

**ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA**

SIMETRÍA EN CIENCIA: PRINCIPIO Y MÉTODO

DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JOSÉ F. CARIÑENA MARZO

*EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN SOLEMNE
CELEBRADO EL DÍA 6 DE NOVIEMBRE DEL AÑO 2.001*

Y

DISCURSO DE CONTESTACIÓN POR EL

Ilmo. Sr. D. LUIS J. BOYA BALET

ACADÉMICO NUMERARIO



ZARAGOZA

2.001

SIMETRÍA EN CIENCIA: PRINCIPIO Y MÉTODO

POR EL

Ilmo. Sr. D. José F. Cariñena Marzo

Excmo. Señor Presidente,
Excmo e Ilmos Señoras y Señores Académicos,
Señoras y Señores

Como respuesta a la invitación a formar parte de la Academia de Ciencias de Zaragoza, es de justicia empezar mi intervención agradeciendo a todos los miembros de la Academia, y más en particular a quienes promovieron mi elección, la mencionada invitación.

Es para mí, nacido, criado y formado, tanto personal como científicamente, en Zaragoza, aunque con una muy grata estancia intermedia en la Universidad de Valladolid, donde me doctoré, una gran satisfacción haber recibido esta invitación, a la que espero poder corresponder de forma responsable. Quiero también expresar aquí mi sentimiento por la ausencia del Profesor Savirón, recientemente fallecido, responsable de la sección de Físicas en el momento de mi propuesta.

Muchas personas me han ayudado en esta travesía. A todos los que de una u otra forma han contribuido en mi formación académica, mis profesores, tanto de la Licenciatura de Físicas como de la de Matemáticas, y también mis alumnos que tanto me estimularon, y a quienes contribuyeron en el desarrollo de mi vida científica y académica, mi sincero agradecimiento. Hago extensivo éste a todos mis compañeros, y singularmente entre ellos a todos mis doctorandos de quienes tanto he aprendido, y con quienes la colaboración y trabajo constante ha sido tan gratificante como estimulante.

Debo, en particular, mencionar explícitamente al Académico Profesor L.J. Boya, quien me proporcionó en su momento la oportunidad de realizar, bajo su experta dirección, mi tesis doctoral, y posteriormente escuchándome en el momento que lo he necesitado, animándome a continuar esta senda y contribuyendo con sus sugerencias y su ejemplo en mi labor investigadora y finalmente, ahora, apadrinándome en la entrada en la Academia. También debo agradecer al Profesor H. Marco, no sólo sus enseñanzas en el comienzo de mis estudios en el curso de 19662-63, sino también su más reciente paciencia, recordándome tantas veces como ha sido menester mi compromiso de presentar esta

memoria de ingreso.

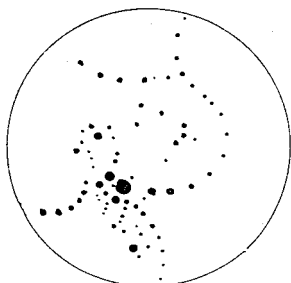
Fuera del ámbito académico, mi total agradecimiento también a mi familia, por su paciencia, apoyo y comprensión.

Procedo a continuación a dar paso a la materia objeto de mi discurso de ingreso. La elección del tema ha sido para mí tarea sencilla. Como quiera que la simetría ha estado constantemente, como motivación y como objetivo, presente en mis investigaciones, y es realmente no sólo un principio lógico y filosófico, sino que ha cautivado durante muchos años a filósofos, pintores y poetas, es mi intención hacer una reflexión aquí sobre su significado, para hacer ver cómo es posible utilizar estos principios de simetría para comprender mejor múltiples teorías científicas y obtener de forma sencilla resultados concretos mediante el empleo de estos principios básicos.

1. Introducción

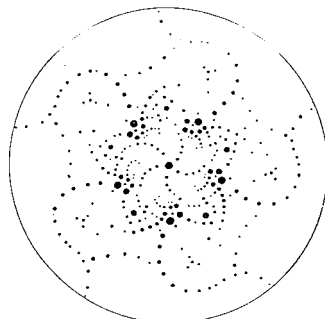
Como bien indica H. Weyl al comienzo de la primera de una serie de conferencias sobre la simetría [We52], impartidas en vísperas de su retirada, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, la palabra simetría se suele utilizar en dos sentidos algo diferentes: para designar algo bien proporcionado y armónico, o en un sentido más técnico, que precisaremos posteriormente, para indicar que un objeto presenta ciertas regularidades geométricas, o para llamar la atención sobre un cierto proceso de repetición. También es indudable que esta misma repetición conlleva un importante factor estético, por lo que esta relación directa entre simetría y belleza ha sido un importante principio estético tanto en decoración como en arquitectura [Ja18].

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una distribución aleatoria de puntos de diversos tamaños que no es de esperar que provoque ninguna impresión especial en el observador.

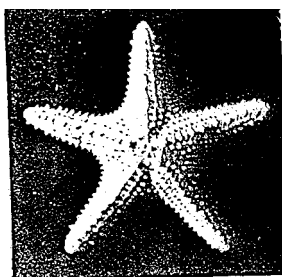
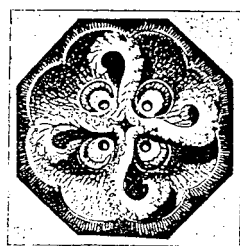
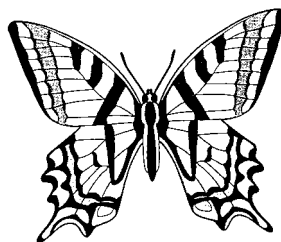
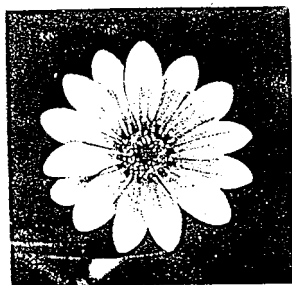


Sin embargo, si esta figura se repite un número de veces arbitrario mediante un giro alrededor de un eje perpendicular al plano del dibujo, por ejemplo un ángulo de $\frac{2\pi}{5}$, se

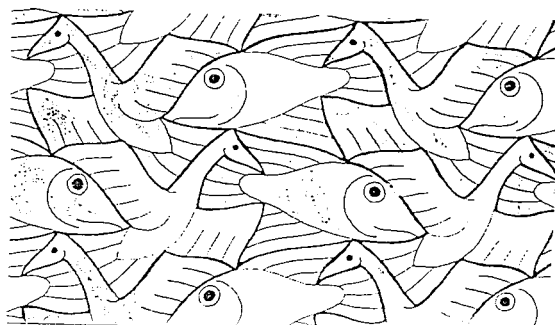
obtiene la siguiente figura que produce una innegable impresión estética. Este hecho es precisamente el que es aprovechado para la construcción de caleidoscopios: un conjunto de cristales de colores, pequeños, pueden combinarse mediante una adecuada repetición para producir una agradable sensación estética.



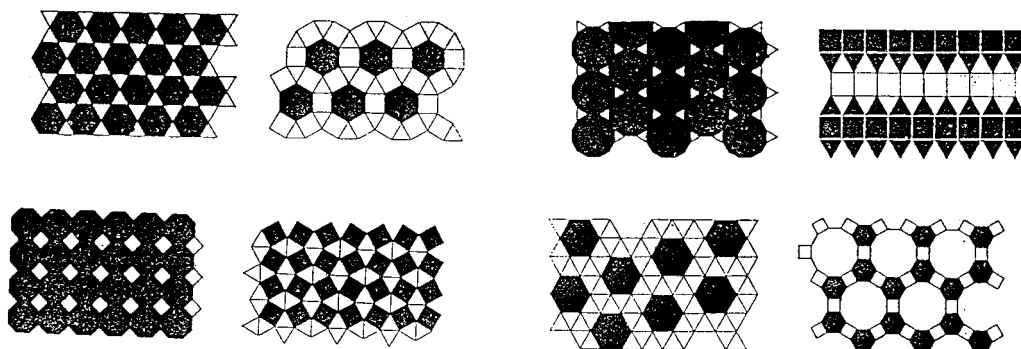
Otros ejemplos de esa misma impresión por repetición regular nos los suministra la propia Naturaleza a través de todo el esplendor y belleza de multitud de seres vivos como corales, medusas, flores, etc, de los que se presentan ejemplos en las siguientes figuras [Ja18][We52]:



No debemos olvidar tampoco la maravillosa contribución del genial artista/matemático holandés M.C. Escher (1898–1972), algunos de cuyos dibujos son mostrados a continuación:



Más información al respecto puede encontrarse en el libro *Carnaval Matemático* [Ga81] de M. Gardner, en el de Coxeter [Co61] “Introducción a la Geometría” o en el editado por Mac Donald and Jane’s titulado “The graphic work of M.C.Escher” [Es78]. El libro de Coxeter comenta también profusamente el papel de la simetría en el diseño de motivos decorativos para baldosas, tapices, etc. Así, un mosaico formado por yuxtaposición de un mismo polígono regular sin solapamientos y cubriendo toda la región del plano considerada, llamado mosaico regular, debe tener necesariamente como ingrediente fundamental un triángulo equilátero, un cuadrado o un hexágono. Por el contrario, existen 8 mosaicos semirregulares, que utilizan dos o más polígonos regulares de forma que en cada nudo haya siempre los mismos polígonos y en el mismo orden cíclico, y que se muestran en la siguiente figura. Recuérdese que este arte de llenar un plano por repetición de un mismo motivo había sido ya utilizado por los árabes durante el siglo XIII en la decoración de la Alhambra.



