**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS,**
**QUIMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA**

# ALGUNOS OBJETOS EXCEPCIONALES

*DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO*

**Ilmo. Sr. D. ALBERTO ELDUQUE PALOMO**

*EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN SOLEMNE*
*CELEBRADO EL DÍA 23 DE FEBRERO DEL AÑO 2006*

*Y*

*DISCURSO DE CONTESTACIÓN POR EL*

**Ilmo. Sr. D. LUIS JOAQUÍN BOYA BALET**

*ACADÉMICO NUMERARIO*

ZARAGOZA

2006

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS,
QUIMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA**

# ALGUNOS OBJETOS EXCEPCIONALES

*DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO*

**Ilmo. Sr. D. ALBERTO ELDUQUE PALOMO**

*EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN SOLEMNE
CELEBRADO EL DÍA 23 DE FEBRERO DEL AÑO 2006*

*Y*

*DISCURSO DE CONTESTACIÓN POR EL*

**Ilmo. Sr. D. LUIS JOAQUÍN BOYA BALET**

*ACADÉMICO NUMERARIO*

ZARAGOZA

2006

Depósito legal: Z-¿¿¿¿??????

*Imprime*:
Sdad. Coop. De Artes Gráficas
Librería General
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza
imprentalg@efor.es

# ALGUNOS OBJETOS EXCEPCIONALES

**POR EL**

**Ilmo. Sr. D. ALBERTO ELDUQUE PALOMO**

Excmo. Sr. Presidente,

Ilmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores:

Me siento profundamente honrado por haber sido propuesto por los académicos de la Sección de Exactas para formar parte de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza. Es un honor inesperado y del que espero hacerme acreedor. Mis primeras palabras son pues de inmensa gratitud hacia todos ellos.

Mi agradecimiento también a Pili y Eva, que son las que soportan en primera persona mi trabajo y mis ausencias. Las físicas, más llevaderas, y las peores, aquéllas en que sólo es la cabeza la que está ausente. Agradecimiento que se extiende a mis padres y hermanos.

El trabajo de un investigador suele estar fuertemente marcado por sus inicios, y yo tuve la suerte de que éstos fueran bajo la dirección del profesor Santos González, hoy en la Universidad de Oviedo, cuyo entusiasmo contagió a no pocos estudiantes. El mundo de las álgebras no asociativas está en deuda con él. Más tarde he tenido la ocasión de trabajar con mis alumnos de doctorado, a los que espero haber enseñado, y de los que siempre he aprendido.

No quiero olvidar a mis compañeros y colegas, en especial Hyo Myung, Ivan Shestakov, Susumu Okubo y Georgia Benkart, con los que ha sido y es un placer trabajar, compartir y conocer nuevas cosas.

El honor que siento es mayor por ocupar el puesto, la medalla número 29, que dejó vacante Don Juan Sancho San Román, al trasladar su domicilio con carácter permanente a La Coruña y retirarse de su actividad académica. Don Juan nació en Toledo el 28 de marzo de 1919. Se licenció en Ciencias Exactas en la Universidad de Madrid en 1941 y fue también Ingeniero Geógrafo (1944), doctor en Ciencias Exactas (1945) y Doctor Ingeniero Geógrafo (1962). Trabajó como Catedrático de Instituto en La Coruña y Toledo, y como Ingeniero Geógrafo en el Observatorio Geofísico de Toledo, hasta que se incorporó como Catedrático de Geometría III y IV a la Universidad de Zaragoza, de la que es Profesor Emérito. Fue director del entonces Departamento de Álgebra y Fundamentos de la Universidad de Zaragoza de 1967 a 1986 y director del Seminario García de Galdeano de 1973 a 1986. También presidió la Academia desde 1985 hasta 1990. Había sido elegido académico el 28 de junio de 1963 y tomó posesión el 22 de mayo de 1966, versando su discurso sobre *Los jóvenes pre y postgraduados y la investigación matemática en España*. Don Juan tiene que sentirse orgulloso de la labor que realizó en este campo. Las áreas de Álgebra de no pocas universidades españolas están formadas por profesores que descienden, científicamente hablando, de él.

Pero para mí Don Juan es, principalmente, quien me introdujo en la Lógica Matemática, asignatura que cursé en el curso 1981-82. De él aprendí los Teoremas de Incompletitud de Gödel, auténticas joyas matemáticas.

Pasaré a continuación a hablarles del tema de mi discurso: *Algunos objetos excepcionales.*

Sucede que, en muchas ocasiones, una clasificación matemática nos deja familias infinitas de posibilidades, siguiendo determinados patrones, junto a una pequeña colección de posibilidades especiales. Aparecen por un lado reglas generales y por otro casos excepcionales. Y estos últimos objetos suelen ser fascinantes. Permítanme que les hable de algunos de estos objetos que han ido saliendo a mi encuentro.

## 1 La clasificación de Killing-Cartan

La mayor parte de los matemáticos, y de los físicos, están familiarizados con el concepto de grupo de Lie. Un grupo de Lie es una variedad diferenciable, que también tiene la estructura algebraica de grupo, de modo que la multiplicación del grupo y la inversión son aplicaciones suaves. Es decir, las dos estructuras, diferencial y algebraica, interactúan adecuadamente. Los grupos de Lie son importantes puesto que describen la simetría de las estructuras geométricas. Fueron introducidos como "grupos continuos de transformaciones" por el matemático noruego Sophus Lie.

Un problema central en el Álgebra del siglo XVIII* era el de la resolución de ecuaciones algebraicas. Mientras que las ecuaciones de grado a lo sumo 4 se sabían resolver por radicales, se sospechaba que la ecuación general de quinto grado no tenía tales soluciones. Ruffini, ya en el siglo XIX (1813) propuso una demostración no del todo rigurosa de este hecho, para ser el matemático noruego Abel el que, en 1824, resolvió definitivamente el problema. Pero fue Galois, hacia 1830, quien tuvo la idea genial de asociar un grupo de permutaciones (de las raíces) a cada ecuación. La resolubilidad por radicales de una ecuación equivale a la llamada resolubilidad del grupo. El hecho de que el grupo alternado de grado 5 sea simple impide la posibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado por radicales.

Lie asistió a clases en 1862 en las que Sylow explicó la Teoría de Galois, y aunque estaba más interesado en Geometría que en Álgebra, las ideas de Galois le impactaron. Después de trabajar junto a Klein durante unos años, concibió la idea de hacer un desarrollo análogo al de la Teoría de Galois, pero para ecuaciones diferenciales. Esto le llevó al concepto de "transformaciones infinitesimales" (o campos vectoriales), que formaban un sistema cerrado para el corchete: $[x, y] = xy - yx$. Tras los trabajos de Weyl, hacia 1930, los grupos continuos de transformaciones pasaron a ser llamados grupos de Lie, y sus "grupos infinitesimales" álgebras de Lie. En la notación actual, lo que Lie consideró son los actuales "grupos de Lie locales" y sus álgebras de Lie, que los determinan.

Es hora de dar alguna definición en condiciones:

**Definición 1.1.** Un álgebra de Lie sobre un cuerpo $k$ es un $k$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$, dotado de una aplicación bilineal (*corchete*)

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

tal que para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ se verifica

*Los comentarios históricos pueden ampliarse en 'The MacTutor History of Mathematics archive' `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history`

(i) $[x,x]=0$ (anticonmutatividad),

(ii) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ (identidad de Jacobi).

Alrededor de 1880, un extraño a la Teoría de Lie, el alemán Wilhelm Killing (discípulo de Weierstrass), estudió las álgebras de Lie de un modo independiente, preocupado por problemas de Álgebra y de los fundamentos de la Geometría. Killing se planteó el problema de determinar las álgebras de Lie simples (esto es, sin subespacios $\mathfrak{a}$ tales que $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}]\subseteq\mathfrak{a}$) sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

En una carta a Engel de 12 de octubre de 1886, Killing conjeturó que las únicas álgebra de Lie simples (en dimensión finita) deberían ser las álgebras de Lie de los grupos especiales lineales, ortogonales o simplécticos, bien conocidos. Si $GL(n)$ denota el grupo de matrices cuadradas regulares complejas de orden $n$, entonces estos grupos son:

$$\begin{aligned} SL(n)&=\{g\in GL(n):\det g=1\} && \text{(grupo especial lineal)},\\ SO(n)&=\{g\in SL(n):g^tg=I_n\} && \text{(grupo especial ortogonal)},\\ Sp(2n)&=\{g\in GL(2n):g^tJ_ng=J_n\} && \text{(grupo simpléctico)}, \end{aligned}$$

donde $I_n$ denota la matriz identidad de orden $n$ y $J_n=\left(\begin{smallmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{smallmatrix}\right)$. Es decir, estos grupos son los que preservan el determinante o representan las simetrías de un espacio dotado de una forma bilineal regular, simétrica o antisimétrica, y se conocen como *grupos clásicos*. Sus álgebras de Lie respectivas son las siguientes, donde $\mathfrak{gl}(n)$ denota el espacio de todas las matrices complejas de orden $n$ y tr denota la traza de una matriz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n)&=\{x\in\mathfrak{gl}(n):\mathrm{tr}(x)=0\} && \text{(álgebra de Lie especial lineal)},\\ \mathfrak{so}(n)&=\{x\in\mathfrak{gl}(n):x^t+x=0\} && \text{(álgebra de Lie ortogonal)},\\ \mathfrak{sp}(2n)&=\{x\in\mathfrak{gl}(2n):x^tJ_n+J_nx=0\} && \text{(álgebra de Lie simpléctica)}. \end{aligned}$$

Al igual que los grupos, éstas se conocen como álgebras de Lie simples clásicas.

