

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS,
QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA**

**LA MONODROMÍA: A VUELTAS ENTRE
LA TOPOLOGÍA, LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA**

DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. ENRIQUE ARTAL BARTOLO

*EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN SOLEMNE
CELEBRADO EL DÍA 24 DE NOVIEMBRE DEL AÑO 2009*

Y

DISCURSO DE CONTESTACIÓN POR LA

Ilma. Sra. Dña. MARÍA TERESA LOZANO IMÍZCOZ

ACADÉMICA NUMERARIA



ZARAGOZA

2009

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS,
QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA**

**LA MONODROMÍA: A VUELTAS ENTRE
LA TOPOLOGÍA, LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA**

DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. ENRIQUE ARTAL BARTOLO

*EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN SOLEMNE
CELEBRADO EL DÍA 24 DE NOVIEMBRE DEL AÑO 2009*

Y

DISCURSO DE CONTESTACIÓN POR LA

Ilma. Sra. Dña. MARÍA TERESA LOZANO IMÍZCOZ

ACADÉMICA NUMERARIA



ZARAGOZA

2009

Depósito legal: Z-¿¿¿¿??????

Imprime:

Sdad. Coop. De Artes Gráficas
Librería General
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza
imprentalg@efor.es

**LA MONODROMÍA: A VUELTAS ENTRE
LA TOPOLOGÍA, LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA**

POR EL

Ilmo. Sr. D. ENRIQUE ARTAL BARTOLO

Excmo. Sr. Presidente,
Ilmos. Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

Me siento profundamente honrado por haber sido propuesto por los académicos de la Sección de Exactas para formar parte de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza. Es un honor del que espero estar a la altura y mis primeras palabras son de agradecimiento hacia todos ellos.

El agradecimiento se dirige también a mi mujer María Jesús, y a mis hijos Javier, Ángel y Puerto, que conocen las peculiaridades que provoca vivir con un matemático, y por supuesto también a mis padres y hermanos que han estado siempre conmigo.

Aunque es posible hacer matemáticas en solitario es mucho más enriquecedor poder compartir esfuerzos, recibir ayudas y prestar apoyos. Mi carrera como matemático debe mucho a los profesores de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza con los que comencé mi formación. De entre ellos, María Teresa Lozano y José María Montesinos han tenido un efecto benéfico (como diría este último) que sobresale sobre los demás. No puedo olvidar a mi director de tesis, el Profesor Claude Weber, de la Universidad de Ginebra; me conformo con haber recibido una pequeña parte del entusiasmo con el que se ha enfrentado siempre a sus retos. Los compañeros con los que compartí doctorado en aquella Universidad y los profesores que nos acompañaban también han servido para moldear mi *yo* matemático.

En mi última época en la Universidad de Ginebra, apareció el Profesor Ignacio Luen-go, de la Universidad Complutense. La colaboración matemática que se inició entonces sigue viva y se ha fortalecido con la amistad. Dos estudiantes de aquella época, Alejandro Melle y José Ignacio Cogolludo, son ahora compañeros y amigos, y me siento honrado de haber podido codirigir la tesis de este último, así como las de Jorge Carmona, Mario Escario y Miguel Marco. Quiero terminar estos agradecimientos, profesionales pero también personales, con Pierrette Cassou-Noguès e Hiroo Tokunaga, con los que siempre ha sido un placer trabajar y disfrutar de su compañía.

Quiero también dedicar unas palabras a los que me han precedido en esta Medalla Número 4. Don Manuel Lorenzo Pardo forma parte por derecho propio de la historia de Aragón. Debido a su cercana relación no podría mejorar las palabras que dedicaba Don Miguel San Miguel Marco a Don José Estevan Ciriquián. Y tampoco podría mejorar las emocionadas palabras que dirigió Don Mariano Gasca González a su amigo Miguel San Miguel en la respuesta al discurso de nombramiento de éste como Académico Numerario a título póstumo. Por todo ello, quiero dedicar algunas palabras más personales a D. José Luis Viviente Mateu.

El Profesor Viviente nació en Zaragoza en 1926. Las circunstancias sociales e históricas le obligaron a compaginar estudios y trabajo. De alguna manera su paso por la Licenciatura de Matemáticas está ligado al tema central de este discurso, la monodromía, ya que tras comenzar en Zaragoza en 1946, sus obligaciones laborales le llevaron a los otros dos centros donde se impartía la Licenciatura, Madrid y Barcelona, pero la finalización de los estudios fue en Zaragoza en 1953. Volvió al punto de partida con un bagaje mayor que al comienzo. Una vez licenciado vuelve a Madrid y tras una primera etapa de conciliación de estudios y trabajo decide dedicarse por entero a la actividad académica. Se produce entonces un hito fundamental en su carrera: el paso por París bajo la dirección de dos matemáticos fundamentales en la historia del siglo XX, Henri Cartan y Charles Erhesmann. Este hecho marca su carrera y tras doctorarse en Madrid vuelve definitivamente a Zaragoza en 1965 como Catedrático; de nuevo al punto de partida, pero con un bagaje todavía más amplio. No se puede resumir aceptablemente en unas líneas su actividad, por lo que quiero destacar un aspecto fundamental en su trayectoria y que, en la actualidad, es más difícil valorar en su justa medida. La comunidad científica en España está integrada de pleno derecho en la comunidad internacional y es puntera en muchas especialidades; pero no siempre ha sido así. El Profesor Viviente no solo hizo el esfuerzo de salir a Francia a profundizar su carrera investigadora en los difíciles años 50 sino que fue capaz de mantener conexiones permanentes y activas con la comunidad matemática francesa durante su periodo de Catedrático de la Universidad de Zaragoza. Esta conexión se extendió a otros países de Europa; en un viaje a la venerable Universidad Católica de Lovaina (Katholieke Universiteit Leuven) al presentarme como matemático de la Universidad de Zaragoza uno de mis contertulios me habló con cariño de su relación con el Profesor Viviente. Quiero terminar estas palabras agradeciendo al Profesor Viviente los caminos que abrió.

Pasaré a continuación a hablarles del tema de mi discurso: **La monodromía: a vueltas entre la topología, la geometría y el álgebra.**

1. Introducción

La palabra monodromía proviene del griego $\mu\omicron\nu\omicron - \delta\rho\omicron\mu\psi$, que significa *recorrer una vez o recorrer uniformemente*. Este término lo utilizó, probablemente por primera vez, B. Riemann [63] en 1857. De manera general, la monodromía describe fenómenos parametrizados por un espacio base de manera que al realizar caminos cerrados en dicho espacio base, los fenómenos sufren una cierta transformación.

Consideremos una curva espiral, por ejemplo la dada por $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$. Esta espiral la consideramos parametrizada por los puntos de la circunferencia base, es decir, por

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

A cada punto de la circunferencia le asociamos los puntos que se proyectan sobre él; fijado un punto $p_0 := (\cos(2\pi t_0), \sin(2\pi t_0))$, los puntos asociados son de la forma $(p_0, t_0 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$. De esta manera podemos considerar la espiral como la gráfica de una aplicación *multivalorada* de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R} . Por ejemplo, la imagen de $t = 0$ es \mathbb{Z} ; la imagen de cualquier otro punto también se puede identificar con \mathbb{Z} una vez que hemos fijado un t_0 apropiado. Si damos una vuelta en el sentido antihorario, dichos puntos se transforman por la ley

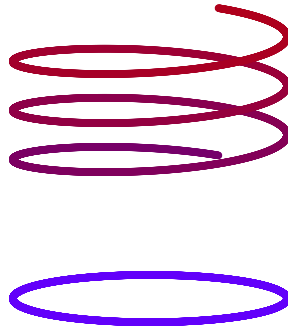


Figura 1.— Espiral como cubierta

$k \mapsto k+1$. Es decir, el efecto de *dar una vuelta* sobre la imagen de un punto es la traslación de longitud 1. Esta traslación es la monodromía y el grupo implicado es \mathbb{Z} . Este ejemplo es el primero de teoría de cubiertas pero va a aparecer con diferentes disfraces a lo largo de este discurso. Otro lugar de las matemáticas donde se producen permutaciones naturales de objetos es la Teoría de Galois, que se ocupa de extensiones de cuerpos L/K . Cuando el cuerpo base es $K = \mathbb{Q}$, aparecen las permutaciones pero falta la componente geométrica; sin salir de la teoría de Galois, esta se recupera al tomar como K un cuerpo de funciones; existe abundante literatura que trata sobre la relación entre ambas teorías [25].

Vamos a ver ahora la monodromía desde el punto de vista de las ecuaciones diferen-

ciales. La teoría clásica nos dice que si tenemos una ecuación diferencial

$$f'(t) = \alpha(t)f(t) + \beta(t), \quad \alpha, \beta : V \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfas,} \quad (1.1)$$

$V \subset \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo, $t_0 \in V$, entonces para cada $w \in \mathbb{C}$ la ecuación (1.1) tiene una solución única $f_w(t)$ tal que $f_w(t_0) = w$. Cuando la base no es simplemente conexa, el fenómeno de la monodromía aparece. Para visualizarlo, consideramos una ecuación diferencial particularmente sencilla (¡una vulgar primitiva!),

$$f'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{C}^*. \quad (1.2)$$

En cualquier abierto simplemente conexo de \mathbb{C}^* esta ecuación admite como solución una función de la forma $\log(t) + c$, donde $c \in \mathbb{C}$ es la famosa constante de integración y \log es una *determinación* del logaritmo (neperiano). Veamos ejemplos de soluciones.

En $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, podemos fijar una determinación del logaritmo tal que $\log(1) = 0$; la denotamos $\log^{(0)}(t)$ y se define así:

$$\log^{(0)}(r \exp(\sqrt{-1}\theta)) = \log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi), r \in \mathbb{R}.$$

En particular, $\log^{(0)}(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\frac{\pi}{2}$.

En $V := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, denotamos $\log^{(1)}$ la determinación de logaritmo que cumple

$$\log^{(1)}(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\frac{\pi}{2} = \log^{(0)}(\sqrt{-1}).$$

Observemos que $U \cap V = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$, donde \mathbb{H}_+ (resp. \mathbb{H}_-) es el semiplano de \mathbb{C} formado por los complejos de parte imaginaria positiva (resp. negativa). Como $\log^{(0)}$ y $\log^{(1)}$ coinciden en un punto de \mathbb{H}_+ , coinciden en todo el abierto (unicidad de la solución). Podemos interpretar $\log^{(1)}$ como la prolongación analítica de $\log_{|\mathbb{H}_+}^{(0)}$ a V . Es fácil ver que:

$$\log^{(1)}(r \exp(\sqrt{-1}\theta)) = \log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Por tanto, $\log_{|\mathbb{H}_-}^{(1)} = \log_{|\mathbb{H}_-}^{(1)} + 2\pi$; no es posible pues encontrar una solución global en \mathbb{C}^* pero nos encontramos un fenómeno de monodromía de la misma naturaleza que en el caso de las cubiertas, con \mathbb{Z} (representado por la traslación por múltiplos enteros de 2π) como maestro de ceremonias.

El estudio de la monodromía de ecuaciones diferenciales lineales es muy importante y, como muestra, aparece en el problema 21 de Hilbert [34] (me permito poner la referencia en francés, idioma más accesible para mí); fenómenos similares acaecen a ecuaciones como las hipergeométricas, o multitud de ecuaciones analíticas que provienen directamente de problemas de la física. En química se utiliza también el concepto de *monodromía cuántica* y responde también a los fenómenos de monodromía que aparecen en las ecuaciones

diferenciales que gobiernan algunos estados moleculares y que se ven afectados por *singularidades*, que esencialmente provocan la existencia de espacios base no simplemente conexos.

La teoría de fibrados es otro lugar donde aparece la monodromía, como veremos en §3. Un fibrado es una aplicación que localmente se comporta como un producto: un factor es un abierto de la base y el otro es la fibra; las cubiertas son un caso particular de fibrados donde la fibra es un espacio discreto. Por ejemplo, si $J := [-1, 1]$, la primera proyección $\pi : \mathbb{S}^1 \times J \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un fibrado. La proyección ortogonal de una banda de Möbius sobre su

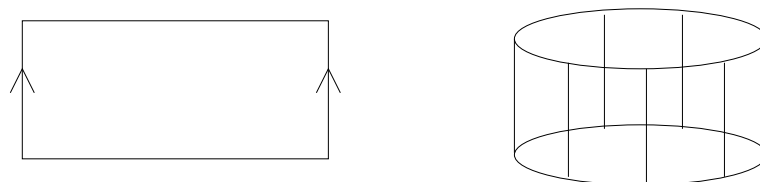


Figura 2.— El cilindro como fibrado

banda central también es una fibración y ambas comparten base y fibra. Podemos pensar en $\mathbb{S}^1 \times J$ como una familia de intervalos cerrados parametrizados por una circunferencia de manera que al dar una vuelta esta permanece inalterada; también podemos hacer lo mismo con la banda de Möbius, pero en este caso al volver al punto de partida el intervalo se ha dado la vuelta. En estos dos casos podemos considerar que estamos construyendo

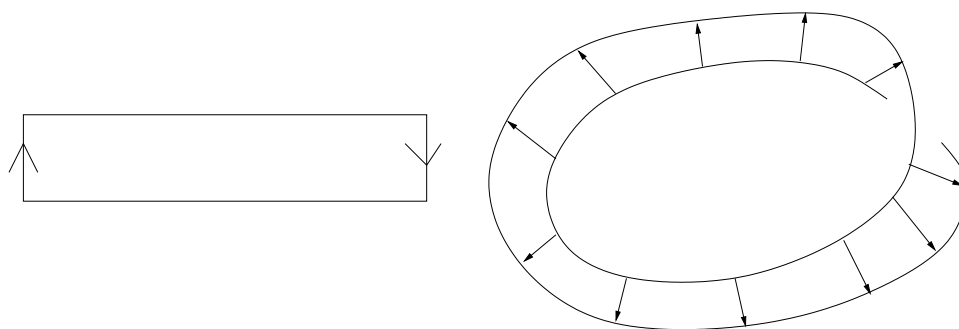


Figura 3.— La banda de Möbius como fibrado

los fibrados a partir de rectángulos (hojas de papel) en los que realizamos un pegado en los bordes (que se corresponde a la identidad o a una reflexión); las propiedades físicas de la hoja se traducen geoméricamente en que son los únicos homeomorfismos posibles de pegado. Cuando se trabaja con fibrados cualesquiera, la definición de monodromía no es rígida (solo está definida salvo isotopía, imaginemos que los rectángulos son de una materia más moldeable). Para poder encontrar conceptos más precisos de monodromía, se necesitan estructuras suplementarias, por ejemplo fibrados vectoriales o principales con conexión plana. Estos fibrados aparecen de manera natural en problemas de Geometría

Diferencial, Física o Geometría Algebraica. La monodromía de un fibrado vectorial con conexión plana está íntimamente ligada a las ecuaciones diferenciales lineales y a sus interpretaciones físicas.

