \in K_i$ y en uno de los dos posibles sentidos, se atraviesan los cruces alternativamente por encima y por debajo. Un enlace es alternante si tiene un diagrama alternante. Muchos nudos y enlaces de las tablas son alternantes. El nudo trébol y el de Saboya de la figura 1 son alternantes, mientras que el diagrama del nudo de Kinoshita-Terasaka de la figura 1 no lo es. Siempre se sospechó que un diagrama alternante reducido (sin cruces obviamente superfluos) correspondía a un enlace no trivial. Pero la prueba rigurosa de este hecho solo se ha conseguido utilizando la relación existente entre el grado total (máximo grado menos mínimo grado) del polinomio de Jones y el número de cruces del diagrama. Concretamente se ha probado que un diagrama alternante reducido de un enlace realiza el mínimo número de cruces del enlace, luego dos diagramas alternantes reducidos del mismo enlace, tienen el mismo número de cruces.

Otro viejo problema de Tait probado con los mismos métodos es que un nudo alternante cuyo número mínimo de cruces es impar, nunca puede ser anfiqueiral.

Un interesante problema abierto es buscar el significado geométrico ó topológico de

las variables de estos nuevos invariantes polinómicos, de sus raíces, e incluso de los mismos polinomios, a semejanza de la estructura topológica que dió origen al polinomio de Alexander. Un intento de este tipo lo ha realizado Witten usando lazos de Wilson.

2.3 Teoría geométrica de nudos

La Teoría geométrica de nudos comienza en 1974 con el trabajo de R. Ryley donde construye una estructura de variedad hiperbólica completa en el complemento de tres nudos en S^3 , uno de ellos es el nudo de Saboya. Este resultado es obtenido también al poco tiempo e independientemente por Thurston, quien lo generalizó más tarde para todos aquellos nudos primos que no tienen un toro incompresible en el complemento y que se denominan nudos hiperbólicos. Estas estructuras hiperbólicas se obtienen mediante una representación del grupo del nudo en el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, que es el grupo de isometrías directas del espacio hiperbólico H^3 , cumpliendo ciertas propiedades. El estudio de representaciones del grupo del nudo en el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ que envían meridianos a giros de ángulo, digamos α , está relacionado con estructuras hiperbólicas en la esfera S^3 que tienen al nudo como geodésica singular. La singularidad del nudo se refleja en que la medida del ángulo alrededor del nudo es α en lugar de 2π como lo es para todas las demás geodésicas de la variedad. La estructura se denomina de variedad cónica de ángulo α . Si el ángulo α es $\frac{2\pi}{n}$, la estructura hiperbólica de S^3 con singularidad el nudo en cuestión es un ejemplo del concepto de orbifold entera (orbifold, en inglés).

Este estudio de estructuras hiperbólicas en el complemento de nudos, produce también interesantes invariantes. Por ejemplo el ángulo límite superior α_h para las estructuras de variedades cónicas hiperbólicas en S^3 con singularidad el nudo, es un invariante numérico del nudo, llamado *límite de hiperbolicidad* ([9]). Éste es un número algebraico, y su polinomio mínimo es un invariante polinómico del nudo, cuyo estudio plantea interesantes cuestiones. Por ejemplo, ¿cuál es su relación con los otros invariantes polinómicos conocidos?. Una de sus raíces es el límite de hiperbolicidad, ¿cuál es el significado geométrico de las otras raíces?.

La Teoría geométrica de nudos está ligada a la existencia de estructuras geométricas en variedades tridimensionales, como comentaré en el párrafo dedicado a este tema.

2.4 Relación de la Teoría de nudos con otros campos de la ciencia.

Comentemos brevemente la relación de la Teoría de nudos con otros campos, en los que aparecen los nudos y enlaces como objetos a estudiar, dentro de un contexto más amplio.