El 23 de mayo de 1887, Killing escribe nuevamente a Engel para comunicarle que su conjetura era falsa, pues ha descubierto una nueva álgebra de Lie simple de dimensión 14 y, finalmente, el 18 de octubre de 1887, Killing vuelve a escribir a Engel anunciándole la lista completa de las álgebras de Lie simples complejas [Kil84]. La parte más interesante de su clasificación es el descubrimiento de las álgebras de Lie excepcionales. Killing probó que, además de las álgebras de Lie simples clásicas, existen 5 álgebras de Lie excepcionales de dimensiones 14, 52, 78, 133 y 248, denotadas respectivamente $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ y $\mathfrak{e}_8$. Estas álgebras son objetos cuya existencia no se había siquiera sospechado antes. Como escribe Helgason [Hel90]: "Da testimonio de la grandeza de este descubrimiento el hecho de que incluso hoy, más de 100 años después, el resultado siga siendo sorprendente".

Killing utilizó para su demostración las *transformaciones adjuntas* $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto [x, y]$, y las propiedades de sus valores y vectores propios. En el proceso introdujo también el polinomio característico de una matriz. Sin embargo, su demostración contenía algunos errores y, de hecho, no dio construcciones concretas de estas álgebras excepcionales, salvo de la más pequeña, afirmando también que había dos álgebras distintas en dimensión 52. Élie Cartan, en su tesis doctoral de 1894 [Car94], simplificó y corrigió las demostraciones de Killing y encontró presentaciones concretas, aunque muy complicadas, de las álgebras de Lie excepcionales.

De este modo, las álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita aparecen clasificadas en cuatro familias infinitas:

$$\begin{aligned} &A_n : \ \mathfrak{sl}(n+1)\,(n \geq 1), && B_n : \ \mathfrak{so}(2n+1)\,(n \geq 2), \\ &C_n : \ \mathfrak{sp}(2n)\,(n \geq 3), && D_n : \ \mathfrak{so}(2n)\,(n \geq 4), \end{aligned}$$

junto a cinco excepciones:

$$E_6, \quad E_7, \quad E_8, \quad F_4, \quad G_2.$$

En 1914 [Car14], Cartan había completado también la clasificación de las álgebras de Lie simples reales. En este trabajo, Cartan se dio cuenta de que el grupo de Lie compacto excepcional más pequeño es el grupo de automorfismos (esto es, de simetrías) del álgebra de octoniones $\mathbb{O}$, de donde se deduce que (la forma compacta de) $\mathfrak{g}_2$ es su álgebra de derivaciones:

$$\mathfrak{Der}(\mathbb{O}) = \{d \in \mathrm{End}(\mathbb{O}) : d(xy) = d(x)y + xd(y),\ \forall x, y \in \mathbb{O}\}.$$

Las derivaciones juegan el papel de 'automorfismos infinitesimales'. De esta manera, Cartan obtenía una presentación concreta del álgebra de Lie excepcional más pequeña, de dimensión 14, en términos de un objeto de dimensión 8.

Nos aparece así otro objeto matemático realmente excepcional: el álgebra de octoniones, representante distinguido de las llamadas *álgebras de composición*.

## 2 Álgebras de composición

Buena parte de la Matemática se desarrolla utilizando sólo números reales y números complejos. Todo número complejo puede ser representado por vectores del plano, con la propiedad importante de que la longitud del vector correspondiente al producto de dos números complejos coincide con el producto de las longitudes de los vectores correspondientes a cada uno de ellos. De este modo, los números complejos ayudan a estudiar cuestiones geométricas del plano. Así, por ejemplo, un giro en el plano no es más que la multiplicación por un número complejo de longitud unidad.

En 1835, Hamilton se planteó extender los números complejos a un sistema en dimensión 3, que pudiera jugar un papel geométrico en el espacio, análogo al que desempeñan los números complejos en el plano. El 16 de octubre de 1843, Hamilton descubrió por fin que esto no era posible, sino que necesitaba añadir una nueva dimensión. Hamilton dejó perfectamente escrito, en cartas a uno de sus hijos, el proceso que le llevó a esta conclusión, desde su desesperación al no encontrar modo alguno de multiplicar sus ternas, hasta el instante de inspiración, paseando con su esposa hacia una reunión de la Real Academia Irlandesa, que le llevó a definir los hoy llamados "cuaternios de Hamilton".

Estos cuaternios forman un álgebra real de dimensión 4:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k,$$

con multiplicación determinada por las ecuaciones:

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{gathered}$$

En el paso de los reales a los complejos, se mantienen las propiedades aritméticas, pero se pierde el orden que presentan los reales. En el paso de los complejos a los cuaternios perdemos algo más: la propiedad conmutativa del producto. Sin embargo, permanece la propiedad importante de que la longitud del producto de dos cuaternios es igual al producto de las longitudes, sólo que aquí hablamos de longitudes de vectores en un espacio de dimensión 4.

Un amigo de Hamilton, Graves, decidió no pararse aquí. Hamilton partía de los números complejos $\mathbb{C} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i$ y se dio cuenta de que, si añadía una nueva 'unidad imaginaria' $j$, también debía añadir el producto $k = ij$. Graves decidió añadir una nueva unidad imaginaria $l$, por lo que debía añadir los productos $il$, $jl$ y $kl$, obteniendo así un álgebra real de dimensión 8, que extiende la de los cuaternios, y cuyos elementos bautizó como 'octavas'. Su tabla de multiplicar aparece en el cuadro 1. En su esquina superior izquierda aparece sumergida la tabla de multiplicar de los cuaternios.

En esta nueva álgebra se sigue manteniendo la regla del producto de longitudes. En la Navidad de 1843, Graves comunicó a Hamilton sus descubrimientos y éste prometió publicarlos. También se dio cuenta de que la nueva álgebra no sólo había perdido la conmutatividad del producto, sino también la asociatividad: ¡$(ij)l$ no coincide con $i(jl)$!

También, a lo largo de 1844, Graves intentó infructuosamente repetir el proceso de duplicación para obtener un álgebra de dimensión 16 que mantuviera la regla del producto de longitudes.

Mientras Hamilton se demoraba en publicar los resultados de Graves, Cayley descubrió de manera independiente las octavas, a las que bautizó como álgebra de 'octoniones', y

|  | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ | $l$ | $il$ | $jl$ | $kl$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ | $l$ | $il$ | $jl$ | $kl$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ | $il$ | $-l$ | $-kl$ | $jl$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ | $jl$ | $kl$ | $-l$ | $-il$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ | $kl$ | $-jl$ | $il$ | $-l$ |
| $l$ | $l$ | $-il$ | $-jl$ | $-kl$ | $-1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $il$ | $il$ | $l$ | $-kl$ | $jl$ | $-i$ | $-1$ | $-k$ | $k$ |
| $jl$ | $jl$ | $kl$ | $l$ | $-il$ | $-j$ | $k$ | $-1$ | $-i$ |
| $kl$ | $kl$ | $-jl$ | $il$ | $l$ | $-k$ | $-j$ | $i$ | $-1$ |

Tabla 1: Los octoniones

publicó sus resultados en marzo de 1845. Aunque Hamilton confirmó que Graves ya lo conocía, fue tarde: a los octoniones se les conoce también como 'números de Cayley'.

Hoy en día estamos cada vez más acostumbrados a trabajar sobre otros cuerpos distintos del de los números reales, incluso sobre cuerpos finitos, indispensables en áreas tecnológicas. Las álgebras de cuaternios y octoniones son casos particulares de la siguiente definición, que es válida sobre cuerpos arbitrarios:

**Definición 2.1.** Un *álgebra de composición unitaria* (o *álgebra de Hurwitz*) sobre un cuerpo $k$ es un $k$-espacio vectorial $A$, dotado de una multiplicación (aplicación bilineal) $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$, de una forma cuadrática regular (o *norma*) $q : A \to k$, y de un elemento distinguido 1, tales que $1x = x1 = x$ y

$$q(xy) = q(x)q(y), \tag{2.2}$$

para todo $x, y \in A$.