Igualmente hay numerosísimos ejemplos de simetría tanto en pintura como en escultura o arquitectura, de los que se puede encontrar información detallada en el ya mencionado libro de H. Weyl, o incluso música (algunas composiciones de Federico Chopin son analizadas por D.R. Hofstadter [Ho82] en el número de Junio de 1982 de la revista *Investigación y Ciencia*).

Aunque aún no hemos definido de forma precisa qué es lo que entendemos por simetría y nos hemos contentado con dar un concepto vago, pero general, sí que podemos al menos preguntarnos sobre la naturaleza de este concepto e intentar responder a la pregunta ¿Qué es la simetría? ¿Es una propiedad, o bien es un principio?. Y en este último caso, ¿es una ley experimental, un postulado, una regla de inducción, un imperativo estético, o alguna otra cosa?. Por el contrario, creemos que puede ser cada una de estas cosas, dependiendo de las circunstancias, y es a esta cuestión a la que dedicaremos nuestra atención. No obstante señalaremos dos respuestas a esta cuestión que son muy significativas: J. Rosen, comienza el Prefacio de su libro “Symmetry discovered” [Ro75] con las siguientes palabras:

“Symmetry is like a disease. Or, perhaps more accurately, it is a disease. At least in my case; I seem to have a bad case of it”... “I have become an avid symmetry fan, addicted beyond cure. And now, ... the disease has reached its contagious stage” (J. Rosen).

Por su parte H. Weyl con sus serenas palabras de despedida nos condensa sus impresiones con estas palabras.

“Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty and perfection”.

A menudo he encontrado estas palabras en libros dedicados al estudio de la simetría en física y parecen “razón suficiente” para que revisemos breve y rápidamente las diferentes aplicaciones que ha tenido este “principio” de simetría a lo largo de la historia.

2. Breve reseña histórica

Los primeros objetos que fueron sometidos a estudio fueron los astros. Anaximandro (611–545 a.C.), discípulo y amigo de Tales de Mileto (625–548 a.C) sostenía que la Tierra tenía la forma de un disco y según Aristóteles, mantenía que la Tierra permanece en su lugar a causa de su “indiferencia”: movimientos en todas sus direcciones eran igualmente inapropiados para algo que está en el centro y no tiene preferencia por ninguno de los extremos. Ésta es, quizás, la primera manifestación de cómo un principio de simetría, aquí llamado indiferencia, puede servir para conformar un modelo de la Naturaleza. La escuela pitagórica impuso pronto sus preceptos, entre los que ya destacaba la simetría o armonía como método de alcanzar la belleza: ¿Qué es lo más sabio?. El número. ¿Qué es lo más bello?. La armonía. Así comenzará el estudio de las simetrías y armonías, tanto en Matemáticas como en los instrumentos musicales, y estas mismas armonías las atribuyeron a la distribución de planetas. Por su parte, la escuela eleática, representada por Jenófanes y Parménides, defendía que “Dios es perfecto, como una esfera, equidistante

del centro desde cada punto, continuo y homogéneo”. También Parménides atribuye ya esta forma esférica a la Tierra y puede considerarse este hecho como un primer éxito del principio de simetría en Física.

Platón, que vivió en Atenas desde el año 427 hasta el 347 a.C. y que fue fuertemente influenciado por Parménides y Pitágoras, defendió y popularizó un modelo geocéntrico del Cosmos con una simetría esférica: los planetas y estrellas se movían describiendo círculos concéntricos, modelo éste que fue perfeccionado por Aristóteles (384–321), quien proponía un Cosmos con una estructura radial casi perfecta, siendo la única asimetría la distinción entre el mundo sublunar y supralunar, terminando bruscamente este Cosmos en la esfera de las estrellas fijas. Los cuerpos pesados eran esferas de forma perfecta, y se movían en círculos por lo que no afectaban a la situación de la esfera.

En el haber de Platón se encuentra el hecho de que fue el primero en afirmar que la simetría que se aprecia en la Naturaleza no es casual sino que es consecuencia de las simetrías de las leyes físicas [We52]. También es digno de mención que Aristarco, contemporáneo y amigo de Aristóteles, fuera capaz de proponer, por supuesto sin éxito, que fuera la Tierra quien giraba alrededor del Sol, lo que en aquellos momentos pudo ser más que ultrarevolucionario y su propuesta tuvo que esperar aparcada hasta Copérnico.

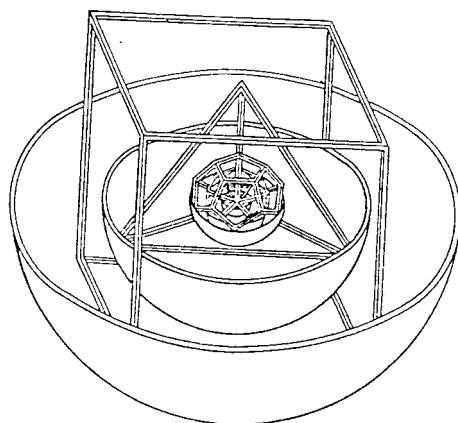
En cuanto a la ciencia que podríamos calificar de “terrestre” por oposición a “celeste”, quizás la primera manifestación del uso de simetría debemos encontrarlo en Arquímedes de Siracusa (287–212 a.C.) en su teoría de la balanza [Ro83]. Su primer postulado es: Iguales pesos a iguales distancias se mantienen en equilibrio. Arquímedes puede ser considerado como “padre” de la Física Matemática como defensor y exponente de las llamadas “matemáticas no puras”, sino “aplicadas” a la naturaleza u otros artefactos. Es casi seguro que debió enunciar su postulado basado en razones de simetría o indiferencia. Recuérdese la preferencia que la tradición arquimediana ha concedido a los argumentos teóricos frente a la justificación experimental, cuando eso sea posible. Esta preferencia, que aún se mantiene entre los físicos matemáticos, es parcialmente debida a que uno puede imaginar situaciones idealizadas que no pueden realizarse experimentalmente, pero que han sido una ayuda valiosísima en la construcción de las teorías físicas modernas, aún cuando también se debe a que un puro principio abstracto es muy útil para realizar un razonamiento matemático.

Volviendo otra vez al estudio de los astros, cuando Hiparco y otros astrónomos constataron la imposibilidad de describir los movimientos de los planetas como trayectorias circulares recorridas con velocidad constante, era tal su admiración por la simetría y perfección de la estructura circular, que no pensaron en otras curvas “parecidas”, como óvalos o elipses, sino que introdujeron una superposición de movimientos circulares (epi-

ciclos) para dar cuenta con una aproximación excelente del movimiento de los planetas (Tolomeo 100–168 d.C.), dando, sin percatarse de ello, los primeros pasos en lo que se conoce actualmente como Análisis de Fourier. No obstante, y como es de esperar visto con la óptica actual, la sistematización de los epiciclos que tan buenos resultados daba para describir la trayectoria, era incapaz de dar una descripción aceptable de las velocidades de los planetas y eso llevó a la introducción de un punto excéntrico en torno al cual se movían con velocidad angular constante.

N. Copérnico (1473–1543) puso al Sol como centro del Universo y desarrolló el modelo que con pequeñas variaciones se fue imponiendo poco a poco. Los planetas entonces conocidos, Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno se movían en órbitas circulares en torno al Sol y envolviendo a todos ellos, una esfera de estrellas fijas. El hecho de que sólo fueran 6 los planetas conocidos, inducía a buscar alguna explicación numérica como la que corresponde a las descomposiciones $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$. Por otra parte, había una ley empírica que expresaba con notable precisión las distancias de los diversos planetas, conocida con el nombre de Ley de Bode, que no resistiría al descubrimiento de los nuevos planetas Neptuno, Urano y Plutón.

