

ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO – QUIMICAS Y
NATURALES DE ZARAGOZA

CALCULO DE ORBITAS DE
ESTRELLAS DOBLES VISUALES

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. RAFAEL CID PALACIOS

*EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 1 DE JUNIO DE 1979*

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Excmo. Sr. D. JUSTINIANO CASAS PELAEZ

PRESIDENTE DE LA ACADEMIA



ZARAGOZA

1979

CALCULO DE ORBITAS DE ESTRELLAS DOBLES VISUALES

Por el

ILMO. SR. D. RAFAEL CID PALACIOS

*Excelentísimo Sr. Presidente,
Excelentísimos e Ilustrísimos señores Académicos,
Señoras y señores:*

De la misma forma que ningún mérito personal puede justificar mi intervención en este acto, estoy seguro de que ninguna frase feliz, que soy incapaz de encontrar, puede expresar mis sentimientos. Y es que nunca, como ahora, he sentido el enorme peso de la gratitud que debo a tantas personas. A mis padres por su sacrificio, a mi esposa por su paciencia y a un gran número de profesores o compañeros, por sus ideas, sus desvelos, su amistad.

Entre estos quiero dedicar un cariñoso recuerdo al Dr. D. Ramón M. Aller Ulloa, que me inició en la ciencia astronómica y al ilustre Académico D. José María Iñiguez Almech, del que he sido alumno y después compañero y colaborador.

Tanta deuda viene aumentada en este instante por el innmercido honor que me hace esta Corporación, a la que yo solamente puedo manifestar mi profundo agradecimiento, como a todos los presentes, unido a un ferviente deseo de ser útil, para poder corresponder algún día a su benevolencia con mi modesto trabajo.

El tema que he elegido para ser desarrollado en esta sesión lleva por título *Problemas de cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales* y recuerda de algún modo mis primeros pasos en el campo de la investigación astronómica, allá por el año de 1945. Mi iniciación en este campo se la debo al Dr. Aller, ya mencionado, que fue Catedrático Extraordinario en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela y cuyos esfuerzos en pro de la Astronomía siempre me han causado admiración.

No se me oculta que la especialización del tema escogido puede parecer inadecuado en esta ocasión. Por si así fuese, pido perdón por anticipado a mis oyentes.

1.- INTRODUCCION.

Entrando ya en el tema que nos ocupa, definiremos un *sistema binario* como un par de estrellas que describen órbitas alrededor de su centro de gravedad, bajo la influencia de su mutua atracción.

De estos pares, muchos pueden ser identificados por el telescopio como compuestos por estrellas distintas y reciben el nombre de *estrellas dobles visuales* y también *pares o binarias visuales*, constituyendo lo que se denomina un par físico. Frecuentemente, sin embargo, son observadas estrellas muy próximas, para las que no existe relación apreciable de mutua atracción y tenemos lo que se llama un par óptico.

En otros casos, aunque el telescopio no es capaz de resolver el par en estrellas distintas, se descubre su carácter binario por observaciones espectroscópicas, gracias a las variaciones de velocidades radiales medidas por efecto Doppler. Entonces decimos que se trata de un *par o binaria espectroscópica*.

Finalmente, en algunos pares de inclinaciones próximas a 90° no resolubles con el telescopio, se observan variaciones periódicas de luz, debidas a la producción de eclipses. Tal circunstancia puede indicar la existencia de un *par o binaria eclipsante*, también llamada *fotométrica*.

Es indudable que, en ocasiones, puede presentarse una concurrencia de estos fenómenos, lo que permite en general deducir un mayor número de consecuencias. Por ejemplo, ϵ Aurigae y VV Cephei pueden ser observadas en las tres modalidades.

Historicamente, la primera estrella doble descubierta fue ζ Ursae Majoris (Mizar) y su descubrimiento se debe a J.B. Riccioli (1650). Mas tarde esta misma estrella fue la primera observada fotográficamente por G.P. Bond (1857) y la primera catalogada como binaria espectroscópica por E.C. Pickering (1889).

Por lo que respecta a las estrellas dobles eclipsantes, digamos que el carácter variable de la estrella Algol ya fue reconocido por Montanaria en 1670 y presentada como eclipsante por Goodericke en 1783, aunque su catalogación como binaria fotométrica no fue establecida hasta que Pickering (1880) y Vogel (1889) así lo señalaron.

Una minuciosa reseña histórica de las distintas etapas por las que ha pasado la observación de estrellas dobles figura en la conocida obra de R. G. Aitken (1935) y no parece oportuno reproducirla aquí. Sin embargo, en el campo de las binarias visuales, es obligado citar a F.W. Herschel (1738-1822), a quien puede señalarse como el verdadero fundador de las observaciones de estrellas dobles visuales y como autor del primer Catálogo, presentado en la Royal Society en 1782, que contiene 269 pares. Posteriormente (1821) fue completado con 145 nuevos pares.

Los trabajos de F.W. Herschel fueron seguidos por su hijo J. Herschel y J. South, quienes publicaron un nuevo catálogo de 380 pares en 1823; pero el verdadero continuador de Herschel es sin duda F.G.W. Struve (1793-1864), director de los observatorios rusos de Dorpat (1813) y Poulkowa (1839), que publicó su *Catalogus 795 stellarum duplicium* en 1822 y su monumental obra en tres grandes volúmenes: *Catalogus novus* (1827), *Mensurae Micrometricae* (1832)

con 10.448 medidas y *Positions Mediae* (1852). Puede asegurarse que Struve sienta las bases de la observación moderna y sus medidas son comparables a las actuales.

Entre otros continuadores como Dawes, Smythe, Dembowski, O. Struve, etc., es necesario citar de modo especial a S.W. Burnham, al que se deben numerosas observaciones y la publicación de un Catálogo General de estrellas dobles visuales (1906), que contiene 13.665 pares.

Finalmente, el trabajo de observación de Hussey y Aitken en el observatorio de Lick culmina con la publicación del *New Catalogue of Double Stars within 120° of the North Pole* (1932), que incluye 17.180 pares.

