DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL

Ilmo. Sr. D. JOSE GARAY DE PABLO

Excmo. Sr. Presidente,

Sras y Sres. Académicos,

Señoras y señores:

Con el ingreso hoy en la Academia del *Profesor Bastero*, se completa, quizá por primera vez en su historia, su sección de Matemáticas. Ya estamos diez matemáticos en la Academia. Y además con su condición de analista establece el equilibrio entre las cinco ramas tradicionales de esta sección en Zaragoza: *Análisis Matemático, Matemática Aplicada, Algebra, Geometría* y *Astronomía*. Ya somos dos analistas en la Academia. Y he de añadir que me encuentro muy bien acompañado.

Revisando las Actas de mis ya largos años de docencia en la Facultad de Ciencias, encuentro entre mis numerosos exalumnos a mi nuevo compañero de Academia, y nada menos que en tres cursos consecutivos. Durante el curso 71-72, el entonces alumno *Jesús Bastero Eleizalde* cursaba Análisis V y terminaba brillantemente sus estudios de Licenciatura. Durante los dos cursos siguientes asistió a mis cursos monográficos con los temas *Teoría espectral para operadores en un espacio de Hilbert* y *Series de Fourier*. He de añadir que en todos ellos alcanzó la máxima calificación. También quiero confesar que hoy es él quien me podría dar clases de estos y de otros temas. Pero no creo que a los profesores nos deba crear ningún trauma el reconocer que a veces nuestros alumnos nos lleguen a superar. Esto es simplemente señal de progreso en la Sociedad, y siempre nos queda la satisfacción de pensar que algo habremos colaborado en su formación.

Como el propio nuevo Académico nos ha dicho, dio sus primeros pasos como matemático bajo la dirección del *Profesor Cuartero* hasta alcanzar el grado de Doctor, con la memoria *Convexidad y acotación en espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos cuasivalorados.*

A partir de aquí la actividad del nuevo académico ha sido ininterrumpida, tanto en el terreno docente como en el investigador. En cuanto al primero fue desempeñando sucesivamente los puestos de Ayudante, Encargado, Adjunto interino, Titular y Catedrático, y aunque este último grado lo alcanzó en el 90, he de decir que al menos para mí y creo que para todos los miembros del área de Análisis, por sus méritos y actividad ya se merecía mucho antes haber llegado a este nivel del escalafón. Pero ya sabemos que en esto no solamente influyen los méritos sino también otras circunstancias.

En cuanto a su actividad investigadora ha sido especialmente intensa. Enseguida pasó de ser dirigido a dirigir y a formar equipos de trabajo que han dado excelentes frutos, en forma de tesis y publicaciones en revistas nacionales y extranjeras. Algo de todo ello hemos podido apreciar en el denso e interesante discurso que nos acaba de leer.

Pero aunque, para nuestra suerte, su permanencia con nosotros ha sido ininterrumpida, también ha logrado buscar huecos para disfrutar de diversas estancias en el extranjero, sobre todo en Francia y en EEUU, y así mantener el contacto con los mejores matemáticos internacionales especialistas en los temas en los que él trabaja.

Antes comenté que guardo tres actas en las que figura el nombre de *Jesús Bastero Eleizalde*. Pues ocurre que en las mismas actas y muy cerca del nombre anterior, encuentro el nombre de *María Luisa Rezola Solaun*. Y curiosamente ya casi treinta años después, cuando al ir hacia mi actual despacho miro las puertas del pasillo vuelvo a encontrar estos dos nombres en dos despachos casi consecutivos. Creo que todos han adivinado lo que ocurrió. Sencillamente que una vez más las frías Matemáticas además de unir cerebros, también unieron corazones. Desde hace ya muchos años en el antes Departamento de Teoría de Funciones y hoy Area de Análisis Matemático disfrutamos de la presencia del matrimonio *Jesús-Marisa*, que además de sus frutos matemáticos ha producido unos frutos incomparablemente más valiosos y que hoy nos acompañan. Son sus hijas *Amaia y Maite*. A ellas y a *Marisa* felicitamos muy cordialmente por esta incorporación a la Academia de su padre y esposo.

Voy a referirme ya al tema del discurso.

Desde que *Paul Lévy* introdujo el término de Análisis Funcional para indicar el estudio de aquellos espacios cuyos elementos son funciones, el número de estos ha ido aumentando, y lo sigue haciendo, de una forma vertiginosa. Unos aparecen de forma natural motivados por algún problema concreto. Otros nacen de alguno ya preexistente, mediante modificaciones de alguna de las propiedades definitorias.

