

**DISCURSO DE CONTESTACION**

**POR EL**

**Ilmo. Sr. D. RAFAEL CID PALACIOS**

Excmo. Sr. Presidente,  
Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos,  
Señoras y Señores:

Aunque por naturaleza suelo ser poco expresivo, sean mis primeras palabras de agradecimiento a la Academia de Ciencias y al Dr. D. Antonio Elipe Sánchez, por solicitar mi presencia en el acto de contestación a su discurso de ingreso en la Academia, como miembro de número. Este agradecimiento va estrechamente unido a la gran satisfacción que siento por refrendar así la valía del Dr. Elipe, que antaño fue mi discípulo y hoy puedo considerarlo mi maestro en cuestiones de informática, de las que todos dependemos en la actualidad.

El Profesor Elipe nació en Castejón del Campo (Soria), el 7 de abril de 1957, obteniendo en la Universidad de Zaragoza el título de Licenciado en Matemáticas en 1979 y el de Doctor en 1983, con una tesis dirigida por mí y por D. Sebastián Ferrer. Su vinculación a la Universidad de Zaragoza ha sido constante, pues desde su nombramiento de Profesor Ayudante (1979-1982) y de Profesor Colaborador (1982-1984), pasó en 1985 a ser Profesor Titular.

Desde un principio su actividad académica ha sido relevante, impartiendo asignaturas de licenciatura como Mecánica y Astronomía, Astronomía, Mecánica Celeste, Geodesia, etc., Cursos de Doctorado sobre Dinámica de actitud de sólidos, Rotación de giróstatos, Linealización y Regularización, Transformaciones de Lie y Manipuladores algebraicos y complementando esta labor con la dirección de tres tesinas de Licenciatura, dos en 1986 y una en 1987, y siete tesis doctorales (dos en colaboración) en los años 1989, 1992, 1993, 1995, 1995, 1997 y 1999.

A esta actividad académica hemos de añadir: La publicación de varios libros, seis en total, que elaboró sólo o en compañía y que fueron publicados, en 1983 por la Universidad de Santiago de Compostela, en 1983 y 1990 por el Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, en 1995 por el Conseil de l'Europe en Luxembourg, en 1997 por la Editorial Kluwer Acad. Pub. y en 1999 por la Academia de Ciencias de Zaragoza, así como sus estancias en Centros extranjeros, uno en Darmstadt (Alemania) de seis semanas en 1986 y dos en el National Institute of Standards and Technology (Gaithersburg, MD. USA) desde Enero de 1989 a Enero de 1990 y desde Agosto de 1992 a Febrero de 1993,

patrocinados, respectivamente, por una ESA Fellowship y por una Beca del Ministerio de Educación y Ciencia.

Su actividad investigadora ha sido inmensa, pues en la actualidad ya ha participado en la publicación de 60 trabajos, 3 en Revistas Nacionales y 57 en prestigiosas revistas extranjeras, así como en la presentación de 52 comunicaciones a Congresos (20 nacionales y 32 extranjeros).

Su participación en proyectos de investigación subvencionados puede resumirse de la forma siguiente: Ha dirigido 1 proyecto para IBERCAJA, 1 proyecto para CICYT y 3 proyectos para DGICYT. Ha participado como investigador en 1 proyecto para IBERCAJA, 2 proyectos para CICYT, 1 proyecto para CAICYT, 1 proyecto para CONAI y 1 proyecto de la Unión Europea. Ha participado como investigador principal en 11 contratos de especial relevancia con Empresas y más concretamente con Cisi Ingenierie y Centre National d'études Spatiales de Toulouse (Francia).

