DISCURSO DE CONTESTACIÓN

POR EL

Ilmo. Sr. D. JESÚS BASTERO ELEIZALDE

Excelentiísimo señor presidente de la Academia,

Excelentísimos e ilustrísimos señores académicos,

Señoras y señores:

Es para mí un gran honor que la Academia me haya encargado dar la bienvenida y contestar al discurso de entrada a la misma de mi amigo y compañero el profesor José Esteban Galé Gimeno. Con su incorporación, la sección de exactas de esta Academia vuelve a tener sus diez académicos titulares.

Conozco al profesor Galé y me precio de su amistad desde hace mucho tiempo, cuando entró como becario de investigación en el antiguo departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, allá por el año 1976, año en el que aún estábamos en este edificio, el ahora llamado edificio A que en aquellos momentos era el único que formaba parte de la Facultad. Desde entonces hasta ahora hemos compartido muchos años de una extraordinaria relación personal y profesional, colaborando tanto en la tarea docente como en la investigadora. Si no recuerdo mal, hemos participado en más de diez proyectos de investigación del Plan Nacional, unas veces siendo él y otras yo el investigador principal. Así mismo, hemos coliderado alternativamente el grupo consolidado reconocido por el Gobierno de Aragón "Análisis Matemático y Aplicaciones" desde sus inicios hasta el presente. Aunque mi situación administrativa ha cambiado recientemente, espero seguir manteniendo con él, además de nuestra buena sintonía personal, el gusto por la investigación científica durante mucho más tiempo.

Sucede en la Academia en la medalla número diez al profesor José Garay de Pablo, que ha pasado recientemente a la situación de académico correspondiente. El profesor Garay, también especialista en análisis matemático como Galé, fue titular de esta Academia durante muchos años. Brillante y original expositor, nos dio clase hasta hace poco tiempo a casi todos los matemáticos y muchos físicos que estudiamos en la Universidad de Zaragoza. Se especializó en análisis funcional, teoría de funciones de variable compleja y finalmente en análisis de Fourier y teoría de la señal. El profesor Garay, además de ser autor de varias publicaciones sobre estos temas, dirigió cinco tesis doctorales.

El profesor José E. Galé nació en Zaragoza en 1954. Cursó los estudios de primaria en el Colegio de las Franciscanas de Montpellier de Zaragoza y los de bachiller en el Colegio de los Dominicos "Cardenal Xavierre" de nuestra ciudad hasta 1971. Como él mismo suele comentar, está muy agradecido a la enseñanza recibida en estos centros educativos, pues además de una profunda formación humanística allí adquirió una gran afición por las ciencias y en particular por las matemáticas. Cursó su licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, finalizándola en 1976.

Realizó su tesis doctoral bajo la dirección del profesor Joaquín Ortega Aramburu, actualmente profesor emérito de la Universidad de Barcelona, que estaba en aquella época como profesor agregado de universidad en el departamento de Teoría de Funciones de Zaragoza. Bajo su dirección el profesor Galé se especializó en análisis funcional y más concretamente en la teoría de álgebras de Banach, defendiendo su tesis doctoral en 1980. Hizo una estancia posdoctoral en la Universidad de Burdeos con el profesor J. Esterle que en aquella época, simultánea pero independientemente con H. G. Dales, había resuelto el problema de la existencia de homomorfismos discontinuos de un $C(K)$ en cualquier álgebra de Banach bajo la hipótesis del continuo, problema central de la teoría planteado por I. Kaplansky (la llamada conjetura de Kaplansky que aparece en el discurso del profesor Galé, ver [G1]). Es decir, José Galé estaba en el lugar en que debía, en el momento oportuno. Adquirió, en consecuencia, una formación e información exhaustiva sobre el tema de su especialidad, lo que le catapultó a la primera línea en su campo, posición que ha mantenido a lo largo de todos estos años, como demuestran las constantes invitaciones que recibe para participar en seminarios y congresos relacionados con sus temas de investigación. Ha dirigido hasta la fecha cuatro tesis doctorales y publicado más de sesenta trabajos de investigación sobre temas relacionados con las álgebras de Banach, semigrupos de operadores, cálculos espectrales, transformadas integrales, semigrupos integrados, etc. También ha colaborado en trabajos de investigación con numerosose investigadores internacionales ajenos a su grupo habitual de trabajo. Solo por destacar algo y aunque no soy tan experto en su tema de investigación como él, tengo que resaltar que es realmente sorprendente el cálculo funcional que introdujo con Tadeusz Pytlik en 1997 (v. [G2]), que ha recibido numerosa atención en la comunidad de expertos internacionales del tema, como puede comprobarse en la bibliografía correspondiente. Galé recibió el premio de investigación de la sección de exactas de esta Academia correspodiente al curso 2005-2006 y es miembro correspondiente del Instituto Argentino de Matemática, CONICET.

