

MONOGRAFÍAS
DE LA
REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

Nº 39

Actas de las XIII Jornadas de Mecánica Celeste

A. Elipe, J.A. Docobo, and A. Dena (Editors)



2013

Índice

PRESENTACIÓN	vii
CARTEL DE LAS XIII JORNADAS	ix
FOTO DE GRUPO DE PARTICIPANTES	x

COMUNICACIONES

M. ANDRADE AND J. Á. DOCOBO Accurate computation of stellar masses in double and multiple stars	1
P. P. CAMPO AND J. Á. DOCOBO Configuraciones de cuatro cuerpos en escenarios de exoplanetas	13
A. ABAD AND E. LACRUZ Handling space orbits as mathematical or computational objects	33
E. LACRUZ AND A. ABAD Órbitas cuasiestacionarias no ecuatoriales	45
M.N. CROUSTALLOUDI AND T.J. KALVOURIDIS Dynamics of a dual satellite system in the Newtonian field of a polygon configuration of N big bodies: The $N + 2$ ring problem	59
J. Á. DOCOBO Some curious equations that appear in the teaching of the Two-Body Problem	69

Presentación

Por primera vez desde su inauguración allá por 1998, las Jornadas de Mecánica Celeste sufrieron, en contra de la voluntad de todos nosotros, un parón después de la XII edición celebrada en Lalín. Sin duda, la retirada de muchas ayudas oficiales y de patrocinios privados causados por la actual situación económica tuvieron mucho que ver con ello. Por esta razón, la recuperación de las mismas con su XIII edición en Zaragoza ha sido una importante noticia y un estímulo al que han sabido corresponder un elevado número de participantes provenientes de prácticamente todos los grupos activos en esta materia en España.

Hablar de Mecánica Celeste y de Zaragoza, nos obliga muy gustosamente a hacer una mención al inolvidable profesor D. Rafael Cid Palacios, padre de toda una generación de estudiosos de esta disciplina y director de buena parte de las tesis doctorales elaboradas por profesores e investigadores relacionados con la participación y organización de las Jornadas en sus distintas sedes. Precisamente, sus herederos científicos en la Universidad zaragozana, miembros del actual Grupo de Mecánica Espacial, han sido los que tomaron la determinación de recuperar este evento científico ya de gran tradición en España, de igual forma que las crearon hace ahora 15 años.

En esta ocasión el marco que las acogió fue inusual pero también con relevancia académica, el Centro Universitario de la Defensa en la Academia General Militar (AGM) de Zaragoza. Ésta puso a nuestra disposición sus instalaciones durante los días 18 y 19 de Junio de 2012 para llevar a cabo las Jornadas, las cuales fueron inauguradas por el General Director de la AGM, D. Francisco Gan Pampols.

Gracias al esfuerzo y entusiasmo de todos los asistentes se ha conseguido un Programa Científico de alto nivel, al igual que en ediciones precedentes. Junto con las conferencias invitadas de Martín Avendaño, Telemahos Kalvouridis y Fernando Belizón, se han presentado un total de 15 comunicaciones seguidas de sus correspondientes debates, con lo que se ha conseguido mantener el espíritu que hizo nacer estas Jornadas: participación, encuentro, discusión, nuevas ideas, proyectos de futuro, etc.

Los participantes tuvimos también la ocasión de conocer la Academia General Militar gracias a la amena visita guiada por su museo, la cual fue dirigida por el Coronel D. Herminio García Ferreras y que constituyó una muestra más de la hospitalidad recibida de esta histórica institución castrense, a la que queremos agradecer todas las atenciones recibidas. También, en estos momentos de estrecheces económicas debemos así mismo

expresar nuestra gratitud tanto al Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones de la Universidad de Zaragoza como a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de la misma ciudad, que de nuevo se ha hecho cargo de la publicación de las Actas en su serie de Monografías.