J. Kepler (1571–1630) realizó un primer intento de explicar la distribución propuesta por Copérnico para los planetas, mediante los llamados sólidos platónicos, los 5 poliedros regulares: dodecaedro, tetraedro, cubo, icosaedro y octaedro. Así, empezando con una esfera para la Tierra, inscribió en ella un icosaedro y en él una esfera que hizo corresponder a Venus; en esta esfera inscribía un octaedro y en éste la esfera correspondiente a Mercurio. Para describir los planetas más alejados que la Tierra seguía el proceso opuesto de circunscribir sucesivamente un dodecaedro, la esfera de Marte, un tetraedro, la esfera de Jupiter y finalmente un cubo y la esfera de Saturno.

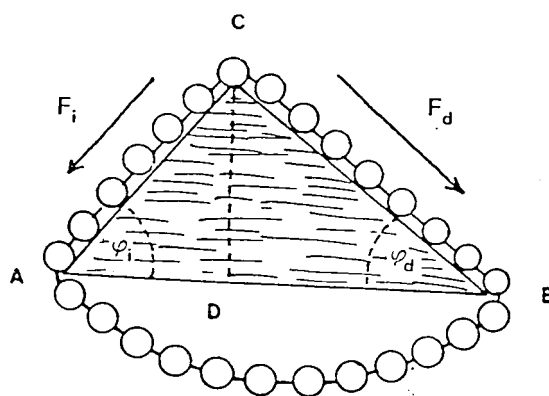


Esta curiosa manera de razonar en la búsqueda de una explicación para la existencia

de los seis planetas entonces conocidos, no debe causar extrañeza en los físicos teóricos actuales que están habituados a clasificar partículas elementales de acuerdo con las representaciones lineales irreducibles unitarias de algunos grupos de Lie.

Particularmente provechosa para Kepler fue su relación con el astrónomo danés Tycho Brahe, quien poseía una ingente cantidad de datos minuciosos sobre el movimiento de los planetas. Al comparar estos datos con el modelo astronómico circular, encontró Kepler grandes discrepancias y observó que los datos se adaptaban mejor si se suponía “que todos los planetas realizan órbitas elípticas teniendo al Sol situado en uno de sus focos”. Al observar las velocidades con que recorren estas órbitas, pudo constatar que la línea imaginaria que une el Sol y el planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales. Finalmente, en 1618 enunció también la que hoy se conoce como tercera ley de Kepler, según la cual los cuadrados de los períodos de revolución de los diferentes planetas en torno al Sol están en la misma razón que los cubos de sus distancias medias. Más información sobre la vida y contribuciones Kepler puede por ejemplo, encontrarse en [Lo83].

No debemos olvidar al ingeniero holandés S. Stevinus, que fue quien primero hizo uso de forma explícita del principio de simetría en mecánica [Ro83]. Su objetivo era deducir la ley de la componente del peso a lo largo de un plano inclinado para lo cual pensó en el siguiente experimento ideal de la “cadena sin fin” que aparece en su libro sobre Estática. Una cadena formada por un cierto número de pequeñas esferas metálicas, se coloca en un soporte como el indicado en la figura.



Stevinus afirmó que el sistema permanece en equilibrio como consecuencia de la simetría de la parte colgante de la cadena, por lo que los pesos a lo largo de cada uno de los planos indicados deben ser los mismos, de donde Stevinus concluyó la hoy bien conocida ley de senos.

Contemporáneo de Kepler fue Galilei (1564–1642), a quién además de sus grandes descubrimientos en Astronomía (montañas en la Luna, manchas del Sol, Lunas de Júpiter, etc...), obtenidos merced a un modesto telescopio que él mismo se construyó, debemos el establecimiento de una gran cantidad de leyes de simetría entre las que citaremos como más conocidas el “principio de inercia circular”, “todos los cuerpos caen con la misma velocidad en el vacío” (siempre se dice que realizó el experimento desde la famosa torre inclinada de su ciudad natal Pisa), “el isocronismo del péndulo” (con el pulsómetro como contribución a la ciencia médica) [GG80] y sobre todo el “principio de relatividad Galileana” según el cual, “las leyes mecánicas establecidas por dos observadores que se desplazan con una velocidad relativa constante son las mismas”.

A partir de ese momento, los principios de simetría son utilizados mucho más frecuentemente [Ro83]. P. Gassendi (1592–1655), por ejemplo, establece el “principio de inercia lineal”, según el cual un cuerpo dotado de una velocidad se mueve siguiendo una trayectoria recta, en ausencia de fuerzas. Este principio sólo pudo ser establecido cuando se aceptó la naturaleza ilimitada del espacio, así como su homogeneidad e isotropía. R. Descartes (1596–1650) generalizó el principio de Galilei, proclamando absoluta simetría entre reposo y movimiento, así como usó explícitamente argumentos de simetría en la derivación de las leyes del choque elástico. D. Huygens (1629–1695) extendió el uso del concepto de simetría como método de descubrir y probar, estudiando además el choque elástico en el sistema centro de masas. Finalmente, y ya a punto de que surgiese la elaboración matemática de la teoría de grupos, lenguaje que se ha mostrado especialmente adecuado en el estudio del concepto de simetría, Newton (1642–1727), nacido el mismo año en que fallece Galilei, establece el principio de acción y reacción así como el principio de uniformidad de la Naturaleza como regla de inducción. La teoría de grupos de simetría marcaba a continuación el comienzo de una nueva época.

3. El Lenguaje de la Simetría: La teoría de grupos

La estructura algebraica básica en el estudio de las simetrías es la de grupo. El origen del concepto de grupo en Matemáticas fue el problema de la resolución de ecuaciones algebraicas $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. La introducción de los números complejos durante el Renacimiento italiano permitió obtener la solución general de la ecuación de segundo grado, así como la de tercer grado (por Scipio del Ferro, en el siglo XVI) y poco después la de cuarto grado (por Ferrari (1522-1565)). Lo que nos interesa destacar ahora es que ya en el año 1771, Lagrange desarrolló un método sistemático para encontrar la solución de las ecuaciones de grado n mayor o igual que 4, basado en el estudio de las permutaciones de las raíces y manifestó ya su opinión de que en la teoría de permutaciones “está la

verdadera filosofía de la cuestión”. Sin entrar a detallar otras contribuciones posteriores de Abel y Gauss, entre otros, debemos decir que el punto final al problema fué puesto por Galois (1832) en una carta de despedida a su amigo Auguste Chevallier, escrita la noche que precedió a su muerte en un insensato duelo. Sus ideas, incomprendidas y olvidadas, fueron recogidas posteriormente en una publicación de Liouville (1846) y han tenido una gran influencia hasta nuestros días, debido a su profundidad y novedad, pudiendo ser consideradas como el origen de la teoría de grupos. Esencialmente, la idea de Galois consiste en asociar con cada ecuación algebraica el conjunto de todas las permutaciones de sus raíces, al que el propio Galois llamó grupo (hoy se conoce como grupo de Galois de la ecuación), y relacionar las propiedades de la ecuación (resolubilidad por radicales, u otras) con las del grupo asociado. Así, la imposibilidad de la solución de la ecuación general de grado $n > 4$ mediante radicales, es debido a que el grupo de permutaciones S_n no es resoluble cuando $n > 4$.

Así pues, el concepto de grupo aparece por vez primera en el caso particular de grupo de permutaciones de las raíces de una ecuación algebraica. Posteriormente, Jordan (1870) desarrolló las ideas y métodos sugeridos por Galois, mientras que Kronecker formulaba los postulados de la estructura de grupo de forma abstracta, prescindiendo de su origen concreto como grupo de permutaciones de raíces.

El punto importante a destacar es que en la propia génesis del concepto de grupo, éste aparece como un conjunto de transformaciones que dejan algo invariante. Más explícitamente, si S es un conjunto arbitrario, llamaremos transformación de S a una biyección de S en sí mismo, de forma que cada punto tiene una imagen y es a su vez imagen de un solo punto. Si T es un subconjunto de S , una transformación Φ de S que deja invariante T se dirá que es una transformación de simetría de T .

Uno puede pensar rápidamente en ejemplos y ver cómo esta definición generaliza la idea que tenemos de simetría. Por ejemplo, S puede ser el plano y T el conjunto de puntos de una figura en ese plano. La transformación Φ puede ser, por ejemplo, una rotación en el plano y en ese caso sería una transformación de simetría cuando se considera como T una cualquiera de toda una familia de circunferencias concéntricas, pero no lo sería si T es una recta del plano. Una traslación en el plano sería una simetría para cada una de las rectas que tienen la dirección del vector de traslación, pero no para otras rectas, cuyas imágenes serían rectas paralelas pero no coincidentes con ella. Cuando la transformación considerada es una reflexión en una recta vertical las figuras simétricas, en el sentido que acabamos de decir, son precisamente las que “tienen simetría bilateral” en el lenguaje más coloquial.