Otro de los campos de las matemáticas donde la monodromía juega un papel muy importante es la teoría de singularidades, en la que se combinan aspectos de teoría de cubiertas, ecuaciones diferenciales, fibrados y propiedades aritméticas. Un pequeño repaso se hará en §4. Ebeling [26] realizó un excelente repaso sobre la monodromía. El estudio de las deformaciones de singularidades aparece en la teoría de cuerdas. También está ligado a la monodromía de funciones multivaloradas y estas al estudio topológico de variedades proyectivas (y cuasiproyectivas); en este caso la monodromía tradicional de las cubiertas se levanta a una monodromía en el grupo de trenzas y se hará un repaso de ella en §5.

La monodromía descansa fuertemente en la teoría de grupos. En la mayoría de las acepciones de monodromía, se trata de un homomorfismo entre dos grupos; el morfismo parte de la topología, del grupo de Poincaré de un espacio topológico, y llega a un grupo (grupo simétrico, grupo de trenzas, grupos lineales). Este morfismo mide la acción de la topología de un espacio sobre un fenómeno y tiene la virtud de discretizar problemas complicados y llevarlos a un terreno en el que a partir de métodos algebraicos y combinatorios se obtienen consecuencias para los campos de aplicaciones.

Este discurso se centrará en algunas versiones de la monodromía. En primer lugar, tratará la más *discreta*, la monodromía de los espacios recubridores: su origen, su relación con la teoría de Galois y sus aplicaciones a la teoría de grupos. A continuación, tratará sobre dos temas muy relacionados: los fibrados vectoriales con conexión plana y las ecuaciones diferenciales (mediante las cuales la monodromía aparece en el problema 21 de Hilbert). Los dos últimos temas analizan los aspectos donde aparecen algunas contribuciones del autor. Por una parte la monodromía de las singularidades, que hunde sus orígenes en la teoría de Picard-Lefschetz y que debe su desarrollo a matemáticos de la talla de Arnol'd, Gussein-Zade, Milnor, Deligne, Brieskorn y otros; además de los aspectos geométricos se expondrán las sorprendentes relaciones con la aritmética. Finalmente, se presentará la monodromía de trenzas, que debe su origen a los estudios de Zariski para extender la teoría de funciones multivaloradas de Riemann; nace con el método de Zariski-van Kampen al principio del siglo XX y renace en los años '80 con los trabajos de Moishezon. El discurso terminará con los últimos resultados obtenidos en monodromía de trenzas.

2. Monodromía de cubiertas

2.1. *El grupo fundamental*

La teoría de cubiertas o espacios recubridores está íntimamente ligada a los grupos

fundamentales. El grupo fundamental $\pi_1(X; x_0)$ de un espacio topológico X (conexo por caminos) en un punto x_0 es el grupo de las clases de homotopía de lazos basados en x_0 . Se trata de una construcción funtorial, por lo que si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, $y_0 := f(x_0)$, se obtiene un homomorfismo $f_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Y; y_0)$ que, de hecho, depende de la clase de homotopía de f . Se trata de uno de los invariantes algebraicos más importantes de los espacios topológicos y recibe también el nombre de grupo de Poincaré.

No solo hay que definir objetos matemáticos con propiedades interesantes; estos deben ser calculables. Por ejemplo, si $\#X = 1$ entonces $\pi_1(X; x_0)$ es el grupo trivial. Como ocurre muchas veces en matemáticas, a partir de datos triviales como este, se comienza a construir la teoría (y a obtener datos mucho menos triviales). En particular, cualquier *espacio contractible* (un espacio que se puede *deformar continuamente a un punto*) tiene grupo fundamental trivial. Muchos espacios topológicos importantes son contractibles: \mathbb{R}^n , $\forall n \in \mathbb{N}$, cualquier subconjunto convexo, un grafo sin ciclos. Los espacios con grupo fundamental trivial se llaman *simplemente conexos*.

El espacio topológico no simplemente conexo más sencillo es la circunferencia, que identificamos con $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. La manera más natural de calcular el grupo fundamental es utilizar la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) := \exp(2\sqrt{-1}\pi t)$.

Propiedades 2.1.1. *La aplicación f tiene las propiedades siguientes:*

(C1) *Dado $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\gamma(0) = 1$, existe un único levantamiento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ y $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

(C2) *Dos lazos basados en 1 son homótopos si y solo si sus levantamientos terminan en el mismo elemento (que debe estar en \mathbb{Z}).*

Como consecuencia, $\pi_1(\mathbb{S}^1; 1)$ es isomorfo a \mathbb{Z} .

Esta afirmación está detrás de los ejemplos de monodromía mencionados en la Introducción.

¿Y qué ocurre con el grupo fundamental de otros espacios? Por ejemplo, el caso de las esferas

$$\mathbb{S}^n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}, \quad n \geq 2,$$

o de los grafos con ciclos. El cálculo del grupo fundamental en estos casos (y en muchos otros) descansa en el Teorema de Seifert-van Kampen [41, 40, 66, 67]. Este teorema permite calcular el grupo fundamental de un espacio descompuesto como unión de dos abiertos con intersección conexa por caminos, como un producto amalgamado de los grupos de los abiertos por el grupo de la intersección. La demostración de Seifert es válida para complejos simpliciales, mientras que la de van Kampen se aplica al caso general; en §5 se comentará la historia de la demostración de van Kampen.

Gracias al Teorema de Seifert-van Kampen, se pueden calcular algunos grupos fundamentales. Por ejemplo, se demuestra que las esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$, son simplemente conexas, o que si Γ es un grafo con m ciclos independientes, entonces $\pi_1(\Gamma)$ es un grupo libre (¡no abeliano libre, si $m > 1$!) de rango m .

2.2. Espacios recubridores o cubiertas

La aplicación f de las Propiedades 2.1.1 (y de la espiral) no es un homeomorfismo (no puede serlo, no es biyectiva), pero sí que es un homeomorfismo local, incluso algo más, cada vez que tomamos un elemento $x \in \mathbb{S}^1$, podemos tomar un entorno *pequeño* U y la preimagen de U por f es una *multitud* de copias de U .

Definición 2.2.1. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios conexos es una *cubierta* si $\forall y \in Y$ existe un entorno abierto $U_y \subset Y$ y una descomposición $f^{-1}(U_y) = \coprod_{i \in I} V_i$ en unión disjunta de abiertos tal que la restricción $f_i := f|_{V_i} : V_i \rightarrow U_y$ es un homeomorfismo, $\forall i \in I$.

Sin entrar en tecnicismos, si tomamos un punto $y \in Y$ podemos ver los elementos de $F := f^{-1}(y)$ como sus *copias*. La definición señala que las *copias* de un entorno de y son entornos de los elementos de F ; es decir, las copias de los vecinos lo suficientemente cercanos a y son vecinos de algún elemento de F . Si un punto $y \in Y$ se *mueve*, sus copias se mueven con él y si tras ese recorrido, el punto y vuelve a su origen, las copias de y vuelven a ser copias de y pero eventualmente permutadas. En el caso de la espiral, si realizamos un movimiento *pequeño* de $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ de ida y vuelta, las copias (los elementos de \mathbb{Z}) vuelven al lugar de partida sin cambios. Sin embargo, cuando realizamos una vuelta entera, la copia $k \in \mathbb{Z}$ termina en la copia $k + 1$.

El párrafo anterior tiene el aspecto siguiente cuando se formaliza. La propiedad esencial de la teoría de cubiertas (cuando los espacios son lo *suficientemente buenos*) es la existencia y unicidad de levantamientos de caminos y homotopías de caminos, que tiene dos consecuencias esenciales.

Propiedades 2.2.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una cubierta entre espacios conexos y localmente conexos por caminos. Entonces:

(E1) La aplicación $f_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Y; f(x_0))$ es inyectiva; la imagen se corresponde con los lazos que se levantan a lazos.

(E2) Sea $g : Z \rightarrow Y$ continua, con Z conexo y localmente conexos por caminos, y sea $z_0 \in Z$ tal que $g(z_0) = f(x_0)$. Entonces, existe un levantamiento \tilde{g} como en el

diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & & (X, x_0) \\
 & \nearrow \tilde{g} & \downarrow f \\
 (Z, z_0) & \xrightarrow{g} & (Y, y_0)
 \end{array}$$

si y solo si $g_{\#}(\pi_1(Z; z_0)) \subset f_{\#}(\pi_1(X; x_0))$.

Consideremos una cubierta $f : X \rightarrow Y$ y fijemos $y_0 \in Y$. Denotemos $F := f^{-1}(y_0)$; F es una *fibra* de X . Por la definición de cubierta, F es un subconjunto discreto de X . Las propiedades de levantamientos de caminos implican lo siguiente.

Sea γ un lazo (camino cerrado) basado en y_0 ; fijemos $x_0 \in F$ y consideremos γ_{x_0} el único levantamiento de f que empieza en x_0 . Como γ es un lazo, podemos garantizar que γ_{x_0} termina en F (aunque es posible que no termine en x_0); denotemos $T_{\gamma}(x_0)$ el punto final. Hemos construido una aplicación $T_{\gamma} : F \rightarrow F$ y, por las propiedades de levantamiento de homotopías, T_{γ} solo depende de $[\gamma] \in \pi_1(Y; y_0)$. Si γ^- es el lazo γ recorrido en sentido inverso, $T_{\gamma^-} = T_{\gamma}^{-1}$ y $T_{\gamma_1 * \gamma_2} = T_{\gamma_2} \circ T_{\gamma_1}$. En resumen, T_{γ} es biyectiva y, si Σ_F es el grupo de las aplicaciones biyectivas de F , hemos construido por tanto un homomorfismo $\rho : \pi_1(Y; y_0) \rightarrow \Sigma_F$ tal que $\rho([\gamma]) = T_{\gamma}$.

Observación 2.2.3. Esta observación es puramente técnica. Para que ρ sea homomorfismo, y no anti-homomorfismo, supondremos que Σ_F actúa por la derecha sobre F ; de esta manera la composición de aplicaciones se escribe en el orden de actuación, como con la suma de caminos.

Definición 2.2.4. El homomorfismo ρ es la *monodromía* de la cubierta f .

La monodromía de la cubierta f es un invariante *discreto* (por contraposición a continuo) que codifica buena parte de las propiedades de la aplicación. De hecho, para reconstruir F necesitamos únicamente tener X y ρ .

Ejemplo 2.2.5. Supongamos que F es finito, $n := \#F$; en este caso, una numeración de F identifica Σ_F con Σ_n , el grupo simétrico de n cifras (que actúa a derecha sobre $\{1, \dots, n\}$). Consideremos la cubierta de la Figura 4. Gracias al Teorema de Seifert-van Kampen, se demuestra que el grupo $G := \pi_1(Y; y_0)$ es libre engendrado por γ_1, γ_2 . En este caso la monodromía $\rho : G \rightarrow \Sigma_3$ está dada por $\rho(\gamma_1) := (2, 3)$ y $\rho(\gamma_2) := (1, 2)$. La Figura 5 representa una cubierta infinita en la que las rectas verticales se enrollan en la circunferencia de la izquierda y las verticales en la de la derecha. En este caso la fibra se puede identificar con \mathbb{Z}^2 y la monodromía es la aplicación $\rho : G \rightarrow \Sigma_{\mathbb{Z}^2}$ en la que $\rho(\gamma_1)$ actúa por traslación vertical y $\rho(\gamma_2)$ actúa por traslación horizontal.

El Teorema Fundamental de la teoría de cubiertas señala que la monodromía determina la cubierta; es más, que cualquier homomorfismo ρ es la monodromía de una cubierta.

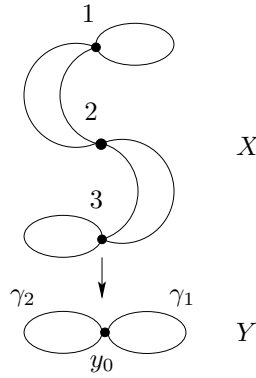


Figura 4.— Cubierta de 3 hojas

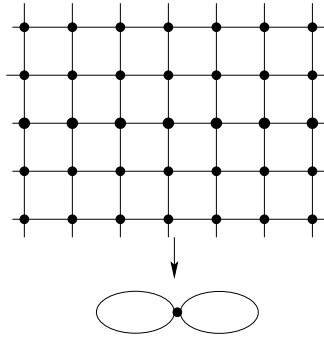


Figura 5.— Cubierta infinita

Teorema 2.2.6. *Sea Y un espacio topológico conexo y localmente contractible (se puede ser menos exigente), sea $y_0 \in Y$, sea F un conjunto y sea $\rho : \pi_1(Y; y_0) \rightarrow \Sigma_F$ un homomorfismo transitivo. Entonces, existe una única cubierta $f : X \rightarrow Y$ (salvo isomorfismo) tal que ρ es la monodromía de la cubierta. Existe una identificación entre $f^{-1}(y_0)$ y F de manera que si $x_0 \in F$, entonces*

$$f_{\#}(\pi_1(X; x_0)) = \{g \in \pi_1(Y; y_0) \mid x_0^{\rho(g)} = x_0\}.$$

Por tanto, para estudiar todas las cubiertas de Y debemos proceder así.