Con el éxito de esta nueva celebración en 2012, Zaragoza, a través de su Academia General Militar se une a la lista de localidades que en los últimos años han tenido a bien ser sede de las Jornadas de Mecánica Celeste: San Fernando (1998 y 2004), Logroño (1999), Valladolid (2000), La Manga del Mar Menor (2001), Albarracín (2002), Señorío de Bértiz (2003), Rianxo (2005), Jaca (2006), Barcelona (2007), Ezcaray (2008) y Lalín (2009), a todas las cuales agradecemos su inestimable colaboración.

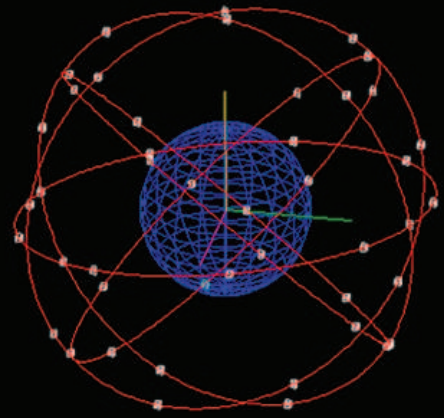
Finalmente, un necesario reconocimiento tanto al Comité Local Organizador por tenerlo todo a punto y no fallar en nada, como al Comité Científico, garante una vez más de la calidad de la ciencia presentada. Sin ellos, todo el trabajo realizado hubiera sido imposible.

Zaragoza, día del Pilar de 2013.

Los Editores

Antonio ELIPE
José Ángel DOCOBO
Ángeles DENA

XIII Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste



<http://www.unirioja.es/cu/aipasc/XIIIJornadas/>

Comité científico

J.A. Docobo
A. Elpe
S. Ferrer
A. Guerman
V. Lanchares
M. Ollé

Comité organizador

A. Abad
D. Casanova
A. Dena
M. Palacios
A.I. Pascual
E. Tresaco





Los participantes de las XIII JTMC en el patio de armas de la Academia General Militar.

Accurate computation of stellar masses in double and multiple stars

Manuel Andrade and José Ángel Docobo

R. M. Aller Astronomical Observatory, University of Santiago de Compostela

15782 Santiago de Compostela, Galiza, Spain

Abstract

Our aim is to show how the precise determination of orbits with both photometric and spectral data of binary systems can be used to obtain accurate stellar masses –even of each component in many cases. Firstly, we proceed to calculate orbital elements by means of the Docobo’s method [9] preferably using high-quality speckle measurements. If the system possesses a well-determined *Hipparcos* trigonometric parallax, we can calculate system mass from Kepler’s Third Law. If not, we will need to collect information about visual magnitudes and spectral classification. This information together with updated mass-luminosity calibrations for main-sequence and subgiant stars can be handled according to the algorithm of Baize-Romani [3] in order to obtain the dynamical parallax as well as the mass ratio of the components, and from these, the individual masses.

In this paper we apply this methodology to some selected binaries discovered by W. S. Finsen using his eyepiece interferometer, one of his greatest achievements in binary stars research.

We also discuss some political issues concerning his fierce opposition and negative predictions as Director of the Republic Observatory (R.O., Johannesburg) regarding the South African Government’s decision to close the R.O. and amalgamate it with the Cape Observatory (Cape Town) and the Radcliffe Observatory (Pretoria) into what became known as the South African Astronomical Observatory (SAAO) in 1974.

1 Introduction

William Stephen Finsen (July 28, 1905 – May 16, 1979) was a South African astronomer, and an expert on binary stars as well as asteroid observation who devel-

oped an eyepiece interferometer to measure close binary stars [24, 27]. The final 1954 version was used to discover 73 binary stars in two decades. In addition, during the favorable opposition of Mars in 1956, he took about fifty thousand photographs of the red planet using the 26.5 inch refractor of the Union Observatory (Johannesburg). The best exposures were made into pictures which were considered to be the best photographs of Mars until the space probes became available [38].

Finsen was the Director of the Union Observatory from 1957 until 1965. This Observatory was renamed the Republic Observatory when South Africa became a Republic in 1961. Both Van den Bos and Finsen fiercely opposed [46] the decision of the South African Government to close the Republic Observatory and combine it with the Cape Observatory (Cape Town) and the Radcliffe Observatory (Pretoria) into what became known in 1974 as the South African Astronomical Observatory (SAAO), located in the Karoo near Sutherland. The authorities argued that they were badly affected by light pollution but the fact of the matter is that Van den Bos and Finsen's worst fears came true and the very long and fruitful tradition of the study of binary stars and asteroids through well-established programmes of observation was terminated.