El profesor Galé está casado con Soledad Argudo, matemática y compañera de su curso. Sole, que fue compañera nuestra en el departamento de ecuaciones funcionales durante algunos años, es su apoyo constante y callado. Tienen un hijo, Miguel, que siguiendo el gusto de sus padres por el estudio y la abstracción se ha especializado en filosofía pura y ahora se dedica a la docencia.

Como acabo de decir, no soy tan experto en el tema de investigación del profesor Galé, aunque soy analista como él y tengo que decir que he disfrutado y aprendido muchas cosas leyendo antes y ahora escuchando su discurso. Es difícil decir algo que complemente su concienzuda exposición, pero lo voy a intentar centrándome en una parte del mismo, que es la teoría de semigrupos de operadores y su influencia en los procesos estocásticos markovianos.

La teoría de semigrupos de operadores es una parte destacada del análisis funcional cuya aparición puede datarse en 1930 en un trabajo de M. H. Stone [St], en el que estudiaba el caso de un grupo de operadores unitarios en el espacio de Hilbert. Las obras de E. Hille, S. Phillips, K. Yosida y otros investigadores en los años 50 y 60 del pasado siglo cimentaron las bases y las aplicaciones de esta teoría a muchas partes de la matemáticas (véanse, por ejemplo las monografías [HP, Y]).

En esta sucinta exposición solo citaré algunos ejemplos que me son más cercanos y complementan modestamente la gran cantidad de información que ha comentado el profesor Galé en su discurso. Me centraré en el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck y en un par de sus aplicaciones al análisis geométrico asintótico.

El origen del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck está en la formulación de los llamados procesos estocásticos de Ornstein-Uhlenbeck (v. [A]).

El movimiento libre de una partícula en un medio sujeta a las fuerzas aleatorias de interacción entre las moléculas viene descrito por el llamado movimiento browniano, cuya formulación se debe entre otros a Einstein, Bachelier, Smoluchowski y Wiener. Si además se consideran las propiedades de viscosidad del medio interactuando también entre las partículas, Ornstein y Uhlenbeck propusieron un modelo de difusión para resolverlo basado en un proceso de Itô cuyas generalizaciones posteriores son los ahora llamados procesos de Ornstein-Uhlenbeck en los cuales aparecen los semigrupos al formular la solución.

La expresión es la siguiente

$$v(t) = e^{-\beta t} v(0) + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s$$

que son las soluciones de la ecuación diferencial estocástica (o proceso de Itô)

$$dv_t = dW_t - \beta v_t dt, \qquad v = v_0$$

donde $\beta > 0$ es una constante numérica y W_t es un proceso de Wiener o movimiento browniano.

Otra manera más directa, de introducir actualmente estos semigrupos es a través de los procesos de evolución. Como es bien conocido y el profesor Galé menciona en su discurso, la ecuación clásica de la transmisión del calor es el proceso de evolución ligado a semigrupos por excelencia. Si la función $u(t, x)$ indica la cantidad de calor en el instante t en el punto x del espacio, la variación o derivada parcial de u respecto del tiempo es igual a la actuación del operador laplaciano sobre u, es decir, se rige por la ecuación de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \Delta_x u(t,x) \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

con la condición inicial $u_0(x)$ en el instante $t=0$. La solución de esta ecuación aparece de manera natural a través del llamado semigrupo del calor, que tiene por generador infinitesimal el operador laplaciano y es la convolución de la condición inicial, $u_0(x)$, con el núcleo de Gauss-Weierstrass

$$u(t,x) = T_t u_0(x) = e^{-\Delta t} \star u_0(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y)dy \qquad t>0.$$