Sea $K < G := \pi_1(Y; y_0)$ un subgrupo; consideremos el morfismo $\rho : G \rightarrow \Sigma_{G/K}$ inducido por la traslación (a derecha) en G/K . Sea $f : X \rightarrow Y$ la cubierta de monodromía ρ en la que $\pi_1(X)$ es isomorfo a K . Si K es normal y $H := G/K$, la cubierta se dice *regular* o de *Galois*. Se puede definir una acción (libre y propiamente discontinua) de H en X de manera $Y \cong X/H$ y f es la proyección cociente.

Si K es el grupo trivial, X es simplemente conexo y f se llama la *cubierta universal* de X . Todo espacio se puede obtener como el cociente por la acción libre y propiamente discontinua de un grupo sobre un espacio simplemente conexo.

Ejemplo 2.2.7. La teoría de cubiertas está ligada al grupo fundamental salvo en el caso de espacios patológicos. Podemos considerar por ejemplo, el *Círculo de Varsovia* de la

Figura 6. Se trata de un espacio con grupo fundamental trivial pero con cubiertas no

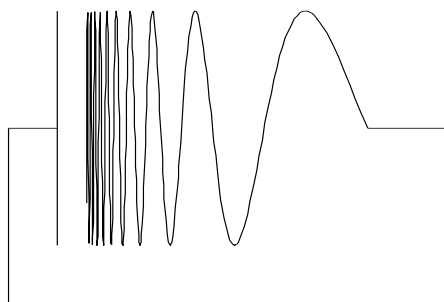


Figura 6.— Círculo de Varsovia

triviales como se ve en la Figura 7. Su patología reside en que no es localmente conexo por caminos.

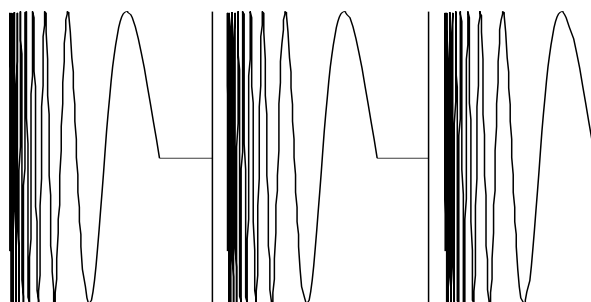


Figura 7.— Cubierta del círculo de Varsovia

En ocasiones, es bueno permitir *singularidades* en las cubiertas y considerar cubiertas ramificadas. Esto es particularmente útil en Geometría Algebraica y en Topología Geométrica. Por ejemplo, toda 3-variedad compacta orientada se obtiene como cubierta (de tres hojas) de S^3 con ramificaciones a lo largo de un nudo, resultados demostrado independientemente por Hilden [35] y Montesinos [57]. Thurston [71] demostró que toda variedad es cubierta ramificada de algunos enlaces concretos. Los nudos y enlaces universales más importantes son entre otros el nudo lasca, el enlace de Whitehead y los anillos de Borromeo; Mike Hilden, María Teresa Lozano y José María Montesinos [36, 37] demostraron su carácter universal y lo utilizaron para estudiar geoméricamente las 3-variedades.

2.3. Aplicaciones a la teoría de grupos y relación con la Teoría de Galois

La teoría de cubiertas debe muchas de sus propiedades a la teoría de grupos, pero se trata de una teoría agradecida a sus fuentes y sirve como técnica para probar resultados puramente algebraicos de grupos.

Consideremos la teoría de presentaciones finitas de grupos. Una presentación de un grupo tiene dos partes. En primer lugar un conjunto \mathbf{A} de letras o alfabeto; a partir de este conjunto consideramos el grupo libre $\mathbb{F}_{\mathbf{A}}$, es decir, todas las palabras que se escriben con las letras de \mathbf{A} , y sus inversas. En segundo lugar, consideramos un conjunto \mathbf{R} de elementos de $\mathbb{F}_{\mathbf{A}}$. Diremos que $\langle \mathbf{A} \mid \mathbf{R} \rangle$ es una presentación de un grupo G si este es isomorfo al cociente de $\mathbb{F}_{\mathbf{A}}$ por el subgrupo normal engendrado por \mathbf{R} .

Por otra parte, podemos considerar la teoría de clases de homotopía de complejos celulares finitos de dimensión 2. Se trata de espacios topológicos Hausdorff que se expresan como unión disjunta de un número finito de vértices, intervalos abiertos y 2-discos abiertos, de manera que la clausura de cada intervalo abierto se obtiene añadiendo (uno o dos) vértices, y la clausura de cada disco se obtiene añadiendo vértices y aristas. Esencialmente, estas dos teorías son equivalentes. Dado un complejo celular conexo, se le puede asociar su grupo fundamental y a una presentación se le asocia un complejo celular con un vértice, $\#\mathbf{A}$ aristas y $\#\mathbf{R}$ 2-células.

La teoría de presentaciones finitas de grupos es muy útil para estudiar tanto teórica como efectivamente los grupos, pero tiene graves problemas. De manera independiente Adyan [2] y Rabin [62] demostraron que ningún algoritmo puede decidir si dos presentaciones dan lugar a grupos isomorfos (de hecho no hay algoritmos para determinar si una presentación da lugar al grupo trivial). Se sabe que hay un número finito de movimientos de cuatro tipos (las *jugas* de Tietze [72]) que relacionan dos presentaciones isomorfas. Sin embargo, este resultado es no constructivo.

Dos resultados muestran la utilidad de la teoría de cubiertas para la teoría de grupos: el Teorema de Kurosh [46] y el algoritmo de Reidemeister-Schreier. Una consecuencia (importante) del Teorema de Kurosh, demostrada por Schreier [65], se puede explicar brevemente. Si Γ es un grupo libre, cualquier subgrupo suyo es libre; basta utilizar teoría de cubiertas y que el grupo fundamental de un grafo es libre. El algoritmo de Reidemeister-Schreier, que aparece en [65], permite encontrar una presentación de un subgrupo K de un grupo G : se parte de un 2-complejo de grupo fundamental G y se construye la cubierta de grupo K . Este algoritmo está en continua evolución y se usa en programas de cálculo simbólico como GAP [30].

Es posible dar una aproximación de lo que estudia la teoría de Galois [29] señalando que se ocupa de las *permutaciones permisibles* entre las raíces de un polinomio. Precisemos un poco más el concepto. Fijamos un cuerpo K y un polinomio $p(t) \in K[t]$ de grado positivo. Existe un único cuerpo L mínimo que contiene a K y a las raíces de p ; L/K es una extensión algebraica y se dice que L es el cuerpo de descomposición de p sobre K . Los automorfismos de L que fijan K forman el llamado grupo de Galois $\text{Gal}(L/K)$ de la extensión. Cada elemento del grupo determina y es determinado por una permutación de las raíces de p y estas son las permutaciones que hemos llamado permisibles. El estudio de

estos grupos fue determinante para el resultado principal de Galois, que determina cuándo las raíces se pueden calcular usando radicales. Por supuesto, en el origen del problema $K = \mathbb{Q}$, pero la formalización permite aplicarlo a cualquier cuerpo.

En particular podemos aplicarlo a $\mathbb{C}(t)$, el cuerpo de cocientes de polinomios con coeficientes complejos; en Geometría Algebraica, este es el cuerpo de las funciones racionales de la recta proyectiva. De manera más general podemos tomar como K el cuerpo de funciones sobre una variedad algebraica cualquiera Y . En este caso, si tomamos un polinomio irreducible $p(t) \in K[t]$, podemos encontrar una extensión L/K tal que L es el cuerpo de descomposición de p sobre K . De nuevo la Geometría Algebraica sale en nuestra ayuda y L es el cuerpo de funciones racionales de una variedad algebraica X de la misma dimensión que Y . La inclusión $K \subset L$ determina una aplicación $f : X \rightarrow Y$ (en general, racional, pero no vamos a definir aquí este concepto); es más, podemos elegir X e Y de manera que f sea una cubierta.

En §2.2 las cubiertas podían ser infinitas o tener un número finito de hojas. Las cubiertas que aparecen con este lenguaje algebraico son siempre finitas, por lo que provienen de subgrupos de índice finito del grupo fundamental de la base. Varias consecuencias se extraen de este contexto (no sin dificultades técnicas):

- Existe un grupo que mide únicamente las cubiertas (de Galois) finitas de Y ; se le llama el grupo fundamental algebraico y se denota $\pi_1^{\text{alg}}(Y)$. Se trata de la completación profinita de $\pi_1(Y)$.
- Cuando Y es una variedad definida en un cuerpo de números K en lugar de \mathbb{C} , hemos perdido la topología por lo que no es posible definir $\pi_1(Y)$ pero sí $\pi_1^{\text{alg}}(Y)$. Además, $\pi_1^{\text{alg}}(Y)$ es invariante por la acción de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
- Supongamos que Y está definida en $K := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Se obtienen dos variedades algebraicas complejas Y_+ e Y_- a partir de las inclusiones de K en \mathbb{C} : una envía $\sqrt{5}$ se sobre sí mismo y la otra sobre su opuesto. Estas variedades algebraicas complejas con las mismas propiedades algebraicas pueden no compartir las propiedades topológicas.
- Cuando se trabaja con variedades algebraicas sobre cuerpos de característica positiva, se pueden definir también grupos fundamentales algebraicos.
- Como en la Introducción, podemos interpretar las cubiertas como funciones multivaloradas (eventualmente con valores vectoriales). Entroncamos de esta manera con la teoría de superficies de Riemann asociadas a una función multivalorada, introducida por el propio Riemann. Este punto se desarrollará en §5.

3. Monodromía de fibrados planos y ecuaciones diferenciales

3.1. Espacios fibrados

La monodromía aparece también en la teoría de fibrados localmente triviales. Un fibrado localmente trivial es un espacio que localmente parece el producto de una base por una fibra. Esta situación ya ocurría en las cubiertas: localmente una cubierta es el producto de un abierto *pequeño* de la base por una nube de productos aislados (técnicamente, un espacio discreto). Como en el caso de las cubiertas la monodromía va a medir el efecto de los desplazamientos en la base sobre la fibra. A diferencia del caso de las cubiertas, ni la monodromía tiene una definición tan cerrada ni sirve para explicar todo el comportamiento del fibrado. A partir de ahora cuando hablemos de fibrados, el término *localmente trivial* quedará implícito.

Un fibrado de fibra F y base X es un espacio topológico E con una aplicación $\pi : E \rightarrow X$ tal que $\forall x \in X$ existe un entorno abierto V_x de x en X y un homeomorfismo $\Phi_{V_x} : V_x \times F \rightarrow \pi^{-1}(V_x)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} V_x \times F & \xrightarrow{\Phi_{V_x}} & \pi^{-1}(V_x) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \pi| \\ & & V_x \end{array}$$

es decir, la composición $\pi \circ \Phi_{V_x}$ es la primera proyección. La aplicación Φ_{V_x} se llama *carta fibrada* o *trivialización*. Todas las fibras de π son homeomorfas a F y *localmente* π se comporta como un producto. Los productos son los primeros ejemplos de fibrados y nos referiremos a ellos como *fibrados triviales*; un homeomorfismo a un producto es una *trivialización global*. En la Introducción hemos vistos dos ejemplos de fibrados sobre \mathbb{S}^1 ; la banda de Möbius es uno de los ejemplos más sencillos de fibrado no trivial. El problema principal en la teoría de fibrados, como en cualquier teoría matemática es la clasificación de los fibrados en términos de propiedades de la base y la fibra. Obviamente si la base es un punto el único fibrado posible es el trivial. La buena relación entre fibrados y homotopía permite enunciar el siguiente resultado clásico.

Teorema 3.1.1. *Si X es contractible el fibrado es trivial, es decir, E es homeomorfo a $X \times F$, mediante un homeomorfismo que envía π a la primera proyección.*

Vamos a ver la aplicación de este resultado a un espacio no contractible como \mathbb{S}^1 . Sea $\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^1$ un fibrado de fibra F , que identificamos con $\pi^{-1}(1)$. Consideremos la aplicación de *pegado* $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $g(t) := \exp(2\sqrt{-1}\pi t)$ y el *pull-back*

$$g^*E := \{(t, e) \in [0, 1] \times E \mid \pi(e) = g(t)\}.$$

La primera proyección $\pi_{[0,1]}$ induce un fibrado sobre $[0, 1]$ de fibra F . Por el Teorema 3.1.1 tenemos un homeomorfismo ϕ que encaja en el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times F & \xrightarrow{\phi} & g^*E \\ \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & [0, 1]; & \end{array}$$

las fibras sobre 0 y 1 se identifican a F . Consideremos la aplicación $\rho : F \rightarrow F$ dada por $\phi(x, 1) = (1, \rho(x))$. Esta aplicación se llama la *monodromía del fibrado* y E se puede reconstruir topológicamente a través de ρ ya que es homeomorfo al siguiente espacio topológico.

Se define una relación de equivalencia en $[0, 1] \times F$; dos elementos están relacionados si y solo si son iguales o bien son $(1, x)$ y $(0, \rho(x))$. El cociente $[0, 1] \times F / \sim$ es homeomorfo a E y se puede interpretar como si estuviéramos pegando $F \times \{0\}$ y $F \times \{1\}$ mediante la monodromía ρ . Como ϕ no es único (admite deformaciones) la monodromía ρ está bien definida solo salvo isotopía.