In this paper we honor this pioneer of interferometric observation of binary systems and we present new orbits and fundamental parameters of four binaries that he discovered (also see [14]). Following the Introduction in Section 1, the recalculated orbital elements (accompanied by uncertainty estimates) of these systems as well as a plot of their apparent orbits and the ephemerides for the coming years are presented in Section 2. These orbital solutions have been previously announced in the Information Circulars of the IAU Commission 26 (IAUDS). Here, we present some cases of reformed orbital elements. Section 3 reports the analysis of the physical and orbital properties of the binaries studied as masses, fundamentally. Section 4 corresponds to the conclusions of this research.

2 Calculation of the orbital elements

We have primarily used interferometric data from both visual observations performed by Finsen and from speckle measurements obtained by other observers (USNO). In addition we have also considered one *Hipparcos* measurement available for these systems. Precession corrections were applied to the observations to refer position angles to the 2000.0 equinox.

Orbital elements have been calculated by using Docobo's analytical method [9, 10]. In the case that the position angle or angular separation had a residual greater than 15° or 50 mas, respectively, both in late orbits and in ours, the corresponding observation was excluded from the calculations.

Table 1 shows the orbital elements along with their uncertainties for each binary.

<i>WDS</i>	P [yr]	T [yr]	e	a ["]	i [°]	Ω [°]	ω [°]	Prec. [°]
Name	Last ob.							
02396–1152	2.6512	2012.3109	0.230	0.1063	24.2	90.2	40.8	0.0036
FIN 312	± 0.0005	± 0.0005	± 0.001	± 0.0005	± 0.2	± 0.2	± 0.2	2009.7535
08291–4756	340.0	1947.7	0.748	0.427	78.9	114.7	300.0	0.0064
FIN 315 Aa,Ab	± 50.0	± 2.0	± 0.030	± 0.030	± 2.0	± 2.0	± 5.0	2012.1019
14373–4608	101.49	1977.47	0.674	0.194	117.8	172.1	260.0	–0.0051
FIN 318 Aa,Ab	± 0.80	± 0.60	± 0.006	± 0.002	± 1.0	± 1.0	± 1.0	2011.3027
17542+1108	9.008	2016.305	0.327	0.0853	160.9	173.6	58.3	–0.0057
FIN 381	± 0.015	± 0.050	± 0.002	± 0.0020	± 5.0	± 10.0	± 10.0	2008.4610

Table 1: Orbital elements

Name	2013.0		2014.0		2015.0		2016.0	
	θ [°]	ρ ["]	θ [°]	ρ ["]	θ [°]	ρ ["]	θ [°]	ρ ["]
FIN 312	251.3	0.112	342.3	0.115	136.8	0.078	284.1	0.126
FIN 315 Aa,Ab	204.6	0.103	206.9	0.104	209.2	0.105	211.4	0.106
FIN 318 Aa,Ab	126.9	0.181	125.5	0.180	124.1	0.179	122.6	0.177
FIN 381	269.0	0.102	241.0	0.090	202.6	0.075	141.8	0.058

Table 2: Ephemerides

We indicate the *Washington Double Star Catalog* (*WDS*) identification [36] and the discoverer’s designation (*Name* in Column 1). The orbital elements are listed in the following order: revolution period (P), epoch of passage through the periastron (T), eccentricity (e), semimajor axis (a), orbital inclination (i), angle of the node (Ω), and argument of the periastron (ω). The precession correction used to refer position angles to the 2000.0 equinox as well as the last observation used in the computations are also given in the last column.

Taking these orbital elements into account, we have computed the ephemerides of each binary system for the current and the next three years which are listed in Table 2. The name of each star (Column 1) is followed by the position angle (θ) and the angular separation (ρ) consecutively for the beginning of the years between 2013 and 2016.