En el caso no homogéneo, es decir, cuando hay una fuente de calor externa $f(t,x)$ y la misma condición inicial, la evolución del calor se rige por un problema de Cauchy modificado

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \Delta_x u(t,x) + f(t,x) \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

La solución se obtiene añadiendo a la solución anterior un término con la evolución del semigrupo sobre f:

$$u(t,x) = T_t u_0(x) + \int_0^t T_{t-s} f(s,x)ds.$$

Si sustituimos en el espacio ambiente la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ por la probabilidad con densidad gaussiana,

$$d\gamma_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2} dx,$$

el papel del laplaciano es representado ahora por el operador de Laplace-Beltrami $L = \Delta - \langle x, \nabla\rangle$ y el del semigrupo del calor lo juega el llamado semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck, que tiene una expresión analítica determinada

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y) \qquad t\geq 0.$$

Este semigrupo tiene las siguientes propiedades:

- Es markoviano, $P_t(1)=1$ y positivo: $f\geq 0 \Longrightarrow P_t(f)\geq 0$.
- P_t es autoadjunto en $L^2(d\gamma_n)$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P_t f(x) d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\gamma_n(x).$

- Y también es una contracción, fuertemente continua en L^p para $t = 0$:

$$\|P_t f\|_{L^p(d\gamma_n)} \le \|f\|_{L^p(d\gamma_n)} \qquad \lim_{t\downarrow 0} \|P_t f - f\|_{L^p(d\gamma_n)} = 0$$

para todo $1 \le p < \infty$.

M. Ledoux, siguiendo los trabajos de D. Bakry y M. Emery ([L, BE]), utilizó este semigrupo en una situación más general, es decir, tanto para los espacios gaussianos, como para las probabilidades logarítmicamente cóncavas en el espacio de n dimensiones e incluso en variedades riemannianas que tengan una cota inferior positiva para su curvatura de Ricci.

Por ejemplo, si la probabilidad que consideramos en el espacio de n dimensiones tiene una densidad cuyo logaritmo es una función cóncava, $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$, siendo V una función convexa tal que Hess $(V) \ge cI_n$ $(c > 0)$, consideremos el operador diferencial de segundo orden $L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$ (el operador de Laplace-Beltrami asociado). El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck definido similarmente como

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) d\mu(y) \qquad t > 0$$

da la solución de la ecuación de evolución

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P_t f(x)}{\partial t} = LP_t f(x), \qquad t \ge 0 \\ &P_0(f)(x) = f(x). \end{aligned}$$

Pueden probarse estimaciones puntuales muy precisas:

- $2t|\nabla P_t f|^2 \le P_t(f^2) - (T_t(f))^2$, para todo $t \ge 0$ y toda función f acotada y suave.
- Más aún, si $2 \le q \le \infty$ y f es una función acotada y suave,

$$\|\, |\nabla P_t(f)|\, \|_{L^q(\mu)} \le \frac{1}{\sqrt{2t}} \|f\|_{L^q(\mu)}.$$

Estos resultados permitieron a M. Ledoux demostrar un fenómeno de concentración de la medida, que significa que los valores que toman las funciones con alguna regularidad se concentran alrededor del valor esperado y decrecen de manera gaussiana. Esto se representa de la siguiente forma: para cualquier función 1-Lipschitz F, definida en el espacio, la probabilidad de que el rango de valores que tome la función $F(x)$ estén fuera de una esfera centrada en el origen de radio mayor o igual que “el valor esperado” de F

más un incremento r, decrece exponencialmente con e^{-r^2}, es decir,

$$\mu\left\{x \in \mathbb{R}^n; F(x) \geq \mathbb{E}_\mu F + r\right\} \leq e^{-cr^2/2} \qquad \forall r > 0$$

para alguna constante $c > 0$, donde

$$\mathbb{E}_\mu F = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x).$$

Este tipo de resultados, que fuera de bolas hay decrecimiento exponencial gaussiano, están intimamente conectados con la promediabilidad de los grupos, según la obra de V. Pestov ([P]).