Su buen hacer ha dado lugar a que haya sido invitado a pronunciar conferencias científicas en importantes Centros extranjeros como en: European Space Operation Centre (1986), University of South Florida. Tampa (1989 y 2000), Computing and Applied Mathematics Laboratory (USA) (1990), Observatoire Royal de Belgique (1991), Université de Pau (1992 y 1995), Centre National d'Etudes Spatiales de Toulouse (1994), Poźnan Astronomical Observatory de Polonia (1999), etc., así como un conjunto de conferencias y Cursos de iniciación a la Astronomía de carácter divulgativo en Centros o Universidades Nacionales.

Para completar este extenso curriculum añadiremos que ha recibido el Premio del VII Concurso de Tesis Doctorales, y el Premio a la Investigación de la Academia de Ciencias de Zaragoza. Que pertenece a numerosas Sociedades científicas y profesionales como IAU, American Astronomical Society, European Astronomical Society, American Astronautical Society, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Sociedad Española de Astronomía y Associação Brasileira de Ciências Mecânicas y que es o ha sido "Referee" de prestigiosas Revistas (Celestial Mechanics, Astronomy and Astrophysics, Journal of Astronautical Sciences, Astrophysics and Space Sciences, Mechanics Research Communications, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Revista Matemática Complutense, Revista Española de Física y Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza).

No es necesario añadir otras cualidades del Profesor Elipe para comprender que su elección por parte de la Academia está plenamente justificada y por la que yo personalmente siento una gran satisfacción, confiando en que su futuro quehacer responderá a todas nuestras esperanzas.

Pasando a comentar el discurso del Dr. Elipe, comprendo que poco puedo añadir a

su documentada exposición sobre los diversos métodos de cálculo de órbitas de satélites artificiales que se han ido utilizando y perfeccionando desde sus comienzos.

Comienza su discurso dando una idea global sobre el problema del movimiento de dos cuerpos atraídos por la ley de Newton, que es básico en el cálculo de órbitas. Poco a poco este problema se complica, sea por la estructura no esférica de los cuerpos o por la existencia de otros cuerpos, dando lugar a problemas de movimientos con perturbaciones, en cuyo caso el cálculo de las órbitas requiere un mayor número de operaciones, obteniéndose soluciones representadas, en general, por desarrollos en serie.

En todo caso, con el fin de esquematizar diferentes cálculos que suelen presentarse en los problemas de la Astronáutica, iremos dando noticia de los más importantes.

Así, el Profesor Elife en su exposición hace referencia, de forma resumida, a los problemas de lanzamiento de satélites artificiales por medio de diferentes sistemas de propulsión, entre los cuales pueden citarse:

1.- Propulsión química, con propergoles líquidos o sólidos 2.- Propulsión nuclear o atómica, donde el manantial de calor es un reactor nuclear. 3.- Propulsión iónica, que consiste en la atracción de iones por medio de un acelerador, que confiere velocidades muy grandes a las partículas electrizadas. 4.- Propulsión plásmica, variante de la anterior, que expulsa una mezcla de partículas positivas y negativas. 5.- Propulsión fotónica, con expulsión de fotones, que llegan a alcanzar velocidades del orden de 300.000 km/seg.

Para que se comprenda de manera más profunda este problema fundamental, desarrollaremos de forma más amplia el caso de lanzamientos con propulsante químico.

Se trata, en realidad, de conseguir una velocidad de lanzamiento que supere a la atracción de la gravedad, por medio de cohetes que, al desprender su combustible, originan un aumento de su velocidad. Es decir que se trata de un movimiento con masa variable, al que no podemos aplicar la ley fundamental de la Dinámica: **Fuerza igual a masa por aceleración** ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ). Aunque tal dificultad se elude fácilmente partiendo de la ecuación

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{m\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

que nos proporciona la variación de la cantidad de movimiento  $\mathbf{Q}$ .