Algunos espacios añaden al interés matemático un interés físico porque admiten realizaciones de carácter físico. Citamos solamente el espacio de *Hilbert* $L^2(\mathbb{R})$ que puede ser interpretado como el espacio de todas las señales de energía finita. Además en este caso el concepto matemático de norma se corresponde con el concepto físico de energía.

También sabemos que las funciones de onda que representan los posibles estados de un sistema cuántico son elementos de un espacio de *Hilbert* complejo y además las distintas magnitudes físicas se describen mediante operadores en dicho espacio.

Algunos espacios son llamados mediante nombres propios, quedando así como perpetuo homenaje a aquellos matemáticos que o bien los introdujeron o bien los estudiaron. Es algo así como esos descubridores que dejaron sus nombres en alguna isla o región de nuestro planeta. Además del ya citado *Hilbert* podemos añadir entre otros los nombres de *Banach, Hardy, Schwarz, Sobolev*, etc. Otros espacios son indicados simplemente con letras o símbolos matemáticos: L^p, l^p, c_{00}. Otros llevan nombres más o menos exóticos, tales como *las amalgamas, las distribuciones* y otros por el estilo. La variedad y complejidad de todos estos espacios es tal que un trabajo interesante dentro de las matemáticas sería confeccionar con ellos algo parecido a una guía de carreteras para poder transitar de unos a otros con cierta facilidad.

Alguien dijo con un poco de humor que cada matemático anda por su espacio. Pero humor aparte lo que sí que es verdad es que para que haya comunicación entre dos matemáticos ambos deben andar por los mismos espacios.

Todo este preámbulo viene a cuento para decir que una respuesta digna al discurso que acabamos de escuchar del *Dr. Bastero*, sólo podría surgir de la pluma de alguien que esté sumergido en los espacios matemáticos en los que él se mueve habitualmente. Este sería el caso de *Dvoretzky, Milman* o algunos de los matemáticos que nos ha citado o también cualquiera de sus colaboradores o discípulos. Pero lamentablemente ninguno de ellos es académico de esta Academia de Ciencias, y ésta es una condición que se exige para contestar a un académico.

Así que aun a sabiendas de no hacer la contestación más adecuada al discurso que acabamos de escuchar, he asumido la responsabilidad de responder al nuevo académico de la mejor manera posible. Y además lo hago gustosamente, ya que como antes he indicado mi aprecio por él es grande.

Lo que voy a procurar es tender un puente que comunique alguno de los espacios mencionados en el discurso con alguno en los que yo me encuentro.

Habla en algún momento sobre la cuestión de recuperar cuerpos convexos a través del conocimiento de sus secciones, y cita su aplicación a la Medicina a través de la *Tomografía geométrica*. Me limitaré a hacer aquí un pequeño comentario para comparar esta técnica tomográfica con la llamada *Tomodensitometría*. Mientras que con los tradicionales *rayos-X* el mayor interés está en la resolución espacial del objeto analizado, en la nueva técnica introducida en 1972 por el ingeniero inglés *Haunsfield* el interés se centra en la mejor resolución de las densidades de los tejidos atravesados por los rayos, lo cual permite luego una mejor identificación de las componentes macroscópicas de la parte analizada, identificación que no era posible realizar con las técnicas radiológicas anteriores.

Es digno de mención que la empresa discográfica *EMI*, en la que trabajaba *Haunsfield* sufragó los gastos de estas investigaciones, dedicando para ello una pequeña parte de los cuantiosos beneficios que había logrado con la venta de discos de los *Beatles*. Más adelante, en 1979, *Haunsfield* fue premiado por sus trabajos con el Nóbel de Medicina junto a *Cormack*, y su nombre ha sido elegido para medir cuantitativamente la atenuación de la absorción electrónica de un medio.

Es curioso que esta doble posible resolución *espacial-densidad* recuerda la dualidad *espacio-frecuencia* de una señal espacial y de hecho también aquí nos encontramos con una especie de principio de incertidumbre, pero de carácter médico, no físico. La buena calidad simultánea de ambas resoluciones, exige una mayor dosis de radiación sobre el paciente con el correspondinete peligro para su salud. Y es el médico quien debe decidir en cada caso a qué aspecto debe dar prioridad.

Volviendo a temas más matemáticos, el problema arriba planteado del conocimiento de cuerpos convexos a través de sus secciones, lo podemos considerar como un caso particular de la cuestión filosófica de conocer las causas a partir de los efectos. Y claro, este planteamiento tan general admite muchas situaciones. Es posible que falten o que sobren efectos para conocer las causas que los producen, o que estemos en un caso de perfecto equilibrio en el que contemos con los efectos necesarios y suficientes para conocer las causas correspondientes. Podemos afirmar que la misión de la Ciencia consiste en recorrer este camino inverso y ser capaz de conocer la naturaleza del Universo y su evolución a partir de las informaciones que podemos recoger en este pequeño riconcito que es nuestro planeta.