Estos trabajos han sido completados para el hemisferio Sur por varios autores, entre los que destacan J. Herschel, Russel, Hardgrave, Innes, van den Bos, Finsen, etc. Una relación de observadores mas modernos resultaría abrumadora y no es posible reproducirla aquí. Basta indicar que el número de observaciones de que se dispone supera el millón y que el número de pares catalogados se aproxima a los 100.000, en tanto que las órbitas calculadas con elementos bien definidos no sobrepasan las 400.

Por otra parte, como ya queda indicado, en 1889 el Prof. Pickering anuncia el caracter de binaria espectroscópica para la estrella ζ Ursae Majoris y Vogel para la estrella β Persei (Algol), cuya condición de binaria eclipsante ya había sido señalada por Goodericke.

Desde entonces el número de binarias espectroscópicas catalogadas crece, lentamente al principio y después con rapidez, gracias a la dedicación de los observatorios de Lick y Yerkes. En 1905 se publicó, por el Observatorio de Lick, el primer Catálogo de Campbell con 140 pares, al que siguen el segundo en 1910 con 306 y el tercero, recopilado por J.H. Moore en 1924 con 1054 pares. El quinto Catálogo (1949) contiene datos hasta 1948, con 480 sistemas de elementos orbitales bien establecidos y 44 de elementos dudosos. Dicho catálogo es completado hasta 1966 por nueve publicaciones de R. Bouigue y A. Pédoussaut en Anales del Observatorio de Toulouse, con un total de 577 nuevos sistemas.

Es de esperar, sin embargo, que el número de binarias espectroscópicas crezca rapidamente y se sospecha que solo el Catálogo de Henry Draper debe contener mas de 20.000 binarias espectroscópicas.

De modo parecido, la catalogación de binarias eclipsantes depende de la identificación y estudio previo de estrellas variables. Kukarkin y Parenago (1963), sobre un total de 15.507 estrellas variables, consideran 2.888 como binarias eclipsantes.

Esta breve reseña histórica nos hace ver el importante papel que juegan las estrellas dobles dentro de la población estelar y nos explica a la vez la paciente atención que han dedicado al tema numerosos autores.

No obstante, la real y efectiva importancia del estudio de estrellas dobles reside en sus múltiples aplicaciones.

Así, de las órbitas de estrellas dobles conocidas y mas concretamente de las visuales, se puede deducir que la ley de atracción de Newton se extiende a estos sistemas, como fue demostrado por varios autores y mas recientemente por Griffin (1909) y Belorizky (1948), lo que induce a creer que dicha ley

base de toda la Mecánica Celeste, es probablemente universal. Si unimos a este hecho el conocimiento de la paralaje del par, se puede obtener la masa total del sistema. Por ejemplo, tomando como unidad la masa del Sol se obtiene para Sirio una masa total de 3.23, para 70 Ophiuchi 1.62, para α Centauri 1.99, etc. Recíprocamente, suponiendo que la masa de un sistema es 2 (como promedio), los elementos orbitales semieje mayor y periodo permiten deducir su *paralaje dinámica*, que es un concepto de gran valor estadístico.

En ocasiones, la relación de masas entre ambas estrellas del par puede ser también determinada si se conoce el movimiento de uno o ambos componentes alrededor de su invisible centro de gravedad.

Resumiendo esta cuestión, señalemos que, del conocimiento de las órbitas de algunos cientos de pares visuales, con paralajes bien determinadas, se ha podido establecer la conocida relación masa-luminosidad, cuyo interés en Astrofísica es extraordinario.

La importancia cosmogónica del estudio de binarias y mas especialmente de las espectroscópicas, es señalada por todos los autores, de tal manera que no se concibe el establecimiento de ninguna teoría cosmogónica si antes no se han explicado intrincados fenómenos físicos y dinámicos de estos pares; dicha importancia viene incrementada por el hecho de que muchos pares están evolucionando actualmente ante nuestros ojos.

Sin duda la mayor cantidad de información sobre algunas características de las estrellas proviene de los pares eclipsantes, pues no solo se deducen resultados sobre sus masas, sino sobre la temperatura de su superficie, el tamaño de las estrellas, la forma mas o menos elipsoidal de éstas, la distribución de la densidad en su interior, la composición y extensión de su atmósfera, la existencia de procesos no estacionarios, tales como flujos de materia, etc.

Finalmente, hagamos notar el interés que tienen las clasificaciones estadísticas sobre periodos, inclinaciones de las órbitas, frecuencia de pares, según sus coordenadas celestes y tantas otras conclusiones que pueden deducirse del estudio de las estrellas dobles.

Pero recordemos que el objeto de nuestro trabajo es hablar sobre el cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales, por lo cual, después de este preambulo, que nos ha servido para situar el tema en su verdadera dimensión, circunscribiremos nuestra exposición a los límites que nos habíamos marcado.

2. EL PROBLEMA DE CALCULO DE ORBITAS DE ESTRELLAS DOBLES VISUALES.

El cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales puede resumirse o concretarse en los siguientes apartados:

- a) Obtención de datos de observación.
- b) Cálculo de elementos de la órbita.
- c) Corrección de órbitas.

La observación de estrellas dobles consiste en determinar, para distintas épocas, la posición relativa de ambas estrellas, tomando una de éstas como origen de coordenadas. De esta forma, para cada época, habrá que dar las coordenadas de la *estrella secundaria o satélite* con respecto a la *principal u origen*.

Suele tomarse como estrella principal la más brillante o la que haya ele-

gido el primer observador, cuando ambas estrellas son de la misma magnitud, lo que puede originar algunos problemas en el cálculo, aunque son fácilmente salvable.

Las posiciones de la estrella satélite se refieren a la principal por medio de dos coordenadas, ya sean cartesianas ortogonales (x,y) , o polares (ρ, θ) .

Lo mas frecuente es emplear coordenadas polares, tomando como eje polar el horario que pasa por la estrella principal, pues debido a las pequeñas dimensiones del campo del anteojo, no hay inconveniente en considerarlo como rectilíneo.

Las coordenadas que miden los observadores, son: La distancia angular ρ , expresada en segundos de arco, con décimas y centésimas, y el ángulo de posición θ , en grados y décimas de grado. Los ángulos de posición se cuentan desde 0° a 360° , a partir del horario en dirección Norte, en el sentido Norte-Este-Sur-Oeste-Norte.