Nudos y sistemas dinámicos:

A veces las órbitas de un flujo, pueden ser cerradas, y si el espacio ambiente es tridimensional, constituyen nudos y enlaces. Por tanto, un estudio cualitativo de sistemas dinámicos en 3-variedades analiza los nudos y enlaces que aparecen como órbitas cerradas del flujo. Los primeros estudios de este tipo demuestran que en el flujo definido por las ecuaciones diferenciales de Lorenz en \mathbb{R}^3 solo pueden aparecer un tipo de nudos (llamados nudos positivos) [1]. Morgan ([25]) demostró que si una variedad tridimensional soporta un flujo de Morse-Smale no singular (con atractores y repulsores aislados) entonces es suma conexa de variedades de grafo, y los atractores y repulsores son nudos que son fibras de la estructura fibrada de sus sumandos. Probablemente los flujos más estudiados y conocidos en variedades tridimensionales son los flujos llamados de Anosov, que tienen las mismas propiedades que los flujos geodésicos de las superficies orientables. Ciertos cocientes de estos flujos existen en la esfera S^3 , y corresponden a flujos geodésicos de orbiformas de dimensión 2 (cocientes finitos de superficies). Estos flujos poseen unas órbitas singulares que son nudos de Montesinos. Flujos con características similares a éstos se denominan flujos de Anosov singulares y existen en toda variedad tridimensional ([16]).

Nudos y Mecánica de fluidos:

También interesa la Teoría de nudos en mecánica de fluidos. En la actualidad también se trabaja en modelos con tubos vórtices anudados y enlazados y se define un nuevo invariante de fluidos denominado helicidad, relacionado con el número de enlace del enlace en cuestión. La helicidad resulta ser una cantidad medible que es invariante bajo deformaciones continuas de la estructura del fluido y que permite hacer estimaciones medias de magnitudes geométricas relacionadas con el fluido ([27]).

Nudos en Física Teórica

Citemos que Reshetikhin y Turaev utilizaron grupos cuánticos para construir ciertos invariantes de variedades tridimensionales a partir del polinomio de Jones. Estos invariantes han interesado principalmente a los físicos. Witten, también medalla Fields en 1990, ha vertido estas ideas a la Teoría cuántica de campos, definido un invariante de enlaces, (utilizando integrales formales tipo Feynman), y un invariante de 3-variedades asociado que está relacionado con el de Reshetikhin y Turaev. Con esto trata de dar un significado físico y geométrico al polinomio de Jones. [Knots and physics. Kauffman 1991]

Otra situación donde aparecen las trenzas de modo natural es en modelos de vértices de la mecánica estadística, que permite recuperar de las funciones de partición, el polinomio de Jones. Además desde la mecánica estadística se puede obtener un método general para construir nuevos invariantes combinatorios.

Nudos en Biología.

Se ha establecido en biología molecular que las dobles hélices de ADN se anudan y se

enlazan durante los procesos biológicos de recombinación y replicación, gracias al avance de la tecnología que ha mejorado la calidad y precisión de los datos biológicos y han hecho posible observar los fenómenos biológicos a escalas muy pequeñas.

Hay un grupo de biólogos y topólogos que trabajan, hace algunos años en Estados Unidos, en un proyecto de investigación conjunto tratando de encontrar conexiones entre la estructura y función de las moléculas de ADN y las propiedades topológicas de los nudos y enlaces que forman. Es conocido que la longitud de la molécula de ADN es del orden de diez mil veces el radio del núcleo de la célula donde se encuentra. Este hecho motiva que la forma en que la molécula de ADN está situada en el núcleo de la célula sea muy complicada. Además hay que tener en cuenta la estructura rizada en doble hélice de la mayoría de las moléculas de ADN. En los estudios de laboratorio se trata de entender el papel de los distintos soluciones biológicas o enzimas en los procesos de réplica, transcripción y recombinación. Las enzimas llamadas topoisomerasas, alteran topológicamente el ADN por el procedimiento de cortar y pegar en el mismo sitio. Esto altera el rizo de la molécula. Otras enzimas (recombinasas), lo alteran por cortar y pegar en extremos diferentes. Para identificar estas acciones los biólogos experimentan con moléculas circulares de ADN, es decir nudos (también se han observado moléculas circulares de ADN en la naturaleza, aunque no son las más frecuentes). Una reciente técnica experimental cubre el ADN con una sustancia que engrosa y tensa la molécula de forma que puede ser observada por microscopio electrónico. Entonces la Teoría de nudos permite clasificarlas antes y después de un proceso, y por tanto determinar parte del mecanismo enzimático. La estructura del ADN es también geométrica, digamos casi localmente rígida, y eso hace que haya que considerar también parámetros de geometría diferencial local en el estudio.