Apparent orbits along with observational star data are shown in Figure 1.

Finsen’s observations are indicated by empty circles whereas speckle measurements (and the *Hipparcos*, if it exists) are shown as filled circles. Each observation is connected by a line to the position predicted for the corresponding epoch. The dashed line is the line of nodes whereas the arrow shows the direction of the orbital motion.

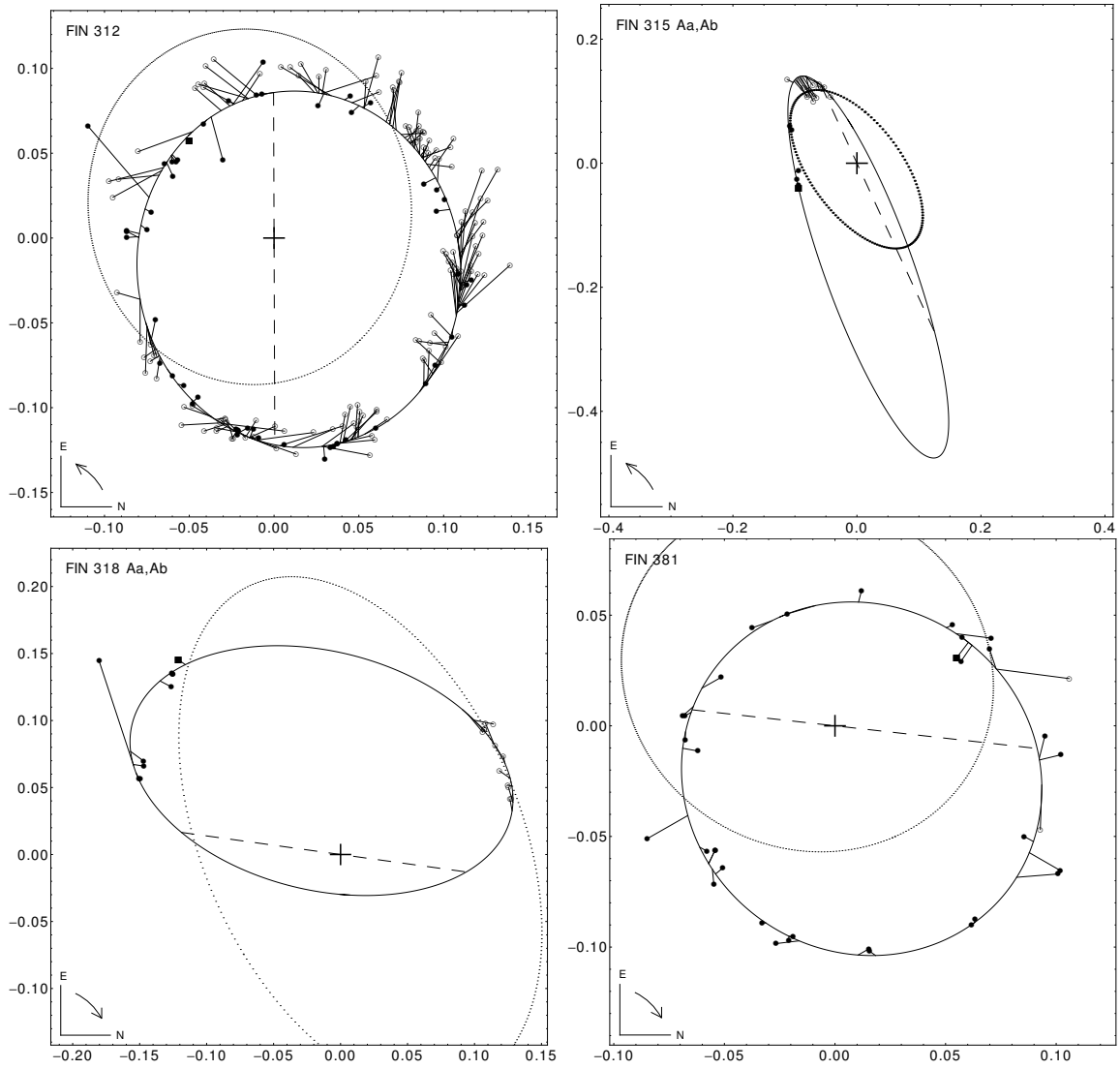


Figure 1: Apparent orbits for Fin 312, Fin 315 Aa,Ab, Fin 318 Aa,Ab and Fin 381.