Podemos interpretar la monodromía de este fibrado como un homomorfismo de grupos entre $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S}^1)$ y el grupo $\text{Iso}(F)$ que es el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos de F . En general, la monodromía de un fibrado será un homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \text{Iso}(F)$ que se obtendrá aplicando a cada lazo el proceso que acabamos de describir.

La monodromía de un fibrado ya no es un invariante completo. Hay espacios topológicos simplemente conexos (sobre los que toda monodromía es trivial) que admiten fibrados no triviales, por ejemplo la fibración de Hopf de la esfera de dimensión 3 sobre la esfera de dimensión 2. Hay que acudir a nuevos invariantes, los grupos de cohomología, para clasificar los espacios fibrados.

3.2. Fibrados vectoriales planos

La teoría de fibrados es más interesante cuando estos tienen estructuras suplementarias. En primer lugar, es habitual que la base, la fibra y el espacio total sean no solo espacios topológicos, sino también algo más: variedades topológicas, diferenciables, riemannianas, analíticas (sobre \mathbb{R} o \mathbb{C}), algebraicas. A la fibra se le puede pedir además que tenga estructuras suplementarias (normalmente algebraicas): espacios vectoriales (sobre \mathbb{R} o \mathbb{C}), grupos de Lie, espacios proyectivos, grassmannianas, etc. Se pide además que las operaciones asociadas *varíen* apropiadamente con respecto a la base (diferenciablemente, holomórficamente, algebraicamente, isométricamente). Particularmente en el caso de espacios vectoriales también se pueden respetar estructuras suplementarias (orientación, un producto escalar, una forma simpléctica, etc) y todas estas cuestiones se relacionan con determinados grupos de Lie ($\text{GL}(n; \mathbb{R})$, $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$, $\text{GL}(n; \mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$,

etc). Todas estas estructuras (y alguna más que citaremos más adelante) son conceptos con formato matemático que vienen de la física (por ejemplo para entender los campos electromagnético y gravitacional).

Para facilitar el orden del discurso, fijaremos uno de los posibles escenarios en los que podemos trabajar con fibrados. Supondremos que X , E y F total son variedades analíticas complejas y que la aplicación $\pi : E \rightarrow X$ es holomorfa. Además, supondremos que la fibra F es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión k (fijando una base podemos suponer que es \mathbb{C}^k). Para que todas las fibras $E_x := \pi^{-1}(x)$ sean \mathbb{C} -espacios vectoriales y para que las operaciones varíen holomórficamente, necesitaremos utilizar grupos de Lie. Veamos cómo.

Si tenemos dos cartas fibradas $\Phi_U : U \times \mathbb{C}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ y $\Phi_V : V \times \mathbb{C}^k \rightarrow \pi^{-1}(V)$, la aplicación

$$\Phi_{V,U} := \Phi_V \circ \Phi_U^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^k \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{C}^k$$

se puede expresar de la forma $\Phi_{V,U}(x, u) = (x, g_{V,U}(x)(u))$, donde $g_{V,U}(x) : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ es un isomorfismo analítico. La estructura de espacio vectorial se obtiene cuando $g_{V,U}(x) \in \text{GL}(k; \mathbb{C})$ y la aplicación $g_{V,U} : U \cap V \rightarrow \text{GL}(k; \mathbb{C})$ es holomorfa; existe una estructura suplementaria cuando la imagen de esta aplicación cae en un subgrupo de Lie de $\text{GL}(k; \mathbb{C})$ (que respeta dicha estructura). De esta manera conseguimos que las fibras sean naturalmente espacios vectoriales. Cuando tenemos fibrados vectoriales podemos hacer operaciones de álgebra lineal con ellos: sumas directas, duales, productos tensoriales, etc. Estos procesos son particularmente útiles en física.

Otro elemento importante en la teoría de fibrados son las secciones (locales o globales). Se trata de aplicaciones holomorfas de un abierto de la base en el espacio total de manera que la imagen de cada punto es un elemento de su fibra. Podemos sumar secciones y multiplicarlas por funciones.

Para el fibrado vectorial trivial $X \times \mathbb{C}^k$ las secciones se identifican con las funciones vectoriales $X \rightarrow \mathbb{C}^k$ holomorfas. En el caso general, a partir de las trivializaciones, las secciones son familias de funciones vectoriales que se comportan bien por los cambios de carta o funciones de transición. Cuando se estudian localmente fibrados en física, es habitual suponer que se tiene un fibrado trivial en un abierto de \mathbb{C}^n (o de \mathbb{R}^n), por lo que los fenómenos físicos que estudia un fibrado se miden mediante funciones vectoriales. El tipo de comportamiento de estas funciones con respecto a los cambios de coordenadas determina el tipo de fibrado; según este tipo, las funciones vectoriales dan lugar a un campo tangente, a una r -forma diferencial o un tensor covariante o contravariante. Los dos lenguajes (el basado en las coordenadas y el formal) convergen en una misma teoría.

Las secciones de fibrados que provienen de la física admiten derivaciones con respecto a determinadas direcciones. Dada una variedad analítica conexa X , una función vectorial $\sigma : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ holomorfa y un campo vectorial holomorfo T , un matemático *sabe derivar*

y obtener una función $T(\sigma)$. Aprovechando el lenguaje de formas diferenciables, sabe obtener la diferencial $d\sigma \in (\Omega_X^1(X))^k$. Además, $d\sigma = 0$ (o equivalentemente $T(\sigma) = 0 \forall T$) si y solo si σ es localmente constante.

¿Cómo se da forma a este concepto en otros fibrados? La respuesta la dan las conexiones (o derivaciones covariantes). Una conexión ∇ en el fibrado vectorial E asigna a una sección local σ y a un campo holomorfo T una sección local $\nabla_T\sigma$ (de manera \mathbb{C} -lineal) y tal que si h es una función local se cumple la regla de Leibniz:

$$\nabla_T h\sigma = T(h)\sigma + h\nabla_T\sigma.$$

Dicho de otro modo dada una sección local σ se obtiene (de manera \mathbb{C} -lineal) una sección local $\nabla\sigma$ de $\Omega_M^1 \otimes E$ tal que si h es una función local se cumple:

$$\nabla h\sigma = dh \otimes \sigma + h\nabla\sigma.$$

Vamos a ver estas definiciones desde un punto de vista más computacional (y más cerca de como lo vería un físico). Si tenemos una trivialización local, podemos definir una base $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de secciones locales de E . La conexión viene definida por una matriz ω de 1-formas holomorfas de tamaño $k \times k$ tal que podemos escribir en notación matricial:

$$(\nabla\sigma_1 \dots \nabla\sigma_k) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)\omega. \quad (3.1)$$

Si el abierto en el que trabajamos lo vemos como un abierto de \mathbb{C}^n , las 1-formas están generadas por dx_1, \dots, dx_n ; los coeficientes de las entradas de ω en estos generadores son los símbolos de Christoffel de la conexión.

Si tenemos otra base local τ_1, \dots, τ_k , otra matriz η de 1-formas define la conexión en este caso. Además, las dos bases vienen relacionadas por una matriz g de cambio de base, matriz inversible de funciones holomorfas, mediante la fórmula

$$(\tau_1 \dots \tau_k) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)g.$$

Gracias al simbolismo del producto de matrices es fácil obtener la relación:

$$\eta = g^{-1}\omega g + g^{-1}dg. \quad (3.2)$$

De manera global estos cambios están relacionados con las *gauge transformations*.

La definición anterior permite también derivar a lo largo de trayectorias (camino para un matemático). De esta manera una conexión da cierta rigidez a un fibrado. Si tenemos un camino en la base que empieza en un punto x y termina en un punto y , y un elemento $s_x \in E_x$ existe una única sección s cuya derivada se anula a lo largo del camino (llamada sección paralela) y con valor inicial s_x ; esta sección terminará en un punto $s_y \in E_y$. Esta operación determina una aplicación $E_x \rightarrow E_y$ que resulta ser un isomorfismo \mathbb{C} -lineal.

Cuando esta operación se realiza sobre lazos basados en x obtenemos una aplicación del espacio de lazos que a cada lazo γ le asocia un elemento de $GL(E_x)$. Esta operación se llama *holonomía*; se comporta bien con respecto a la suma de lazos pero en general no depende exclusivamente de la clase de homotopía del lazo.

Una sección σ se dice *plana* si $\nabla\sigma = 0$. A diferencia de lo que ocurre en el caso del fibrado trivial, no todo fibrado posee secciones planas y menos todavía posee bases locales de secciones planas. Supongamos que un fibrado tiene bases locales de secciones planas. Para las secciones planas la ecuación (3.2) se convierte en $g^{-1}dg = 0$, es decir, $dg = 0$ o lo que es equivalente, las funciones de transición deben ser localmente constantes. Es obvio que esto restringe enormemente los fibrados con conexiones planas.

En los fibrados planos, usando en particular la propiedad de las funciones de transición localmente constantes, se puede ver que la holonomía depende solo del tipo de homotopía por lo que se llama *monodromía* de la conexión. La monodromía viene definida como un homomorfismo $\rho : \pi_1(X; x) \rightarrow GL(k; \mathbb{C})$, que se construye a partir del transporte paralelo. La monodromía así definida permite encontrar representantes rígidos de la monodromía indicada en §3.1.

Como ocurre con los fibrados cuya base es \mathbb{S}^1 , en los fibrados planos la monodromía permite reconstruir el fibrado y no hacen falta invariantes cohomológicos de orden superior. De hecho, dado cualquier homomorfismo $\rho : \pi_1(X; x) \rightarrow GL(k; \mathbb{C})$ vamos a construir un fibrado vectorial plano de monodromía ρ .

Para ello se parte del producto $\tilde{X} \times \mathbb{C}^k$, donde $g : \tilde{X} \rightarrow X$ es la cubierta universal de X . Consideremos la acción a derecha de $G := \pi_1(X; x)$ sobre \tilde{X} (fijando $\tilde{x} \in g^{-1}(x)$). El grupo G actúa sobre este producto: $(\tilde{m}, v)^g := (\tilde{m}^g, \rho(g^{-1}) \cdot v)$. Como la acción es analítica, libre y propiamente discontinua el cociente $\tilde{X} \times_G \mathbb{C}^k$ es una variedad analítica y la aplicación natural $\pi : \tilde{X} \times_G \mathbb{C}^k \rightarrow X$ es un fibrado vectorial plano con monodromía ρ .

A partir de la definición de cubierta, es sencillo definir la conexión; si se toman como base de las cartas los entornos de la definición de cubiertas, basta tomar como formas ω las formas nulas. La definición del fibrado permite comprobar que los cambios de coordenadas de estas cartas son localmente constantes; de esta manera controlamos cuáles serán las secciones planas (aquellas que al levantarlas a \tilde{X} son constantes). Siempre es posible construir secciones planas locales pero la posibilidad de extenderlas globalmente está condicionada a las propiedades de la monodromía ρ .

3.3. Secciones planas y ecuaciones diferenciales

En §3.2 se ha dado la construcción general de los fibrados vectoriales planos con la ayuda de la teoría de cubiertas y teniendo a la monodromía como principal ingrediente.

Esto permite tener un conocimiento teórico completo de los fibrados planos. Sin embargo, los fibrados que aparecen en la naturaleza (¡y aparecen!) pueden tener camuflado su carácter plano. El problema se resuelve con facilidad cuando se conoce una base de secciones planas, pero ¿cómo encontrarlas? Es más, ¿cómo podemos saber a priori si existen?

Si un físico se enfrenta a este problema, buscará encontrar ecuaciones para la conexión de un fibrado a partir de una base $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ que haya podido calcular. Una sección σ se escribe de la forma $\sigma = \sum_{j=1}^k f_j \sigma_j$, donde f_1, \dots, f_k son funciones holomorfas.

Para poder simplificar la escritura de las ecuaciones se utiliza notación matricial. Denotamos $(\sigma) := (\sigma_1 \dots \sigma_k)$ (matriz fila de secciones) y $(f) := {}^t(f_1 \dots f_k)$ (matriz columna de funciones holomorfas); la expresión anterior se escribe matricialmente como $\sigma = (\sigma)(f)$. Por tanto, utilizando la ecuación (3.1) resulta que σ es plana si y solo si f cumple:

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_k \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal. Para que la ecuación (3.3) tenga solución (en un abierto simplemente conexo) debe satisfacer las condiciones de integrabilidad; podemos resumirlas en la siguiente ecuación matricial:

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0. \quad (3.4)$$

En general, el término de la izquierda de la ecuación (3.4) corresponde a la expresión local de la curvatura de la conexión y es un elemento de $\Omega_X^2 \otimes \text{End}(E)$. La traza, el determinante y el resto de los coeficientes del polinomio característico de esta expresión son formas holomorfas cerradas y dan lugar a las clases de Chern del fibrado, vía la cohomología de Dolbeaut-de Rham; las clases dependen del fibrado y no de la conexión. Se trata de invariantes topológicos del fibrado que actúan como obstrucciones a la posibilidad de dotar al fibrado de conexiones planas.

Cuando $\dim X = 1$, es decir en el caso de superficies de Riemann, se cumple trivialmente la ecuación (3.4). Por tanto, toda conexión de un fibrado vectorial sobre una superficie de Riemann es plana y podemos encontrar bases de secciones locales planas. La existencia de secciones globales planas depende de la monodromía.

Para encontrar ecuaciones diferenciales lineales con soluciones locales pero no globales no hace falta ir muy lejos. Consideremos la siguiente familia de ecuaciones diferenciales parametrizadas por $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$f'(t) = \frac{\alpha}{t} f(t), \quad t \in \mathbb{C}^*. \quad (3.5)$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma $f(t) := ct^\alpha$, donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante y t^α se *define* como $\exp(\alpha \log(z))$. Como $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ es cíclico infinito, para conocer la

monodromía basta calcular el efecto de dar una vuelta anti-horaria en torno al origen y el resultado es que la solución se multiplica por $\exp(2\sqrt{-1}\pi\alpha)$; por tanto solo hay soluciones globales si $\alpha \in \mathbb{Z}$.