Lo importante es que este concepto admite una generalización inmediata. Así, si en S

no tenemos un subconjunto T privilegiado, sino que S está dotado de alguna estructura o propiedad, podemos decir que una transformación Φ de S es una simetría de la estructura, o incluso simetría de S , cuando en éste se supone implícitamente su estructura, si Φ preserva dicha estructura. Por ejemplo, si en S hay definida una estructura de espacio métrico, es decir, una función “distancia entre dos puntos”, d , entonces Φ será una simetría cuando $d(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y)$, con $x, y \in S$. Este es el caso de giros y traslaciones en el plano, pero no el de homotecias, para las que $d(\Phi_\lambda(x), \Phi_\lambda(y)) = |\lambda|^2 d(x, y)$ cuando $\Phi_\lambda(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otro ejemplo sería que S estuviese dotado de una estructura de espacio vectorial, en cuyo caso las simetrías de S serían los isomorfismos del espacio vectorial S , para los que se preserva la estructura lineal, $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$, $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$. De hecho, una transformación Φ de S induce una simetría del espacio vectorial de las funciones reales definidas en S mediante $(UF)(x) = F(\Phi^{-1}(x))$. Si S está dotado de una estructura topológica las simetrías de S serán precisamente los “homeomorfismos”, transformaciones continuas invertibles cuya inversa también es continua. Si S es un espacio vectorial real dotado de una estructura de producto interno, las simetrías de S serán las transformaciones ortogonales, y así sucesivamente.

No debemos olvidar que puede existir más de una simetría para una figura o estructura definidas en S y que el hecho de que estas transformaciones dejen igual o “equivalente” dicha estructura se refleja en que el conjunto de estas simetrías puede ser dotado de una estructura que llamamos “de grupo”, que refleja las propiedades características de las equivalencias: así, la propiedad reflexiva de las relaciones de equivalencia se traduce en que la identidad es una transformación de simetría, es decir, existe un elemento neutro en el grupo; la propiedad de simetría en las equivalencias indica que con cada transformación de simetría, su inversa también es de simetría, es decir, para cada elemento del grupo existe un elemento inverso, y, finalmente, la propiedad transitiva de las equivalencias señala que la composición de dos simetrías es una nueva simetría, es decir, la ley de composición es interna. Todas estas propiedades, más la propiedad asociativa heredada en nuestro caso del hecho de ser una composición de aplicaciones, son las características de una estructura de grupo, es decir:

Definición $(G, *)$ es un grupo si

- i) $*$: $G \times G \rightarrow G$ es una ley de composición interna asociativa.
- ii) Existe un elemento $e \in G$, llamado elemento neutro, tal que $e * g = g * e = g$, $\forall g \in G$.
- iii) Para cada $g \in G$, existe $g' \in G$, llamado elemento inverso de g , tal que $g' * g = g * g' = e$. Se suele designar por g^{-1} .

Obsérvese que estas propiedades son también satisfechas por el conjunto de todas las transformaciones de S , sin exigir que se conserve ningún subconjunto o propiedad. Cuando S es un subconjunto finito de n elementos, esta estructura de grupo es la que se conoce como grupo simétrico de orden n , que está formado precisamente por $n!$ elementos. Este grupo aparece como uno de los primeros ejemplos y se encuentra ya presente en la génesis de la teoría de grupos, que puede considerarse, como ya indicamos anteriormente, en las memorias que en la madrugada del 30 de Mayo de 1832, E. Galois envía a su amigo A. Chevalier, sólo unas horas antes de enfrentarse en un duelo de honor frente a un activista político llamado Pescheux d’Herbinville y a consecuencia del cual, como ya indicamos anteriormente, perdió su vida [Ro82]. Estas memorias fueron publicadas catorce años después por J. Liouville y representan prácticamente el nacimiento de la teoría de grupos. Recordemos un breve párrafo de la carta de despedida [Gu00]: *Si bien todo lo que he descrito aquí está así desde hace un año en mi mente, me interesa no equivocarme para que no sospechen que he enunciado teoremas cuya demostración no tengo completa.*

Indiquemos también que un grupo abstracto puede realizarse como grupo de transformaciones de espacios M . Por eso entendemos que haya una correspondencia que asocie con cada elemento $g \in G$ una transformación Φ_g de M de forma que al elemento neutro e le corresponda la identidad en M , $\Phi_e = \text{id}_M$, y para cada par de elementos de G , $\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}$. Esta acción de G en M permite introducir una relación de equivalencia en M . En el caso en que M esté dotado de alguna estructura, las realizaciones interesantes de G serán aquellas en que Φ_g es una simetría, para cada $g \in G$.

4. El uso de la simetría en Matemáticas

La importancia del uso del concepto de simetría en Matemáticas ha ido en sentido creciente, fundamentalmente desde el último cuarto de siglo XIX en que se relacionó el concepto mismo de Geometría con el estudio de invariantes bajo grupos y con la gran utilidad manifestada por los grupos de Lie de simetrías de ecuaciones diferenciales en la resolución de éstas.

Sin embargo el éxito “definitivo” de la teoría de grupos en Matemáticas fue obtenido en los alrededores de 1875 al conseguirse gracias a los trabajos de F. Klein y S. Lie la “unificación de las geometrías” estableciendo “el grupo de transformaciones como principio director de cualquier tipo de geometría”. Así, fue Felix Klein (1849-1925) quien propuso en el año 1872 su ahora famoso “Erlangen Program” al percatarse de que es posible establecer un principio de orden en geometría mediante la caracterización grupo-teórica de las geometrías en términos de los grupos de transformaciones y sus correspondientes invariantes.

Explicamos brevemente las ideas de F. Klein sobre el objetivo de la Geometría: éste no es sino investigar las propiedades geoméricamente relevantes. Pero, ¿qué entendemos por relevantes?. Nos fijaremos en la geometría Euclídea. En este caso hay un concepto de congruencia de figuras que se puede precisar diciendo que “dos figuras F y F' son congruentes si existe una transformación Φ que conserva la distancia Euclídea y tal que $\Phi(F) = F'$ ”. En otras palabras, “si existe una simetría que lleva la figura F a coincidir con F' ”. Pues bien, por propiedad geométrica relevante, entendemos una propiedad que es compartida por todas las figuras “congruentes”. Así, es una propiedad relevante el ángulo entre dos rectas, pero no el punto de intersección de ambas, aunque sí lo es el hecho de que las dos rectas se corten en un punto.

La generalización a una geometría arbitraria es inmediata. Se selecciona un grupo de transformaciones “de simetría” que permite definir la “congruencia entre figuras”: la geometría correspondiente es, como anteriormente, la que estudia las propiedades compartidas por figuras “congruentes”.

En términos de coordenadas, las coordenadas de un punto y las de su imagen bajo una transformación están relacionadas por una expresión $x' = \Phi(x)$. Pero junto a esta interpretación (“alibi”) podemos considerar la expresión anterior como la que relaciona las coordenadas de un mismo punto en dos sistemas coordenados diferentes, relacionados por la transformación inversa de la Φ , lo que se conoce como interpretación “alias”. En este sentido las propiedades relevantes serán las que no dependen de las coordenadas elegidas para describirlas. Los grupos aparecen ahora como la caracterización de los cambios de coordenadas que se consideran admisibles.

Así, la geometría afín estudia las propiedades que son invariantes bajo el grupo de transformaciones de \mathbb{R}^n de la forma

$$y^i = \sum_{j=1}^n a^i_j x^j + b^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

con $\det a^i_j \neq 0$. La geometría afín puede ser considerada como la teoría de los invariantes de dicho grupo. Por su parte el subgrupo $O_n(\mathbb{R})$ deja invariante la distancia Euclídea, y la geometría Euclídea será el estudio de las propiedades invariantes bajo dicho subgrupo del grupo afín.

La situación es análoga en Física cuando se acepta un “Principio de Relatividad”, en donde los sistemas inerciales vienen a jugar el papel de de los sistemas de coordenadas rectangulares de la geometría Euclídea. Así, si nos fijamos en la “Teoría de Relatividad Galileana”, el principio de Newton, según el cual “ningún experimento mecánico realizado en un sistema físico permite detectar que éste se encuentra realizando un movimiento uniforme”, podemos interpretarlo considerando como “propiedades mecánicas” aquellas

que no cambian bajo una transformación Galileana. Ni las trayectorias, ni las velocidades absolutas, son propiedades “mecánicas”, pero sí lo son las velocidades relativas, y por tanto las aceleraciones. Podemos así construir toda una “Geometría Galileana” a partir del Grupo de Galilei como grupo de simetría de la Geometría. El libro de Yaglom “A simple non-Euclidean Geometry...” [Ya79] es altamente recomendable para el lector interesado en este tema. Pero esta realización del Principio de Relatividad no es la única posibilidad. Existen otras realizaciones, una de ellas la que habitualmente se conoce con el nombre de Relatividad Especial, en la que los observadores inerciales específicos de la teoría están caracterizados por la existencia de una velocidad límite de propagación, que casualmente coincide con la de la luz. Otras realizaciones son igualmente posibles y el lector interesado podrá encontrar una información adicional en el artículo de Bacry y Lévy-Leblond [BL68].

