DISCURSO DE CONTESTACIÓN

POR EL

Ilmo. Sr. D. LUIS JOAQUÍN BOYA BALET

Sr. Presidente,
Sres. Académicos,
Sras. y Sres.

1.- Recibimos hoy en la Sección de Ciencias Matemáticas de nuestra Academia al Profesor Alberto Elduque Palomo y me cabe la satisfacción de ser yo, este humilde aprendiz de físico teórico, quien haga el discurso de contestación.

La tarea me es especialmente grata por tres motivos: en primer lugar, la satisfacción de haber sido propuesto, como físico, para contestar a un eminente matemático. En segundo lugar, y relacionado con lo anterior, el placer de leer en detalle el discurso de Elduque y preparar la contestación, sobre un tema tan querido para mí, como es la presencia de objetos excepcionales en matemáticas, candidatos por tanto a aparecer en la naturaleza, si nos adscribimos a la filosofía de la singularidad de nuestro Universo; y finalmente, tener la suerte de ver incorporarse a la Academia a una persona de méritos tan relevantes como los que adornan a Alberto Elduque, entre los que se encuentran, por consenso casi general, su modestia, su buen humor, su accesibilidad como persona y como profesor, etc.; en resumen, una persona en la que las virtudes humanas están a la par con las científicas.

2.- Alberto Elduque nace en Zaragoza el 6 de Octubre de 1960, con una infancia oscense: en Hecho, quizá el origen del alma aragonesa, por lo menos del cheso, habla o fabla, y luego va a Huesca capital; él se distingue ya pronto al obtener la clasificación primero y el Primer Puesto después en la XIV Olimpiada Matemática.

Licenciatura en Matemáticas en Zaragoza, con Premio Extraordinario y Primer Premio Nacional de Terminación de Estudios. Tesis Doctoral también aquí dirigida por Santos Gonzalez sobre álgebras de Malcev, defendida en 1984 con Sobresaliente *Cum Laude* y Premio Extraordinario. Como méritos colaterales, Alberto llegó a jugar el Campeonato Nacional Escolar de Ajedrez con 15 años, y en el baloncesto también ha destacado y le ha absorbido bastantes energías.

Brillante carrera académica, con etapas de becario, Profesor Ayudante en el actual Centro Politécnico Superior, y Profesor Titular de Matemática Aplicada en el mismo en 1986. En 1989 se cambia al área de álgebra y pasa a nuestra Facultad de Ciencias. Gana la cátedra de Matemáticas en la Universidad de la Rioja en 1995, para volver en el curso 97/98 y pasar ya como catedrático a Zaragoza, tras otra brillante oposición. Sus estancias en el extranjero como *postdoc* y para especialización incluyen la Universidad de Madison (Wisconsin, USA), Universidad de Metz, Francia, así como otras visitas como profesor invitado en Suiza, Portugal, Corea, Japón y Chile. Quiero destacar también su colaboración con el Profesor S. Okubo de la Universidad de Rochester (Nueva York), figura muy conocida para los físicos teóricos (reglas de Gell-Mann Okubo en $SU(3)$ de sabor), pero que derivó últimamente hacia la matemática pura. Entre los servicios de Alberto Elduque a la comunidad científica figura su contribución a la organización de la Olimpiada Matemática española, una corta estadía al frente del Vicedecanato de la Facultad de Ciencias y la subdirección (desde 2002) y dirección (desde Abril del 2004) del Departamento de Matemáticas.

3.- Diversas estructuras matemáticos, como los grupos finitos simples, los grupos de Lie simples, los politopos regulares, etc., se han podido catalogar, y se presentan en unas cuantas series, más unos ciertos objetos aislados, en número finito: lo que llama Stilwell “Objetos excepcionales” [1] en un reciente artículo. En lo anterior son los cinco grupos de Lie excepcionales, en un caso, y en el otro los 26 “Grupos esporádicos”, que comienzan con Mathieu, hacia 1860, y cuya lista se ha completado, con el monstruo, o gigante amigo F_1, hace sólo 20 años.

¿Cual es la *raîson d´etre* de esos objetos, y la naturaleza de su singularidad? Evidentemente, se trata de un buen reto matemático. Limitándonos a los grupos de Lie simples, siguiendo la exposición del nuevo académico, hoy está muy claro que el álgebra no asociativa de los octoniones es la responsable de los cinco grupos de Lie excepcionales y de algunos otros objetos singulares, como el plano de Moufang OP^2 y algunos espacios simétricos excepcionales, clasificados ya por É. Cartan. Hay dos grupos de holonomía irreducible no simétrica, según la clasificación de Berger, asociados asimismo a los octoniones, que son G_2 (grupo de automorfismos de los octoniones) y $Spin(9)$, que *en cierto sentido* se puede llamar “$Oct(2)$”.