Notemos que la propiedad multiplicativa (2.2) de la norma $q$ es la que generaliza la propiedad del producto de longitudes en $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Los intentos infructuosos de Graves para construir un álgebra de dimensión 16 se deben a una propiedad fundamental de las álgebras de Hurwitz:

**Teorema 2.3.** *La dimensión de un álgebra de Hurwitz es siempre* 1*,* 2*,* 4 *u* 8*.*

Hurwitz [Hur98] probó este Teorema en 1898 para álgebras reales o complejas. El resultado general, probado con otros métodos y que explica la estructura de estas álgebras, se debe a Jacobson [Jac58]. Las álgebras de Hurwitz de dimensión 4 se conocen como 'álgebras (generalizadas) de cuaternios', y las de dimensión 8, que no son asociativas, como 'álgebras de Cayley' o 'álgebras (generalizadas) de octoniones', debido a su parecido con las álgebras clásicas definidas por Hamilton y Cayley. En particular, al igual que estas álgebras clásicas, toda álgebra de Hurwitz $A$ es un álgebra 'de grado 2', pues todo elemento $x \in A$ satisface una ecuación de grado 2:

$$x^2 - t(x)x + q(x)1 = 0, \tag{2.4}$$

donde la traza $t(a)$ es $q(1,a) = q(1+a) - 1 - q(x)$. Esta ecuación de grado 2 equivale a la ecuación $x\bar{x} = \bar{x}x = q(x)1$, con $\bar{x} = t(x)1 - x$. La aplicación $x \mapsto \bar{x}$ es una involución (esto es, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ y $\bar{\bar{x}} = x$ para todo $x, y \in A$), que se conoce como conjugación estándar.

Los cuaternios y octoniones proporcionaban una demostración sencilla de los "Teoremas de los cuatro y ocho cuadrados", descubiertos por Euler (1748) y Degen (1818), pero así como Hamilton y Cayley encontraron aplicaciones inmediatas de los cuaternios a la parametrización de los giros en los espacios euclídeos de dimensiones 3 y 4 (hoy se usa esto, por ejemplo, en el diseño de videojuegos), los octoniones no parecieron ofrecer tales aplicaciones geométricas, por lo que fueron relegados a un rincón de la Matemática, hasta que Cartan describió con ellos el fenómeno de la *trialdad* [Car38], que estudia la simetría existente entre vectores y espinores en dimensión 8, y surge al estudiar rotaciones en dicha dimensión. Su importancia en Física fue vislumbrada en un trabajo de Jordan, von Neumman y Wigner (este último recibió el Premio Nobel en 1963 'por sus contribuciones a la teoría del núcleo atómico y las partículas elementales, particularmente a través del descubrimiento y aplicaciones de principios fundamentales de simetría') [JvNW34] sobre los fundamentos de la Mecánica Cuántica. En este trabajo los octoniones están inmersos en un álgebra no asociativa más grande y de otro tipo: un *álgebra de Jordan*. Pero, ¿qué son estas álgebras de Jordan?

## 3 Álgebras de Jordan

En 1932, el físico Pascual Jordan propuso un programa para descubrir un nuevo marco algebraico para la Mecánica Cuántica. En la interpretación usual (modelo de Copenhague), los observables se representan mediante operadores hermíticos en un espacio de Hilbert. El producto de tales operadores no es hermítico, pero sí lo es su producto simetrizado

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx), \tag{3.1}$$

que da una multiplicación conmutativa verificando una forma débil de asociatividad:

$$\begin{gathered} x \cdot y = y \cdot x, \\ x^2 \cdot (y \cdot x) = (x^2 \cdot y) \cdot x, \end{gathered} \tag{3.2}$$

para todo $x, y$.

Así se llega de modo natural a la siguiente definición:

**Definición 3.3.** Un álgebra de Jordan sobre un cuerpo $k$ de característica $\neq 2$ es un $k$-espacio vectorial $J$, dotado de una aplicación bilineal $J \times J \to J$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, que verifica (3.2).

Los primeros ejemplos de álgebras de Jordan se obtienen considerando álgebras asociativas $A$ y definiendo en ellas un nuevo producto conmutativo mediante (3.1). El álgebra resultante se denota $A^+$. Toda álgebra de Jordan que sea subálgebra de una tal $A^+$ se dice *especial*. En otro caso, se habla de álgebras de Jordan *excepcionales*. En un álgebra de Jordan especial, como la de operadores hermíticos en un espacio de Hilbert, la estructura algebraica viene dada, en buena medida, por la estructura asociativa ambiente. Los físicos buscaban álgebras de Jordan excepcionales. En un primer intento, en 1934, Jordan, von Neumann y Wigner [JvNW34] clasificaron las álgebras de Jordan finito dimensionales y 'formalmente reales' (véase [McC04]). Todas ellas son sumas directas de ideales simples, y sólo hay cinco tipos básicos de tales álgebras simples: tres familias infinitas relacionadas con los reales, complejos y cuaternios

$$H_n(\mathbb{R}),\ H_n(\mathbb{C}),\ H_n(\mathbb{H}) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

los llamados *factores espín*

$$JSpin_n = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

y un álgebra aislada

$$H_3(\mathbb{O}).$$

Aquí, $H_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) : x^* = x\}$ es el espacio de matrices hermíticas respecto a la involución estándar: $(x_{ij})^* = (\bar{x}_{ji})$, con multiplicación dada por (3.1), y el producto en $JSpin_n$ viene dado por $(\alpha 1 + v) \cdot (\beta 1 + w) = \big(\alpha\beta + \langle v|w\rangle\big)1 + (\alpha w + \beta v)$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v, w \in \mathbb{R}^n$, donde $\langle v|w\rangle$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

Los factores espín son especiales, pues viven dentro de las álgebras de Clifford. Obviamente, como $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ es asociativa para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$, también $H_n(\mathbb{K})$ es especial. El ejemplo restante, $H_3(\mathbb{O})$, no parecía especial, ya que se basa en el álgebra de octoniones, que no es asociativa. En efecto, Albert [Alb34] probó que es excepcional, y hoy se conocen como álgebras de Albert las álgebras de Jordan simples excepcionales de dimensión 27 sobre cuerpos arbitrarios.

Como escribe McCrimmon en [McC04, Chapter 0], estos resultados fueron descorazonadores para los físicos, sólo había un álgebra de Jordan excepcional y no una familia infinita, que hubiera sugerido la existencia de álgebras excepcionales en dimensión infinita. De hecho, $H_n(\mathbb{O})$ no es álgebra de Jordan para $n \geq 4$, mientras que $H_2(\mathbb{O})$ es isomorfa a $JSpin_9$. Casi cincuenta años después, Efim Zelmanov (quien más tarde recibiría la Medalla Fields por su resolución del Problema Restringido de Burnside) probó en [Zel79] que no hay álgebras de Jordan simples excepcionales en dimensión infinita.

Pero volvamos a las álgebras de Lie. Sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica arbitraria existen álgebras análogas a las álgebras de Lie simples complejas, aunque sobre estos cuerpos éstas no cubren la totalidad de álgebras de Lie simples. De este modo se puede hablar, por ejemplo, de un álgebra de Lie simple de tipo $G_2$, como aquella álgebra de Lie simple tal que, al extender escalares hasta una clausura algebraica, se obtiene el álgebra $\mathfrak{g}_2$.

Ya hemos mencionado anteriormente que, en 1914, Élie Cartan había mostrado que el álgebra de Lie compacta excepcional más pequeña era el álgebra de Lie de derivaciones de $\mathbb{O}$. De modo más general, Jacobson [Jac39] (véase también [Sel67]) probó que el álgebra de Lie de derivaciones de toda álgebra de Cayley sobre un cuerpo de característica $\neq 2, 3$ es un álgebra simple de tipo $G_2$ (y toda álgebra simple de este tipo se obtiene, salvo isomorfismos, de este modo).

Fue en 1950, cuando Chevalley y Schafer [CS50] probaron que el álgebra de Lie de derivaciones de un álgebra de Albert es un álgebra de Lie simple de tipo $F_4$. Además, las álgebras de Lie simples de tipo $E_6$ se obtienen también como determinadas subálgebras de endomorfismos de las álgebras de Albert. Ya sólo faltaba dar modelos concretos y sencillos de las álgebras de Lie excepcionales de mayor dimensión, las de los tipos $E_7$ y $E_8$ con dimensiones respectivas 133 y 248.

## 4 El Cuadrado Mágico de Freudenthal

En 1966, Tits [Tit66] obtuvo una construcción maravillosa de álgebras de Lie a partir de un álgebra de Hurwitz y un álgebra de Jordan. Eligiendo adecuadamente tales ingredientes se obtienen de modo unificado las álgebras de Lie simples excepcionales.

Sea $k$ un cuerpo de característica $\neq 2, 3$ y sea $A$ un álgebra de Hurwitz (Definición 2.1). Para todo $a, b \in A$, la aplicación lineal

$$D_{a,b} = [L_a, L_b] + [L_a, R_b] + [R_a, R_b]$$

es una derivación de $A$, donde $L_a$ y $R_a$ denotan, respectivamente, la multiplicación a izquierda y derecha por el elemento $a$, y $[f, g] = fg - gf$, con $f, g$ endomorfismos de $A$. Por el Teorema de Hurwitz-Jacobson (Teorema 2.3), $A$ es o bien el cuerpo base $k$, o una extensión cuadrática separable $K$ de $k$, o un álgebra generalizada de cuaternios $Q$ o un álgebra de Cayley $C$.