3. APLICACION DE LA TEORIA DE NUDOS A VARIEDADES TRIDIMENSIONALES

Los métodos utilizados para estudiar y clasificar las variedades de dimensión 3 han sido variados. Aquí nos fijaremos en particular en aquellos que utilizan nudos y enlaces como herramienta. Hasta los años setenta los métodos de trabajo eran exclusivamente topológicos. En esa época el matemático americano William Thurston introdujo métodos geométricos. Analizaremos estas dos técnicas con más detalle después de recordar algunos de los resultados que se obtienen al aplicarlas a superficies orientables. Veremos que los enlaces son a las 3-variedades como los puntos son a las superficies. En ambos casos son subvariedades compactas de codimensión 2. Y en variedades, generalmente, las analogías son posibles si se mantienen las codimensiones.

3.1 Métodos topológicos en variedades

Métodos topológicos en superficies

Un método de construcción de todas las superficies orientables se apoya en la utilización de espacios recubridores ramificados. (Noción que generaliza las superficies de Riemann de una función analítica “multivaluada”.) Este resultado se engloba en uno más general probado por Alexander en 1920. Su teorema asegura que *cada variedad n -dimensional es espacio recubridor sobre la esfera S^n ramificado sobre un subcomplejo de codimensión 2*. Par $n = 2$ la ramificación es un conjunto de puntos.

Si en los espacios recubridores ramificados utilizados para construir todas las superficies orientables se fija, o bien la ramificación, o bien el número de hojas, este método sirve también como procedimiento sencillo de clasificación. Explicamos con cierto detalle estos resultados en superficies para entender con más facilidad sus análogos en una dimensión superior, sin necesidad de dar aquí definiciones matemáticas precisas.

(i) En la Figura 10 vemos que un giro de 180° en torno al eje de trazo discontinuo deja invariante la superficie. El espacio cociente de F_g por la acción de esta involución es una esfera S^2 . La aplicación cociente es una aplicación recubridora de dos hojas fuera de los puntos de intersección del eje de giro con la superficie. Esto es un ejemplo de espacio recubridor ramificado. Los puntos de ramificación son los de la proyección del eje de giro. En este caso su número es $(2g + 2)$. Luego el número de puntos de ramificación identifica la superficie F_g . Observad que en esta representación de las superficies como espacio recubridor el número de hojas es siempre 2. Concretamente: *Una superficie orientable de género g , F_g , es un espacio recubridor de dos hojas sobre la esfera S^2 , ramificado sobre $(2g + 2)$ puntos.*

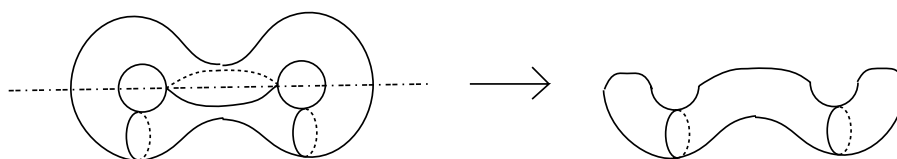


Figura 10.—

(ii) Otro procedimiento de construcción de todas las superficies orientables, consiste en considerar $g + 1$ copias de un cilindro con cada uno de sus bordes dividido en dos semicircunferencias $(a_i^+, a_i^-; b_i^+, b_i^-)$ y pegarlas cíclicamente identificando a_i^+ con a_{i+1}^- , y b_i^+ con b_{i+1}^- . Se obtiene así una superficie de género g en la que actúa el grupo cíclico de $g + 1$ elementos con uno de los cilindros como dominio fundamental. El cociente de F_g por esta acción es el resultado de pegar en un cilindro a_i^+ con a_i^- y b_i^+ con b_i^- , es decir una esfera S^2 . En la figura 11 hemos dibujado $g = 2$. A diferencia del caso anterior,

aquí es el número de puntos de ramificación el que permanece constante para todas las superficies, y es el número de hojas el que identifica cada superficie. El resultado preciso es *Una superficie orientable de género g , F_g , es un espacio recubridor de $(g + 1)$ hojas sobre la esfera S^2 , ramificado sobre 4 puntos.*