3 Accurate computation of the individual masses

3.1 Methodology

Regarding mass determination, we have applied Kepler's Third Law:

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{1}{\pi^3} \frac{a^3}{P^2}. \quad (1)$$

Here \mathcal{M}_1 and \mathcal{M}_2 are the component masses expressed in units of solar mass, π is the parallax in arcsecs, a is the semimajor axis in arcsecs, and P is the period in years. An expression for the corresponding uncertainty has also been derived from this formula.

Initially, we computed the total mass taking into account the updated *Hipparcos* parallax. However, considering that some of these systems are situated at more than 200 pc, it is possible that this parallax is not sufficiently accurate enough. Thus we have also determined the dynamical parallax using the Baize-Romani algorithm [3].

Calculations have been carried out considering updated parameters of the bolometric correction [44] and of the mass-luminosity relation:

$$\log \mathcal{M} = -\frac{2}{5} \kappa (M_b - M_0). \quad (2)$$

Here \mathcal{M} is the mass of the star in \mathcal{M}_\odot and M_b is its absolute bolometric magnitude. On the other hand, κ and M_0 are two constants that must be calculated from the fit. The second one is, indeed, the bolometric magnitude of the Sun.

We have adjusted this relation to data given by [44] for the luminosity classes V ($\kappa = 4.23$ and $M_0 = 4.74$) and IV ($\kappa = 3.64$ and $M_0 = 3.88$) in the spectral ranges B3–M1 and B3–K1, respectively.

The mass ratio between both components, $q = \mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1$, has been obtained from the expression

$$q = 10^{-\frac{2}{5} \frac{\Delta m_b}{\kappa}}, \quad (3)$$

assuming $\Delta m_b \approx \Delta m_V$.

Usually, we compare individual masses obtained in this way with masses obtained from spectral type-mass formulae shown in [11] after applying the spectral class decomposition procedure of [18] in each case.

3.2 Results

Some stellar data as well as the results obtained in this study are summarized in Table 3. The name of each star (Column 1) is followed by the spectral type used to calculate the dynamical parallax (Column 2).

Its trigonometric parallax obtained from *Hipparcos*, as updated by the new reduction [47], are listed in Column 3.

Name	Sp [considered]	π_{Hip} [mas]	π_{dyn} [mas]	\mathcal{M}_1 [\mathcal{M}_\odot]	\mathcal{M}_2 [\mathcal{M}_\odot]
FIN 312	F4V	46.55 ± 2.53	41.43 ± 0.68	1.37 ± 0.09	1.03 ± 0.08
FIN 315 Aa,Ab	B1.5V	1.53 ± 0.34	3.88 ± 0.56	6.08 ± 3.43	5.45 ± 3.08
	B2IV		3.85 ± 0.58	6.27 ± 3.63	5.53 ± 3.20
FIN 318 Aa,Ab	K0III+A1V	2.39 ± 7.26	5.32 ± 0.20		
			4.65 ± 0.12		
FIN 381	F3V	12.00 ± 0.82	13.45 ± 0.38	1.76 ± 0.22	1.38 ± 0.18
			13.82 ± 0.39	1.72 ± 0.24	1.18 ± 0.16

Table 3: Stellar data and results (dynamical parallaxes and component masses)

The dynamical parallax is shown in Column 4. Finally, Columns 5 and 6 show the corresponding masses for each stellar component obtained from both the dynamical parallax and the new orbital elements.

With respect to this table, we note that two values of the dynamical parallax are shown for both Fin 318 Aa,Ab and Fin 381 (for each of them we have only one spectral type). The first value for the Fin 318 Aa,Ab was obtained from our orbital elements and masses expected from spectral types, whereas the second one was derived from our orbital elements and masses given by [45]. In the case of the Fin 381, the first value was obtained considering photometry given by [49] and the second one that given by [41].