Por otra parte, sea $J$ un álgebra de Jordan simple central de grado 3. Esto significa que todo elemento de $J$ satisface una ecuación de Cayley-Hamilton de grado 3:

$$x^3 - \operatorname{tr}(x)x^2 + s(x)x - n(x)1 = 0,$$

donde $\operatorname{tr}\colon J \to k$ es una forma lineal, $s\colon J \to k$ una forma cuadrática y $n : J \to k$ una forma cúbica. Estas álgebras son, quizá tras una extensión de escalares, las álgebras de matrices hermíticas de orden 3 sobre un álgebra de Hurwitz: $J = H_3(B)$, y la traza es la traza usual de matrices. En particular, la dimensión de $J$ es 6, 9, 15 o 27. Aquí, para todo $x, y \in J$, la aplicación

$$d_{x,y} = [l_x, l_y]$$

es siempre una derivación de $J$, donde $l_x$ denota la multiplicación a izquierda (o derecha, pues $J$ es conmutativa) por $x$.

En el álgebra de Hurwitz $A$ se considera el subespacio de elementos de traza 0: $A_0 = \{a \in A : t(a) = 0\}$ (véase (2.4)) y, análogamente, en $J$ se considera el subespacio $J_0 = \{x \in J : \operatorname{tr}(x) = 0\}$.

Tits consideró el espacio vectorial:

$$\mathcal{T}(A, J) = \mathfrak{Der}(A) \oplus (A_0 \otimes J_0) \oplus \mathfrak{Der}(J), \tag{4.1}$$

con producto anticonmutativo $[.\,.]$ determinado por:

- $\mathfrak{Der}(A)$ y $\mathfrak{Der}(J)$ son subálgebras de $\mathcal{T}(A, J)$ con su producto usual.
- $[\mathfrak{Der}(A), \mathfrak{Der}(J)] = 0$.
- La acción de $\mathfrak{Der}(A) \oplus \mathfrak{Der}(J)$ sobre $A_0 \otimes J_0$ es la natural:

  $$[D, a \otimes x] = D(a) \otimes x, \quad [d, a \otimes x] = a \otimes d(x),$$

  para $D \in \mathfrak{Der}(A)$, $d \in \mathfrak{Der}(J)$, $a \in A$ y $x \in J$.
- Finalmente, el producto de dos elementos en $A_0 \otimes J_0$ viene dado por

  $$[a \otimes x, b \otimes y] = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(xy)D_{a,b} + [a, b] \otimes x * y + 2t(ab)d_{x,y},$$

  si $a, b \in A$ y $x, y \in J$, donde $x * y$ es la componente en $J_0$ del producto $x \cdot y$ en $J$ ($x \cdot y = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(x \cdot y)1 + x * y$).

En esta situación, Tits probó el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.** $\mathcal{T}(A, J)$ *es un álgebra de Lie simple, con una excepción, y su tipo viene dado en el cuadro 2.*

| | | dim $J$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 9 | 15 | 27 |
| dim $A$ | 1 | $A_1$ | $A_2$ | $C_3$ | $F_4$ |
| | 2 | $A_2$ | $A_2 \oplus A_2$ | $A_5$ | $E_6$ |
| | 4 | $C_3$ | $A_5$ | $D_6$ | $E_7$ |
| | 8 | $F_4$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |

Tabla 2: El Cuadrado Mágico

En particular, Tits obtuvo de un plumazo modelos de todas las álgebras de Lie simples excepcionales complejas, salvo $G_2$, que aparece como $\mathfrak{der}(A)$, con $\dim A = 8$.

La tabla en el cuadro 2 se conoce como *Cuadrado Mágico de Freudenthal.* Freudenthal [Fre64] había llegado a él alrededor de 1958, mediante el estudio de ciertas geometrías sintéticas. La primera fila del cuadrado corresponde a geometrías elípticas en dimensión 2 (donde sólo hay una clase de objetos primitivos: puntos), la segunda fila a geometrías proyectivas en dimensión 2, la tercera a geometrías simplécticas en dimensión 5 (con tres tipos de objetos primitivos: puntos, líneas y planos), y la cuarta fila a un nuevo tipo de geometrías que él llamó metasimplécticas (que incluyen un cuarto tipo de objetos primitivos: los simplecta). Previamente, en 1956, Rosenfeld [Ros56] había tenido la idea (no rigurosa) de que, así como el álgebra de Lie compacta real de tipo $F_4$ se puede interpretar como el álgebra de Lie del grupo de isometrías del plano proyectivo sobre los octoniones (éste es un plano proyectivo no desarguesiano, otra situación excepcional), algo análogo debía ocurrir para $E_6$, $E_7$ y $E_8$, cambiando $\mathbb{O}$ por $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ y $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$ respectivamente.

Pero es Tits quien dio la construcción algebraica anterior, una construcción precisa y unificada de estas álgebras de Lie excepcionales que es, además, válida para cuerpos arbitrarios de característica $\neq 2, 3$.

Como ya se ha mencionado, las álgebras de Jordan $J$ usadas en la construcción de Tits, son esencialmente álgebras de matrices hermíticas de orden 3 sobre un álgebra de Hurwitz: $J = H_3(B)$. De este modo, la construcción de Tits se puede ver como una construcción basada en dos álgebras de Hurwitz: $\mathcal{T}(A, B) = \mathcal{T}(A, H_3(B))$. Nótese que las álgebras de composición $A$ y $B$ juegan papeles muy diferentes, pues los elementos de $B$ aparecen como coordenadas en un álgebra de Jordan. Sin embargo, el resultado de la construcción, el Cuadrado Mágico, ¡es simétrico!

Después de la construcción de Tits, varios autores encontraron diferentes construcciones simétricas del Cuadrado Mágico. Vinberg [Vin05] dio en 1966 una construcción basada en dos álgebras de Hurwitz $A$ y $B$ mediante un corchete de Lie algo complicado en la suma directa

$$\mathcal{V}(A,B) = \mathfrak{der}(A) \oplus \mathfrak{der}(B) \oplus \mathfrak{su}\big(\mathrm{Mat}_3(A \otimes B), *\big),$$

donde $\mathfrak{su}\big(\mathrm{Mat}_3(A \otimes B), *\big)$ denota el subespacio de matrices de traza 0, orden 3 y antihermíticas respecto a la involución natural: $(a_{ij} \otimes b_{ij})^* = (\bar{a}_{ji} \otimes \bar{b}_{ji})$.

En 1993, Allison y Faulkner [AF93] dieron una construcción muy general de álgebras de Lie basada en las llamadas *álgebras estructurables*. En particular, el producto tensorial de dos álgebras de Hurwitz es estructurable, y la construcción en este caso equivale a la de Vinberg. Más recientemente, Barton y Sudbery [BS00, BS03] y Landsberg y Manivel [LM02, LM04] proporcionaron otra construcción basada en dos álgebras de Hurwitz y sus *álgebras de Lie de trialdad*, en lugar de sus álgebras de derivaciones. Esta construcción define un corchete de Lie en la suma directa

$$\mathcal{BS}(A,B) = \mathfrak{tri}(A) \oplus \mathfrak{tri}(B) \oplus 3 \text{ copias de } A \otimes B$$

donde el álgebra de Lie de trialdad se define como

$$\mathfrak{tri}(A) = \{(f,g,h) \in \mathfrak{so}(A,q)^3 : f(xy) = h(x)y + xg(y)\ \forall x,y \in A\}$$

(aquí $\mathfrak{so}(A,q)$ es el álgebra de Lie ortogonal relativa a la norma $q$ del álgebra de Hurwitz $A$).

En [Bae02] se puede encontrar una magnífica exposición de los octoniones, el Cuadrado Mágico, las álgebras de Lie excepcionales y las geometrías asociadas.

El fenómeno de la trialdad aparece descrito por Élie Cartan [Car38], relacionando la representación natural y las "medio espín" del álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{so}(8) = \mathfrak{so}(\mathbb{O})$. Como se muestra en [KMRT98], se obtienen fórmulas más sencillas si se utilizan las llamadas *álgebras de composición simétricas*, en lugar de las álgebras clásicas de Hurwitz. De nuevo, la inspiración para estas nuevas álgebras proviene de la Física.

## 5 Álgebras de composición simétricas

En 1978, el físico Susumu Okubo [Oku78], trabajando en la simetría de la física de partículas dada por el grupo compacto $SU(3)$, introdujo un álgebra definida en el espacio $\mathfrak{sl}(3)$ de las matrices $3 \times 3$ complejas de traza 0 del modo siguiente. Sea $\omega = e^{2\pi i/3}$ (raíz cúbica de la unidad). Si $x, y \in \mathfrak{sl}(3)$, $\omega xy - \omega^2 yx$ tiene traza $(\omega - \omega^2)\,\mathrm{tr}(xy)$, luego

$$x * y = \omega xy - \omega^2 yx - \frac{\omega - \omega^2}{3}\,\mathrm{tr}(xy)1 \tag{5.1}$$

es de nuevo una matriz de traza 0. Además, si se define la forma cuadrática $q : \mathfrak{sl}(3) \to \mathbb{C}$, mediante $q(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(x^2)$, $q$ es regular y una sencilla cuenta da

$$q(x * y) = q(x)q(y)$$

para todo $x, y \in \mathfrak{sl}(3)$, obteniéndose pues la propiedad multiplicativa de $q$. Sin embargo, esta álgebra no tiene unidad.