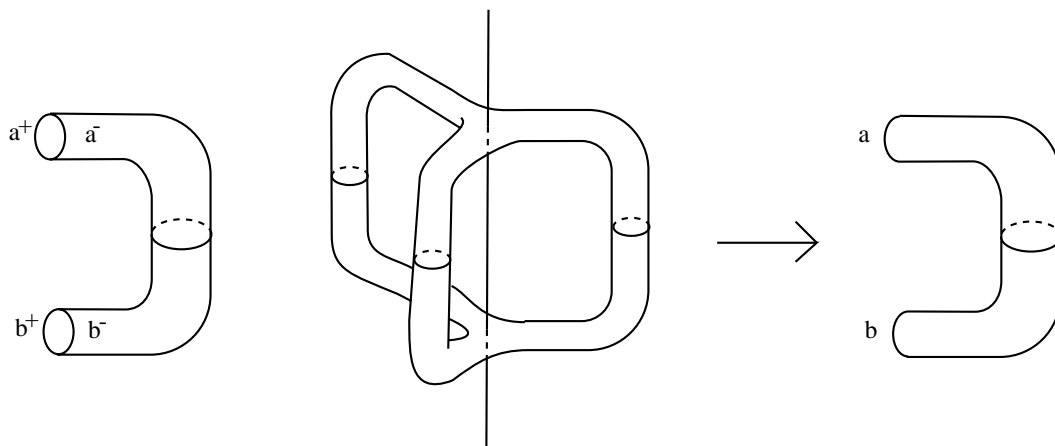


Figura 11.—

(iii) Otro método clásico de construcción de superficies es *cirugía* en la esfera S^2 . La cirugía consiste en reemplazar pares de entornos de puntos en una superficie, por cilindros, identificando su borde con el borde de los entornos. Concretamente: *Cada superficie cerrada y orientable, F_g , es el resultado de pegar g cilindros a una esfera menos $2g$ discos.* La identificación se realiza por el borde, y de manera que el resultado sea orientable. En la figura 12 se representa por este procedimiento las superficies de género 1 y 2.

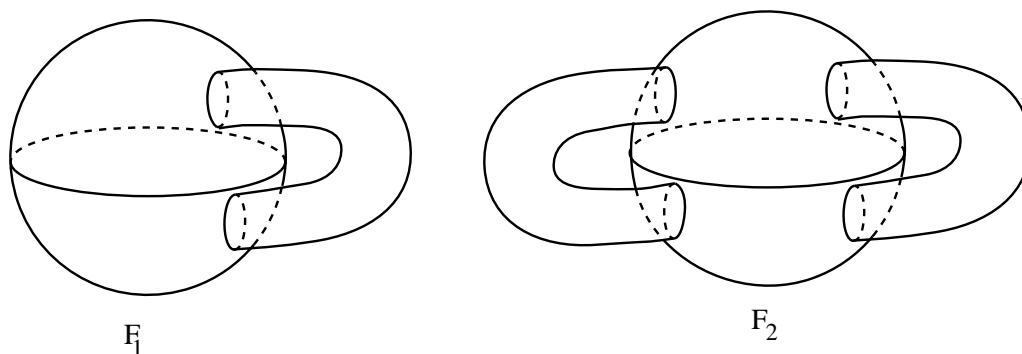


Figura 12.—

Cada uno de los tres procedimientos anteriores fabrican todas las superficies cerradas y orientables, y sirven también para su clasificación, puesto que para cada procedimiento, una superficie se obtiene de una única manera. Estos métodos tienen sus análogos en dimensión tres, pero allí la situación no es unívoca. Veámoslo.

Para variedades tridimensionales, Alexander aseguró que la ramificación podía ser una subvariedad cerrada de codimensión 2, es decir, un enlace, y que los índices de ramificación podían valer 1 ó 2. Este resultado ha sido afinado por otros matemáticos en diferentes versiones, de las que citaré las mejores posibles, en cuanto al número de hojas, y en cuanto al enlace de ramificación.