S. Lie (1842-99) fue precisamente quien dedicó su atención al estudio de los grupos de transformaciones que dependen de varios parámetros en forma continua, que aparecieron históricamente en el estudio de simetrías de sistemas de ecuaciones diferenciales y que dieron lugar a toda la teoría de los que hoy se conocen con el nombre de grupos de Lie, de tanto interés en todos los campos de la Ciencia actual.

El objetivo era estudiar en qué casos las ecuaciones diferenciales pueden resolverse mediante cuadraturas. Los importantes resultados en Álgebra de principios del siglo XX desviaron la atención del objetivo inicial de Lie y sólo en los últimos años se ha renovado el interés en los aspectos concernientes a su objetivo inicial, y ello debido, sin duda, al menos en gran parte, al desarrollo de la computación algebraica.

Estos grupos, o al menos su componente conexa, pueden estudiarse a través del álgebra de Lie asociada. A reseñar que esta terminología de grupos y álgebras de Lie fué propuesta en 1935 por Jacobson, frente a la más usual hasta entonces de “grupos infinitesimales”.

Las simetrías de una ecuación diferencial serán transformaciones que preservan el espacio de soluciones de ésta, transformando unas soluciones en otras con condiciones iniciales diferentes. Las ecuaciones diferenciales son descritas en la aproximación geométrica por campos vectoriales, siendo sus simetrías precisamente las del campo vectorial correspondiente. El estudio de las simetrías de ecuaciones diferenciales está recibiendo un notable impulso en los últimos años. Citaremos como referencia básica moderna el libro de Olver [Ol89].

No debemos tampoco olvidar las magistrales contribuciones de Killing y Schur al uso y desarrollo de la simetría, por sus aportaciones a la Geometría Riemanniana y en Teoría de Representaciones de grupos, respectivamente, sin desdeñar el trabajo de E. Cartan y H. Weyl, quienes nos revelaron la profundidad y belleza de las ideas de sus precursores sobre los “grupos continuos” y sus representaciones. Fue precisamente Cartan quien aplicó el

método de Lie al estudio de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y clasificó las álgebras de Lie reales simples.

5. El uso de la simetría en Física

Las ideas de simetría y los principios de invariancia han desempeñado un papel importante desde los tiempos de Galilei y Newton, aún cuando no fuera totalmente apreciado hasta los acontecimientos que llevaron a la formulación de las teorías relativistas de Einstein. No obstante, es evidente que la importancia de la noción de simetría ha ido aumentando progresivamente, quizás debido a la sencillez con que se encontraban resultados concretos mediante la aplicación de simples principios de simetría e invariancia.

Por otra parte, la mayor relevancia del concepto de simetría en la física contemporánea es también debida a que en el pasado la mayor parte de los esfuerzos de los físicos se concentraban en la resolución de problemas concretos, mientras que en la actualidad se intenta establecer teorías muy generales y se estudian cuestiones estructurales de dichas teorías, intentándose la obtención de resultados a partir de primeros principios.

Existen, además, situaciones en las que nuestro desconocimiento es tan grande que la única posibilidad de obtener alguna información consiste en deducir relaciones basadas en argumentos de simetría. En efecto, el uso de la simetría en Física está basado en el principio de simetría conocido como “principio de Curie”, según el cual la simetría del efecto no puede ser menor que la de la causa. Cuando se pretende explicar un fenómeno como producido por una causa o ley física, este principio de Curie puede dar pistas sobre la forma concreta de estas leyes, eliminando otras como imposibles, es decir, imponiendo restricciones sobre las posibles leyes.

Observamos que nuestro conocimiento del universo puede dividirse en dos categorías: condiciones iniciales y leyes de la naturaleza. Las condiciones iniciales determinan el estado del universo, y son muy complejas. Sin embargo, el físico, en el estudio del universo dedica su atención a estudiar las leyes que rigen el movimiento, y éstas son a las que se refieren los principios de invariancia bajo una transformación de simetría.

En las primeras etapas del conocimiento científico, se encontraron ciertas leyes y sólo después se observaron las propiedades de simetría e invariancia de éstas. Sin embargo, en el siglo actual, desde los éxitos del profundo análisis del espacio, tiempo y geometría realizado por Einstein, la tendencia ha cambiado, e incluso existe la creencia de que quizás, con el tiempo, podremos establecer los principios de la física mediante argumentos de simetrías y leyes de conservación, si bien esta creencia parece aún bastante optimista. Es

ésta precisamente la razón que ha motivado este proceso de geometrización de la física al que estamos asistiendo desde los primeros pasos dados por Einstein.

Especial mención merece el famoso artículo de Weyl [We56] sobre “gravitación y electromagnetismo” por su impacto posterior, que provocó el establecimiento del principio de simetría gauge, de grupo $U(1)$ en su caso, asociado a la conservación de la carga correspondiente, como mecanismo de introducción de las interacciones, y que ha desembocado en tiempos recientes en la Teoría Cuántica de los campos de Yang-Mills.

De cualquier forma, lo que es interesante resaltar es que la misma posibilidad de hacer ciencia está basada en un principio de simetría, ya que la posibilidad de establecer leyes dinámicas está relacionada con la irrelevancia del lugar donde se realice el experimento y del momento en que tenga lugar, es decir, admitimos implícitamente una simetría bajo traslaciones espacio-temporales, por lo que como E.P. Wigner [Wi49] señala, esta simetría debe considerarse como la primera ley de invariancia en física.

Es de destacar la diferencia de importancia del concepto de simetría en las físicas clásica y cuántica. En la primera no ha jugado ningún papel en el desarrollo histórico de la Mecánica Clásica, pero se ha puesto de manifiesto, en los últimos años, su importancia en el desarrollo conceptual de ella. Por el contrario, en la Mecánica Cuántica ha jugado un papel preponderante en su desarrollo. Ello es debido al diferente marco matemático de ambas teorías. Así, una vez aclarado el hecho de que los grupos de simetría de una teoría cuántica debían realizarse mediante representaciones (proyectivas semi-) unitarias se pudo hacer uso de toda la teoría matemática de representaciones que estaba ya, al menos parcialmente, desarrollada. Por el contrario, el marco matemático adecuado para la simetría en la descripción de los sistemas clásicos no sólo no se encontraba desarrollado suficientemente sino que ha sido elaborado, y lo está siendo todavía, durante los últimos años.

El concepto de simetría en Física es algo más complejo que en Matemáticas. La Física hace uso de modelos matemáticos mediante la selección de una serie de conceptos básicos a los que se les asocia elementos de un cierto espacio dotado de una estructura matemática, así como se establecen ciertas relaciones entre ellos. Deben considerarse además unas reglas de correspondencia que permitan establecer una relación entre los conceptos teóricos y el mundo experimental. El par modelo más reglas de correspondencia constituye lo que habitualmente entendemos como Teoría Física. Pues bien, una simetría en una teoría física es una transformación de simetría del modelo matemático con el que se describe la teoría que conserva la estructura física, es decir, que deja invariante la conexión con los conceptos experimentales, y por lo tanto, no modifica la teoría física, es decir, que respeta las reglas de correspondencia. Así, en la teoría cuántica, el modelo

matemático utilizado es el de un espacio proyectivo $\widehat{\mathcal{H}}$ asociado a un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sus elementos, rayos, describen estados puros, y los observables vienen descritos por operadores autoadjuntos en \mathcal{H} . Las reglas de correspondencia se centran en la definición de qué cantidades son observables y en los valores medios de éstos en un estado. Todo ello puede quedar expresado en términos de la amplitud de transición. Por consiguiente, las simetrías de la teoría cuántica corresponderán a las “colineaciones” que conservan la interferencia entre rayos, es decir, los elementos del grupo $PTU(\mathcal{H})$.

En toda teoría física debe figurar además una ley dinámica que al realizar una transformación de simetría de la teoría se transformará en una nueva ley de evolución. Las transformaciones de simetría que dejan invariantes las leyes dinámicas serán particularmente importantes, y con subgrupos uniparamétricos de ellas se pueden asociar constantes del movimiento que permiten simplificar la solución del problema dinámico en Mecánica Clásica, y en el mejor de los casos resolverlo completamente.