Los métodos de observación pueden ser visuales o fotográficos y los instrumentos mas utilizados son los micrómetros e interferómetros.

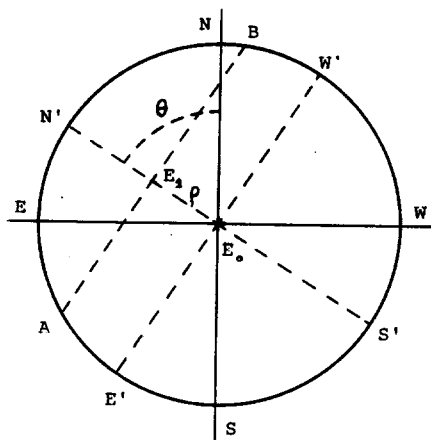


fig. 1

De esta forma, dado un par de estrellas E_0 , E_1 , se llevará la estrella principal E_0 al centro de la cruz de hilos NS-EW y se girará el bastidor hasta que dicha cruz ocupe las posiciones N'S'-E'W', de manera que E_0, E_1 estén alineadas sobre N'S'. Desplazando el hilo móvil AB hasta E_1 , tendremos la distancia ρ y el ángulo de posición θ , por medio del tornillo micrométrico que mueve este hilo y del círculo graduado unido al bastidor.

Ordinariamente, cada observación se deduce de cuatro medidas de distancia y dos de ángulo de posición, según que el bastidor se oriente en los ángulos θ y $\theta+180^\circ$; y que para cada una de estas orientaciones se coloquen las estrellas E_0 , E_1 , en el centro de la cruz, llevando el hilo móvil a coincidir con las estrellas E_1 o E_0 , respectivamente.

Sin entrar en mas detalles técnicos, que alargarían innecesariamente esta exposición, puede asegurarse que los errores de estas observaciones son mucho

No es mi propósito entrar en una minuciosa descripción de los distintos modelos empleados, que pueden consultarse en la bibliografía, baste decir que el micrómetro mas utilizado desde los tiempos de Struve, es el llamado *micrómetro de posición*. Consiste este instrumento, adaptable a un anteojo con montura ecuatorial, en un bastidor con una cruz de hilos fijos y otro móvil, que puede girar alrededor del eje óptico del anteojo (fig.1).

mas acusados en distancias que en ángulos de posición, lo que debe tenerse presente a la hora de calcular órbitas.

Señalemos, además, que todas las observaciones obtenidas para un mismo par en cada época t , deben ser corregidas por precesión y movimientos propios, reduciéndolas a una misma época t_0 .

Las fórmulas a emplear son las siguientes:

1. Correcciones para ángulos de posición.

$$\Delta\theta = -0''.00557(t-t_0)\sin\alpha\sec\delta$$

$$\Delta\theta = -0''.00417(t-t_0)\mu_\alpha\sec\delta$$

donde la diferencia $t-t_0$ es contada en años, (α, δ) son las coordenadas ecuatoriales de la estrella principal y μ_α el movimiento propio en ascensión recta.

2. Corrección para distancias.

$$\Delta\rho = +0''.00000102(t-t_0)V\pi\rho$$

donde π es la paralaje del sistema en segundos de arco y V su velocidad radial.

En resumen, el cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales está basado en un conjunto de observaciones (ρ_i, θ_i, t_i) , obtenido para cada par; conjunto que suele ir acompañado, en cada época t_i , del nombre del astrónomo que ha efectuado la observación.

3. ORBITAS APARENTE Y RELATIVA.

La órbita kepleriana descrita por la estrella satélite con respecto a la

principal, se denomina *órbita relativa* y su proyección sobre el plano tangente a la esfera celeste es la *órbita aparente*. Es decir que, si los datos de observación careciesen de errores, podríamos dibujar de modo inmediato la órbita aparente.

Considerando un sistema cartesiano ortogonal Oxyz, con origen en la estrella principal y el eje Oz coincidente con la dirección observador-estrella, el plano Oxy será el de la órbita aparente.

En estas condiciones el diedro que forma el

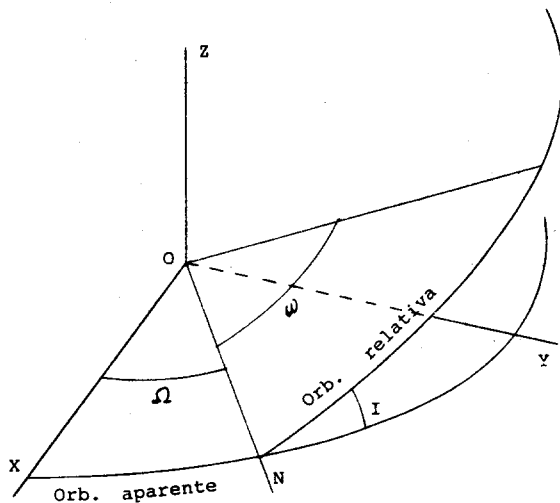


fig. 2

plano de la órbita relativa con el plano Oxy es la inclinación I de la órbita, que suele contarse de 0° a 90° en binarias con movimiento directo y de 0° a 180° en las de movimiento retrógrado.

La recta ON (fig. 2) de intersección entre ambos planos define el ángulo del nodo $\Omega = \text{XON}$, ascendente o descendente, tomado de 0° a 180° .

Por otra parte, si OA define la dirección del *semieje mayor* a , en el sentido del vértice mas próximo al foco o estrella principal, el ángulo $\omega = \text{NOA}$ se denomina *argumento del periastro* y se cuenta de 0° a 360° . Falta, pues, dar la *excentricidad* e , de la órbita relativa, para tener los cinco elementos orbitales estáticos.

A estos elementos han de añadirse el *periodo orbital* P , o el equivalente *movimiento medio* $n = 2\pi/P$, y la *época* T de paso de E_1 por el vértice o periaastro, para completar los siete elementos fundamentales que definen la órbita relativa.

Evidentemente, se cumple la ley de las áreas en la órbita relativa y en la aparente, existiendo entre las constantes C y C' , respectivamente, la relación $C' = C \cos I$. De modo semejante se comprueba que el centro de la órbita aparente es la proyección del centro de la órbita relativa, aunque en aquella la estrella principal no suele ocupar el foco de la cónica correspondiente.