(i) *Toda 3-variedad cerrada y orientable es espacio recubridor de tres hojas de la esfera S^3 ramificado sobre un enlace* ([5], [23]). Este teorema que construye todas las 3-variedades como espacios recubridores de tres hojas, es el mejor resultado posible en cuanto al número de hojas, puesto que no toda 3-variedad cerrada y orientable admite una involución. En este caso, dos variedades distintas tienen distintos enlaces como ramificación, o distintas monodromías sobre el mismo enlace. Pero también sucede que distintos espacios recubridores ramificados sobre S^3 pueden producir la misma variedad. Una clasificación por este camino supondría una clasificación de enlaces en S^3 , de monodromías simples (representaciones transitivas del grupo del enlace que envían meridianos a trasposiciones) en el grupo de permutaciones de tres elementos, y de transformaciones que cambian la monodromía y el enlace sin cambiar la variedad obtenida.

(ii) *Toda 3-variedad cerrada y orientable es espacio recubridor de la esfera S^3 ramificado sobre el nudo de Saboya (4_1 de la tabla de Rolfsen [26])*. Este resultado ([7], 1986) es el mejor posible en cuanto a que el nudo de ramificación no puede ser más sencillo, puesto que todo espacio recubridor ramificado sobre el nudo trébol (3_1) tiene una estructura de variedad de Seifert, estructura que no poseen todas las 3-variedades. También sucede en este caso que dos monodromías distintas pueden producir la misma 3-variedad. Un enlace con la propiedad de que toda variedad tridimensional es espacio recubridor de la esfera S^3 ramificado sobre ese enlace, se llama enlace universal. El concepto fue definido por Thurston [31] en un preprint donde calculaba un complicado enlace universal y preguntaba tres cuestiones:

1. ¿Existe nudo universal?.
2. ¿Es el nudo de Saboya universal?.
3. ¿Es el enlace de Whitehead un enlace universal?.

Las tres cuestiones fueron contestadas afirmativamente en sucesivos trabajos que realicé conjuntamente por mis colaboradores M. Hilden, J.M.Montesinos ([6], [7], [8]). El interés de estos resultados es también geométrico como veremos más adelante.

Otro método de construcción de todas las variedades tridimensionales que involucra a los enlaces es el de *cirugía*: *Toda 3-variedad cerrada y orientable es el resultado de hacer cirugía de Dehn en un enlace de S^3* . Hacemos cirugía de Dehn en un nudo de

S^3 cuando quitamos un entorno del nudo, que es un toro sólido, y lo volvemos a pegar de una forma determinada por el coeficiente de la cirugía. Este coeficiente es un número racional, a/b , que indica que el meridiano del nuevo toro sólido es la curva $aL + bM$, donde M es el meridiano del nudo y L es la longitud canónica del nudo (nullhomologa en el complemento). El resultado fué probado por Lickorish ([15], 1962) y Wallace ([33], 1960). Dos cirugías en distintos enlaces pueden producir la misma variedad.

Observamos que estos métodos topológicos que hemos citado, y que sirven para construir todas las 3-variedades cerradas y orientables, están en correspondencia por analogía con la situación existente en dimensión 2, pero a diferencia de este caso, la construcción no es unívoca. Una clasificación usando estos métodos es difícil de conseguir.

3.2 Geometría en variedades.

En los años 70 el matemático William Thurston ([30]) introdujo la utilización de métodos geométricos en dimensión 3, también en analogía con la situación existente en superficies. La idea de geometrización de una variedad, se expresa en la siguiente

Definición 1 *Sea X una variedad Riemanniana orientada y G su grupo de isometrías que conservan la orientación. Una variedad M^n se dice que admite una (X, G) -geometría, o que es una (X, G) -variedad, si tiene un atlas con cartas en X , donde los cambios de cartas son restricciones de elementos de G .*

Este concepto de (X, G) -variedad tiene sus antecedentes en el concepto de variedad Riemanniana localmente homogénea introducido por Cartan en 1926 ([2]), y fue definido por Vahlen y Whitehead en 1931 ([32]). Generaliza el concepto de forma de Clifford-Klein introducido por Killing en 1891 ([13]) como espacio de órbitas de la acción de un grupo discontinuo de isometrías actuando libremente en la esfera, el espacio Euclideo o el espacio hiperbólico.

Es claro que si una variedad M^n admite una (X, G) -geometría, lo mismo ocurre con todos sus espacios recubridores.