3.2.1 FIN 312 (ϵ CET)

This binary with a very short period was discovered early in 1951 [19]. Twenty-three revolutions have been completed since then and Finsen himself subsequently observed it 140 times (plus 58 non-resolutions) during 18 consecutive years. This star was also observed one night by [48] using visual interferometry in 1971. From 1975 until 2009, 54 observations (and 3 non-resolutions) were performed using speckle interferometry.

A preliminary orbit with a period of 1.59 years along with a dynamical parallax of 68 mas was given by Finsen using 21 interferometric measurements. This orbit was published in a note whose illustrative title already announced the singularity of this system –“ ϵ Ceti, φ 312, A Visual Binary With Shortest Known Period?” [22].

Other orbits by Finsen [25, 26] and Baize [2] were calculated later.

We must note that this star is really a Line-Width Spectroscopic Binary (LWSB) system [17] as some observers have already suggested [1]. Hence, spectra are never individually separated and some extra assumptions must be made in order to untangle them. Taking that into account, a simultaneous adjustment of the visual and spectroscopic data accomplished by [39] provided new orbital elements as well as component masses ($2.39 \pm 0.74 \mathcal{M}_\odot$ and $1.55 \pm 0.48 \mathcal{M}_\odot$), parallax (36.99 ± 1.76 mas), and new spectral types for each component (F5V and F6V).

In agreement with the fact highlighted by [29] and [39] that most of Finsen’s visual interferometric observations have overestimated angular separations (thus leading to an overestimated orbital parallax), our computation takes into account the entire large set of accurate speckle observations (more than twelve revolutions) while considering position angles of Finsen’s measurements as well.

With the already reported new improved orbit [13], along with the *Hipparcos* parallax, a total mass of $1.69 \pm 0.28 \mathcal{M}_\odot$ is obtained. However, if we use the methodology discussed in this section for the calculation of the dynamical parallax, we obtain 41.43 ± 0.68 mas as well as a mass ratio, $q = 0.756 \pm 0.076$. With these values we deduce a more reliable dynamical mass of $2.42 \pm 0.16 \mathcal{M}_\odot$, distributed in such a way that $\mathcal{M}_1 = 1.37 \pm 0.09 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_2 = 1.03 \pm 0.08 \mathcal{M}_\odot$ strongly agree with the individual mass expected.

3.2.2 FIN 315 AA,AB

This binary system (Aa,Ab) has two fainter companions, B and C, located at about $3''.5$ and $19''$, respectively. Moreover, one component of A is itself a spectroscopic binary.

The duplicity of the A component was discovered by Finsen in the first part of 1951 [21] and he observed this inner binary 17 times in the following 17 years. There are also 5 speckle measurements from 1989 to 2011 that were accomplished with 4-m class telescopes and another one with the *Hipparcos* astrometry satellite.

The MK classification, B2IV [31], is included both in the *WDS* and in the *Hipparcos* catalogues. Later, a composite spectrum, B1.5V+B4V, was obtained for A and B components by [4] who estimated that ΔV for Aa and Ab components would be 1.7 rather than the 0.0 mag given in the *IDS*.

The previous available orbit for the Aa-Ab system [7] already showed residuals of a few degrees in position angles and in angular separations. In this work, we present an improved orbit which has already been announced [12].

Computation of the total mass obtained from the orbital elements and the updated *Hipparcos* parallax gives an absolutely meaningless value. To calculate the dynamical parallax, we have taken into account the two different available spectra.

However, results are very similar. In this way, we obtain 3.88 ± 0.56 mas for a B1.5V and 3.85 ± 0.58 mas for a B2IV. Mass ratios for the components would be $q = 0.897 \pm 0.027$ and $q = 0.881 \pm 0.031$, respectively. With these data, a total mass of $11.53 \pm 6.51 \mathcal{M}_\odot$ ($\mathcal{M}_1 = 6.08 \pm 3.43 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_2 = 5.45 \pm 3.08 \mathcal{M}_\odot$) is obtained in the first case, whereas that of $11.80 \pm 6.83 \mathcal{M}_\odot$ ($\mathcal{M}_1 = 6.27 \pm 3.63 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_2 = 5.53 \pm 3.20 \mathcal{M}_\odot$) is obtained in the second case. This total mass is very similar to the median mass, $11.92 \pm 0.36 \mathcal{M}_\odot$, derived from luminosity and effective temperature using several evolutionary models [32].