Avanzando en esta línea de investigación, E. Milman, en un trabajo muy profundo en 2010 (ver [EM] y una versión simplificada en [AB]) que completa los trabajos previos, entre otros, de Bakry, Emery y Ledoux, probó un resultado que se considera ahora fundamental sobre el papel que tiene la "convexidad" en los fenómenos de concentración. Milman demostró que en esta situación, es decir, tanto para probabilidades log-cóncavas como variedades riemannianas con curvatura de Ricci positiva (intuitivamente, variedades sin "cuellos de botella") las mejores constantes C_1, C_2, C_3, C_4 de las correspondientes desigualdades

- la desigualdad isoperimétrica, tipo Cheeger;
- el salto espectral en la desigualdad de Poincaré;
- la desigualdad de concentración exponencial;
- la desigualdad de concentración con respecto al valor esperado de la función,

son equivalentes, salvo constantes absolutas:

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim C_4.$$

En fórmulas:

- La desigualdad isoperimétrica, tipo Cheeger (punto de visto geométrico):

$$\mu(\partial A) \geq C_1 \min\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

- El salto espectral en la desigualdad de Poincaré:

$$C_2 \sqrt{\mathrm{Var}\ f} \leq \|\nabla f\|_2$$

para funciones Lipschitz.

- La desigualdad de concentración exponencial:

$$\mu(|f - \mathbb{E}f| > t) \leq c\exp(-C_3 t) \qquad \forall\, t > 0$$

para funciones 1-Lipschitz.

- La desigualdad de concentración con respecto al valor esperado de la función:

$$C_4\|f - \mathbb{E}f\|_1 \leq \|\nabla f\|_1$$

para funciones Lipschitz.

Este resultado es de capital importancia dentro del análisis geométrico asintótico para aproximarse al estudio de la conjetura de Kannan, Lovász y Simonovits sobre el "spectral gap", que es uno de los problemas abiertos actualmente más importantes en esta teoría (ver [KLS]).

Otra aplicación del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck está relacionada con la teoría de la información de Fisher y la monotonía de la entropía.

La entropía de Shannon de una variable aleatoria X con densidad $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ viene dada por la expresión

$$\text{Ent } X = -\int_{\mathbb{R}} f \log f$$

supuesto que esta integral tenga sentido. Es fácil constatar que las variables gaussianas estándar siempre tienen la mayor entropía, entre las variables normalizadas con varianza 1.

El teorema central del límite dice que si tenemos una sucesión X_i de copias independientes e idénticamente distribuidas de una variable aleatoria normalizada X, entonces el promedio normalizado de estas X_i converge a la variable gaussiana estándar en algún sentido:

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n \to \infty} G.$$

También es cierto que las entropías Ent Y_n convergen a la entropía de la gaussiana estandar, suponiendo que la entropía es finita para algún n, (ver [B]).

En los años 40 del siglo pasado Shannon conjeturó que esta sucesión de las entropías de las variables Y_n era monótona no decreciente y dio una justificación del caso $n = 1$

$$\text{Ent } X_1 \leq \text{Ent } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \right),$$

es decir, Ent $Y_1 \leq$ Ent Y_2. Una demostración totalmente rigurosa de esta desigualdad fue dada por Stam (ver [S]). Por un método similar se deduce que el resultado era cierto también para los números n que son potencias de 2. Este problema que parecía elemental en su planteamiento permaneció abierto casi 50 años. Recientemente, en 2004, S. Artstein, K. Ball, F. Barthe y A. Naor consiguieron dar una demostración general de este hecho

$$\text{Ent } Y_n \leq \text{Ent } Y_{n+1}.$$

Para ello utilizaron que hay una notable conexión entre la teoría de la información de Fisher y la entropía de Shannon a través del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.