Geometrías en superficies:

Analizamos primero la situación en superficies:

Consideremos la esfera S^2 , el plano euclideo E^2 y el plano hiperbólico H^2 . Las tres son 2-variedades Riemannianas de curvatura constante (positiva, cero ó negativa) que son simplemente conexas.

Cada superficie cerrada admite una (X, G) -geometría donde X es S^2, E^2 , ó H^2 , y G el correspondiente grupo de isometrías que conservan la orientación . Para la esfera S^2

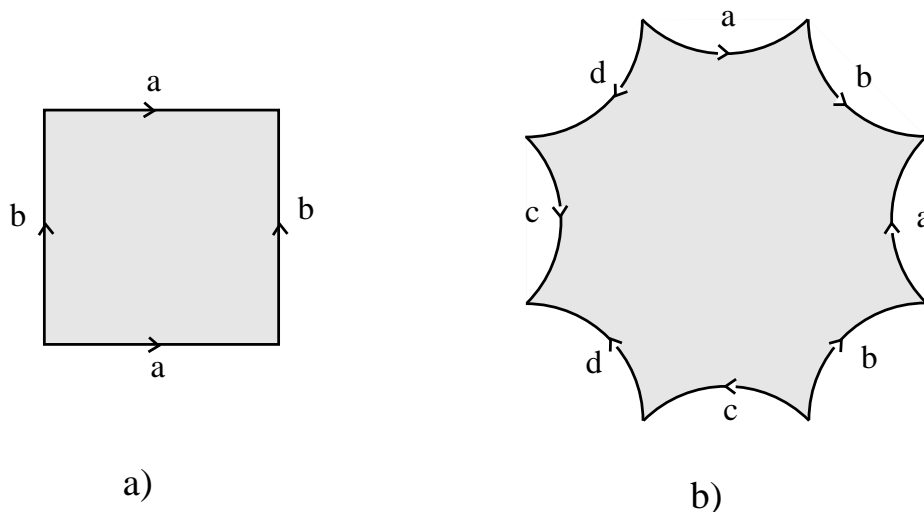


Figura 13.—

este hecho es evidente. El toro, superficie de género 1, tiene al plano Euclídeo como espacio recubridor universal. Se puede representar como el resultado de identificar los lados de un paralelogramo como indica la Figura 13 a). Este paralelogramo es el dominio fundamental para la acción de un subgrupo de isometrías del plano (traslaciones en dos direcciones distintas) isomorfo al grupo fundamental del toro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El toro es así una forma de Clifford-Klein Euclídea. Una superficie cerrada y orientable de género g , $g > 1$, es el resultado de identificar los lados de un polígono regular de $4g$ lados de cierta manera. (En la Figura 13 b) se muestra la superficie de género 2.) Todos los vértices del polígono se identifican a un solo punto P en F_g . Por tanto, si cada ángulo del polígono es de $2\pi/(4g)$, el ángulo alrededor del punto P en F_g es de 2π . Tal polígono existe en el plano hiperbólico. Así, el plano hiperbólico es el espacio recubridor universal de F_g , $g > 1$, y la superficie es el cociente de dicho plano por la acción de un subgrupo de isometrías isomorfo al grupo fundamental de F_g , es decir forma de Clifford-Klein hiperbólica.

En resumen, cada superficie cerrada soporta una estructura Riemanniana de curvatura constante (positiva, cero ó negativa) según sea su característica de Euler (positiva, cero ó negativa).

Geometrías en 3-variedades

En dimensión tres, las variedades simplemente conexas de curvatura constante: la esfera S^3 , el espacio Euclídeo E^3 , y el espacio hiperbólico H^3 , no son suficientes para dotar de una estructura geométrica a cada variedad tridimensional. Por ejemplo, la variedad $S^2 \times S^1$ no admite una estructura geométrica de curvatura constante, puesto que su espacio recubridor universal, $S^2 \times \mathbb{R}$ no es homeomorfo a S^3 ó \mathbb{R}^3 . Thurston probó que son necesarias 8 geometrías para dotar a todas las variedades cerradas y orientables