Tales álgebras se llaman simplemente *álgebras de composición*. Así pues, $\mathfrak{sl}(3)$ resulta ser un álgebra de composición compleja. Notemos que el álgebra de Lie real $\mathfrak{su}(3) = \{x \in \mathfrak{sl}(3) : x^* = -x\}$ (donde $*$ es la involución hermítica) es cerrada para el producto en (5.1), obteniéndose un álgebra de composición real que Okubo bautizó como *álgebra de pseudo-octoniones*. Es fácil comprobar que estas álgebras no son asociativas.

La forma cuadrática $q$ anterior posee otra propiedad interesante. Si $x, y \in \mathfrak{sl}(3)$ (o $\mathfrak{su}(3)$), se tiene

$$(x * y) * x = x * (y * x) = q(x)y, \tag{5.2}$$

que resulta ser equivalente a la ecuación

$$q(x * y, z) = q(x, y * z) \tag{5.3}$$

para $x, y, z$ arbitrarios, donde $q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ denota la forma bilineal asociada. Esta propiedad no es cierta en las álgebras de Hurwitz de dimensión $\geq 2$.

En la definición anterior, $\mathbb{C}$ puede ser sustituido por cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2, 3$, e incluso por cuerpos de característica 2 (¡pues $-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(x^2)$ sigue teniendo sentido, si $\operatorname{tr}(x) = 0$!). Las "formas" de estas álgebras sobre cuerpos de característica $\neq 3$, esto es, las álgebras tales que al extender escalares hasta una clausura algebraica se obtiene un álgebra isomorfa a la dada por el producto (5.1), se conocen hoy como *álgebras de Okubo* [EM90] (aunque Okubo se sigue resistiendo a llamarlas así y continúe usando el nombre de pseudo-octoniones). Sobre cuerpos de característica 3, las álgebras de Okubo se definen de un modo 'ad hoc' [EP96].

En 1980, Myung y Okubo [OM80] definieron otra clase de álgebras de composición. Sea $A$ un álgebra de Hurwitz con norma $q$ y conjugación estándar $x \mapsto \bar{x} = t(x)1 - x$ (véase (2.4)). Se define un nuevo producto en $A$ mediante:

$$x * y = \bar{x}\bar{y} \tag{5.4}$$

para todo $x, y \in A$. En estas condiciones, las ecuaciones (5.2) y (5.3) son válidas también. Estas álgebras reciben el nombre de *álgebras para-Hurwitz*.

Las álgebras de composición verificando (5.3) (o, equivalentemente, (5.2)) recibieron el nombre de *álgebras de composición simétricas* [KMRT98, Chapter VIII], y fueron clasificadas en [EM93] sobre cuerpos de característica $\neq 3$, extendiendo resultados parciales previos de varios autores: Okubo y Osborn [OO81], Petersson [Pet69], así como [EM91] y [EP96]. En 1997, esta clasificación se extendió a cuerpos de característica 3 [Eld97].

El resultado final viene a decir que, esencialmente, las álgebras consideradas antes, para-Hurwitz y Okubo, son todas las álgebras de composición simétricas. Además nos dice exactamente cómo son las álgebras de Okubo.

## 6 De nuevo el Cuadrado Mágico

Sea $S$ un álgebra de composición simétrica con multiplicación $*$ y norma $q$. Para estas álgebras se cambia ligeramente la definición de álgebra de Lie de trialdad como sigue:

$$\mathfrak{tri}(S,*,q) = \{(d_0,d_1,d_2) \in \mathfrak{so}(S,q)^3 : d_0(x*y) = d_1(x)*y + x*d_2(y)\ \forall x,y \in S\}.$$

La asociatividad de la norma (5.3) hace que podamos permutar cíclicamente los elementos de $\mathfrak{tri}(S,*,q)$. Así,

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{tri}(S,*,q) &\longrightarrow \mathfrak{tri}(S,*,q) \\ (d_0,d_1,d_2) &\mapsto (d_2,d_0,d_1) \end{aligned} \tag{6.1}$$

es un automorfismo. Notemos que la subálgebra fija por este automorfismo es naturalmente isomorfa al álgebra de Lie de derivaciones de $S$ que, suponiendo característica $\neq 3$, es un álgebra de Lie de tipo $A_2$ para álgebras de Okubo y excepcional de tipo $G_2$ para las álgebras para-Cayley (esto es, para-Hurwitz de dimensión 8).

El 'principio local de trialdad' se puede traducir en los siguientes dos puntos:

- Para todo $d_0 \in \mathfrak{so}(S,q)$, existen $d_1,d_2 \in \mathfrak{so}(S,q)$, tales que $(d_0,d_1,d_2) \in \mathfrak{tri}(S,*,q)$. Esto es, la proyección $\pi_0 : \mathfrak{tri}(S,*,q) \to \mathfrak{so}(S,q)$, dada por $(d_0,d_1,d_2) \mapsto d_0$, es suprayectiva.
- Si $\dim S = 8$, entonces esta proyección $\pi_0$ es biyectiva.

Por tanto, en dimensión 8, $\pi_0$ permite identificar $\mathfrak{so}(S,q)$ y $\mathfrak{tri}(S,*,q)$. En esta situación, las otras proyecciones $\pi_1$ y $\pi_2$ proporcionan las representaciones 'medio-espín' de $\mathfrak{so}(S,q)$.

Además,

- Para todo $x,y \in S$, la aplicación $\sigma_{x,y}\colon z \mapsto q(x,z)y - q(y,z)x$ está en $\mathfrak{so}(S,q)$, que está generada linealmente por estas aplicaciones. Si $l_x\colon y \mapsto x*y$ y $r_x\colon y \mapsto y*x$ denotan las multiplicaciones a izquierda y derecha en $S$, se tiene que la terna

$$t_{x,y} = \left(\sigma_{x,y}, \frac{1}{2}q(x,y)1 - r_x l_y, \frac{1}{2}q(x,y)1 - l_x r_y\right) \tag{6.2}$$

  es un elemento de $\mathfrak{tri}(S,*,q)$. Esto proporciona fórmulas explícitas para las representaciones 'medio-espín'.

Pues bien, sean $(S,*,q)$ y $(S',*,q')$ dos álgebras de composición simétricas. Definamos una nueva álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S,S')$ como la suma directa de las álgebras de Lie de trialdad de ambas álgebras y de tres copias del producto tensorial $S \otimes S'$:

$$\mathfrak{g}(S,S') = \mathfrak{tri}(S,*,q) \oplus \mathfrak{tri}(S',*,q') \oplus \Big(\oplus_{i=0}^{2} \iota_i(S \otimes S')\Big), \tag{6.3}$$

con producto anticonmutativo (corchete) determinado por:

- Las álgebras $\mathfrak{tri}(S,*,q)$ y $\mathfrak{tri}(S',*,q')$ son subálgebras de $\mathfrak{g}(S,S')$, y $[\mathfrak{tri}(S,*,q), \mathfrak{tri}(S',*,q')] = 0$.

- Si $(d_0,d_1,d_2) \in \mathfrak{tri}(S,*,q)$, $(d_0',d_1',d_2') \in \mathfrak{tri}(S',*,q')$, $a \in S$ y $x \in S'$,

$$[(d_0,d_1,d_2), \iota_i(a \otimes x)] = \iota_i\big(d_i(a) \otimes x\big),$$
$$[(d_0',d_1',d_2'), \iota_i(a \otimes x)] = \iota_i\big(a \otimes d_i'(x)\big).$$

- Si $a,b \in S$ y $x,y \in S$:

$$[\iota_i(a \otimes x), \iota_{i+1}(b \otimes y)] = \iota_{i+2}\big((a*b) \otimes (x*y)\big)$$

(índices módulo 3).

- Por último, si $a,b \in S$, $x,y \in S'$ e $i = 0$, 1 o 2:

$$[\iota_i(a \otimes x), \iota_i(b \otimes y)] = q'(x,y)\theta^i(t_{a,b}) + q(a,b)\theta'^i(t'_{x,y}),$$

donde los elementos $t_{a,b}$ y $t_{x,y}$ están definidos en (6.2) y $\theta$ y $\theta'$ son los automorfismos de trialdad (6.1) de $\mathfrak{tri}(S,*,q)$ y $\mathfrak{tri}(S',*,q')$.

El resultado principal en [Eld04a] asegura que, con este producto, $\mathfrak{g}(S,S')$ es un álgebra de Lie (algo que resulta muy fácil de probar, debido a la simetría de la construcción) y así se recupera el Cuadrado Mágico de Freudenthal:

dim $S$

| | | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| dim $S'$ | 1 | $A_1$ | $A_2$ | $C_3$ | $F_4$ |
| | 2 | $A_2$ | $A_2 \oplus A_2$ | $A_5$ | $E_6$ |
| | 4 | $C_3$ | $A_5$ | $D_6$ | $E_7$ |
| | 8 | $F_4$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |

En dimensión 8, hay dos tipos de álgebras de composición simétricas: para-Cayley $P$ y Okubo $S$, obteniendo así, por ejemplo, tres construcciones diferentes de álgebras de Lie de tipo $E_8$: $\mathfrak{g}(P,P)$, $\mathfrak{g}(P,S)$ y $\mathfrak{g}(S,S)$. Cada una de ellas muestra distintas propiedades de $E_8$.