También en Mecánica Cuántica las simetrías de la teoría que son además simetrías de la ley dinámica, es decir, transforman entre sí soluciones de la ecuación de evolución, son importantes. Estas simetrías constituyen el grupo de simetría del Hamiltoniano H y su conocimiento es de gran ayuda en la determinación de los estados estacionarios del sistema. y nos permite clasificar estados y obtener sistemas completos de observables compatibles en Mecánica Cuántica. Es también bien sabido que a cada subgrupo uniparamétrico de transformaciones de simetría de H , corresponde una constante del movimiento, su generador infinitesimal.

No sólo las simetrías canónicas de sistemas Hamiltonianos son relevantes. Por el contrario, en Mecánica Clásica, cuando las ecuaciones a que da lugar la dinámica son difíciles de resolver, nos interesa buscar transformaciones canónicas, que conserven la estructura de las ecuaciones, pero que den lugar a ecuaciones de más fácil solución.

En la formulación geométrica del formalismo “Hamiltoniano” independiente del tiempo de la Mecánica Clásica el modelo matemático es una variedad simpléctica (M, ω) , donde M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y ω una 2-forma cerrada de rango máximo. Las simetrías del modelo matemático vienen dadas por simplectomorfismos, difeomorfismos Φ de M tales que $\Phi^*\omega = \omega$. La dinámica viene dada por un campo vectorial X , admisible para ω , $\mathcal{L}_X\omega = 0$ (i.e., localmente Hamiltoniano), y existirá localmente una función H tal que $\hat{\omega}(X) = i(X)\omega = dH$. Las simetrías de la dinámica serán aquellas para las que $\Phi_*(X) = X$. Análogamente a lo que sucede en Mecánica Cuántica, a cada subgrupo uniparamétrico de transformaciones canónicas de simetría de la dinámica le corresponderá una constante del movimiento, y el conocimiento de éstas permite simplificar las ecuaciones del movimiento. Más aún, la correspondencia es biunívoca.

Análogos resultados pueden encontrarse en la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica, como establece el teorema de Noether: Por cada subgrupo uniparamétrico de transformaciones puntuales de simetría del Lagrangiano (en un sentido generalizado) existe una constante del movimiento. No obstante, existen constantes del movimiento que no están asociadas con subgrupos uniparamétricos de transformaciones puntuales de simetría.

La importancia de estas leyes de conservación es bien conocida y no insistiremos en ello. Lo que nos interesa resaltar es que las leyes de conservación pueden explicarse como una consecuencia de la propia simetría de los sistemas físicos y las leyes que los rigen. Por consiguiente, los principios de simetría aparecen como bases fundamentales para la construcción lógica de la Física y juegan un papel fundamental en la etapa de remodelación de la Ciencia.

Las aplicaciones de los principios de simetría a problemas físicos y más particularmente a los problemas del micromundo, son diversos. Intentaremos dar una somera lista de las principales áreas donde la aplicación de tales principios se ha mostrado fructífera.

i) En primer lugar, podemos utilizar principios de simetría como un principio “a priori” en la búsqueda de leyes dinámicas. Así, por ejemplo, postulando la invariancia Poincaré (grupo de Lorentz inhomogéneo), podremos encontrar las ecuaciones relativistas que describen los sistemas cuánticos elementales. En general, como ya indicamos anteriormente, el conocimiento de una simetría para un proceso físico restringe el número de posibles leyes para describirlo y, en consecuencia, puede servirnos como guía para descubrir la ley que lo gobierna. Por eso, el descubrimiento de una simetría en un proceso es particularmente importante cuando no conocemos la ley que lo describe.

Un excelente, y en gran parte pionero, trabajo de Wigner, uno de los tres más citados en la literatura física, y que sin embargo había sido rechazado en la primera revista científica a la que fue enviado, fue esencial en la clasificación de los sistemas elementales de acuerdo con las representaciones proyectivas (semi-) unitarias del grupo de Poincaré. Las técnicas utilizadas por Wigner no fueron otras que las de las representaciones de un grupo inducidas por las de un subgrupo. Estas técnicas habían sido desarrolladas para grupos finitos por Schur y Frobenius, y fueron generalizadas con posterioridad al artículo de Wigner por Mackey para grupos localmente compactos.

Tampoco deben ser olvidados los trabajos de Gell-Mann y Neeman que condujeron a lo que se conoce como “óctuple vía” como mecanismo para clasificar los hadrones. Ocho de las partículas elementales más pesadas podían clasificarse mediante los pesos de representaciones de $SU(3)$. Aparecieron así los grupos de simetría internos, por contraposición a los ya bien conocidos grupos cinemáticos.

Otro ejemplo notorio de este tipo de uso es el del Análisis Dimensional: el hecho de que

las leyes de la Física deban expresarse en términos de magnitudes adimensionales, lo que se conoce como Teorema II, puede ser suficiente para establecer, con un poco de sentido común, las relaciones relevantes en una teoría. Por consiguiente, el Análisis Dimensional es bastante útil para físicos e ingenieros en la realización de esquemas preliminares a las teorías definitivas sobre cualquier problema físico [CS88].

ii) Puede utilizarse a veces como un principio de exploración o inducción, tal y como indicamos en el caso de la cadena de Stevinus.

iii) La simetría aparece también en física a nivel descriptivo, para indicar propiedades de objetos, leyes, procesos o estructuras, pudiéndose utilizar como principio de explicación, prueba y predicción. Un ejemplo de esta situación es el siguiente: Suponiendo que el Sol y un planeta poseen simetría esférica, puede demostrarse, sin ninguna suposición adicional sobre la naturaleza de la fuerza entre ambos, que el movimiento del planeta se realiza en un plano. Este ejemplo está sacado del libro de J. Rosen [Ro75]. En efecto, en un instante dado el planeta tiene una posición y una velocidad relativa respecto del Sol. Consideremos el plano π determinado por la línea que une el planeta con el Sol y la dirección del vector velocidad del planeta.

En este caso, “la causa” constituida por el Sol y el planeta con su velocidad posee simetría de reflexión respecto del plano π . De acuerdo con el principio de Curie ya mencionado, el efecto, la aceleración del planeta, debe también ser simétrico respecto del plano π y por tanto, como el movimiento es único y debe coincidir con su simétrico, podemos concluir que el movimiento se debe realizar en el plano de simetría π .

iv) En ocasiones, las propiedades de invariancia de las ecuaciones fundamentales proporcionan métodos potentes de resolver o simplificar dichas ecuaciones, así como de clasificar las soluciones.

Así, en Mecánica Clásica, los subgrupos uniparamétricos de transformaciones canónicas que sean simetrías del Hamiltoniano llevan a constantes del movimiento que permiten simplificar el problema, reduciendo el orden de dificultad.

En particular, podemos considerar el caso de subgrupos uniparamétricos de simetrías puntuales del Lagrangiano. Las restantes simetrías, llamadas a menudo simetrías ocultas o simetrías dinámicas, que no son puntuales, son difíciles de detectar, y en ese sentido son “inesperadas”. Aparecen en ocasiones degeneraciones accidentales, que indican que el grupo de simetría considerado no es sino un subgrupo del verdadero, que era desconocido.

También simetrías del campo dinámico que no sean transformaciones canónicas pueden ser útiles en la búsqueda de constantes del movimiento [CI83].

Otro ejemplo, y que ya mencionamos anteriormente, es que en Mecánica Cuántica podemos clasificar, de acuerdo con sus propiedades de simetría, los autoestados dege-

nerados de energía. Fue precisamente Von Neumann quien indicó a Wigner que *si el Hamiltoniano de un sistema cuántico es invariante bajo un grupo de simetría, entonces los autoestados de dicho sistema cuántico soportan una representación de dicho grupo de simetría*. Es, por tanto, a Von Neumann a quien debemos la introducción de las representaciones de grupos en Mecánica Cuántica. A esta incursión de los grupos también contribuyeron de manera notable Wigner y Weyl. La avalancha de publicaciones sobre temas relacionados desembocó en lo que durante un cierto tiempo llegó a conocerse como “la peste de los grupos”.

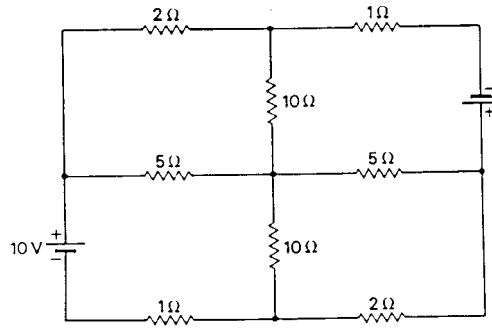
Alternativamente, el conocimiento del grupo de simetría del Hamiltoniano nos capacita para seleccionar un sistema completo de observables compatible adaptado a la simetría del sistema, lo que permite simplificar los cálculos notablemente. Un caso particularmente importante es el de las fuerzas centrales o potenciales invariantes bajo rotaciones.