de una estructura geométrica. Estas geometrías están magníficamente explicadas en el artículo de Scott [28]. Por otra parte, cada 3-variedad M orientable es suma conexa de variedades primas, y los sumandos son únicos salvo orden ([21]). Se trata entonces de clasificar variedades primas. Dada una variedad prima, existe una familia de toros encajados incompresibles que la dividen en piezas “simples”. El teorema de Geometrización de Thurston asegura que cada una de estas piezas simples admite una de las 8 geometrías. Las variedades modeladas en 7 de esas 8 geometrías están clasificadas. Se trata de las variedades que admiten un espacio recubridor que es un fibrado por toros sobre S^1 con monodromía Anosov, y de las llamadas variedades de Seifert. Estas últimas son variedades que están foliadas por circunferencias; fueron definidas y clasificadas por Seifert en un artículo publicado en 1933 [28]. La otra clase, es la de las variedades que admiten una estructura hiperbólica. Se llaman variedades hiperbólicas y son las más estudiadas en la actualidad. Para ellas existe el importante teorema de Rigidez, debido a Mostow [24]:

Teorema 1 *Si una 3-variedad orientable admite una estructura hiperbólica, ésta es única salvo isometría.*

Como corolario se obtiene que todo invariante geométrico de una 3-variedad hiperbólica es un invariante topológico. Dos de los más importantes invariantes geométricos de una variedad Riemanniana son el volumen y el invariante de Chern-Simons. Por tanto tiene gran interés para la clasificación de las 3-variedades la obtención de estos invariantes.

Por otra parte, el cociente de una 3-variedad hiperbólica orientada, M , por un subgrupo discreto de isometrías directas, Γ , y que designamos por M/Γ , tiene una estructura geométrica heredada. Si el grupo actúa libremente, el cociente, M/Γ , es a su vez una variedad hiperbólica. Pero si el grupo tiene elementos que dejan puntos fijos, por ejemplo un giro de ángulo $2\pi/n$ en torno a una geodésica, entonces el cociente tiene la proyección de la geodésica como conjunto singular. El ángulo alrededor de esta curva singular es $2\pi/n$. Esta estructura es la que hemos denominado orbiforma hiperbólica entera. Obsérvese que es una generalización del concepto de forma de Clifford-Klein. En este caso se permite que en el grupo que actúa discontinuamente existan isometrías con puntos fijos.

De especial interés son las orbiformas enteras cuyo espacio subyacente es la esfera S^3 y cuyo conjunto singular es un nudo K , puesto se deduce fácilmente que todo espacio recubridor de S^3 , con un número finito de hojas, ramificado sobre un nudo hiperbólico posee a su vez estructuras de orbiforma hiperbólica entera. Como el nudo de Saboya es un nudo universal ([7]) y también es un nudo hiperbólico ([26]), toda variedad tridimensional tiene estructuras de orbiforma hiperbólica entera. Estas son las implicaciones geométricas que citaba en relación con la existencia de nudos y enlaces universales, consecuencia

también de la Teoría geométrica de nudos.

Recientemente, Hilden, Montesinos y yo, ([10],[11],[12]), hemos utilizado estas ideas para desarrollar un método que permite calcular el volumen y el invariante de Chern-Simons de las variedades hiperbólicas construidas como espacios recubridores de las orbiformas anteriormente citadas: orbiformas enteras cuyo espacio subyacente es la esfera S^3 y cuyo conjunto singular es un nudo K .

Por último quiero terminar llamando la atención del auditorio sobre dos puntos: En primer lugar, el rico abanico de aplicaciones que tiene la Teoría de nudos, que yo he tratado de esbozar en estos minutos, pero que sospecho que es solo una pequeña parte de lo que se estudiará en un futuro cercano. En segundo lugar, la importancia que ha tenido en los avances alcanzados en los últimos años, la colaboración y comunicación de ideas, entre científicos, que trabajando, a veces, en distintos campos de la ciencia, han intuido y estudiado la importancia de las propiedades topológicas de los objetos que estudian, en particular cuando éstos pueden ser identificados con nudos y enlaces, ya se trate de órbitas de flujos, moléculas de ADN ó geoésicas singulares, por ejemplo.

He dicho.