El problema 21 de Hilbert [34] dice lo siguiente: determinar si existe un sistema de ecuaciones diferenciales lineales definidas en $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con coeficientes meromorfos (teniendo como máximo polos simples) y con acción de monodromía prefijada en el complemento de los polos. Este problema también se conoce como el problema de Riemann-Hilbert y se puede extender a superficies de Riemann; para extenderlo a dimensión superior hay que pedir que el fibrado asociado tenga curvatura nula. En 1908 Plemelj [59] afirmó que la respuesta a la pregunta es afirmativa; sin embargo, en 1989 Bolibrukh [14] demostró que la demostración de Plemelj no era correcta para el caso general, mediante la construcción de un contraejemplo. La teoría general ha tenido un desarrollo espectacular en Geometría Algebraica sobre todo a partir de los trabajos de Deligne [20].

4. Monodromía en teoría de singularidades

4.1. *Elogio de los números complejos*

Durante esta sección me voy a ocupar de singularidades de funciones y subconjuntos de variedades. No es razonable trabajar en la generalidad de los espacios topológicos y el marco adecuado serían las variedades diferenciables y las funciones diferenciables, especialmente gracias al Teorema de la Función Implícita que permite caracterizar cuándo la fibra de una aplicación diferenciable es una subvariedad.

Sin embargo, no va a ser ese el marco elegido; esencialmente se sustituye \mathbb{R} por \mathbb{C} , y la palabra diferenciable por la palabra analítica. Hay varias razones para ello. Una de ellas es que la categoría diferenciable es demasiado general y admite singularidades demasiado salvajes; esto se podría resolver restringiendo las aplicaciones permitidas (por ejemplo, quedarnos solo con funciones analíticas o directamente trabajar en Geometría Algebraica Real). Otra razón es la dificultad de los problemas; suena paradójico pero es más complicado trabajar con funciones reales que con funciones complejas.

Por estas razones, un vistazo rápido a la bibliografía existente en este tema, deja claro que la mayor parte de los trabajos se centran en el caso complejo (o bien, trabajan con la generalidad de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero pero con la intuición geométrica que proviene de los complejos). En descargo de la comunidad matemática que se ocupa de estos problemas, esta actitud es más de realismo (otra paradoja para preferir lo complejo a lo real) que de comodidad. Los problemas en el campo complejo son abordables. Es más, eso no significa que se olviden los problemas reales (reales por \mathbb{R}), como muestran algunos de los problemas de Hilbert, sino que estos se atacan desde el punto de vista complejo. Importantes avances de la Geometría Algebraica Real

durante el siglo XX se deben a considerar espacios $X_{\mathbb{R}}$ definidos por ecuaciones reales de la siguiente manera: se considera el espacio $X_{\mathbb{C}}$ de las soluciones complejas y se estudia el comportamiento de este con respecto a la acción de la conjugación compleja.

Un observador externo puede pensar que los números complejos nacen de una necesidad estética de las matemáticas (esas necesidades existen, por otra parte). No es de recibo que una ecuación tan simple como $x^2 + 1 = 0$ no tenga solución. A los griegos ya les molestaba que la ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tuviera soluciones racionales; sin embargo, el Teorema de Pitágoras ofrece una justificación geométrica para su existencia. Aunque los números reales no ven su definición más rigurosa hasta el siglo XIX, de alguna manera ya estaban aceptados con anterioridad.

Cardano, Vieta y Bombelli demostraron la utilidad de los números complejos antes de ser definidos y los utilizaron para encontrar soluciones (reales) de ecuaciones cúbicas; la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas (que ha tenido menos fortuna en el imaginario colectivo que la que resuelve ecuaciones cuadradas) puede contener raíces cuadradas de números negativos, pero si uno trabaja *alegre pero cuidadosamente* con ellas obtiene además la solución real buscada.

Muy pronto se utiliza la representación de los complejos en un plano (identificando \mathbb{R}^2 y \mathbb{C}) y de la necesidad se hace virtud ya que las expresiones complejas sirven para expresar de manera sencilla cuestiones geométricas, por ejemplo, la orientación (que proviene de elegir como $\sqrt{-1}$ una de las dos posibles raíces) o las rotaciones de noventa grados (la multiplicación por $\sqrt{-1}$).

La recta compleja (que es un plano) tiene una propiedad trivial pero esencial: si quitamos un número finito de puntos, sigue siendo conexa (podemos viajar continuamente de un punto a otro sin salirnos de la recta compleja sin los puntos omitidos), lo que no ocurre con la recta real. Esta simple característica está en el origen de muchas propiedades sutiles de la geometría, el álgebra y el análisis realizados a partir de los números complejos. Las razones estéticas y prácticas también están presentes: el enunciado del Teorema de Bezout daría dolores de cabeza sin utilizar \mathbb{C} (o un cuerpo algebraicamente cerrado) y geometría proyectiva.

Las superficies compactas y orientables también se pueden estudiar desde los complejos. La esfera es la recta proyectiva, el toro es el cociente de \mathbb{C} por un retículo y el resto de las superficies se obtienen también como cociente de un disco por un subgrupo de isomorfismos analíticos (y la teoría de cubiertas es esencial en esta historia).

En §3.2 he presentado propiedades de los fibrados vectoriales complejos y, por extensión, de las ecuaciones diferenciales lineales analíticas. De nuevo, estudiar el caso complejo, no significa salirse de la *realidad*. Por ejemplo, las funciones armónicas aparecen en aplicaciones de las matemáticas. A partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, una función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa, es decir, las funciones

holomorfas son útiles para las matemáticas, pero también para sus aplicaciones.

El análisis complejo es una herramienta fundamental en la Geometría Algebraica Compleja y permite demostrar enunciados puramente algebraicos de manera mucho más sencilla, gracias a las propiedades de las funciones holomorfas. El Principio de Lefschetz, demostrado por Tarski [70], permite trasladar esos resultados a cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

4.2. La teoría de Milnor

El objetivo de la teoría de singularidades compleja es comprender el comportamiento de espacios analíticos que no son *lisos*, es decir, que localmente no son analíticamente difeomorfos a ningún espacio \mathbb{C}^k . El estudio de las singularidades se hace tanto desde el punto de vista abstracto como encajado. Todas las técnicas de estudio de las singularidades pasan por comparar un espacio singular con espacios lisos asociados.

Vamos a centrar el estudio en el caso de hipersuperficies. Consideremos una función analítica $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, donde U es un entorno abierto del origen en \mathbb{C}^{n+1} , $n \geq 1$, y $f(0) = 0$. Como nos interesa el comportamiento local en el origen si es necesario sustituimos U por un entorno más pequeño. Denotaremos $V := f^{-1}(0)$. Si $df(0) \neq 0$, entonces V es *liso* en el origen, por el Teorema de la Función Implícita. Tomando V lo *suficientemente pequeño*, existe un isomorfismo analítico, que convierte f en una función coordenada. Por ello, el caso interesante ocurre cuando $df(0) = 0$; en este caso la singularidad se dice *aislada* si es el único punto con esta propiedad en un entorno del origen; supondremos a partir de ahora que $df(x) \neq 0$ si $x \in U \setminus \{0\}$.

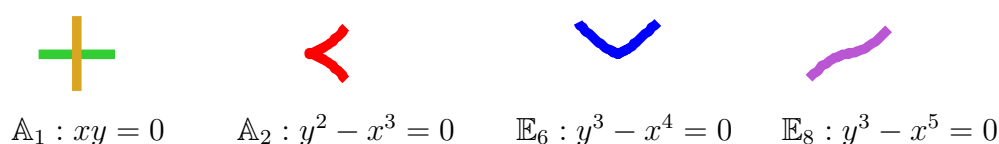


Figura 8.— Singularidades de curvas

La Figura 8 contiene algunas singularidades de curvas. Por razones obvias no se han hecho los dibujos en \mathbb{C}^2 sino que se presenta solo su parte real. Los dos primeros dibujos ayudan a comprender algo las características de los puntos singulares (complejos) que representan, nodos y cúspides ordinarias. Con los dos últimos ejemplos es mucho más complicado; de hecho son gráficas reales de funciones diferenciables (no infinitas veces).

Las Figuras 9 y 10 representan dos singularidades aisladas de superficie y han sido dibujadas mediante el programa SURFER. La primera es una singularidad que (como espa-

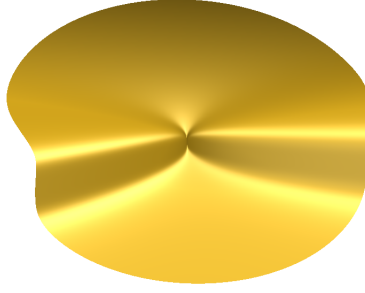


Figura 9.— Singularidad \mathbb{E}_8 de superficie: $x^2 + y^3 + z^5 = 0$

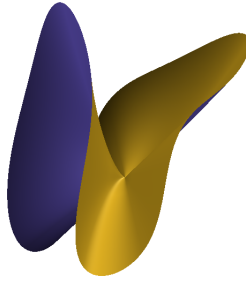


Figura 10.— Singularidad superaislada de superficie: $x^2z - y^3 + z^4 = 0$

cio complejo) ya fue estudiada por Klein [44]. La segunda es un ejemplo de singularidad superaislada, una importante familia de singularidades de hipersuperficie introducida por I. Luengo [53]. Para entender estas singularidades podemos acudir al método de Brauner-Wirtinger [16, 74], técnica que luego Milnor [55] generalizó a cualquier dimensión. Expliquemos la idea en general:

Milnor demuestra que $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\bar{\mathbb{B}}_\varepsilon^{2n+2} \subset V$, tal que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ se tiene que $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \pitchfork V$, donde $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1}$ (resp. $\mathbb{B}_\varepsilon^{2n+2}$) es la esfera euclídea (resp. bola euclídea) de radio ε centrada en el origen. El espacio $K := \mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \cap V$ es una variedad diferenciable orientada y compacta de dimensión $2n - 1$ y no depende de ε ; la variedad K es un invariante topológico de la singularidad abstracta y el par (\mathbb{S}^{2n+1}, K) lo es de la singularidad encajada en el espacio ambiente. Esta variedad se llama el *link* de la singularidad y su nombre en inglés ha resistido todos los intentos para traducirla al castellano. En el caso $n = 2$ lo que se obtiene es un enlace (unión de circunferencias disjuntas) en \mathbb{S}^3 . Estos objetos se pueden dibujar; gracias a la proyección estereográfica, sabemos que al quitar un punto a \mathbb{S}^3 obtenemos un espacio homeomorfo a \mathbb{R}^3 .

Los enlaces de la Figura 11 muestran la complejidad de las singularidades de la Figura 8; el link de la singularidad de la Figura 9 es la esfera de Poincaré [60]. Se trata de la primera técnica para estudiar un espacio singular a partir de las propiedades de un

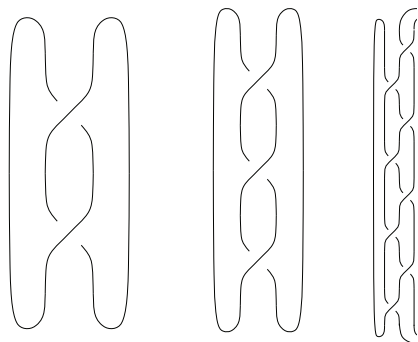


Figura 11.— Enlaces algebraicos

espacio liso. ¿Cómo se calculan estas variedades? En general, es un proceso complicado que depende de la resolución de singularidades. En el caso $n = 1$, se utiliza el método de Newton-Puiseux [61]. El método de Newton se fija en los coeficientes no nulos del desarrollo en serie de f y a partir de geometría convexa elemental se construye un proceso recurrente que simplifica la singularidad. El método de Newton se ha generalizado a muchas otras situaciones.

Como ya se ha señalado previamente, las singularidades se estudian a través de espacios lisos asociados a ellas. Ya hemos visto cómo a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$, con singularidad aislada en el origen se le asocia una $(2n - 1)$ -variedad diferenciable dentro de una esfera \mathbb{S}^{2n+1} . La teoría de Milnor permite construir otro método para entender las singularidades V de hipersuperficie; consiste en estudiar las *fibras vecinas* $f^{-1}(t)$, $|t|$ pequeño; estas fibras son n -variedades analíticas lisas (en particular, variedades diferenciables de dimensión real $2n$) y además de estudiarlas de manera abstracta, es importante comprender su comportamiento cuando t da una vuelta en torno al origen, y ahí es donde la monodromía aparece.

Demos forma a la expresión *dar la vuelta*. Retomamos las notaciones anteriores; fijamos ε y a continuación fijamos $\eta > 0$ de manera que $f^{-1}(t) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n+1}$, $\forall t \in \mathbb{C}$ tal que $|t| \leq \eta$; resumiendo esta construcción se da para ε suficientemente pequeño y para η suficientemente pequeño con respecto a ε : $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$. La situación que tenemos es que el espacio

$$X := X_{\varepsilon, \eta} := \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x| \leq \varepsilon, |f(x)| \leq \eta\} = \bar{\mathbb{B}}_\varepsilon^{2n+2} \cap f^{-1}(\bar{\mathbb{B}}_\eta^2)$$

es una *bola topológica* y que f es una fibración localmente trivial sobre $\bar{\mathbb{B}}_\eta^{2,*} := \bar{\mathbb{B}}_\eta^2 \setminus \{0\}$. El espacio

$$X^\partial := X_{\varepsilon, \eta}^\partial := \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x| = \varepsilon, |f(x)| \leq \eta\} = \bar{\mathbb{S}}_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(\bar{\mathbb{B}}_\eta^2)$$

fibra trivialmente sobre $\bar{\mathbb{B}}_\eta^2$. Las dos fibraciones lo son por el Teorema de Ehresmann [27] (la diferencial es sobreyectiva).