En la práctica podemos, efectivamente, dibujar la cónica que *mejor pasa* por las observaciones, sin poder asegurar que sea la que *mejor cumple* la ley de las áreas. En todo caso, si suponemos dibujada la órbita aparente y tomamos la estrella principal como polo de un haz de rectas, la involución que subordina la cónica tiene como rayos rectangulares las direcciones del nodo y su perpendicular.

En lugar de dibujar la órbita aparente pueden situarse las observaciones en sendos sistemas cartesianos de ejes (t, ρ) y (t, θ) , lo que permite dibujar ambas curvas y comprobar las variaciones que sufre la constante de las áreas en todo su recorrido o elegir algunos puntos, llamados *lugares normales*, donde la densidad de observaciones parece asegurar una mayor precisión.

En este sentido tiene utilidad hacer uso de la ecuación de las áreas $\rho^2 d\theta/dt = C'$, para mejorar las distancias observadas, o emplear el orbígrafo ideado por A. Docobo (1946) y perfeccionado por E. Vidal (1957), con el cual se facilita la determinación de la constante C' .

4.- METODOS DE CALCULO DE ORBITAS.

El problema de calcular la órbita de una estrella doble a partir de las medidas micrométricas de ángulos de posición y distancias, fue resuelto en 1827 por Savary, quien publicó en 1830 un método de cálculo al que siguieron otros de Encke (1832) y J. Herschel (1833). Desde entonces se han dado a conocer otros muchos métodos con criterios muy dispares, lo que hace difícil su clasificación.

A nuestro entender dos cuestiones resultan fundamentales:

1. Determinar una órbita con el número necesario y suficiente de datos exactos o lugares normales.
2. Dar criterios que permitan corregir los elementos orbitales obtenidos

Refiriéndonos al primer problema, es indudable que los elementos estáticos o geométricos de la órbita se determinan conociendo cinco puntos de la cónica aparente, lo que equivale a dar diez coordenadas. Procediendo de este modo hacemos uso de un número superabundante de datos, puesto que los elementos orbitales a determinar son siete, como vimos anteriormente.

Dibujada la órbita aparente (fig. 3), que suponemos es una elipse de centro C, y siendo E la estrella principal, se obtiene la excentricidad e por el cociente $e = \overline{CE}/\overline{CA}$, puesto que $\overline{AB}$ es la proyección del eje mayor de la órbita relativa.

El semieje mayor de esta elipse auxiliar coincide con el de la relativa y nos indica la dirección del nodo, obteniéndose la inclinación y el argumento del periastro por las igualdades

$$\tan \alpha_w = \tan \alpha_w' / \cos I$$

El método de Kowalsky, esencialmente analítico, consiste en determinar los elementos orbitales a partir de la cónica aparente, escrita en la forma

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Gx + 2Fy + 1 = 0 \quad (3.1)$$

8

Anuario del Observatorio de Madrid para 1955, se parte en ella de la ecuación de la cónica relativa $b^2(x+e)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, referida al foco y se efectúa un primer giro de argumento $-\omega$, para hacer coincidir el eje x con la dirección del nodo, seguido de una proyección en la que las ordenadas son multiplicadas por $\cos I$. Finalmente, un nuevo giro de argumento $-\Omega$, nos lleva a la cónica aparente en su forma inicial (3.1).

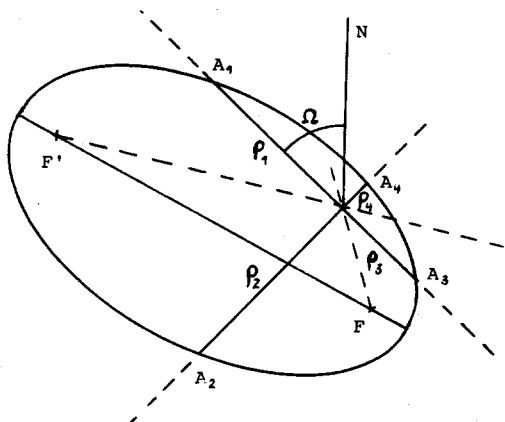


fig. 4

La identificación de coeficientes en ambas formas de expresar la órbita aparente, conduce a las fórmulas de Kowalsky, si bien algunos elementos son obtenidos por expresiones distintas y mas directas que las dadas por dicho autor.

En el método de E. Martin (fig. 4), se comienza determinando la línea de los nodos, y por tanto Ω , ya sea como uno de los rayos rectangulares del haz en involución que subordina la órbita aparente y tiene por polo la estrella principal E,

o bien como bisectriz de los ángulos suplementarios que forman las rectas trazadas desde E a los focos F, F', de la elipse aparente (Mlodzielovsky, 1890).

La línea de los nodos o cuerda $\overline{A_1A_3}$ y su perpendicular $\overline{A_2A_4}$, determinan cuatro segmentos $\overline{EA_1}$, $\overline{EA_2}$, $\overline{EA_3}$, $\overline{EA_4}$, tales que

$$\rho_1 = \overline{EA_1} = r_1 = p/(1 + e \cos \omega)$$

$$\rho_2 = \overline{EA_2} = r_2 \cos I = p \cos I / (1 + e \sin \omega)$$

$$\rho_3 = \overline{EA_3} = r_3 = p/(1 - e \cos \omega)$$

$$\rho_4 = \overline{EA_4} = r_4 \cos I = p \cos I / (1 - e \sin \omega)$$

de donde se deducen las igualdades

$$p = 2\rho_3\rho_1/(\rho_3 + \rho_1)$$

$$p \cos I = 2\rho_4\rho_2/(\rho_4 + \rho_2)$$

$$e \cos \omega = (\rho_3 - \rho_1)/(\rho_3 + \rho_1)$$

$$e \sin \omega = (\rho_4 - \rho_2)/(\rho_4 + \rho_2)$$

que determinan los elementos orbitales a , e , I , ω , sin dificultad.