La información de Fisher de una variable aleatoria X con densidad f, definida por

$$J(X) = J(f) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f(x)|^2}{f(x)} dx,$$

es la derivada de la entropía lo largo del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck de la siguiente forma: si G es una variable gaussiana estándar, independiente de X, la variable aleatoria o mixtura $X_t = e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}\,G$, tiene una ley cuya densidad f_t, es solución de la ecuación de evolución

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) &= L(f_t)(x) \qquad \forall\, t > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ f_0 &= f, \end{aligned}$$

donde el operador L tiene la forma $L(f_t)(x) = -\Delta_x f_t + \operatorname{div}_x(x f_t)$. Esto quiere decir que las variables X_t son las evolutas de la acción del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck sobre la variable aleatoria X. Dado que la acción del adjunto del semigrupo conmuta con la autoconvolución, el crecimiento de la entropía se puede deducir del decrecimiento de la información, $J(Y_{n+1}) \leq J(Y_n)$. Esto es lo que hicieron los autores antes mencionados no sin gran esfuerzo.

Por último debo resaltar que también con esta estrategia K. Ball y V. H. Nguyen ([BN]) dieron en 2013 una demostración de que la solución de la conjetura KLS implicaba la solución de otra conjetura, la conjetura del hiperplano. En efecto, si la probabilidad uniforme en un cuerpo convexo en el espacio de n dimensiones verifica la conjetura del salto espectral de Kannan, Lovász y Simonovits (KLS) para una cierta constante, también el cuerpo convexo verifica la conjetura del hiperplano con una constante relacionada con la anterior, usando el semigrupo de Orstein-Uhlenbeck. La conjetura del hiperplano fue planteada por J. Bourgain en 1986 y asegura que hay una número positivo $C > 0$ tal que todo cuerpo convexo que tenga volumen 1 y en cualquier dimensión que consideremos tiene una sección cuya área es mayor que ese número C.

Otras muchas aplicaciones de la teoría de semigrupos podrían añadirse a esta exposición, pero no hay que cansar más al auditorio en estos momentos.

Termino ya mi intervención en la contestación al discurso del profesor Galé. Como resumen, hemos apreciado el nivel científico del nuevo académico, su compromiso con la Ciencia, y por todo esto creo que tanto los miembros de la sección de exactas como el resto de académicos, podemos congratularnos por la incorporación a la Academia de un científico de gran prestigio. Si a esto unimos la calidad humana de nuestro nuevo compañero, la Academia de Ciencias de Zaragoza puede felicitarse.

Referencias

[AB] D. Alonso-Gutiérrez, J. Bastero, *Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and Variance Conjectures*. Lecture Notes in Math. 2131, (2015). Springer.

[ABBN] S. Artstein, K. Ball, F. Barthe, A. Naor, *Solution of Shannon's Problem on the Monotonicity of Entropy.* J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 975–982.

[A] D. Applebaum, *Infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Lévy processes.* Probability Surveys **12** (2015), 33–54

[BE] D. Bakry, M. Emery, *Diffusions hypercontractives.* Séminaire des Probabilités XIX, Lecture Notes in Math. 1123, 177–206 (1985), Springer.

[BN] K. Ball, V. H. Nguyen, *Entropy jumps for random vectors with log-concave density and spectral gap*. Studia Math. **213** (1) (2012) 81-96

[B] A. R. Barron, *Entropy and the central limit theorem.* The Annals of Probability **14** (1) (1986), 336–342. Springer.

[G1] J. E. Galé, *Una excursión por grupos en el Análisis Matemático.* Discurso de ingreso a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza.

[G2] J. E. Galé, T. Pytlik, *Functional calculus for infinitesimal generators of holomorphic semigroups*, J. Funct. Anal. (1997), 307-355. **150** (1) (1997), 336–342.

[HP] E. Hille, S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S. Colloquium Publications, Volume 31 (1957).

[KLS] R. Kannan, L. Lovász, M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13**, no. 3-4, 541–559, (1995).

[L] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI., 2001.

[EM] E. Milman, *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177**, no. 1, 1–43 (2009).

[P] V. Pestov, *Amenable groups and measure concentration on spheres*, C. R. Acad. Sci. Paris **328**, no. 8, 669–674 (1999).

[S] A. J. Stam, *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon*. Information and Control, **2** 101–112, (1959).

[St] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space III*. Operational methods and group theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 16, 172–175. (1930)

[Y] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer (1995).