Estas fibraciones no dependen de ε, η . Como $\bar{\mathbb{B}}_\eta^{2,*}$ tiene el tipo de homotopía de \mathbb{S}^1 , la fibrición sobre $\bar{\mathbb{B}}_\eta^{2,*}$ está determinada por su *monodromía geométrica* φ , como en §3.1. La fibrición se llama *de Milnor* y su fibra $F := f^{-1}(\eta) \cap \bar{\mathbb{B}}_\varepsilon^{2n+2}$ es la *fibra de Milnor*: es una variedad diferenciable orientable compacta de dimensión real $2n$ y con borde K . Además, Milnor demuestra que F tiene el tipo de homotopía de un *bouquet* de n -esferas; el número μ de n -esferas recibe, ¡cómo no!, el nombre de *número de Milnor* y se puede calcular algebraicamente,

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

donde $\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$ es el anillo de series de potencias convergentes en un entorno del origen.

De cara a obtener invariantes con los que se pueda trabajar, la monodromía geométrica no es una buena elección ya que solo está bien definida salvo isotopía. Por este mismo motivo, la aplicación que induce en cohomología está bien definida. Por las propiedades homotópicas de la fibra de Milnor, solo es no trivial en grado n . La aplicación $\varphi^* : H^n(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(F; \mathbb{Z})$ es un automorfismo de grupos abelianos y se denomina *monodromía entera* de f . Si cambiamos el anillo de coeficientes obtenemos las monodromías racional o compleja.

De esta manera, podemos ver la monodromía (compleja) como una clase de conjugación de matrices cuadradas de tamaño $\mu \times \mu$; el polinomio característico y la forma de Jordan se convierten en invariantes importantes de una singularidad. El siguiente resultado es crucial y no puede faltar en este discurso ya que recibe el nombre de *Teorema de la monodromía* (demostrado por independientemente por Brieskorn [17] y por Deligne y Grothendieck [32]).

Teorema 4.2.1. *La monodromía compleja de una singularidad aislada de hipersuperficie verifica:*

- (M1) *El polinomio característico es producto de ciclotómicos, es decir, sus raíces son raíces de la unidad*
- (M2) *Los bloques de Jordan son de tamaño k , $k \leq n + 1$, salvo para los correspondientes al valor propio 1, que son de tamaño menor o igual que n .*

En matemáticas no solo es importante calcular invariantes útiles sino también que estos se puedan calcular. Aunque la definición de monodromía dada aquí es topológica, existen definiciones algebraicas (debidas a Brieskorn [17], entre otros) y es posible calcularla por métodos algebraicos, a partir de la conexión de Gauss-Manin; el programa

SINGULAR [31] permite realizar estos cálculos de forma efectiva (si la singularidad no es demasiado complicada).

4.3. Resoluciones y deformaciones

La resolución (abstracta) de singularidades consiste en reemplazar el espacio singular V por otro espacio liso \hat{V} que se obtiene a partir de V reemplazando el lugar singular de V por una hipersuperficie; de manera más precisa, se trata de una aplicación holomorfa y propia $\pi : \hat{V} \rightarrow V$, \hat{V} liso, y tal que π es un isomorfismo fuera del lugar singular de V . La resolución de la singularidad de la Figura 10 se obtiene *explotando* el punto singular, que se ve reemplazado por una curva proyectiva (una parte de esta resolución es la parte no plana de la Figura 12). La resolución abstracta de la singularidad de la Figura 9 está codificada por el grafo de Dynkin E_8 .



Figura 12.— Resolución abstracta de una singularidad superaislada

La resolución (encajada) de f (guardamos la notación de §4.2) consiste en reemplazar el U por otro espacio liso \hat{U} , de dimensión $n+1$, de manera que sobre ese espacio \hat{U} la función f sea muy sencilla, más concretamente que para cada punto de \hat{U} haya coordenadas analíticas locales de manera que la aplicación inducida por f sea un monomio. De manera más precisa, se trata de una aplicación holomorfa y propia $\pi : \hat{U} \rightarrow V$, \hat{U} liso, y tal que π es un isomorfismo fuera del lugar singular de V y $\forall p \in \hat{U}$ encontramos coordenadas analíticas locales u_0, u_1, \dots, u_n (centradas en p) de manera que

$$f \circ \pi(u_0, u_1, \dots, u_n) = \prod_{j=0}^n u_j^{m_j};$$

es decir, localmente el lugar de ceros de $f \circ \pi$ es como una unión de hiperplanos coordenados. De esta manera, la complejidad de la singularidad se manifiesta en la complejidad combinatoria de $(f \circ \pi)^{-1}(0) = \pi^{-1}(V)$. A partir de la resolución encajada se puede reconstruir geoméricamente la monodromía, aunque de manera poco efectiva. El polinomio

característico de la monodromía se calcula a partir de la resolución gracias a la fórmula de A'Campo [1]. La forma de Jordan se puede calcular a partir de la resolución utilizando la sucesión espectral de Steenbrink [69], explicada por Zucker [77].

Mediante este método resolví negativamente en [4] la conjetura de Yau [75] en la que se afirmaba que dos singularidades de hipersuperficie con links (abstractos) homeomorfos y polinomios característicos coincidentes eran topológicamente equivalentes (es decir, que los links encajados eran homeomorfos). Los contraejemplos provienen de singularidades superaisladas.

Otra manera de comprender la singularidad de f consiste en deformar apropiadamente la función. Una espléndida presentación del tema se encuentra en el libro de Arnol'd, Gussein-Zade y Varchenko [3]. Para no entrar en cuestiones más técnicas de deformaciones mini-versales y variedades discriminantes, solo haremos deformaciones unidimensionales. El objetivo es reemplazar la función f por funciones de la forma $f_\lambda := f + \lambda x$, donde x es una variable genérica y $|\lambda|$ es lo suficientemente pequeño. El objetivo es que los puntos singulares de f_λ sean puntos dobles ordinarios o singularidades de Morse, con valores distintos.

Se dice que p es un punto de Morse de una función p si existen coordenadas analíticas u_0, u_1, \dots, u_n centradas en p de manera que $g(u_0, u_1, \dots, u_n) = g(p) + \sum_{j=0}^n u_j^2$. En el caso real importa el número de signos positivos o negativos en la expresión de g (el índice de la singularidad de Morse), pero en el caso complejo los signos son irrelevantes (es lo mismo que ocurre en álgebra lineal al clasificar las formas cuadráticas).

La monodromía de los puntos de Morse complejos se calcula por el método de Picard-Lefschetz [58, 49], bien explicado en [3, 47]. En primer lugar, la fibra de Milnor es (salvo orientación) como el fibrado tangente de una n -esfera; si $n = 1$ se trata de un cilindro.

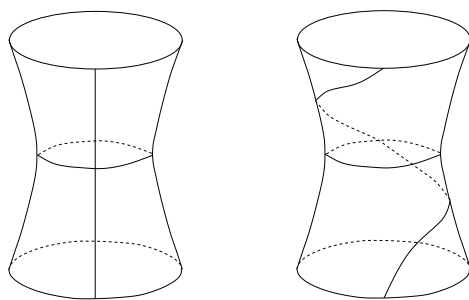


Figura 13.— Monodromía de Picard-Lefschetz

El espacio singular se obtiene al colapsar a un punto la n -esfera central, por lo que se dice que es un *ciclo evanescente* de la singularidad. Para $n = 1$, la monodromía actúa como la identidad en el borde de la fibra y como una rotación de ángulo π en el centro; la acción de la monodromía se visualiza en la Figura 13.

Volvemos a la aplicación deformada f_λ . En

$$X^\lambda := X_{\varepsilon, \eta}^\lambda := \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x| \leq \varepsilon, |f_\lambda(x)| \leq \eta\} = \bar{\mathbb{B}}_\varepsilon^{2n+2} \cap f^{-1}(\bar{\mathbb{B}}_\eta^2)$$

la aplicación f_λ tiene exactamente μ puntos singulares; la fibra genérica de f_λ en X^λ es homeomorfa a F y la monodromía de f es isotopa a la obtenida para f_λ en la circunferencia del borde. Esta monodromía es el producto de las monodromías de Picard-Lefschetz en torno a cada uno de los puntos singulares; la monodromía local es la identidad fuera de un entorno del punto crítico. Si llevamos cada ciclo evanescente a una fibra genérica en el borde, se comprueba por argumentos estándar de Topología Algebraica que estos engendran la homología de la fibra y que la monodromía se puede obtener a partir de la forma de intersección de la fibra de Milnor. Estas técnicas relacionan la teoría de singularidades con los sistemas de raíces de las álgebras de Lie semisimples y los diagramas de Dynkin [3]. El estudio de las deformaciones de singularidades también está ligado a la teoría de cuerdas.

Desde el punto de vista de las deformaciones, también es importante estudiar lo que ocurre cuando se tienen familias de singularidades $\{V_t\}_{t \in T}$ que dependen analíticamente de un parámetro t en un espacio irreducible T . Para mantener la misma línea, supondremos que V_t es singularidad aislada de hipersuperficie en \mathbb{C}^{n+1} , $\forall t \in T$. ¿Hay algún invariante sencillo que determine cuándo una tal familia es topológicamente trivial, es decir, que todos sus miembros son topológicamente equivalentes? Una condición necesaria es que los números de Milnor μ_t coincidan. La pregunta natural es la siguiente: ¿Toda familia μ -constante es topológicamente trivial?

La respuesta a esta pregunta es sorprendente. Si $n = 1$, la respuesta es positiva y se obtiene ya que las singularidades de curvas están clasificadas. Para $n > 2$, Lê y Ramanujam [48] demostraron que la respuesta también es positiva, utilizando el Teorema del h -cobordismo [54]. Este teorema solo es cierto en dimensiones altas, por lo que el caso $n = 2$ queda abierto. Hay que observar que otros resultados ciertos para todas las dimensiones salvo para superficies (por motivos similares a los de este caso) resultan ser falsos en esta dimensión.

4.4. Monodromía y aritmética

Terminamos el capítulo dedicado a las singularidades con una interesante interacción de la teoría de singularidades y la aritmética.

Denotamos $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \dots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$. Un problema fundamental de la aritmética es conocer las propiedades de $f^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$. Una manera de aproximar este conjunto es utilizar congruencias, es decir, dado $n \in \mathbb{N}$ estudiar las soluciones de f módulo n . Gracias al Teorema Chino de los Restos, es suficiente con estudiar lo que ocurre con

las congruencias módulo p^k , p primo. Las soluciones de f en estos casos son conjuntos finitos.

Fijamos un número primo p . Dado $k \in \mathbb{N}$, denotamos N_k el cardinal del conjunto

$$\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^k}\}.$$

Todos estos valores los recolectamos en lo que se denomina la Serie de Poincaré de f con respecto a p :

$$P(T) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{N_k}{p^{(n+1)k}} T^k.$$

Es una serie formal en T cuya principal virtud es recoger en una sola expresión todos los valores N_m . Shafarevich y Borevich [15] conjeturaron que $P(T)$ es una función racional en T ; es decir que hay una función racional en T cuyo desarrollo de Taylor coincide con la serie formal $P(T)$. Dos utilidades aparecen; por una parte, un número finito de datos codifica $P(T)$ y por tanto los valores N_k . Por otra parte, los polos de esta función procuran información sobre el comportamiento asintótico de los valores N_k .

Igusa demostró que

$$P(p^{-s}) = \frac{1 - p^{-s} Z(s)}{1 - p^{-s}}.$$

La función $Z(s)$ está definida sobre los complejos $\Re s > 0$ a partir de una integral p -ádica que se extiende meromórficamente a \mathbb{C} . Y aquí aparece la teoría de singularidades. Utilizando las resoluciones encajadas (y unas gotas de análisis p -ádico) Igusa [38, 39] demostró que $Z(s)$ es una función racional en p^{-s} , lo que implica el resultado para $P(T)$. La función $Z(s)$ se conoce en la literatura como función zeta de Igusa.

Al estudiar el comportamiento de estas funciones cuando se varía el número primo p (o el ideal primo que se usa en contextos más generales), Denef y Loeser [23] definieron la función zeta topológica $Z_{\text{top}}(s)$. Es una función racional que se define a partir de una resolución encajada y ya no es necesario el contexto aritmético; Denef y Loeser [24] han demostrado de varias maneras que esta función no depende de la resolución elegida. La manera más elegante ha sido definir otra función zeta más general, llamada función zeta motivica y que utiliza el anillo de Grothendieck de variedades algebraicas; tanto las funciones zeta de Igusa como la topológica son especializaciones de la función zeta motivica.

En el caso de la función zeta topológica, los polos son números racionales negativos, mientras que para la función zeta de Igusa, lo mismo ocurre para las partes reales de los polos. Si $r \in \mathbb{Q}$, $\exp(2\sqrt{-1}\pi r)$ es una raíz de la unidad, como los valores propios de la monodromía.

Conjetura de la Monodromía 4.4.1 (Igusa). *Para casi todo primo p , si s_0 es un polo de la función zeta de Igusa, entonces $\exp(2\sqrt{-1}\pi \Re s_0)$ es valor propio de la monodromía en algún punto complejo de $f^{-1}(0)$.*

Conjetura de la Monodromía 4.4.2 (Denef-Loeser). *Si s_0 es un polo de la función zeta topológica, entonces $\exp(2\sqrt{-1}\pi s_0)$ es valor propio de la monodromía en algún punto de $f^{-1}(0)$.*

Sobre esta conjetura hay avances parciales de diversos autores, especialmente Denef [22], Loeser [51, 52] y Veys [73]. Otros avances [9, 10] provienen de mi colaboración con Pierrette Cassou-Noguès, Ignacio Luengo y Alejandro Melle. Como curiosidad, también demostramos que el nombre de la función zeta topológica está mal elegido ya que no es un invariante topológico [8].