Las construcciones previas de Tits, Vinberg, ..., equivalen a la construcción $\mathfrak{g}(S,S')$, donde $S$ y $S'$ son álgebras para-Hurwitz.

Pero hay algo más que se puede obtener de esta construcción [Eld05a]. Las álgebras para-Hurwitz de dimensiones 4 y 8 no de división se pueden definir a partir de un único ingrediente muy sencillo, el módulo irreducible natural (de dimensión 2) para el álgebra de Lie simple más sencilla: $\mathfrak{sl}(2)$. Como consecuencia, sobre cuerpos algebraicamente cerrados, las álgebras de Lie del Cuadrado Mágico pueden construirse en términos muy simples usando copias de $\mathfrak{sl}(2)$ y su módulo natural. La forma general que se obtiene es del tipo

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}} V(\sigma), \tag{6.4}$$

donde $\mathcal{S}$ es un conjunto de subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, $V(\emptyset) = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{sl}(2)$, suma directa de $n$ copias de $\mathfrak{sl}(2)$, y para $\sigma = \{i_1, \dots, i_r\} \in \mathcal{S}$, $V(\sigma) = V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_r}$, donde $V_i$ es el módulo natural para la $i$-ésima copia de $\mathfrak{sl}(2)$ en $V(\emptyset)$. El corchete de Lie aparece aquí en términos de contracciones naturales de tensores.

De nuevo, el álgebra real de división de los octoniones $\mathbb{O}$ aparece en estas construcciones, de modo inesperado. Esto permite también dar expresiones sencillas de los 'sistemas de raíces' de las álgebras de Lie excepcionales. Estas descomposiciones (6.4) han sido obtenidas independientemente por Manivel [Man05].

## 7 Superálgebras de Lie

Aunque las álgebras de Lie simples de dimensión finita sobre los complejos fueron clasificadas por Killing y Cartan hace más de 100 años, la riqueza de posibilidades en dimensión infinita hacen imposible, por ahora, una clasificación tan general. En 1992, Berman y Moody [BM92] introdujeron el concepto de álgebra de Lie *graduada por un sistema finito de raíces*, en un intento de unificar el estudio de varias clases importantes de álgebras de Lie de dimensión infinita conocidas, como las álgebras de Kac-Moody afines, las álgebras de Lie de matrices intersección de Slodowy, que aparecen en el estudio de singularidades, o las álgebras de Lie afines extendidas (EALAs) de [AAB+97].

El punto de encuentro de todas estas álgebras es que, aún siendo de dimensión infinita, exhiben una graduación sobre un sistema de raíces de un álgebra de Lie simple de dimensión finita.

Berman y Moody [BM92] estudiaron el caso de álgebras de Lie graduadas sobre sistemas de raíces de tipo $A$, $D$ o $E$. En 1996, Benkart y Zelmanov [BZ96] investigaron los casos restantes ($B$, $C$, $G_2$ y $F_4$). La clave para estudiar los casos excepcionales $G_2$ y $F_4$ consiste en mirar la construcción de Tits $\mathcal{T}(A, J)$ (4.1) con otros ojos.

En efecto, la última fila del Cuadrado Mágico se obtiene en la construcción de Tits como

$$\mathcal{T}(C, J) = \mathfrak{Der}(C) \oplus (C_0 \otimes J_0) \oplus \mathfrak{Der}(J),$$

donde $C$ es un álgebra de Cayley. Supongamos, por simplicidad, que el cuerpo base es $\mathbb{C}$. En esta situación $\mathfrak{g} = \mathfrak{Der}(C)$ es el álgebra de Lie simple de tipo $G_2$, y $V = C_0$ es su módulo irreducible no trivial más pequeño. Así $\mathcal{T}(C, J)$ es, como módulo para $\mathfrak{g}$, la suma directa del módulo adjunto $\mathfrak{g}$, de copias de $V$ (tantas como indica $\dim J_0$) y copias del módulo trivial para $\mathfrak{g}$ (tantas como $\dim \mathfrak{Der}(J)$ pues $[\mathfrak{g}, \mathfrak{Der}(J)] = 0$). Esto muestra que $\mathcal{T}(C, J)$ es un álgebra de Lie graduada por el sistema de raíces de $G_2$. Benkart y Zelmanov mostraron que las álgebras de Lie graduadas por este sistema de raíces son todas de esta forma, pero donde el álgebra de Jordan $J$ puede ser ahora cualquier álgebra de Jordan sobre un álgebra conmutativa, asociativa y unitaria $R$, satisfaciendo una relación análoga a la ecuación de Cayley-Hamilton de grado 3 (esto es, la ecuación característica de las matrices $3 \times 3$):

$$\mathcal{T}(C, J) = (\mathfrak{g} \otimes R) \oplus (V \otimes J_0) \oplus \langle J, J \rangle,$$

donde $\langle J, J \rangle$ es un sustituto adecuado de $\mathfrak{Der}(J)$.

Análogamente, la última columna del Cuadrado Mágico aparece en la construcción de Tits como

$$\mathcal{T}(A, \mathcal{J}) = \mathfrak{Der}(A) \oplus (A_0 \otimes \mathcal{J}_0) \oplus \mathfrak{Der}(\mathcal{J}),$$

donde $\mathcal{J}$ es un álgebra de Albert (álgebra de Jordan excepcional de dimensión 27). Aquí $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{Der}(\mathcal{J})$ es un álgebra de Lie simple, de tipo $F_4$, y $\tilde{V} = \mathcal{J}_0$ es el módulo irreducible no trivial más pequeño, de modo que $\mathcal{T}(A, \mathcal{J})$ es, como módulo para $\tilde{\mathfrak{g}}$, la suma directa del módulo adjunto $\tilde{\mathfrak{g}}$, de copias de $\tilde{V}$ y copias del módulo trivial, luego está graduada por el sistema de raíces $F_4$. De nuevo, Benkart y Zelmanov probaron que toda álgebra de Lie graduada por este sistema es de esta forma, pero donde $A$ es ahora un álgebra 'alternativa de grado 2' sobre un anillo conmutativo, asociativo y unitario $R$:

$$\mathcal{T}(A, J) = \langle A, A \rangle \oplus (A_0 \otimes \tilde{V}) \oplus R \otimes \tilde{\mathfrak{g}}.$$

Más aún, Benkart y Zelmanov mostraron, utilizando estas ideas, cómo obtener las superálgebras de Lie simples excepcionales $G(3)$ y $F(4)$. Esto fue extendido en [BE03].

Las superálgebras de Lie aparecieron en la segunda mitad del siglo XX en Física, en el contexto de la supersimetría, que relaciona partículas con espín entero y semientero.

Toda superálgebra de Lie es una suma directa, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, de una parte par $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, que es un álgebra de Lie, y una parte impar $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, que es un módulo para la parte par y está dotado de un producto ¡conmutativo! $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \to \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ con propiedades adecuadas. La clasificación de las superálgebras de Lie simples de dimensión finita sobre los cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0 se debe a Kac [Kac77]. En ella aparecen de nuevo varias familias infinitas de superálgebras de Lie cuya dimensión se hace arbitrariamente grande al crecer sus parámetros: $A(m,n)$, $B(m,n)$, $C(n)$, $D(m,n)$, $P(n)$, $Q(n)$, $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$ y $H(n)$, y tres excepciones:

(i) Existe una única superálgebra de Lie simple $F(4)$ de dimensión 40, cuya parte par es un álgebra de Lie de tipo $B_3 \oplus A_1$, y la parte impar es, como módulo para la parte par, el producto tensorial de la representación espín para $B_3$ (de dimensión 8) y el módulo natural (de dimensión 2) para $A_1$.

(ii) Existe una única superálgebra de Lie simple $G(3)$ de dimensión 31, cuya parte par es un álgebra de Lie de tipo $G_2 \oplus A_1$, y la parte impar es, como módulo para la parte par, el producto tensorial del módulo irreducible no trivial más sencillo para $G_2$ (puesto que el álgebra de Lie de tipo $G_2$ se puede identificar con $\mathfrak{Der}(C)$, con $C$ el álgebra de Cayley, este módulo es $C_0$) por el módulo natural para $A_1$.

(iii) Existe una familia uniparamétrica $D(2,1;\alpha)$ ($\alpha \in k \setminus \{0,-1\}$) de superálgebras de dimensión 17, que consiste en las superálgebras de Lie simples cuya parte par es la suma directa de tres copias de $A_1$ y la parte impar es, como módulo para la parte par, el producto tensorial de los módulos naturales para cada copia de $A_1$.