Como nos recuerda Elduque, los octoniones fueron descubiertos por Graves en 1843, en cuanto tuvo conocimiento del descubrimiento de los cuaterniones por Hamilton. Hay que decir, sin embargo, y el autor también lo señala, que el carácter normado del álgebra de los octoniones (sumas de ocho cuadrados) fue encontrado ya por Degen en 1818. A este respecto conviene recordar que la demostración de que sólo hay álgebras de división en dimensión 1, 2, 4 y 8 es debida a Milnor y Bott (1958), mucho después de que Hurwitz lo hiciese suponiendo que eran álgebras normadas (= de composición): como el autor señala también, lo importante de estas álgebras no es tanto su carácter de división ($ab = 0$ implica $a = 0$ ó $b = 0$), sino el de composición (hay una forma cuadrática regular q con $q(xy) = q(x)q(y)$).

Les habla un aprendiz de físico teórico, que quiere decirles algo de porqué la física no es indiferente a las singularidades matemáticas. El mundo de la naturaleza se realiza una vez, al menos el mundo que conocemos. ¿Por qué no se presentaría la singularidad (*uniqueness*) del mundo físico por realizarse una de las estructuras matemáticas excepcionales? Hay ciertas consonancias entre esa idea y otra muy común hoy día, la idea del "panorama" (*landscape*) de L. Susskind, a saber, que la teoría física actual (Teoria de Cuerdas ó Teoria M) ofrece una miríada de soluciones, todas en pie de igualdad, de las que nuestro mundo físico realiza una, sin que sepamos porqué (argumento antrópico). El oyente/lector no dejará de apercibir un tonillo fustrante en esa afirmación: Si lo que decimos es cierto, hemos renunciado definitivamente a explicar en detalle el mundo. Estoy seguro que Einstein se sentiría muy desgraciado de saber eso, pero quizás Niels Bohr se divertiría con la perspectiva (!).

Fue un notable físico de origen español, Pascual Jordan, quien en 1934 en colaboración con Eugene Wigner y John von Neumann investigó las álgebras que llevan su nombre, unas álgebras conmutativas pero no asociativas (una réplica de las algebras de Lie, anticonmutativas y no asociativas). Toda álgebra de matrices por el conmutador $[A, B]$ deviene de Lie, y así son todas, pero hay UNA algebra de Jordan que no proviene de un anticonmutador de álgebras matriciales asociativas: es el algebra hermítica 3×3 con entradas octoniónicas: el algebra de Jordan excepcional (las otras se llaman especiales). Su grupo de automorfismos es el segundo grupo excepcional de Lie, a saber F_4, con 52 parámetros, que aparece así naturalmente con su irreducible representación de dimension $26 = 3 \times 8 + (3 - 1)$. Jordan estudió esta álgebra buscando generalizaciones para la mecánica cuántica. Es curioso que esta vía parece ciega en física, pero picó la curiosidad de los matemáticos hacia los octoniones, y en rápida sucesión aparecieron: primero, el plano proyectivo de las octavas (Ruth Moufang, 1933, en Hamburgo. Los chauvinistas ingleses y algunos despistados lo llaman el plano de Cayley, quien fue el segundo, ni siquiera el primero, en descubrir los octoniones (curiosamente, como un subproducto de su investigación sobre funciones elípticas)).

Viene la II Guerra Mundial, pero ya poco después se determina (Borel) que el plano de Moufang es el espacio simétrico $F_4/Spin(9)$, se establece (Chevalley) una forma no compacta del siguiente grupo excepcional E_6 como el grupo de colineaciones de OP^2 (ca. 1950), etc. Por fin, en el decenio 1950 -60 se establece la naturaleza del cuadrado mágico de Freudenthal, que Elduque comenta *in extenso*, con interesantes aportaciones propias suyas (que van más allá de mi capacidad de comentar), y con la explicación, no final aun, del resto de los grupos $E_{7,8}$: Pensamos quizás, que no se ha dicho aun sobre esos grupos la última palabra. Es en esta parte donde la obra de nuestro autor florece en toda su esplendor; por ejemplo, él y Myung han bautizado las "álgebras de Okubo", y el nombre ha cuajado en la literatura matemática. Elduque (sólo o con colaboradores como el físico Okubo) generaliza la construcción de Tits, que explica el cuadrado mágico de Freudenthal mediante la combinación de las cuatro álgebras de composición $A(A: R, C, H$ u O) con las de Jordan de grado tres $B(B = J_3(A))$. Los automorfismos de esas álgebras incluyen los restantes grupos excepcionales de Lie, en particular E_7 y E_8.

4.- En este punto conviene señalar algunos problemas pendientes, si sólo para alimentar el apetito de los matemáticos. En física, en la teoría de supercuerdas, aparece el grupo $E_8 \times E_8$, de dimensión 496, que es la dimensión de $SO(32)$. Pero eso no es un hecho aislado, se repetía dos veces más:

$$O(4) \simeq Sp(1) \times Sp(1),\ \dim 6; \qquad O(8) \simeq Oct(1) \times Oct(1),\ \dim 28 \tag{1}$$

y la finta sigue al reconocer que 6, 28 y 496 son los tres primeros números perfectos, asociados a los primos 2, 3 y 5.