5. Monodromía de trenzas

5.1. Historia de la monodromía de trenzas

La monodromía de trenzas es un invariante de las funciones multivaloradas. Podemos situar su origen en Riemann con su teoría de la superficie de Riemann de una función multivalorada. En su origen, se estudian funciones multivaloradas f definidas en $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$; la superficie de Riemann asociada a f es precisamente una cubierta de X y, por tanto, viene definida por su monodromía $\rho : \mathbb{F}_r \rightarrow \Sigma_n$, donde n es el número de imágenes de f y $\mathbb{F}_r = \pi_1(X)$ es un grupo libre con r generadores. La monodromía ρ determina completamente la cubierta; a su vez, si g_1, \dots, g_r son generadores de $\pi_1(X)$ (que además se pueden elegir geoméricamente como se muestra en la Figura 14), la monodromía (y la superficie de Riemann) está determinada por las r permutaciones $\rho(g_1), \dots, \rho(g_r)$.



Figura 14.— Elemento de una base geométrica de $\pi_1(X)$

Por ser $\pi_1(X)$ un grupo libre, las permutaciones no necesitan cumplir ninguna relación; es decir, dado cualquier sistema de permutaciones vamos a poder construir la superficie de Riemann asociada. En el caso de que la función f sea vectorial, no hay más invariantes topológicos para f . Sin embargo, cuando la función va a \mathbb{C} , el invariante se puede afinar.

Fijamos un lazo $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ basado en $x_0 \in X$. La imagen $f(x_0)$ es un conjunto de n puntos de \mathbb{C} . Cuando nos movemos a lo largo de γ , $f(\gamma(t))$ describe n curvas disjuntas en \mathbb{C} . El origen y el final de estas curvas es $f(x_0)$, es decir, coinciden pero, ¡cuidado!, la coincidencia de los extremos es global y no punto a punto. Lo que se produce es, pues, una trenza de n hilos.

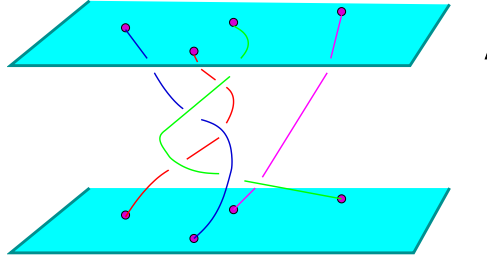


Figura 15.— Trenza de cuatro hilos

Si reemplazamos γ por un lazo homótopo obtenemos una trenza homótopa. En realidad, para un matemático las trenzas no son el conjunto de caminos sino su clase de homotopía. El grupo de trenzas \mathbb{B}_n de n hilos, definido por M. Artin [11, 12], admite la siguiente presentación: posee $n - 1$ generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ y las siguientes relaciones:

- Si $i - j > 1$ entonces $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$.
- Si $i = 1, \dots, n - 2$, $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

La trenza σ_i corresponde a la que fija los puntos distintos del i -ésimo y del $(i+1)$ -ésimo y que sobre estos dos realiza la siguiente operación: $\begin{matrix} \times \\ i+1 \quad i \end{matrix}$.

Es muy sencillo ver que $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ engendran el grupo (la operación es la yuxtaposición vertical de abajo a arriba) de trenzas y que las relaciones indicadas son válidas. Artin demuestra que son suficientes. Cada trenza tiene asociada la permutación que a cada $i \in \{1, \dots, n\}$ le asocia j si el extremo final del hilo que comienza en el i -ésimo es el j -ésimo punto. La aplicación $\text{ev} : \mathbb{B}_n \rightarrow \Sigma_n$ así definida es un homomorfismo sobreyectivo de grupos.

La monodromía de trenzas de la aplicación multivalorada f es un homomorfismo $\tilde{\rho} : \mathbb{F}_r \rightarrow \mathbb{B}_n$ tal que $\text{ev} \circ \tilde{\rho} = \rho$. Es decir, la monodromía de trenzas contiene la información de la monodromía de la cubierta; además, contiene información sobre f .

En el artículo fundacional [76] de la teoría de grupos fundamentales de complementarios de curvas algebraicas, Oscar Zariski quiere extender la construcción de la superficie de Riemann de una función multivalorada a \mathbb{C}^2 ; estas funciones deben tener un lugar de ramificación. En el caso unidimensional, este lugar está formado por un número finito de puntos, pero en el caso bidimensional se trata de una curva algebraica C . En este caso, la *superficie compleja* definida por una función multivalorada f ramificada sobre C viene definida por una monodromía $\rho : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \rightarrow \Sigma_n$. Como se va a ver enseguida, este grupo es finitamente generado, por lo que para conocer las superficies que ramifican en C basta dar las imágenes de los generadores de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$. Sin embargo, si este grupo no es libre nos encontramos en una situación más restrictiva que en el caso unidimensional, ya que

ahora las imágenes de los generadores deben satisfacer las relaciones que haya entre ellos. Por ello Oscar Zariski ve la necesidad de encontrar un método para calcular $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$. Con un poco más de artillería técnica, se puede enunciar este problema sobre el plano proyectivo, por lo que Zariski también se interesa en calcular el grupo fundamental del complementario de una curva proyectiva.

El método que encuentra es realmente bonito. Visto para una curva afín, se puede entender como sigue. Fijamos una dirección en \mathbb{C}^2 (para la que C no tenga ninguna asíntota vertical) y una recta genérica L ; si L corta a C en n puntos, entonces $\pi_1(L \setminus C)$ es libre con n generadores que engendran $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$. Si movemos la recta L dentro de las rectas de la misma dirección, evitando las rectas que corten a C en menos de n puntos y de manera que vuelva al punto de partida, los generadores de $\pi_1(L \setminus C)$ se mueven también y al volver al punto de partida, producen relaciones válidas en $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$. Zariski logra calcular los grupos fundamentales de algunas curvas usando dos resultados:

(Z1) El abelianizado de $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{C})$ es $\mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, donde r es el número de componentes irreducibles y m es el máximo común divisor de sus grados. Dicho abelianizado es, además, $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{C}; \mathbb{Z})$.

(Z2) Si C_0 y C_1 son dos curvas proyectivas que podemos unir por un camino continuo de curvas equisingulares, entonces C_0 y C_1 son isótomas en \mathbb{P}^2 (se dicen *fuertemente isótomas*).

Proposición 5.1.1. *El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$, C curva lisa de grado d , es cíclico de orden d .*

Demostración. Así procede Zariski; debido a (Z2) y a que el espacio de curvas lisas de grado d es conexo, basta calcularlo en un caso particular, en el que el grupo es abeliano, por lo que puede aplicar (Z1). \square

Zariski intentó aplicar este procedimiento a las curvas con puntos nodales. Pudo calcular el grupo para casos particulares y utilizó un resultado de Severi [68] que afirmaba que la variedad de curvas con grado y número de puntos nodales fijos es irreducible (y por tanto conexa). Desgraciadamente, la demostración de Severi no era correcta, y la abelianidad del grupo fundamental en este caso se llamó *Conjetura de Zariski*. Este hecho pudo cambiar la manera de ver las matemáticas de Zariski que buscó a partir de entonces una mayor algebraización de sus métodos, alejándose de su originaria escuela de la geometría italiana. La conjetura de Zariski fue demostrada por P. Deligne [21], a partir del trabajo de Fulton [28]. Joe Harris [33] demostró el resultado de Severi y finalmente, no solo la conjetura de Zariski era cierta, sino también su demostración.

En el artículo fundacional, Zariski encuentra dos curvas irreducibles cuyo grupo fundamental es no abeliano: las séxticas hexacúspidas (con las cúspides en una cónica) y

las cuárticas tricuspidales. Sin embargo, al leer cuidadosamente el artículo de Zariski, uno encuentra que aunque es verosímil que el método da lugar a una presentación completa del grupo fundamental (es decir, no solo se encuentran algunas relaciones, sino que se encuentra una familia generatriz de todas las relaciones), este resultado no se deduce de los argumentos del artículo.

El mismo Zariski es consciente de este problema y plantea el problema a van Kampen. Este matemático de origen holandés utiliza técnicas topológicas para dar rigor a los argumentos de Zariski e inmediatamente se da cuenta de que esas técnicas son válidas en un caso más general y nace su versión de lo que se llamará posteriormente el Teorema de Seifert-van Kampen, herramienta fundamental en el cálculo de grupos fundamentales. A partir de entonces, a este método de cálculo del grupo fundamental del complementario de una curva proyectiva se le llama método de Zariski-van Kampen.

En esa misma época, el matemático italiano Oscar Chisini [19] se da cuenta de que lo que se va a conocer como método de Zariski-van Kampen, está íntimamente relacionado con las trenzas (*trezze algebriche* en su lenguaje). Veamos cómo. Escogemos en \mathbb{C}^2 un sistema de coordenadas en el que L sea una recta vertical. Por las condiciones elegidas C es una curva (reducida) de ecuación $f(x, y) = 0$ y si vemos f como un polinomio de $\mathbb{C}[x][y]$ (de grado n en y), podemos suponer que el coeficiente de y^n es igual a 1.

Hay un número finito de valores $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{C}$ para los que $f(x_i, y) = 0$ tiene menos de n raíces (o lo que es lo mismo, para los que hay raíces múltiples). ¿Por qué hay un número finito? Porque estos valores son las raíces del discriminante de f con respecto a y , el cual es un polinomio no nulo en x . Por tanto, si denotamos $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$, la curva C (o el polinomio f) define una función multivalorada (que seguimos denotando f) de manera que la imagen de $x_0 \in X$ son las n raíces (distintas) de $f(x_0, y) = 0$ en y . La monodromía de trenzas (más o menos así descrita por Chisini) es la monodromía $\tilde{\rho} : \mathbb{F}_r \rightarrow \mathbb{B}_n$ de la función multivalorada. A partir de la acción geométrica del grupo de trenzas sobre el grupo libre $\pi_1(C \setminus L)$ se obtienen las relaciones de Zariski.

Aunque Chisini se da cuenta de que hay un invariante más fino detrás del método de Zariski-van Kampen no pasa de su mera descripción. La monodromía de trenzas reaparece varias décadas más tarde, cuando Boris Moishezon [56] la utiliza para obtener nuevos resultados sobre la teoría de superficies proyectivas; el propio autor acuña el nombre de monodromía de trenzas. A partir de una superficie proyectiva, se considera una proyección de esta en el plano proyectivo; esta proyección tiene una curva discriminante y la monodromía de trenzas de esta curva contiene información sobre la superficie de partida.

Posteriormente, Anatoly Libgober [50] demuestra que la monodromía de trenzas determina el tipo de homotopía del complementario de una curva afín. La monodromía de trenzas de una curva $C \subset \mathbb{P}^2$ determina la topología del par (\mathbb{P}^2, C) ; este resultado fue demostrado, con restricciones sobre los puntos singulares de C , por Kulikov y Teicher [45] y

posteriormente en toda su generalidad por J. Carmona [18]. Kharlamov y Kulikov [42, 43] también han utilizado la monodromía de trenzas para estudiar las componentes irreducibles de los espacios de móduli de superficies complejas compactas de tipo general con invariantes numéricos dados. La monodromía de trenzas también se ha utilizado para el estudio de variedades simplécticas [13]. No se sabe si dos curvas topológicamente equivalentes tienen la misma monodromía de trenzas (genérica), pero junto con José Ignacio Cogolludo y Jorge Carmona he demostrado la siguiente propiedad [5]: a partir de la monodromía de trenzas de una curva C se puede reconstruir la topología de $(\mathbb{P}^2, C^\varphi)$, donde C^φ se obtiene añadiendo algunas rectas a C .

5.2. Una aplicación de la monodromía de trenzas

El último resultado que voy a presentar permite distinguir topológicamente dos configuraciones de rectas en \mathbb{P}^2 . Una configuración de rectas es la unión de una familia de rectas en \mathbb{P}^2 . La combinatoria de una configuración de rectas es el patrón de las intersecciones entre ellas (cuántos puntos múltiples hay y cómo están distribuidos). No todos los patrones razonables (es decir que cumplan que dos rectas siempre se corten y que por dos puntos solo pase una recta) son realizables; por ejemplo, la configuración que se obtiene al dibujar mal la del Teorema de Pappus no lo es.

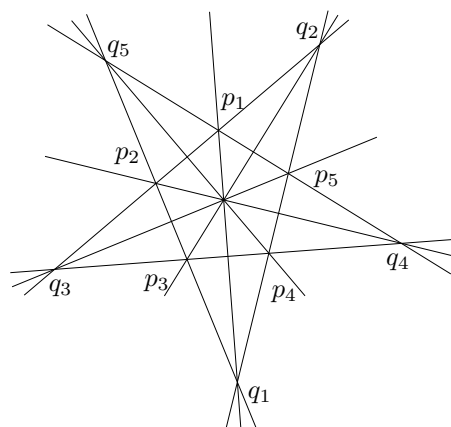


Figura 16.— Configuración del pentágono regular

Consideramos la configuración que llamaremos del pentágono regular, como aparece en la Figura 16. Esta configuración se obtiene considerando un pentágono regular en \mathbb{R}^2 . Sean p_1, \dots, p_5 los vértices del pentágono (ordenados cíclicamente) y sea O el centro del pentágono. Consideramos las siguientes diez rectas:

- Los cinco lados, es decir, las rectas que unen p_i y p_{i+1} , $i = 1, \dots, 4$, y la recta que une p_5 y p_1 .
- Las cinco rectas que unen O y p_i , $i = 1, \dots, 5$.