También los químicos incorporaron pronto los conceptos de la Teoría de Grupos en la discusión de enlaces π y σ . Los grupos cristalográficos y de color son también de mucha utilidad en Física de la materia condensada para el estudio de la zona de Brillouin y el espectro de energía de los electrones de Bloch para desentrañar las propiedades de los sólidos.

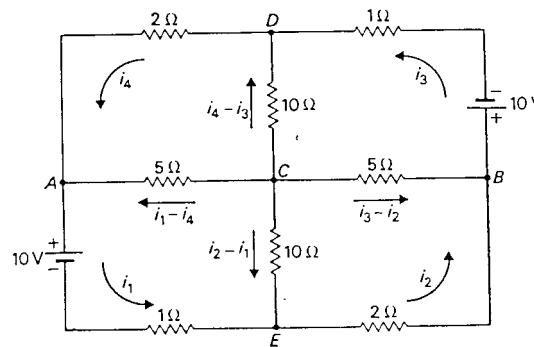
También ya dijimos que era posible demostrar que con cada subgrupo uniparamétrico de transformaciones de simetría del Hamiltoniano en Mecánica Cuántica, podemos asociar constantes del movimiento (esta idea se corresponde con el teorema de Noether de la Mecánica Clásica). Estas constantes del movimiento se traducirán en reglas de selección, que excluyen la aparición de ciertos tipos de fenómenos y soluciones.

Otro de los efectos positivos de una aproximación geométrica a la Mecánica Clásica es que nos ha permitido esclarecer errores preestablecidos. Por ejemplo, es frecuente encontrar en libros de texto la afirmación de que el uso de las simetrías discretas en Mecánica Cuántica no tiene una contrapartida en Mecánica Clásica. Por el contrario, es un hecho que está ahora ya bien estudiado que las simetrías discretas de la dinámica que no sean canónicas, también dan lugar a constantes del movimiento [CI83].

v) Finalmente, toda la teoría de grupos de simetría suministra un importante conjunto de técnicas matemáticas que nos pueden simplificar el cálculo de cantidades específicas. Por ejemplo, podemos deducir reglas que relacionen amplitudes de transición de diferentes procesos cuánticos vía el conocido Teorema de Wigner–Eckart. Un ejemplo más sencillo, extraído también del libro de J. Rosen es el siguiente: si consideramos un circuito eléctrico como el indicado en la siguiente figura,



las intensidades i_1 , i_2 , i_3 e i_4 , junto con la primera ley de Kirchhoff, permiten expresar en función de ellas las restantes tal y como indicamos en la siguiente figura.



La segunda ley de Kirchhoff nos da un conjunto de ecuaciones simultáneas que permiten encontrar los valores de cada una de las intensidades. Sin embargo, obsérvese que el circuito es simétrico bajo un giro de ángulo π en torno a un eje perpendicular al plano de la figura. Como consecuencia las diferencias de potencial V_{BC} y V_{AC} coinciden, y análogamente $V_{DE} = V_{ED}$, por lo que esta diferencia se anula. Para las intensidades obtenemos $i_1 = i_3$ y $i_2 = i_4$, con lo que antes de empezar a calcular ya tenemos reducido el problema a la mitad.

vi) Grupos de transformaciones que no sean de simetría de alguna ecuación o estructura, pueden ser útiles si nos ayudan a simplificar el problema. Así en Mecánica Clásica se hace uso a menudo de transformaciones que no preservan las ecuaciones del movimiento, aunque con frecuencia sí su forma, es decir, transformaciones canónicas, sino que la transforman en otra de más fácil solución.

No queremos acabar sin añadir alguna palabra de precaución sobre el uso y abuso de los principios de simetría en física. No existe garantía “a priori” de que el principio de simetría esté a salvo de posibles fallos, así que sus resultados deben ser contrastados con los experimentos para que, en su caso, una simetría que hasta ese momento era considerada como válida, sea abandonada tras la realización de un experimento que la contradiga. A este respecto debe indicarse que existen simetrías que se consideran como

válidas sólo bajo ciertas aproximaciones en que algunas contribuciones son despreciadas y entre ellas están precisamente las que han conducido a grandes logros como la predicción de partículas elementales o correlaciones entre procesos establecidos merced a la ayuda de simples principios de simetría y un adecuado uso de la teoría matemática subyacente.

6. Influencia de la teoría de la simetría en mi carrera científica

La influencia de la simetría en el desarrollo de mi propia carrera científica ha sido constante, como intentaré explicar brevemente. Creo que quedará clara la razón de mi elección de este tema para este acto.

Concluidos mis estudios de Licenciatura en Físicas y Exactas en esta Universidad, me trasladé a la de Valladolid, en donde defendí mi tesis doctoral, que había sido dirigida por el Profesor L.J. Boya, Académico a quien corresponde la contestación de este discurso de ingreso, en Octubre de 1972. Versaba sobre *Sistemas Cuánticos Elementales*, y como tal utilizaba de forma sistemática dos ingredientes fundamentales en toda la Teoría de la Simetría, el método de reducción del estudio de las representaciones proyectivas de un grupo de Lie al de las lineales de otro relacionado con él, por una parte, y el de las representaciones de un grupo obtenidas mediante inducción desde las representaciones de un subgrupo, por la otra.

Durante bastantes años, y en colaboración no sólo con el Prof. Boya, sino también fundamentalmente con los Profesores M. del Olmo y M. Santander, durante el desarrollo, bajo mi dirección, de sus tesis doctorales, estudié otros problemas muy relacionados con los mencionados, haciendo hincapié en sus aplicaciones a los diversos grupos cinemáticos, así como en diversas aplicaciones del Análisis Dimensional. La teoría de las representaciones de los grupos de simetría en fibrados vectoriales era, en definitiva, el ingrediente básico.

Es en el año 1982 cuando empiezo a interesarme por los problemas de las simetrías en Mecánica Clásica y en ecuaciones diferenciales ordinarias, objetivo fundamental de la teoría de Lie. Es por ello que durante un cierto período de tiempo, en el que colaboré fundamentalmente con el Profesor L.A. Ibort, dedico fundamentalmente mi atención al estudio de la formulación geométrica moderna de la Mecánica Clásica, con especial énfasis en las estructuras simplécticas, de Poisson, y en general en la existencia de estructuras alternativas para la descripción de los sistemas, así como las consecuencias de la propia existencia de dichas estructuras alternativas, reflejo, sin duda, de la existencia de alguna simetría más o menos camuflada.

Particular interés prestamos a las estructuras presimplécticas, como son las que corresponden a sistemas definidos por Lagrangianos singulares, que habían sido introducidos por

Dirac en 1950. En efecto, la ambigüedad de *gauge* se presenta ya en las Teorías clásicas para sistemas descritos por Lagrangianos singulares. El estudio geométrico de dichos sistemas, que estaba siendo objeto de gran interés en aquellos años, fue comenzado en colaboración con L.A. Ibort durante su tesis doctoral y continuado con C. López Lacasta en la realización de la memoria de la suya, y fue precisamente la formación recibida con el estudio previo de la teoría de la simetría que había realizado en años precedentes el que me capacitó para poder abordar y llevar a cabo el estudio geométrico de dichos sistemas. Sin duda la colaboración con los Profesores M. Crampin y F. Cantrijn, fue también decisiva.

Junto con el estudio de múltiples aplicaciones de las herramientas geométricas en el planteamiento y en la resolución de problemas de Mecánica Hamiltoniana, como son el estudio de las transformaciones canonoides y sus funciones generatrices, así como el Teorema de los Hamiltonianos cuadráticos, colaboración con el Profesor M.F. Rañada, abordamos las simetrías de las ecuaciones diferenciales de segundo orden desde diferentes aproximaciones geométricas en colaboración con el Profesor E. Martínez, también durante la elaboración de la memoria de su tesis doctoral, y el Profesor W. Sarlet, siendo una herramienta fundamental la teoría de las conexiones generalizadas, lo que nos permitió abordar el problema inverso de la Mecánica desde una nueva perspectiva, y otra, el concepto de secciones a lo largo de aplicaciones, del que no tenemos constancia que hubiera sido utilizado con anterioridad en Física. Estos ingredientes fueron esenciales en la formulación geométrica y en las aplicaciones de los dos Teoremas de Noether en su mayor generalidad.