Hay otra conexión inesperada del grupo E_8, que también aparece en física. El espacio no trivial de holonomía especial $SU(n)$ más sencillo es la superficie de Kummer, hoy llamada $K3$ (Kummer, Kähler y Kodaira); la cohomología media $H^2(K3, Z)$ es una red (*lattice*) de signatura $(3, 19)$ que equivale a la matriz de Cartan del grupo E_8 (¡de nuevo por duplicado!) y tres planos hiperbólicos $(2 \times 8 + 3(1, 1) = 19 + 3)$.

Por otra parte, el "esqueleto" del cuadrado mágico de Freudenthal es bastante lógico, en cualquier dimensión; en grupos corresponde a

$$\begin{array}{ccccc} O(n) \subset & U(n) \subset & Sp(n) \\ & & \cap \\ & & U(2n) \\ & & \cap \\ & & O(4n) \end{array}$$

que definen además cuatro familias simples de espacios simétricos. ¿Cómo se pasa desde aquí a la construcción de J. Tits que el autor estudia?

A pesar de la vía muerta que las álgebras de Jordan han representado para la ampliación de la mecánica cuántica, en los años 80 resucitan en física los grupos excepcionales y los octoniones, en relación con avances en supersimetría y supergravedad, de los que aquí no podemos decir mucho. Pero el autor es consciente de esa aplicación, y las superálgebras de Lie son debidamente consideradas por Elduque...Veamos alguna de estas implicaciones.

La supersimetría fundamental fermión-bosón se produce precisamente cuando las dimensiones son 1, 2, 4 y 8 para los campos de *gauge*: es una cuestion de álgebras de Clifford:

$$R : 2^{(1-1)/1} = 1 \text{ tipo } R(=1), \qquad C : 2^{(2/2-1)} = 1 \text{ tipo } C(=2) \tag{2}$$

$$H : 2^{(4/2-1)} = 2 \text{ tipo } H(=4), \quad O : 2^{(8/2-1)} = 8 \text{ , tipo } R(=8) \tag{3}$$

De las cuatro, la más interesante y la más perfecta (¡trialidad!) es la octoniónica, desde luego. Ella fija los objetos físicos más importantes de la teoria M, a saber las cuerdas que viven en $10 = (1, 9)$ dimensiones, y las (super)membranas, que viven en $11 = (1, 10)$.

Por otra parte, las *identidades de Cartan* también hacen referencia a los octoniones: tomemos el ejemplo más sencillo:

$$SL(2, R) = Sp(1, R) = Spin(1, 2) \text{ es } A_1 = C_1 = B_1 \text{ para los reales.} \tag{4}$$

Se prolonga así para las otras tres álgebras:

$$SL(2, C) = Sp(1, C) = Spin(1, 3) \tag{5}$$

$$SL(2, H) = Sp(1, H) = Spin(1, 5) \tag{6}$$

$$SL(2, O) = Sp(1, O) = Spin(1, 9). \tag{7}$$

Otro dominio de intervención de los objetos octoniónicos es en los grupos de simetría no compactos de las ecuaciones de supergravedad, en especial la serie desde dim $D = 3$ a dim $D = 11$:

$$3D : \ E_8/O(16)(\text{dim} = 128) \qquad 4D : \ E_7/SU(8) \ (= 35 + 35) \tag{8}$$

$$5D : \ E_6/Sp(4)(= 42) \qquad 6D : E_5/Sp^2(2) = SO(10)/(SO(5))^2 \ (= 25) \tag{9}$$

$$7D : E_4/Sp(2) = SU(5)/SO(5) \ (= 14), \text{etc.} \tag{10}$$

Esto es debido a E. Cremmer, 1980. Lo remarcable es que es la única familia conocida en que intervienen la serie E de grupos de Lie.

Para terminar, señalaremos la observación de Pierre Ramond, estructurada matemáticamente por B. Kostant: sea el triplete de la supergravedad maximal, a saber, en 11 dimensiones:

$$h, \text{gravitón}, \ (\dim 44); \quad \Psi, \ \text{gravitino} \ (\dim 128); \quad \mathrm{C}, \ 3 - \text{forma} \ (\dim 84) \tag{11}$$

La interpretación de Ramond-Kostant es ésta: el plano de Moufang $OP^2 = F_4/Spin(9)$ tiene número de Euler $\chi = 3$, que son las tres partículas: la supersimetría proviene de que el operador de Dirac: quiral par a impar en el álgebra complementaria (de dimension 16) tiene índice cero: así hay *matching* Bose = Fermi.

Esto admite una generalización al plano de Moufang complejificado que ha sido estudiado recientemente [2].

Esto completa nuestra contestación a la magnífica presentación de Alberto Elduque. Sólo me resta darle la bienvenida entre nosotros, pedirle que siga en su línea de trabajo, y desearle los mayores éxitos en su vida profesional.

Muchas gracias a su atención.

Referencias

[1] J. Stillwell, *Exceptional Objects*, Am. Math. Month. **105**, 850-858 (1998).

[2] L.J. Boya, arXiv hep-th 0512047