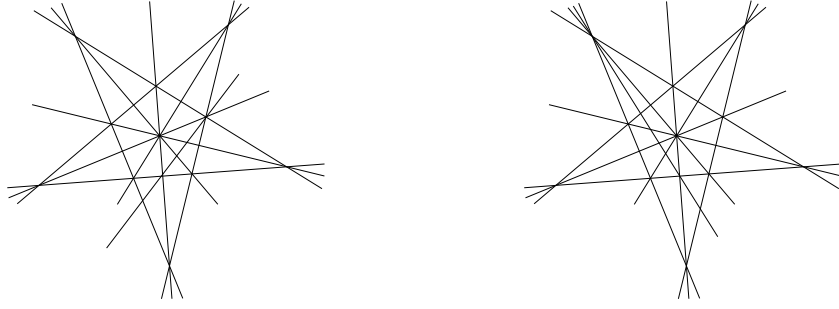


Figura 17.— Configuraciones con la misma combinatoria y no homeomorfas

Podemos ver estas rectas como rectas complejas en \mathbb{C}^2 y añadiendo sus puntos en el infinito, tenemos una configuración de rectas en \mathbb{P}^2 (visto como la unión de \mathbb{C}^2 y la recta del infinito).

Si examinamos atentamente la figura, los vértices q_1, \dots, q_5 también sirven para definir la configuración, aunque en este caso el pentágono (regular) que definen no es convexo.

Es posible demostrar que cualquier configuración de rectas con esta combinatoria es proyectivamente equivalente a la configuración del pentágono. Existe una aplicación ψ (solo definida en la configuración, no en \mathbb{P}^2) que lleva un pentágono sobre el otro; está definida por las propiedades $\psi(O) = O$ y $\psi(p_i) = q_i$, $i = 1, \dots, 5$.

Sin embargo, es imposible encontrar un homomorfismo $\Psi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ que conserve la configuración y que tenga las propiedades de ψ . ¿Cómo se demuestra esta propiedad? Examinando las monodromías de trenzas y aplicando los resultados de [5].

Es posible dar ecuaciones a esta configuración de manera que las rectas tengan sus ecuación en el cuerpo $K := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Sea $\sigma_2 : \mathbb{P}^2(K) \rightarrow \mathbb{P}^2(K)$ la aplicación dada por

$$\sigma_2([x : y : z]) := [\sigma(x) : \sigma(y) : \sigma(z)],$$

donde σ es el elemento de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$. Se trata de un isomorfismo algebraico que no se extiende a un homeomorfismo de \mathbb{P}^2 . Las ecuaciones de la configuración se pueden elegir de manera que σ_2 la respete y cumpla las propiedades de ψ .

Consideremos las dos configuraciones de la Figura 17; se han obtenido añadiendo una recta en cada caso a la configuración del pentágono. Si hubiera un homeomorfismo Ψ del plano que lleve una configuración a la otra, este debería llevar la recta añadida de un caso a la recta añadida del otro. A partir de ahí es fácil ver que Ψ debe respetar la configuración del pentágono, fijar el centro y cumplir que $\Psi(p_i) = q_i$. Como eso es imposible, la aplicación Ψ no existe y obtenemos dos configuraciones con la misma combinatoria y no homeomorfas.

No es difícil ver σ_2 respeta las rectas añadidas, por lo que las dos configuraciones son conjugadas en K . Como se ha visto en §2.3, los complementarios tienen grupos fun-

damentales algebraicos isomorfos. El primer ejemplo de configuraciones de rectas con la misma combinatoria pero no homeomorfos es más difícil de presentar y fue descubierto por Grigory Rybnikov [64].

Los detalles de este ejemplo se encuentra en [6] (es un trabajo que realicé con José Ignacio Cogolludo, Jorge Carmona y Miguel Ángel Marco). Los mismos autores hemos proporcionado la única demostración detallada y rigurosa del resultado de Rybnikov en [7].

6. Epílogo

Llega el momento de poner punto final a este discurso. Se me hace difícil discernir si he sido yo quien ha elegido a la monodromía como tema o si ha sido la monodromía la que se ha elegido a sí misma. Es la misma sensación que tengo al observar mi trayectoria matemática.

Desde que allá por los años 1985 y 1986 los profesores María Teresa Lozano y José María Montesinos lo introdujeran en sus cursos de licenciatura, este concepto ha estado presente de una u otra manera en mi investigación, y también en mi docencia de tercer ciclo. Ya aparece en el título de mi tesis, en la de alguno de mis doctorandos y en buena parte de mis trabajos de investigación así como en conferencias y cursos impartidos. Sin contar las múltiples horas de cálculos y reflexiones, en solitario y con colaboradores, dando vueltas a la monodromía de algún objeto.

Hay también una metamonodromía que nos permite volver al punto de partida con el bagaje de nuevas experiencias y más madurez. Sin embargo, esta metamonodromía no nos permite ni volver atrás ni es tan regular como la monodromía.

He dicho (y escrito).

Referencias

- [1] N. A'Campo, *La fonction zeta d'une monodromie*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 233–248.
- [2] S.I. Adyan, *Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **103** (1955), 533–535.
- [3] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade y A.N. Varčenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. II*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1988.
- [4] E. Artal, *Forme de Jordan de la monodromie des singularités superisolées de surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **109** (1994), no. 525, x+84.
- [5] E. Artal, J. Carmona y J.I. Cogolludo, *Braid monodromy and topology of plane curves*, Duke Math. J. **118** (2003), no. 2, 261–278.

- [6] E. Artal, J. Carmona, J.I. Cogolludo y M. Marco, *Topology and combinatorics of real line arrangements*, Compos. Math. **141** (2005), no. 6, 1578–1588.
- [7] ———, *Invariants of combinatorial line arrangements and Rybnikov’s example*, Singularity theory and its applications (S. Izumiya, G. Ishikawa, H. Tokunaga, I. Shimada, y T. Sano, eds.), Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 43, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2007.
- [8] E. Artal, P. Cassou-Noguès, I. Luengo y A. Melle, *The Denef-Loeser zeta function is not a topological invariant*, J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), no. 1, 45–54.
- [9] ———, *Monodromy conjecture for some surface singularities*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002), no. 4, 605–640.
- [10] ———, *Quasi-ordinary power series and their zeta functions*, Mem. Amer. Math. Soc. **178** (2005), no. 841, vi+85.
- [11] E. Artin, *Theory of braids*, Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. **4** (1926), 47–72.
- [12] ———, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
- [13] D. Auroux, *Symplectic 4-manifolds as branched coverings of \mathbf{CP}^2* , Invent. Math. **139** (2000), no. 3, 551–602.
- [14] A.A. Bolibrukh, *The Riemann-Hilbert problem on the complex projective line*, Mat. Zametki **46** (1989), no. 3, 118–120.
- [15] A.I. Borevich y I.R. Shafarevich, *Number theory*, Translated from the Russian by Newcomb Greenleaf. Pure and Applied Mathematics, Vol. 20, Academic Press, New York, 1966.
- [16] K. Brauner, *Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928), 1–55.
- [17] E. Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. **2** (1970), 103–161.
- [18] J. Carmona, *Monodromía de trenzas de curvas algebraicas planas*, Tesis, Universidad de Zaragoza, 2003.
- [19] O. Chisini, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, Ist. Lombardo, Rend., II. Ser. **66** (1933), 1141–1155.
- [20] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [21] ———, *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d'après W. Fulton)*, Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80, Lecture Notes in Math., vol. 842, Springer, Berlin, 1981, pp. 1–10.
- [22] J. Denef y K. Hoornaert, *Newton polyhedra and Igusa's local zeta function*, J. Number Theory **89** (2001), no. 1, 31–64.
- [23] J. Denef y F. Loeser, *Caractéristiques d'Euler-Poincaré, fonctions zêta locales et modifications analytiques*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 4, 705–720.
- [24] ———, *Motivic Igusa zeta functions*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 3, 505–537.
- [25] R. Douady y A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes. 1*, CEDIC, Paris, 1977.
- [26] W. Ebeling, *Monodromy, Singularities and computer algebra*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 324, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, pp. 129–155.
- [27] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège, 1951, pp. 29–55.
- [28] W. Fulton, *On the fundamental group of the complement of a node curve*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 2, 407–409.
- [29] É. Galois, *Œuvres mathématiques, publiées en 1897, suivies d'une notice sur Évariste Galois et la théorie des équations algébriques, par G. Verriest. 2e édition revue et corrigée*, Paris: Gauthier-Villars, 1951.
- [30] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, 2004, disponible en (<http://www.gap-system.org>).
- [31] G.-M. Greuel, G. Pfister y H. Schönemann, *SINGULAR 3.0, A Computer Algebra System for Polynomial Computations*, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, 2005, <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [32] A. Grothendieck, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim.
- [33] J. Harris, *On the Severi problem*, Invent. Math. **84** (1986), no. 3, 445–461.
- [34] D. Hilbert, *Problèmes mathématiques*, Ens. math. **2** (1900), 349–354.

- [35] H.M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1243–1244.
- [36] H.M. Hilden, M. T. Lozano y J.M. Montesinos, *Universal knots*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** (1983), no. 3, 449–450.
- [37] ———, *The Whitehead link, the Borromean rings and the knot 9_{46} are universal*, Collect. Math. **34** (1983), no. 1, 19–28.
- [38] J.-i. Igusa, *Complex powers and asymptotic expansions. I. Functions of certain types*, J. Reine Angew. Math. **268/269** (1974), 110–130, Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, II.
- [39] ———, *Forms of higher degree*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 59, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [40] E.R. van Kampen, *On the connection between the fundamental groups of some related spaces*, Amer. J. **55** (1933), 261–267.
- [41] ———, *On the fundamental group of an algebraic curve*, Amer. J. Math. **55** (1933), 255–260.
- [42] V. Kharlamov y V.S Kulikov, *Diffeomorphisms, isotopies, and braid monodromy factorizations of plane cuspidal curves*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 9, 855–859.
- [43] ———, *Deformation inequivalent complex conjugated complex structures and applications*, Turkish J. Math. **26** (2002), no. 1, 1–25.
- [44] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig. Teubner, 1884.
- [45] V.S. Kulikov y M. Teicher, *Braid monodromy factorizations and diffeomorphism types*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **64** (2000), no. 2, 89–120.
- [46] A. Kurosh, *Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte*, Rec. Math. Moscou, n. Ser. **2** (1937), 995–1001.
- [47] K. Lamotke, *Die Homologie isolierter Singularitäten*, Math. Z. **143** (1975), 27–44.
- [48] D.T. Lê y C.P. Ramanujam, *The invariance of Milnor’s number implies the invariance of the topological type*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 1, 67–78.

- [49] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique (Collection de monographies sur la théorie des fonctions)*, Paris: Gauthier-Villars, VI u.154 S. 8° , 1924.
- [50] A. Libgober, *On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves*, J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 103–114.
- [51] F. Loeser, *Fonctions d'Igusa p -adiques et polynômes de Bernstein*, Amer. J. Math. **110** (1988), no. 1, 1–21.
- [52] ———, *Fonctions d'Igusa p -adiques, polynômes de Bernstein, et polyèdres de Newton*, J. Reine Angew. Math. **412** (1990), 75–96.
- [53] I. Luengo, *The μ -constant stratum is not smooth*, Invent. Math. **90** (1987), no. 1, 139–152.
- [54] J. Milnor, *Lectures on the h -cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.
- [55] ———, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [56] B.G. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies*, Algebraic geometry (Chicago, Ill., 1980), Lecture Notes in Math., vol. 862, Springer, Berlin, 1981, pp. 107–192.
- [57] J.M. Montesinos, *Three-manifolds as 3-fold branched covers of S^3* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **27** (1976), no. 105, 85–94.
- [58] É. Picard y G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Vol. II. Fascicule I*, Paris: Gauthier-Villars, 1897.
- [59] J. Plemelj, *Riemannsche Funktionenscharren mit gegebener Monodromiegruppe*, Monatsch. für Math. u. Phys. **19** (1908), 211–246.
- [60] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Palermo Rend. **18** (1904), 45–110.
- [61] M. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques*, Journal de Math. (1) **15** (1850), 365–480.
- [62] M.O. Rabin, *Recursive unsolvability of group theoretic problems*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 172–194.

- [63] B. Riemann, *Beiträge zur theorie der durch die gauss'sche reihe $f(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren functionen*, Abhandlungen der Königlichten Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **7** (1857), 3–32.
- [64] G. Rybnikov, *On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement*, Prepublicación disponible en [arXiv:math.AG/9805056](https://arxiv.org/abs/math/9805056), 1998.
- [65] O. Schreier, *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. **5** (1927), 161–183.
- [66] H. Seifert, *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*, Ph.D. thesis, Berichte Leipzig 83, 26-66. Technische Hochschule Dresden, Diss , 1931.
- [67] H. Seifert y W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, IV + 353 S. 132 Abb. Leipzig, B. G. Teubner , 1934.
- [68] F. Severi, *Vorlesungen über algebraische geometrie*, Teubner, Leipzig, 1921.
- [69] J.H.M. Steenbrink, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, pp. 525–563.
- [70] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.
- [71] W. Thurston, *Universal links*, 1982.
- [72] H. Tietze, *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), no. 1, 1–118.
- [73] W. Veys, *Determination of the poles of the topological zeta function for curves*, Manuscripta Math. **87** (1995), no. 4, 435–448.
- [74] W. Wirtinger, *Über die Verzweigungen bei Funktionen von zwei Veränderlichen*, Jahresberichte D. M. V **14** (1905), 517.
- [75] S. S.-T. Yau, *Topological type of isolated hypersurface singularities*, Recent developments in geometry (Los Angeles, CA, 1987), Contemp. Math., vol. 101, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 303–321.
- [76] O. Zariski, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.

- [77] S. Zucker, *Degeneration of Hodge bundles. (After Steenbrink)*, Topics in transcendental algebraic geometry, Annals of Mathematics Studies, No. 106, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1984, pp. 121–141.