Mis colaboraciones sobre la formulación de Moyal de la Mecánica Cuántica, también vienen de la mano de la simetría. En colaboración con los Profesores J.M. Gracia-Bondía y J. Várilly nos propusimos enfocar el estudio de la cuantización *a la Moyal* mediante su relación con el método de las órbitas coadjuntas de un grupo de Lie, desarrollado por Kirillov, Konstant y Souriau, como prototipo de espacios homogéneos simplécticos.

Igualmente también tuve oportunidad de realizar alguna excursión por lo que se conoce como formalismo multi-simpléctico de la Teoría de Campos, estudiando en colaboración con M. Crampin y L.A. Ibort la teoría de la simetría y la reducción para dichos sistemas.

La teoría de jets y sus aplicaciones para el estudio de simetrías de ecuaciones diferenciales forman también parte de mis preocupaciones científicas desde hace bastante tiempo y ha dado lugar a colaboraciones con J. Fernández-Núñez, E. Martínez, M. del Olmo, M.A. Rodríguez, Sarlet y Winterniz, entre otros.

Algunas de las estructuras y herramientas de los modelos matemáticos que se han desarrollado en la Mecánica Geométrica y en el estudio de las simetrías de ecuaciones diferenciales se pueden aplicar de forma sencilla a otros campos de la Física, como por

ejemplo la Óptica, y a ello también hemos dedicado nuestra atención recientemente, en particular durante la realización de la memoria de tesis doctoral de J. Nasarre y posteriormente con el Profesor L.L. Sánchez-Soto y colaboradores.

El intento de introducir grados de libertad fermiónicos en teorías clásicas, y la correspondiente idea de supersimetría, condujo al estudio de supervariedades y la necesidad de utilizar métodos geométricos más sofisticados, que he abordado en colaboración con H. Figueroa, y hemos comprobado cómo la mayor parte de los útiles geométricos pueden ser transplantados a este nuevo marco de geometría no conmutativa, pudiendo desarrollarse una formulación tanto Lagrangiana como Hamiltoniana, relacionadas por una transformación semejante a la de Legendre y en donde es posible encontrar formulaciones alternativas, los llamados operadores de recurrencia, que son generadores de nuevas simetrías a partir de una dada, y la mayor parte de los objetos y propiedades que aparecen en la formulación habitual de la mecánica en variedades.

El estudio de los sistemas integrables despertó mi curiosidad en conocer las posibles aplicaciones de uno de los Teoremas de Lie relativo a la caracterización de sistemas de ecuaciones diferenciales para los que es posible expresar la solución general mediante una función de un conjunto arbitrario de soluciones particulares y las constantes que determinan cada solución. Estos sistemas, a los que he dedicado mi atención preferente los últimos años, en colaboración con J. Grabowski, G. Marmo y A. Ramos, están directamente relacionados con álgebras de Lie, siendo suficiente que dicha álgebra sea soluble para que se pueda encontrar la solución general de los sistemas mediante cuadraturas. Estos sistemas aparecen frecuentemente en muy diferentes problemas de la física. Las aplicaciones en Mecánica Cuántica Supersimétrica mediante la factorización y el estudio de sistemas cuánticos para los que el Hamiltoniano presenta invariancia de forma, y por consiguiente es exactamente soluble, es debida a la aparición en estos problemas de una ecuación de Riccati como ingrediente fundamental. Pero lo que hace más interesante a dichos sistemas de Lie es que se pueden reducir a movimientos en grupos de Lie, que dan lugar a cierto tipo de conexiones, disfrutando de una especie de universalidad que hace que el conocimiento de una solución particular de uno de dichos sistemas en el grupo, permite encontrar la solución general de gran cantidad de sistemas asociados en espacios homogéneos para el grupo que están relacionados con él. Aún más fascinante es que dicha solución particular nos suministre la solución general de problemas tanto clásicos como cuánticos. He tenido la fortuna de poder colaborar en estos temas con D.J. Fernández, J. Grabowski, G. Marmo, J. Nasarre, A. Perelomov, A. Ramos y M.F. Rañada. Otra aplicación encontrada recientemente es en Teoría de control. Más explícitamente, en sistemas sin deriva y que son lineales en las funciones de control. Junto con J. Clemente-Gallardo

y A. Ramos hemos abordado las aplicaciones a dichos sistemas de las técnicas generales previamente desarrolladas.

Finalmente, quiero concluir con una breve referencia a una estructura matemática que se está aún elaborando y que, sin duda, jugará un papel importante en este proceso de aplicación de la Teoría de la simetría, tanto como principio director, como como mecanismo suministrador de métodos de simplificación y cálculo: la teoría de grupoides y algebroides de Lie. Estas generalizaciones de los respectivos conceptos de grupo y álgebra de Lie, han sido recientemente utilizadas en Física. Por ejemplo, el grupoide tangente lo ha sido para llevar a cabo la cuantización de sistemas y tiene relación directa con la Teoría de productos estrella y la teoría de deformación de estructuras estudiados en la memoria de Tesis Doctoral de Clemente-Gallardo. Por su parte, la teoría de algebroides de Lie encuentra su marco natural en la reducción de sistemas mecánicos con simetrías, por un lado, y en la Teoría Topológica de Campos Cuánticos, por su relación con cuestiones como BRST, BV, BFV y similares, tema que hemos abordado en colaboración con Camacaro. Una reciente aplicación que hemos encontrado, en colaboración con J. Grabowski y G. Marmo, es en su posible uso para estudiar el proceso de contracción de álgebras asociativas y álgebras de Lie, así como para introducir el concepto de contracción de estructuras de Poisson, en total analogía con lo que sucede para el problema de las contracciones de álgebras de Lie.

Si mi interés ha estado centrado tanto tiempo en la simetría, con la que he compartido tantos ratos, en su mayoría agradables, justo es que dedique el tiempo de este acto a intentar aproximar a la audiencia este motivo de entretenimiento, principio básico y herramienta útil, con un futuro inmediato prometedor, con la esperanza de hacer realidad las palabras de Rosen anteriormente mencionadas, contagiándole, respetuosamente, ésta mi enfermedad y adicción.

References

- [BL68] H. Bacry and J.M. Lévy–Leblond: *Possible Kinematics*, J. Math. Phys. **9**, 1605 (1968).
- [CI83] J.F. Cariñena and L.A. Ibort: *Non-Noether constants of motion*, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 1 (1983).
- [CS88] J.F. Cariñena and M. Santander: *Dimensional Analysis*, Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. **72**, 182 Academic Press, 1988.
- [C097] A.J. Coleman: *Groups and Physics: dogmatic opinions from a senior citizen*, Notices of the A.M.S. **44**, 8 (1997).

- [Co61] H.S.M. Coxeter: *Introduction to Geometry*, Wiley, 1961 (Edición española: Limusa, 1971).
- [Es78] *The graphic work of M C Escher*, Mac Donald and Jane's Publishers, 10 ed., 1978.
- [GG80] G. Gamow: *Biografía de la Física*, Alianza Editorial, 1980.
- [Ga80] M. Gardner: *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, 1980.
- [Ga81] M. Gardner: *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, 1981.
- [Gu00] D. Guedj: *El teorema del loro*, Anagrama, 2000.
- [Ho82] D.R. Hofstadter: *Temas matemáticos*. Investigación y Ciencia 69, p. 102 (1982)
- [Ja18] F.M. Jaeger: *Lectures on the Principle of Symmetry*, Elsevier, 1917.
- [Lo83] O. Lodge: *Johan Kepler en El mundo de las Matemáticas*, Vol 1, Grijalbo, 1983.
- [Ol89] P.J. Olver: *Application of Lie Groups to Differential Equations*, GTM 107, Springer, 1986.
- [Ro83] J. Roche: *Symmetry in Physics: from Galileo to Newton*. 1st Meeting on the History of Scientific Ideas: Symmetry in Physics (1600-1980) San Feliu de Guixols (1983).
- [Ro75] J. Rosen: *Symmetry discovered*. Cambridge U.P., 1975.
- [Ro82] T. Rothman: *La breve vida de Evariste Galois*, Investigación y Ciencia 69 90 (1982)
- [We52] H. Weyl: *Symmetry*. Princeton U.P., 1952. Parcialmente reimpresso en *El mundo de las matemáticas*, Vol. 4, Grijalbo, 1983.
- [We56] H. Weyl: *Selecta*, Birkhäuser-Verlag, 1956.
- [Wi49] E.P. Wigner: *Invariance in Physical Theory*, Proc. Am. Phil. Soc. 93 521 (1949) (reimpresso en el libro: *Symmetries and Reflections*, MIT Press, 1970).
- [Ya79] Y.M. Yaglom: *A simple non-Euclidean Geometry ...*, Springer, 1979.