Idealizando el problema, consideremos una partícula de masa  $m$ , que en el instante  $t$  se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  respecto a un cierto sistema de ejes. Supongamos, además que en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  varía su masa en una cierta cantidad  $\Delta m$ . Esta variación de la masa unida a la variación de velocidad, originan un cambio en el movimiento de la partícula, de manera que en el instante  $t + \Delta t$ , ésta se moverá con una cierta velocidad  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ . Ahora bien, si  $\mathbf{Q}$  es la cantidad de movimiento del sistema en el instante inicial

y  $Q + \Delta Q$  la cantidad de movimiento en el instante  $t_0 + \Delta t$ , tendremos

$$Q = m\mathbf{v} + \mathbf{v}_0\Delta m, \quad Q + \Delta Q = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) \approx m\mathbf{v} + m\Delta\mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta m,$$

donde se ha omitido el término de segundo orden.

Restando ambas igualdades, dividiendo por  $\Delta t$  y pasando al límite, para  $\Delta t \rightarrow 0$ , resultará

$$\frac{dQ}{dt} = \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\frac{dm}{dt},$$

que es en primer orden la fórmula fundamental del movimiento de un cuerpo con masa variable.

Multiplicando ambos miembros por  $dt$  y dividiendo por  $m$ , resulta finalmente

$$d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m}dt - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\frac{dm}{m}. \quad (6)$$

Pasemos por último a los sistemas que se emplean actualmente para colocar un satélite artificial en órbita, es decir a cohetes.

Un cohete a reacción es un artefacto cuya masa inicial se compone de dos partes: una masa fija, constituida por la estructura metálica del cohete, y una masa variable, el combustible, que sale en forma gaseosa por la parte posterior del mismo. Al salir estos gases, se produce un movimiento de avance del cohete, al propio tiempo que su masa total disminuye. El incremento de velocidad  $\mathbf{u} = -(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$  que se origina, podemos suponerlo constante, por lo cual, si integramos la fórmula (1) entre los límites  $t_0$  y  $t$ , tendremos

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{u} \log \frac{m_0}{m} + \int_{t_0}^t \frac{\mathbf{F}}{m} dt \quad (7)$$

El vector  $\mathbf{F}$  contiene el conjunto de fuerzas exteriores que actúan sobre el cohete, entre las cuales se encuentra la gravedad. Vemos, pues, que en ausencia de fuerzas exteriores, el incremento de velocidad se debe a la velocidad de salida de gases y a la relación de masas  $m_0/m$ . Las dificultades para obtener velocidades de salida de gases superiores a 5 km/seg. o relaciones de masas adecuadas, ha llevado a la construcción de cohetes múltiples, es decir, cohetes que funcionan en tiempos diferentes y que van inutilizándose y separándose de aquel que porta el satélite, a medida que se agota su combustible.

En tal sentido, consideremos un cohete compuesto de varios, por ejemplo tres, que se van separando sucesivamente, a medida que se acaba su combustible. Si designamos por

$m_1, m_2, m_3$ , las masas de sus estructuras metálicas,

$m'_1, m'_2, m'_3$ , las masas de combustible,

$M_i = m_i + m'_i$ , la masa total de cada cohete que se separa, y por

$v_1, v_2, v_3$ , las velocidades finales al producirse cada separación,

por aplicación de la ecuación (2), tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 &= \mathbf{u}_1 \log \frac{M_1 + M_2 + M_3}{m_1 + M_2 + M_3} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathbf{F}}{M} dt, \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_2 \log \frac{M_2 + M_3}{m_2 + M_3} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathbf{F}}{M} dt, \\ \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_3 \log \frac{M_3}{m_3} + \int_{t_2}^{t_3} \frac{\mathbf{F}}{M} dt. \end{aligned}$$

Sumando estas tres igualdades, obtenemos

$$\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_1 \log \frac{M_1 + M_2 + M_3}{m_1 + M_2 + M_3} + \mathbf{u}_2 \log \frac{M_2 + M_3}{m_2 + M_3} + \mathbf{u}_3 \log \frac{M_3}{m_3} + \int_{t_0}^{t_3} \frac{\mathbf{F}}{M} dt,$$

que nos permite calcular la velocidad final del cohete al agotarse el combustible de su tercer cuerpo.