En [BE03] se prueba que, en la construcción de Tits $\mathcal{T}(A,J)$, se puede sustituir $J$ por ciertas superálgebras de Jordan de dimensión 3 y 4. En consecuencia, el Cuadrado Mágico se extiende como indica el cuadro 3, para incluir también las superálgebras de Lie excepcionales de un modo unificado.

| | dim $J$ | 6 | 9 | 15 | 27 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dim $A$ | 1 | $A_1$ | $A_2$ | $C_3$ | $F_4$ | $A_1$ | $B(0,1)$ |
| | 2 | $A_2$ | $A_2 \oplus A_2$ | $A_5$ | $E_6$ | $B(0,1)$ | $A(1,0)$ |
| | 4 | $C_3$ | $A_5$ | $D_6$ | $E_7$ | $B(1,1)$ | $D(2,1;\alpha)$ |
| | 8 | $F_4$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $G(3)$ | $F(4)$ |

Tabla 3: Un rectángulo mágico

En [Eld04b] se puede también descubrir hasta qué punto las superálgebras de Lie simples excepcionales están relacionadas con las álgebras de cuaternios y las álgebras de Cayley, sobre cuerpos arbitrarios de característica $\neq 2,3$.

## 8 Superálgebras de composición

Además de la sencillez y simetría de la construcción del Cuadrado Mágico mediante álgebras de composición simétricas, otra ventaja que presenta esta construcción es la de ser válida también sobre cuerpos de característica 3. Sólo hay que tener cierto cuidado con la segunda fila (o segunda columna), pues allí las álgebras de Lie que se obtienen sobre tales cuerpos no son simples, pero poseen un ideal de codimensión 1 que sí lo es [Eld04a].

Pero la característica 3 presenta otra excepción notable. Sólo sobre estos cuerpos existen *superálgebras de composición* no triviales (esto es, que no son álgebras de composición) en dimensión finita. En [EO02] se clasificaron tanto las superálgebras de composición unitarias (superálgebras de Hurwitz) como las superálgebras de composición simétricas. El resultado muestra que las únicas no triviales aparecen en característica 3 y dimensiones 3 y 6, en perfecto acuerdo con los resultados de clasificación de las superálgebras alternativas simples de Shestakov [She97].

En la definición del álgebra de Lie $\mathfrak{g}(S, S')$ en (6.3), las álgebras de composición simétricas pueden ser sustituidas por superálgebras de composición simétricas. Se obtiene así una extensión en característica 3 del Cuadrado Mágico de Freudenthal [Cun.th], en el que aparecen superálgebras de Lie (cuadro 4).

| | | $\dim S$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 |
| $\dim S'$ | 1 | $A_1$ | $\tilde{A}_2$ | $C_3$ | $F_4$ | $A(1,1)$ | $(21,14)$ |
| | 2 | | $\tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2$ | $\tilde{A}_5$ | $\tilde{E}_6$ | $(11,14)$ | $(35,20))$ |
| | 4 | | | $D_6$ | $E_7$ | $(24,26)$ | $(66,32)$ |
| | 8 | | | | $E_8$ | $(55,50)$ | $(133,56)$ |
| | 3 | | | | | $(21,16)$ | $(36,40)$ |
| | 6 | | | | | | $(78,64)$ |

Tabla 4: Un cuadrado supermágico en característica 3

En el cuadro 4 se han escrito sólo las entradas por encima de la diagonal, pues el cuadrado es simétrico. La notación $\tilde{X}$ indica que en característica 3 las álgebras correspondientes no son simples, aunque contienen un ideal de codimensión 1 que sí lo es. Así, por ejemplo, $\tilde{A}_2$ indica una forma del álgebra de Lie proyectiva general lineal $\mathfrak{pgl}(3) = \mathfrak{gl}(3)/kI_3$ (en característica $\neq 3$, $\mathfrak{pgl}(3) \cong \mathfrak{sl}(3)$), que contiene el ideal simple $\mathfrak{psl}(3) = \mathfrak{sl}(3)/kI_3$.

La propiedad más significativa de la construcción con superálgebras es que, con la excepción de la superálgebra de Lie simple $A(1,1)$ ya conocida, en el sentido de que es la análoga en característica 3 de la superálgebra $A(1,1)$ en la clasificación de Kac, el resto de superálgebras de Lie que aparecen son simples, con la excepción de las superálgebras que aparecen como $(11, 14)$ y $(35, 20)$ (que contienen un ideal simple de codimensión 1), y no conocidas hasta ahora. De hecho, son objetos excepcionales propios de la característica 3. En el cuadro 4 sólo se han indicado los pares $(n, m)$ donde $n$ y $m$ denotan las dimensiones de las parte par e impar.

Buena parte de estas superálgebras de Lie simples se describen en [Eld05b] mediante otras construcciones basadas en los llamados sistemas triples simplécticos y ortogonales. Así, sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica 3, las superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$, donde $S'$ es una superálgebra de composición simétrica de dimensión 3 y $S$ un álgebra de composición simétrica ($\dim S = 1$, 2, 4 u 8) se describen en términos de unos sistemas triples ortogonales asociados a las álgebras de Jordan $H_3(A)$, donde $A$ es un álgebra de Hurwitz; mientras que las superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$, donde ahora $S'$ es una superálgebra de composición simétrica de dimensión 6 se describen en términos de sistemas triples simplécticos, también relacionados con estas álgebras de Jordan. Otro modo de obtener estas mismas superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$ con $\dim S' = 6$ es el siguiente. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del tipo de las que aparecen en (6.4), se puede definir de modo natural una superálgebra de Lie

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \oplus_{\sigma \in \mathcal{S}} \tilde{V}(\sigma),$$

obviando una copia de $\mathfrak{sl}(2)$ y su módulo natural. De modo más preciso, $\tilde{V}(\emptyset) = \oplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{sl}(2)$, y para $\sigma = \{i_1, \dots, i_r\}$, $\tilde{V}(\sigma) = V(\sigma)$ si $n \notin \sigma$, mientras que $\tilde{V}(\sigma) = V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_{r-1}}$, si $i_r = n$. Partiendo de la álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, \hat{S})$ con $S$ y $\hat{S}$ álgebras para-Hurwitz, que aparecen en la forma descrita en (6.4), las superálgebras $\tilde{\mathfrak{g}}$ que se obtienen son las $\mathfrak{g}(S, S')$ con $\dim S' = 6$.

Merece la pena mencionar aquí que las álgebras de Lie simples finito dimensionales sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica prima $p \neq 2, 3$ se han clasificado muy recientemente (véase [Str04]), fruto del trabajo de muchos autores. Además de las álgebras simples análogas a las que aparecen la clasificación de Killing-Cartan, aparecen las llamadas álgebras de Lie "tipo Cartan" y, en característica 5, las álgebras de Melikyan. En característica 2 la situación está muy abierta todavía y es muy extraña (para comenzar, ¡toda álgebra de Lie es conmutativa en característica 2!), mientras que en característica 3 se conocen varias álgebras de Lie simples nuevas, pero no se sabe si se tiene la lista completa.

## 9 Epílogo

En este paseo han aparecido algunos objetos excepcionales dentro del mundo de las álgebras no asociativas: ciertas álgebras de Lie simples, de composición, de Jordan, superálgebras; y todos ellos están íntimamente relacionados de un modo u otro con los octoniones, o sus generalizaciones: las (super)álgebras de composición.

Desde su descubrimiento en 1843, los octoniones han ido surgiendo en numerosas situaciones fuera de la norma, y no sólo en Álgebra. Ya hemos citado el fenómeno de la trialdad, que aparece al estudiar rotaciones precisamente en dimensión 8. Pero hay más. Sólo las esferas de dimensiones 1, 3 y 7 ($S^1$, $S^3$ y $S^7$) son "paralelizables". De hecho, las dos primeras admiten estructura de grupo de Lie al ser los elementos de norma 1 en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$. La esfera $S^7$ es el conjunto de octoniones de norma 1, pero al no ser asociativo el producto en $\mathbb{O}$, $S^7$ no es un grupo de Lie, sino algo más débil conocido como "lazo de Moufang", lo que basta para la paralelizabilidad. También, la esfera dos dimensional $S^2$, o esfera de Riemann, que es isomorfa a la recta proyectiva compleja, admite una estructura compleja. La única otra esfera que admite una estructura "casi compleja" es $S^6$, y dicha estructura se define fácilmente si se identifica $S^6$ con el conjunto de octoniones de norma 1 y traza 0. Aún más, los espacios proyectivos de dimensión $\geq 3$, así como los planos proyectivos "desarguesianos", están parametrizados por álgebras asociativas. En 1933, Ruth Moufang [Mou33] dio un ejemplo de plano proyectivo que no satisface el Axioma de Desargues, parametrizándolo con los octoniones. Otros ejemplos, físicos y matemáticos, pueden ser consultados en [Bae02] y sus referencias.

Susumu Okubo escribe en [Oku95]

> El dicho de que Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una teoría matemática bonita tiene una gran probabilidad de ser correcta, se ha atribuido a Dirac. El álgebra de octoniones es ciertamente una entidad matemática preciosa y es posible que otras álgebras no asociativas (además, por supuesto, de las álgebras de Lie) puedan jugar un papel esencial en la Teoría Última, todavía por descubrir.

Espero haberles transmitido una porción del entusiasmo que los octoniones, junto a otros objetos excepcionales, despiertan en algunos matemáticos, entre los que me encuentro. Nunca acabamos de entenderlos del todo. Siempre nos sorprenden.