Una vez determinados los elementos estáticos de la órbita, se puede proceder a calcular los elementos dinámicos P , T , por métodos mas o menos aproximados. Por ejemplo, si podemos precisar el intervalo de tiempo t_i invertido por la estrella satélite en barrer un cierto sector de área S_i en la órbita aparente, y es S el área total de ésta, tendremos $P = t_i S / S_i$. Las tablas construidas por E. Vidal (1953), para el cálculo de áreas de sectores circulares excéntricos, tienen utilidad en este sentido. Analogamente, si se conoce la época en que la estrella satélite pasa por alguna de las posiciones A ó B (periastro o apoastro), se determina T .

En general, el cálculo de estos elementos implica procesos de aproximaciones sucesivas o mínimos cuadrados, sobre los que insistiremos mas adelante al hablar de la corrección de órbitas.

Pasemos ahora a reseñar otros métodos de cálculo, con fundamento análogo al ideado por Laplace para cuerpos del sistema solar (planetas, satélites, cometas, etc.).

Es bien sabido que, en el llamado problema de dos cuerpos, de masas m_0 , m , se pueden calcular los elementos orbitales $(a, e, I, \Omega, \omega, T)$ cuando se dispone de las coordenadas (x, y, z) de un punto y las componentes $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ de la velocidad en dicho punto, para un cierto tiempo t .

En este caso, el periodo resulta como consecuencia de la tercera ley de Kepler $G(m_0+m) = 4\pi^2 a^3 / p^2$, lo que supone un conocimiento previo de la constante G de gravitación universal.

Basados en el esquema anterior, se han diseñado algunos métodos de cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales, que tienden a determinar las coordenadas y sus derivadas por medio de desarrollos en serie.

Citemos, por ejemplo, los de Villarceau (1852), Schwarzschild (1890), Fletcher (1931) y Silva (1936), que parten de desarrollos en serie algebraicos de las coordenadas cartesianas, como funciones del tiempo; el de Picart (1934) en el que se llega hasta la determinación de las derivadas de cuarto orden, el de Zagar (1938) que deduce la órbita aparente cuando son conocidos los valores de $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, en algunos puntos de la órbita, etc. Por lo regular, la mayoría de estos métodos implican una gran labor de cálculo, aparte de tener que introducir la constante de gravitación, cargada de inseguridad.

El método de Rabe (1938), modificado por dicho autor en 1939, tiene análogo fundamento al de los anteriores, si bien utiliza desarrollos en serie algebraicos de las coordenadas (ρ, θ) . Los cálculos en este método resultan muy penosos, aunque hayan sido facilitados por la construcción de tablas apropiadas.

El empleo de desarrollos en serie de Fourier, de los tipos

$$\rho^2 = a_0 + \sum a_{\mu} \cos \mu \theta + \sum b_{\mu} \sin \mu \theta$$

$$t = A_0 \theta + \sum (A_{\mu} / \mu) (1 - \cos \mu \theta) + \sum (B_{\mu} / \mu) \sin \mu \theta$$

donde $a_0 = 2A_0 C'$, $a_{\mu} = 2A_{\mu} C'$, $b_{\mu} = 2B_{\mu} C'$, es el fundamento del método empleado por R. Cid (1950) y perfeccionado por el mismo en 1952. No se trata en este caso de aplicar el método de Laplace, sino de determinar los coeficientes de los desarrollos anteriores, con ayuda de las observaciones disponibles, para poder calcular posteriormente los elementos orbitales. Las operaciones a realizar resultan también bastante laboriosas, pero presentan indudable ventaja en su corrección, puesto que una órbita previa facilita extraordinariamente el cálculo de coeficientes.

En cierto modo, los métodos que tratan de obtener la hodógrafa del movimiento, ya sea analítica o gráficamente, pueden ser incluidos entre los anteriores, toda vez que determinan la velocidad a lo largo de la trayectoria. Notemos, sin embargo, que aun cuando la hodógrafa de la órbita relativa es una circunferencia y la de la aparente una elipse, su trazado a partir de las obser-

vaciones no ofrece seguridad, por lo cual los métodos de E. de Caro (1937) y de E. Vidal (1947) tienen poca aplicación.

Para terminar este epígrafe hagamos referencia al método de Schaub (1942), que utiliza las ecuaciones del movimiento en la conocida forma

$$x = \rho \cos(\theta - \Omega) = r \cos(\omega + f)$$

$$y = \rho \sin(\theta - \Omega) = r \sin(\omega + f) \cos I$$

donde se comprueba que las coordenadas cartesianas verifican las propiedades de una oscilación pseudoarmónica.

Suponiendo, pues, representados los valores de x , y , en función del tiempo, la aplicación del método consiste en buscar dos curvas que tengan la forma anterior, que satisfagan la ley de las áreas $x\dot{y} - y\dot{x} = \text{cte}$, y que correspondan a las de una elipse. Del trazado de dichas curvas se deducen después los elementos de la órbita con relativa facilidad.

El método, aunque ciertamente original, carece a nuestro entender de utilidad práctica en el cálculo de órbitas.

5.- RESOLUCION DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL.

En todos los métodos que acabamos de reseñar y algunos otros que hemos omitido, se hace uso, en general, de todas las observaciones disponibles, ya sea para conseguir un trazado de la órbita aparente o para deducir coeficientes o condiciones que permitan calcular los elementos de la órbita. En esta forma de proceder se adivina que el calculador ha de hacer ajustes, aproximaciones o pruebas en sus cálculos, hasta llegar a una órbita que, en principio le satisfaga, aunque realmente sin atacar el problema fundamental.

Como ya indicaba E. Vidal (1953) en el Prólogo de su obra: *El problema matemático de determinar la órbita elíptica de una estrella doble a partir del número preciso de observaciones está sin resolver...*

Recordemos a este respecto que T.N. Thiele (1883) publicó un método en el que son calculados los elementos de la órbita a partir de tres posiciones observadas y de la constante de las áreas.

En rigor, el método de Thiele utiliza el número preciso de datos que se requieren para el cálculo, aunque éstos no sean todos observados, pues entre ellos se incluye la constante de las áreas, cuya determinación ha de hacerse con ayuda de todas las observaciones disponibles.

En dicho método, los elementos (a, I, Ω, ω) eran sustituidos por las coordenadas polares (m, μ) , (n, ν) de dos puntos M' , N' , referidos al centro de la órbita aparente y tales que los correspondientes M , N , en la órbita relativa tenían anomalías excéntricas de 0° y 90° , respectivamente.