Teóricamente el número de componentes puede ser cualquiera, pero debido a la complejidad que se produce al aumentar este número, se ha comprobado que las mejores combinaciones se consiguen con cohetes de tres y cuatro componentes.

En el caso concreto de satélites que se mueven alrededor de la Tierra, las principales perturbaciones derivan de la forma no esférica de nuestro planeta, que es tratada con detalle en el discurso, especificando la expresión habitual del geopotencial con desarrollos en serie de polinomios de Legendre, el frenaje atmosférico, que actúa de manera importante en satélites próximos a la Tierra, la presencia de la Luna y el Sol en satélites más alejados, y en ocasiones la presión de la radiación solar. Todas estas perturbaciones y su influencia sobre el movimiento del satélite han sido descritas por el Profesor Elipse con suficiente claridad.

Las *órbitas de espera* o de *aparcamiento* son aquellas en que un satélite es colocado en una órbita previa, esperando el momento propicio para que sea lanzado a la órbita definitiva. Este tipo de operaciones se incluye en el apartado de *órbitas de transferencia*, de gran importancia en la dinámica espacial. La forma de realizar estas operaciones suele ser la puesta en funcionamiento de motores cohete que proporcionan un empuje durante un cierto tiempo, aunque existe otra manera de realizarlo mediante la aplicación continua de un microempuje, empleado preferentemente en viajes interplanetarios.

Es ya clásica la transferencia entre órbitas circulares coplanarias, por medio de dos impulsos tangenciales, en el sentido del movimiento (transferencia de una órbita interior a otra exterior), o en sentido contrario (transferencia de una órbita exterior a otra interior). La órbita elíptica que describe el móvil en su movimiento se conoce con el nombre de *elipse de Hohmann*, como consecuencia del trabajo publicado por este autor en 1925.

Este tipo de *transferencias entre órbitas coplanarias*, ha sido extendido posteriormente a otros casos (cambio de circular a elíptica, de elipse a circunferencia y de elipse a elipse).

Algo más complicada es la *transferencia entre órbitas no coplanarias*, por medio de dos impulsos, que ha sido aplicado, por ejemplo, en el paso de una órbita previa, por lanzamiento desde una base fuera del ecuador, a una órbita ecuatorial geoestacionaria.

Señalemos finalmente, la importancia de los conceptos de *superficie límite*, *esfera de influencia* y *el efecto de trampolín lunar*, que pueden estudiarse con detalle en la magnífica tesis doctoral de D. Vicente Camarena Badía, que los define del siguiente modo:

Cuando se considera el movimiento perturbado de un cuerpo  $P_2$  respecto a otro  $P_1$ , puede tener interés conocer el conjunto valores de  $r = P_1P_2$ , para los cuales la aceleración de perturbación debida a otro cuerpo  $P_3$ , resulta ser aproximadamente igual a la aceleración debida a  $P_1$ . La superficie que define esta condición se denomina *superficie límite*.

Cuando se considera el movimiento de  $P_2$ , con respecto a  $P_1$ , perturbado por  $P_3$ , o con respecto a  $P_3$ , perturbado por  $P_1$ , se definen unas razones  $R_1$  y  $R_3$ , de manera que cuando  $R_1 = R_3$ , se obtiene una superficie aproximadamente esférica, que se denomina *esfera de influencia*.

El problema del *efecto de trampolín lunar*, utilizado con frecuencia en viajes interplanetarios, consiste en encontrar trayectorias optimales que aprovechen la atracción lunar, para que el vehículo alcance teóricamente el infinito del sistema Tierra-Luna.

Finaliza aquí mi modesta intervención señalando la magnífica exposición del Dr. Elipe, por lo que le felicito y en nombre de la Academia y del mio propio, le doy la bienvenida como miembro de número de nuestra Academia.

He dicho.