Al principio del discurso manifesté mi orgullo por sustituir a Don Juan Sancho San Román en la medalla número 29 de la Academia. A lo largo del mismo han aparecido objetos excepcionales en dimensiones muy variadas, por supuesto 8 de los octoniones, también 14, 52, 78, 133 y 248 de las álgebras de Lie simples excepcionales, 27 del álgebra de Albert, 17, 31 o 40 de las superálgebras de Lie simples excepcionales, y otras, pero ninguno de dimensión 29. Un amante de los números no puede dejar las cosas así.

La superálgebra de Lie excepcional $\mathfrak{g}$ de tipo $F(4)$ tiene dimensión 40. Su parte par es la suma directa de $\mathfrak{sl}(2)$ y $\mathfrak{so}(7)$, mientras que su parte impar es el producto tensorial del módulo natural $V$ para $\mathfrak{sl}(2)$ y el módulo espín $S$ para $\mathfrak{so}(7)$. Esta superálgebra puede definirse sobre cualquier cuerpo de característica $\neq 2$. El modo más sencillo es tomar un álgebra de octoniones $C$, de modo que $\mathfrak{so}(7)$ puede sustituirse por $\mathfrak{so}(C_0)$, y $S$ por $C$. Así $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{so}(C_0)$ y $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = V \otimes C$. En característica 3 sucede ese fenómeno curioso que asomaba en la sección anterior, se puede suprimir $\mathfrak{sl}(2)$ y $V$ para quedarse con

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(C_0) \oplus C,$$

que ya no es una superálgebra de Lie simple, sino un álgebra de Lie simple. Ésta es una de las álgebras de Lie simples propias exclusivamente de la característica 3. Fue descubierta, de manera muy diferente, por Brown [Bro82] en 1982, año en que Don Juan me explicaba los Teoremas de Gödel, su dimensión es 29 y, ¡cómo no!, está relacionada con los octoniones.

## Referencias


[AAB+97] Bruce N. Allison, Saeid Azam, Stephen Berman, Yun Gao, and Arturo Pianzola. Extended affine Lie algebras and their root systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **126** (1997), x+122.

[AF93] Bruce N. Allison and John R. Faulkner. Nonassociative coefficient algebras for Steinberg unitary Lie algebras. *J. Algebra*, **161** (1993), no. 1, 1–19.

[Alb34] A. Adrian Albert. On a certain algebra of quantum mechanics. *Ann. of Math. (2)*, **35** (1934), no. 1, 65–73.

[Bae02] John C. Baez. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **39** (2002), no. 2, 145–205.

[BS00] Chris H. Barton and Anthony Sudbery, Magic Squares of Lie Algebras. arXiv: math.RA/0001083 (2000).

[BS03] Chris H. Barton and Anthony Sudbery. Magic squares and matrix models of Lie algebras. *Adv. Math.*, **180** (2003), no. 2, 596–647.

[BE03] Georgia Benkart and Alberto Elduque. The Tits construction and the exceptional simple classical Lie superalgebras. *Q. J. Math.*, **54** (2003), no. 2, 123–137.

[BZ96] Georgia Benkart and Efim Zelmanov. Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras. *Invent. Math.*, **126** (1996), no. 1, 1–45.

[BM92] Stephen Berman and Robert V. Moody. Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy. *Invent. Math.*, **108** (1992), no. 2, 323–347.

[Bro82] Gordon Brown. Properties of a 29-dimensional simple Lie algebra of characteristic three. *Math. Ann.*, **261** (1982), no. 4, 487–492.

[Car94] Élie Cartan. *Sur la structure des groupes de transfromations finis et continus*, Thèse, Paris, Nony, 1894.

[Car14] Élie Cartan. Les groups réels simples finis et continus, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1914), 255–262

[Car38] Élie Cartan. *Leçons sur la théorie des spineurs.* Hermann, Paris, 1938.

[CS50] Claude Chevalley and Richard D. Schafer. The exceptional simple Lie algebras $F_4$ and $E_6$. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **36** (1950), 137–141.

[Cun.th] Isabel Cunhá. Tesis doctoral, en preparación.

[Eld97] Alberto Elduque. Symmetric composition algebras. *J. Algebra*, **196** (1997), no. 1, 282–300.

[Eld04a] Alberto Elduque. The magic square and symmetric compositions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, **20** (2004), no.2, 475–491.

[Eld04b] Alberto Elduque. Quaternions, octonions and the forms of the exceptional simple classical Lie superalgebras. *Comment. Math. Helv.*, **79** (2004), no. 1, 208–228.

[Eld05a] Alberto Elduque. The magic square and symmetric compositions II. Aparecerá en *Rev. Mat. Iberoamericana.*

[Eld05b] Alberto Elduque. New simple Lie superalgebras in characteristic 3. Aparecerá en *J. Algebra.*

[EM90] Alberto Elduque and Hyo Chul Myung. On Okubo algebras. In *From symmetries to strings: forty years of Rochester Conferences (Rochester, NY, 1990)*, pages 299–310. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1990.

[EM91] Alberto Elduque and Hyo Chul Myung. Flexible composition algebras and Okubo algebras. *Comm. Algebra*, **19** (1991), no. 4, 1197–1227.

[EM93] Alberto Elduque and Hyo Chul Myung. On flexible composition algebras. *Comm. Algebra*, **21** (1993), no. 7,2481–2505.

[EO02] Alberto Elduque and Susumu Okubo. Composition superalgebras. *Comm. Algebra*, **30** (2002), no. 11, 5447–5471.

[EP96] Alberto Elduque and José María Pérez. Composition algebras with associative bilinear form. *Comm. Algebra*, **24** (1996), no. 3, 1091–1116.

[Fre64] Hans Freudenthal. Lie groups in the foundations of geometry. *Advances in Math.*, **1** (1964), no. 2, 145–190.

[Hel90] Sigurdur Helgason. *Shopus Lie and the Role of Lie Groups in Mathematics.* Opening Lecture at the Nordic Teachers Conference in Reykjavik, 1990.

[Hur98] Adolf Hurwitz. Über die Composition der quadratishen Formen von beliebig vielen Variabeln. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898), 309–316.

[Jac39] Nathan Jacobson. Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G. *Duke Math. J.* **5** (1939), 775–783.

[Jac58] Nathan Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **7** (1958), 55–80.

[JvNW34] Pascual Jordan, John von Neumann, and Eugene Wigner. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. of Math. (2)*, 35(1):29–64, 1934.

[Kac77] Victor G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Math.*, **26** (1977), no. 1, 8–96.

[Kil84] Wilhelm Killing. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I *Math. Ann.* **31** (1888), 252–290. II, **33** (1889), 1–48. III, **34** (1889), 57-122. IV, **36** (1890), 161–189.

[KMRT98] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Markus Rost, and Jean-Pierre Tignol. *The book of involutions*, volume 44 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[LM02] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. Triality, exceptional Lie algebras and Deligne dimension formulas. *Adv. Math.*, **171** (2002), no. 1, 59–85.

[LM04] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. Representation theory and projective geometry. In *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, volume 132 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 71–122. Springer, Berlin, 2004.

[Man05] Laurent Manivel. Configurations of lines and models of Lie algebras. arXiv: math.AG/0507118 (2005).

[McC04] Kevin McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.

[Mou33] Ruth Moufang. Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **9** (1933), 207–222.

[Oku78] Susumu Okubo. Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras. *Hadronic J.*, **1** (1978), no. 4, 1250–1278.

[Oku95] Susumu Okubo. *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics*, volume 2 of *Montroll Memorial Lecture Series in Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[OM80] Susumu Okubo and Hyo Chul Myung. Some new classes of division algebras. *J. Algebra*, **67** (1980), no. 2, 479–490.

[OO81] Susumu Okubo and J. Marshall Osborn. Algebras with nondegenerate associative symmetric bilinear forms permitting composition. I, *Comm. Algebra*, **9** (1981), no. 12, 1233–1261. II, **9** (1981), no. 20, 2015–2073.

[Pet69] Holger P. Petersson. Eine Identität fünften Grades, der gewisse Isotope von Kompositions-Algebren genügen. *Math. Z.*, **109** (1969), 217–238.

[Ros56] Boris A. Rosenfeld. Geometrical interpretation of the compact simple Lie groups of the class $E$ (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **106** (1956), 600–603.

[Sel67] George B. Seligman. *Modular Lie algebras*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 40. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[She97] Ivan P. Shestakov. Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic. *Algebra i Logika*, **36** (1997), no. 6, 675–716.

[Str04] Helmut Strade. *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I*, volume 38 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004.

[Tit66] Jacques Tits. Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I. Construction. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* ***69*** *= Indag. Math.*, **28** (1966), 223–237.

[Vin05] Ernest B. Vinberg. Construction of the exceptional simple Lie algebras. In *Lie groups and invariant theory*, volume 213 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 241–242. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. Translated from Trudy Sem. Vekt. Tenz. Anal. **13** (1966), 7–9.

[Zel79] Efim I. Zel′manov. Primary Jordan algebras. *Algebra i Logika*, **18** (1979), no. 2, 162–175.