R.T.A. Innes y W.H. van den Bos (1926) modificaron el método anterior, introduciendo cuatro constantes

$$A = a(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I)$$

$$B = a(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I)$$

$$F = a(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I)$$

$$G = a(-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{cos} u \operatorname{cos} \Omega \operatorname{cos} I)$$

relacionadas con las anteriores por las igualdades

$$A = m \operatorname{cos} u$$

$$B = n \operatorname{sen} u$$

$$F = n \operatorname{cos} v / \sqrt{1-e^2}$$

$$G = n \operatorname{sen} v / \sqrt{1-e^2}$$

El método, que recibe el nombre de Thiele-Innes, ha sido ampliamente difundido y utilizado, aunque como ya indica Aitken *las tres posiciones observadas deben ser, naturalmente, lugares normales cuidadosamente seleccionados... y el éxito de la computación depende de la habilidad con que es efectuada esta selección y de la seguridad con que la constante de las áreas es determinada.*

En el caso parabólico, donde la excentricidad es conocida, solamente serán necesarias tres posiciones observadas. Este caso ha sido resuelto por E. Vidal (1947), haciendo uso de consideraciones geométricas. En nuestro trabajo (R. Cid, 1956) es resuelto el mismo problema en forma analítica.

El problema elíptico, al que alude E. Vidal en el prólogo citado, fue resuelto por nosotros (R. Cid, 1958) en un trabajo publicado en The Astronomical Journal y posteriormente mejorado en otro artículo publicado en la Revista de esta Academia (R. Cid, 1962). Allí puede verse que, de forma exclusivamente analítica, es posible calcular la órbita de una estrella doble con tres observaciones completas del tipo (ρ, θ, t) y una incompleta del tipo (θ, t) , es decir con cuatro ángulos de posición y tres distancias.

M. Liso (1961), en su tesis leída en 1962, resuelve el mismo problema elíptico con ayuda de seis ángulos de posición y una distancia, o cinco ángulos de posición y dos distancias, completando así los casos en los que intervienen un mayor número de ángulos de posición.

La extensión al caso hiperbólico, único que quedaba sin resolver, fue efectuada en un trabajo presentado a la IV Reunión de Matemáticos Españoles, celebrada en Salamanca y publicado en la Revista de esta Academia (R. Cid, 1963). En dicho artículo se determina una órbita hiperbólica con ayuda de cuatro ángulos de posición y tres distancias, al igual que en el caso elíptico.

La revisión de métodos de cálculo de órbitas de binarias visuales, que acabamos de exponer, pudiera hacernos creer que se trata de un problema agotado. Sin embargo, esto no es así, pues existe aun un importante problema abierto a la investigación que se refiere al estudio de singularidades y al número de soluciones que pueden presentarse en la determinación de órbitas por la elección de lugares normales. Por ejemplo, en el método de Thiele-Innes, que parecía completamente establecido, S. Arend y R.R. de Freitas (1967) han revelado aspectos nuevos en cuanto a las condiciones de existencia para una solución. Análogamente, R. Cid (1962) obtiene dos órbitas igualmente posibles para la estrella ADS 13169, con excentricidades muy distintas, en tanto que S. Arend (1966), J. Docobo, F. Petriz y C. Budría han estudiado casos singulares (circular, rectilíneo, etc.) de determinación de órbitas.

Digamos finalmente que, si la diferencia entre los ángulos de posición de la última y la primera observación es superior a 180° , es posible aplicar

un método abreviado (R. Cid, 1968), que denominamos *de puntos opuestos*, con ayuda del cual se determinan los elementos orbitales a partir de cuatro ángulos de posición $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, tales que $|\theta_3 - \theta_1| = |\theta_4 - \theta_2| = 180^\circ$, y tres distancias (ρ_2, ρ_3, ρ_4) . En estas condiciones el método de cálculo anteriormente citado se simplifica notablemente.

Existe también un método, debida a A. Danjon (1938) que recibe el mismo nombre, aunque no tiene ninguna semejanza con el anterior, pues está basado en el trazado de la curva $\theta = \theta(t)$ y unas curvas llamadas *características*, así como en la necesidad de que la estrella satélite haya efectuado una revolución completa para poder determinar previamente el periodo.

6.- CORRECCION DE ORBITAS.

Cualquiera que sea el método empleado en el cálculo de los elementos orbitales de la órbita de una estrella doble, no puede olvidarse que, en general, se dispone de un cierto número de observaciones y éstas deben resultar coherentes con los elementos orbitales adoptados como mas probables. Por esta razón se suelen corregir aquellos elementos hasta conseguir que las diferencias entre los datos observados y los datos obtenidos como consecuencia de un cálculo de efemérides, sean minimizadas.

En consecuencia, es muy frecuente utilizar el método de mínimos cuadrados con objeto de conseguir que la suma de los cuadrados de las diferencias observación-cálculo sea un mínimo. Notemos, sin embargo, que debe tenerse precaución con el uso de esta condición, pues en ocasiones es poco representativa. En rigor, no solo ha de minimizarse la suma de cuadrados de las diferencias observación-cálculo, sino que estas diferencias han de estar bien distribuidas, combinándose alternativamente los signos positivos y negativos.

La aplicación de este método de corrección diferencial de órbitas puede resumirse así:

Designemos por q_v ($v = 1, 2, \dots, 7$) un conjunto de elementos orbitales independientes y representemos por a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) los n datos de observación que poseemos para el cálculo de una órbita (por ejemplo, n distancias, n ángulos de posición, etc.). Entonces se tendrán n relaciones conocidas $a_k = f(q_v, t_k)$ de manera que si damos unos valores previos o aproximados q_v^0 a los elementos orbitales y efectuamos con éstos los correspondientes cálculos de efemérides, se obtendrán unos valores *calculados*: $a_k^0 = f(q_v^0, t_k)$.

Por desarrollo en serie de Taylor de la función $f(q_v, t)$ en el entorno de un punto (q_v^0, t_k) , después de despreciar términos de segundo orden, resulta

$$\sum_v (\partial f / \partial q_v) \Delta q_v = f(q_v, t_k) - f(q_v^0, t_k) = a_k - a_k^0$$

donde las derivadas parciales $(\partial f / \partial q_v)$ han de ser calculadas para $t = t_k$ y $q_v = q_v^0$.