Referencias

- [1] J.S. Birman and R.F. Williams, *Knotted periodic orbits in Dynamical Systems-I: Lorenz's equations*, *Topology* **22** (1983), 47–82.
- [2] E. Cartan, *L'application des espaces de Riemann et l'analysis situs*, Assoc. Avanc.Sci. Lyon (1926), 53.
- [3] S.S. Chern and J. Simons, *Characteristic forms and geometrical invariants*, *Annals of Math* **99** (1974), 48–69.
- [4] M. Dehn and P. Heegard, *Analysis situs*, *Enzymol. Math. Wiss. (III)* **AB3** (1907).
- [5] H.M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3* , *Bull. A.M.S.* **80** (1974), 1243–1244.
- [6] H.M. Hilden, M.T. Lozano and J.M. Montesinos, *Universal knots* *L.N.Math* **144** Springer-Verlag (1985), 24-5.
- [7] H.M. Hilden, M.T. Lozano and J.M. Montesinos, *On knots that are universal*, *Topology* **24**, No 4 (198), 499–504.
- [8] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos and W.Witten, *On universal groups and tree-manifolds*, *Invent. Math* **87** (198), 441–456.
- [9] H.M. Hilden, M.T. Lozano and J.M. Montesinos-Amilibia, *On the arithmetic 2-bridge knots and links and a new knot invariant*, *J.Math.Sci.Univ.Tokyo* **4**, No 1 (1995), 81–114.
- [10] H.M. Hilden, M.T. Lozano and J.M. Montesinos-Amilibia, *On volumes and Chern-Simons invariants of geometric 3-manifolds*, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* (1996).
- [11] H.M. Hilden, M.T. Lozano and J.M. Montesinos-Amilibia, *Volumes and Chern-Simons invariants of cyclic coverings over rational knots* . Proc. of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller spaces. Eds. Sadayoshi KOJIMA *et al.* (1996).
- [12] H.M. Hilden, M.T. Lozano and J.M. Montesinos-Amilibia, *The Chern-Simons invariants of hyperbolic manifolds via covering spaces*, preprint (1996).
- [13] W. Killing, *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung*, *J. Reine Angew. Math.* **86** (1878), 72-83.
- [14] M.T. Lozano and C. Safont, *Virtually regular coverings*, *Proc. of A.M.S.* **106** (1989), 207–214.

- [15] W.B.R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. **76** (1962), 531–538.
- [16] M.T. Lozano and J.M. Montesinos-Amilibia, *Geodesic flows on hyperbolic orbifolds, and universal orbifolds*, Pac. J. Math., (1996) (to appear).
- [17] M.T. Lozano and H. Morton, *Pairs of closed 3-braids with the same Alexander polynomial* Libro homenaje al Profesor A. Plans, (1990). Universidad de Zaragoza.
- [18] A.A. Markov, *Proc. of I.C.M.* (1958), 300–306.
- [19] R. Meyerhoff, *Density of the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds* Low-dimensional topology and Kleinian groups, London (D.B.A. Epstein Ed.) London Math. Soc. Lect. Notes **112** Cambridge University Press (1987), 217–240.
- [20] R. Meyerhoff and D. Ruberman, *Mutation and the η -invariant*, J. Differential Geometry **31** (1990), 101–130.
- [21] J. Milnor, *A unique factorization theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 1–7.
- [22] A. F. Möbius, *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys.Kl. **15** (1863), 18–57.
- [23] J.M.Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifold as 3-fold branched coverings of S^3* , Bull. A.M.S. **80** (1974), 845–846.
- [24] G.D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. IHS **34** (1968), 53–104.
- [25] J.W. Morgan, *Non singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds*, Topology **18** (1978), 41–53.
- [26] D. Rolfsen, *Knots and Links* Publishor Perish Inc. (1976).
- [27] R.L. Rica and M.A. Berger, *Topological ideas and fluid mechanics*, Physics Today **49-12** (1996), 28–34.
- [28] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401–487.
- [29] H. Seifert, *Topologie dreidimensionales gefaserter Raum*, Acta Math. **60** (1933), 147–288.

- [30] W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Notes 1976-1978. Princeton University Press.(to appear).
- [31] W. Thurston, *Universal Links*, preprint (1982).
- [32] O.Veblen and J.H.C.Whitehead, *A set of axioms for differential geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **17** (1931), 551-561.
- [33] A.D. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Can. J. Math. **12** (1960), 503-528.