Si volvemos al mundo matemático, y en particular al Análisis, un ejemplo muy elemental que ya explicamos a nuestros alumnos lo constituye la *serie de Taylor*, que permite determinar los valores de una función analítica en un disco de su dominio, conociendo solamente su comportamiento local en su centro.

Y concretando más la cuestión para estar más cerca del contenido del discurso que acabamos de escuchar pensemos en el caso en el cual los efectos conocidos son algún tipo de proyecciones. Y hay proyecciones geométricas pero también hay proyecciones de funciones sobre otras funciones. Y estas proyecciones funcionales se materializan en los productos escalares. Si el espacio funcional es de *Hilbert* la situación ideal es disponer de una base ortonormal *(BON)* de funciones. De esta forma el conocimiemnto de todas los productos escalares sobre esta base de una función dada nos permite reconstruir esta función mediante una suma finita o una serie, según sea la dimensión del espacio. Además en esta reconstrucción ni sobra ni falta ningún producto escalar. Representa por así decirlo la más económica entre las diversas opciones.

Sin embargo desde el punto de vista práctico puede ser que ésta no sea la mejor elección. Pondré un sencillo ejemplo. Imaginemos que queremos conocer la longitud de esta mesa y llamamos para ello a un carpintero para que la mida con su cinta métrica. Si tuviésemos seguridad de que nuestro carpintero es perfecto y que no se equivoca ni en una sola micra en su medición, sería suficiente con su resultado. Pero si pensamos que puede haber cometido algún error será más prudente que recurramos a un nuevo medidor o a varios para así compensar los errores que todos ellos puedan cometer.

Alguien quizá esté pensando, pero las matemáticas son exactas, y los productos escalares procedentes de una base ortonormal están perfectamente determinados por la integral correspondiente. Sí, pero no olvidemos que en el momento de plasmar los resultados con números concretos es inevitable cometer errores, aunque sólo sea en el proceso de cuantificación.

El primer tipo de bases *menos perfectas* que las *BON* son las de *Riesz*, que son las que proceden de una *BON* mediante algún operador inversible. Toda base de *Riesz* tiene asociadas dos constantes positivas tales que sus productos por el cuadrado de la norma de un elemento del espacio acota superior e inferiormente la suma de los cuadrados de los productos escalares del elemento por los vectores de la base.

Pues bien, si a una familia de vectores le pedimos solamente esta última propiedad no exigiendo el ser base de *Riesz*, llegamos a una nueva estructura, llamada *frame* en la literatiua inglesa, y que fue introducida por *Duffin* y *Schaefer* en 1952, presentando como primer ejemplo una sucesión de exponenciales $(e^{i\lambda_n x})$, con los coeficientes λ_n no necesariamente enteros. Bajo ciertas condiciones sobre esta sucesión, la anterior familia de funciones es una *frame* sobre el espacio de *Hilbert* $L^2[-\pi,\pi]$.

Luego se ve que toda *frame*, aunque puede no ser base, sí que es un sistema que engendra el espacio, y además las condiciones de la definición nos dicen que esto lo hace de manera estable. Por este motivo alguno de mis colaboradores ha propuesta la expresión de *sistema generador estable (SGE)* para referirnos en nuestro idioma a este concepto. Pero a diferencia con las bases, aquí aparece una cierta redundancia que como antes hemos indicado puede ser beneficiosa desde el punto de vista práctico para aminorar el ruido o errores en el proceso de la reconstrucción.

Entonces una cuestión interesante consiste en la generación de un *SGE* a partir de alguna *BON*. Hoy en día son de mucha actualidad las *BON* originadas mediante traslaciones y dilataciones de *wavelets*, ya que tienen la buena propiedad de analizar simultáneamente en tiempo y frecuencia las funciones o señales. Y precisamente modi- ficando convenientemente los parámetros de traslación surge una forma natural de producir una *SGE*.

Llegados a este punto creo que es momento de abandonar estas disquisiciones y regresar por el mismo puente anterior para recordar los espacios objeto de estudio del *Profesor Bastero*, que son los que realmente interesan en el acto de hoy.

En nombre de la Academia y en el mío propio le doy las gracias por la densa e interesante lección que nos acaba de impartir y me felicito a mí mismo y a mis compañeros de corporación porque hoy se ha enriquecido nuestra Institución con el ingreso del nuevo académico.

He dicho.