El primer miembro de esta ecuación es una función lineal de los incrementos Δq_v , en tanto que los segundos miembros representan las diferencias observación-cálculo. El sistema de n ecuaciones lineales con siete incógnitas, deberá ser tratado por mínimos cuadrados para obtener los incrementos, con lo

cual los elementos orbitales son corregidos por las expresiones $q_v = q_v^0 + \Delta q_v$.

Los elementos así obtenidos se pueden utilizar como datos iniciales para una nueva corrección, continuando este proceso de forma iterativa hasta conseguir que los incrementos sean inferiores a una cantidad suficientemente pequeña dada a priori. Estos métodos están especialmente adaptados para el cálculo con ordenadores, y en la programación que nosotros hemos efectuado, calculando la órbita previa por medio de cuatro ángulos de posición y tres distancias, el cálculo de una órbita y su corrección invierte aproximadamente 10 minutos de máquina en un ordenador IBM 1620.

Concretamente, en la corrección de órbitas, las ecuaciones de condición para ángulos de posición y distancias adoptan la forma

$$A\Delta\Omega + B\Delta\omega + C\Delta I + D\Delta\phi + F\Delta M + G\Delta n = \Delta\theta$$

$$h\Delta a + b\Delta\omega + c\Delta I + d\Delta\phi + f\Delta M + g\Delta n = \Delta\rho$$

donde $M = n(t-T)$ es la anomalía media y $e = \sin\phi$

Las expresiones de los coeficientes $A, B, C, D, F, G, h, b, c, d, f, g$, han sido dadas por Comstock y figuran en la obra de Aitken.

Existe una variante de este formulario, obtenida por W.P. Hirst (1944), para ángulos de posición solamente, que simplifica algo los cálculos.

De modo semejante puede hacerse la corrección en coordenadas cartesianas, en cuyo caso es preferible utilizar, en lugar de los elementos a, Ω, ω, I , las constantes de Innes. Las correspondientes ecuaciones son del tipo

$$X\Delta A + Y\Delta F + P_x\Delta e + Q_x n\Delta T + R_x\Delta n = \Delta x$$

$$X\Delta B + Y\Delta G + P_y\Delta e + Q_y n\Delta T + R_y\Delta n = \Delta y$$

y las expresiones de los coeficientes $X, Y, P_x, P_y, Q_x, Q_y, R_x, R_y$, que también son incluidos en la obra de Aitken, fueron calculados por W.H. van den Bos (1933 y 1937).

Aparte nuestro método de corrección (R. Cid, 1952), que utiliza desarrollos en serie de Fourier y ya fue citado anteriormente, existen otros como el de Klinkerfues (1855, 1858, 1912) que consiste en comparar las tres razones dobles independientes α, β, γ , de seis ángulos de posición observados, con otras tres $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, obtenidas por cálculo para sus correspondientes anomalías, cuando se han tomado tres elementos orbitales provisionales P_0, M_0, e_0 . Dando entonces por separado pequeñas variaciones $\Delta P_0, \Delta M_0, \Delta e_0$, a dichos elementos, se calculan las nuevas razones dobles α', β', γ' , y se supone que en el entorno de P_0, M_0, e_0 , se tiene

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial P_0} = \frac{\alpha' - \alpha_0}{\Delta P_0} \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial M_0} = \frac{\alpha' - \alpha_0}{\Delta M_0} \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial e_0} = \frac{\alpha' - \alpha_0}{\Delta e_0}$$

con fórmulas análogas para β y γ .

Finalmente, se obtienen los incrementos del periodo, de la anomalía media y de la excentricidad por medio del siguiente sistema de ecuaciones lineales en las razones dobles mencionadas

$$\alpha = \alpha_0 + (\partial\alpha_0/\partial P_0)\Delta P_0 + (\partial\alpha_0/\partial M_0)\Delta M_0 + (\partial\alpha_0/\partial e_0)\Delta e_0.$$

$$\beta = \beta_0 + (\partial\beta_0/\partial P_0)\Delta P_0 + (\partial\beta_0/\partial M_0)\Delta M_0 + (\partial\beta_0/\partial e_0)\Delta e_0.$$

$$\gamma = \gamma_0 + (\partial\gamma_0/\partial P_0)\Delta P_0 + (\partial\gamma_0/\partial M_0)\Delta M_0 + (\partial\gamma_0/\partial e_0)\Delta e_0.$$

y se corrigen los elementos provisionales por las igualdades $P = P_0 + \Delta P_0$, $M = M_0 + \Delta M_0$, $e = e_0 + \Delta e_0$.

Una variante para simplificar el cálculo de las razones dobles por paso a un círculo afin fue desarrollada por E. Vidal (1951) y otra para el caso parabólico por R. Cid (1960).

7.- SISTEMAS ESTELARES MÚLTIPLES.

El estudio de sistemas estelares múltiples, esto es de sistemas compuestos por tres, cuatro o mas estrellas, no ha sido hasta ahora desarrollado con la misma intensidad que el problema de las binarias.

Las razones son bien claras. De una parte, todos sabemos que el llamado problema de n cuerpos no ha sido resuelto totalmente para $n > 2$, aun cuando se conozcan con suficiente precisión los movimientos de los planetas, satélites y cometas del sistema solar, gracias al desarrollo de elaboradas teorías de la Mecánica Celeste (Teoría Lunar, Problema restringido de tres cuerpos, et.)

Por otra parte, dichas teorías no son en general aplicables a sistemas estelares por tratarse, en este caso, de cuerpos de masas comparables, en desacuerdo con lo que ocurre en el sistema solar, donde la masa del Sol es al menos 1.000 veces superior a la del mayor planeta.

Esto explica que la bibliografía dedicada al tema sea escasa y que el primer trabajo de P. Slavenas sobre el problema estelar de tres cuerpos, date de 1927.

E.W. Brown (1936-37) estudia el movimiento del sistema compuesto por dos estrellas próximas y otra lejana, calculando en la órbita interior las perturbaciones causadas por la estrella lejana. Su método es análogo al empleado en la Teoría de la Luna, como también ocurre en los trabajos de Z. Kopal (1959, 1967).

R.S. Harrington (1967) es el primer autor que trata el problema en forma hamiltoniana, utilizando desarrollos en serie de un pequeño parámetro, igual al cociente de los semiejes de las órbitas interior y exterior, y aplicando el conocido método de H. von Zeipel.

Aparte los trabajos de Gorso-Ishida (1949) y de S. Soderhjelm, debemos señalar la tesis presentada por J. Docobo (1977) en nuestra Facultad de Ciencias, donde integra el problema en forma hamiltoniana, similar a la de Harrington, si bien el método utilizado es el de A. Deprit. Su estudio, muy completo, es aplicado al sistema ADS 1631.

Es de esperar que estos estudios, y otros que les sigan, profundicen mas en el cálculo de órbitas de sistemas múltiples, puesto que según las estimaciones de diversos autores (R.M. Petrie y A.H. Batton, 1965; A.H. Batton, 1967; C.E. Worley, 1967; W.D. Heintz, 1969, y otros) se puede sospechar la existencia de un 25 a 30% de sistemas múltiples entre las binarias catalogadas.

8.- BIBLIOGRAFIA.

1. AITKEN R.G. (1932): New General Catalogue of Double Stars within 120° of the North Pole. Carnegie Inst. Washington.
2. AITKEN R.G. (1935): The Binary Stars. McGraw-Hill Book Comp. New York.
3. AREND S. (1966): Com. Obs. R. Belgique n°6.
4. AREND S. y DE FREITAS R.R. (1968): Com. Obs. R. Belgique, ser A, n°5.
5. BATTEN A.H. (1967): A. Rev. Astr. Astroph., 5, 25.
6. BROWN E.W. (1936-37): M. N. of R.A.S., 97, 56, 116, 388.
7. BURNHAM S.V. (1906): A General Catalogue of Double Stars within 121° of the North Pole. Carnegie Inst. Washington.
8. CARO E. DE (1937): Mem. SAI t. (NS), 10, 369.
9. CID R. (1950): Contribución al estudio de estrellas dobles visuales (tesis). Rev. Geofísica n°35, 262 y n°36, 350.
10. CID R. (1952): Urania n° 232, 201.
11. CID R. (1958): Ast. Journal, 63, 395.
12. CID R. (1960): Urania n°252, 129.
13. CID R. (1962): Rev. Acad. Cien. Zaragoza, s. 2, XV, 37.
14. CID R. (1963): Rev. Acad. Cien. Zaragoza, s, 2, XVIII, 5.
15. CID R. (1968): Urania n° 267-8, 31.
16. COMSTOCK G.C. (1918): Ast. Journal, 31, 33.
17. DANJON A. (1938): BA Mem. et Var. 11, 1, 191 y C.R. 206, 222.
18. DOCOBO A. (1946): Rev. Geofísica, n°19, 339.
19. DOCOBO J. (1977): Aplicación de la teoría de perturbaciones al estudio de sistemas estelares triples (tesis). Fac. Cien. Zaragoza.
20. ENCKE J.F. (1832): Berlin Jahrbuch.
21. FLECTCHER A. (1931): M. N. of R.A.S., 92, 121.
22. GOODRICKE J. (1785): Phil. Trans. R. Soc. London.
23. GÖRÖS-ISHIDA (1949): Japonnesse J. of Astr., v I, n°1, Tokio.
24. HARRINGTON R.S. (1969): Celst. Mech. 2, 200.
25. HEINTZ W.D. (1969): J. R. astr. Soc. Can., 63, 225 y Observatory 89, 117.
26. HERSCHEL J. (1833): Mem. of the R.A.S., 5, 171.
27. HIRST W.P. (1944): M. N. of R.A.S., 103, 337.
28. INNES R.T.A. y VAN DEN BOS W.H. (1926): Union Obs. Cir. 68, 354 y Union Obs. Cir. 86, 261 (1932).
29. JEFFERS H.M., VAN DEN BOS W.H. y GREEBY F.M. (1963): Index Catalogue of Visual Double Stars. Pub. Lick Obs. 21.
30. KLINKERFUES (1855): A. N. 42, 81 y A. N. 47, 353.
31. KOWALSKY M (1873): Proc. of the Kasan Imp. Univ.
32. KOPAL Z. (1959): Close Binary Systems. Chapman and Hall. London.
33. KOPAL Z. (1967): Icarus 6, 298.
34. LISO M. (1961): Método de cálculo y mejora de órbitas de binarias visuales. Rev. Acad. Cien. Zaragoza, s. 2, XVI, 57.
35. MARTIN E. (1932): Rend. Lincei, 6, 15, 955.
36. PETRIE R.M. y BATTEN A.H. (1965): Trans. Int. Ast. Union XII B, 476.
37. PICART L. (1934): C. R. 198, 867.
38. RABE W. (1938): A. N. 265, 177 y A. N. 268, 6409 (1939)

39. SAVARY F. (1830): *Connaissance des Temps*.
40. SCHAUB W. (1942): A. N. 272, 4.
41. SCHWARZSCHILD K. (1890): A. N. 124, 215.
42. SILVA G. (1936): *Atti Inst. Veneto* 95, 2, 551. Pub. Padova 48.
43. SLAVENAS P. (1927): *Trans. ast. Obs. Yale Univ.* 6, 35.
44. SMART W.M. (1930): M. N. of R.A.S., 90, 534.
45. SODERJELM S. (1975): *Astron. and Astroph.* 42, 229.
46. THIELE T.N. (1883): A. N. 245 y A. N. 52, 39 (1860).
47. VIDAL E. (1947): *Rev. Geofisica* n°22, 258 y *Ast. Journal* 54, 77 (1948).
48. VIDAL E. (1951): *Urania* n° 227.
49. VIDAL E. (1953): *Cálculo de Órbitas de estrellas dobles visuales*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
50. VIDAL E. (1957): *Urania* n° 245.
51. VILLARCEAU (1852): *Connaissance des Temps* (Add).
52. WORLEY C.E. (1967): *Com. Obs. R. Belgique*, ser B, n° 17, 221.
53. ZAGAR F. (1938): *Atti R. Acad. Palermo* 1. Pub. Obs. Ast. Palermo, 8, 6.
54. ZWIERS H.J. (1896): A. N. 139, 369.