3.2.3 FIN 318 AA,AB

This binary system (Aa,Ab) orbits around the mutual centre of mass of a distant companion, B (with visual magnitude 7.65), located at about $20''$. Thus, it is part of the triple system, HJ 4690 AB.

Duplicity of the A component was discovered in mid 1951 by Finsen [20] and he observed this inner binary 12 times in the following 15 years. There were also 10 speckle measurements from 1989 to 2011 that were accomplished with 4-m class telescopes and another two with the *Hipparcos* astrometry satellite. Therefore, this system that shows a composite spectrum, G8III+A1V [33] or K0III+A1V [5, 16] has completed three-quarters of a revolution since 1951 to the present.

Because the previous orbit [37] does not fit well with the last speckle position angles, we have calculated a new orbit [12] which gives reasonably small residuals if we flip the whole set of speckle measurements 180° . In exchange for that, we must manage without the *Hipparcos* parallax if we do not want to obtain absolutely meaningless values for the system mass.

This choice is well justified taking into account the extremely poor precision of the *Hipparcos* parallax in this case.

Proceeding in this manner, we calculated a dynamical parallax of 5.32 ± 0.20 mas from the new orbital elements as well as from the estimated values for the mass (about $4.7 \pm 0.5 \mathcal{M}_\odot$) according to the well-known composite spectrum of this system (note that one component is supposed to be a giant star, thus we cannot apply the Baize-Romani algorithm). Yet, if we take into account the [45] estimation of the component masses (3.68 and $3.35 \mathcal{M}_\odot$) obtained from the spectral type or the B-V color index from Allen's tables, the corresponding dynamical parallax would be 4.65 ± 0.12 mas.

3.2.4 FIN 381 (V* V2388 OPH)

This binary system was first observed by Finsen in mid 1959 [23]. He measured it 5 times during 5 years. In addition, there were 33 speckle measurements between 1979 and 2008, almost all of them performed with 4-m class telescopes as well as an unresolved measurement of the *Hipparcos* astrometry satellite. With a period of 9 years, this system has already completed almost six revolutions since the first observation until today. A few years ago it was determined [40] that the brighter component was itself a W UMa-type eclipsing binary (V2388 Oph) with an orbital period of 0.8023 days.

With respect to the spectral type, both the *WDS* and *Hipparcos* catalog classify it as F5Vn [28, 6]. Recently, the Aa and Ab components of the eclipsing binary have been classified as A5m and F0, respectively [40].

The better available orbit [30] for the visual binary, (Aa, Ab)-B, showed residuals

of a few degrees [42] for the subsequent measurements. In this paper we give an improved orbit taking into account new speckle measurements. This has already been announced [12].

The total mass obtained from this orbit as well as from the updated Hipparcos parallax is $4.43 \pm 0.96 \mathcal{M}_\odot$. Possibly, this orbit is in the minimum mass threshold using this parallax. Despite that, it would be within the margins of uncertainty for the mass of three main-sequence F stars, about $3.6 \mathcal{M}_\odot$.

Indeed, the last is close to the total mass obtained exclusively from astrometric information collected by *Hipparcos*, $3.05 \pm 0.51 \mathcal{M}_\odot$ [43].

Nevertheless, a feasible explanation for this discrepancy could be that the updated *Hipparcos* parallax is underestimated. Actually, starting from the previous *Hipparcos* value of 14.72 ± 0.81 mas, we estimated that the most probable value for the parallax would be between 12.4 ± 0.3 and 14.2 ± 0.5 mas [11].

In fact, the calculation of the dynamical parallax, considering the total visual magnitude of the triple-system to be 6.16 ± 0.01 as well as the magnitude difference between the third star and the eclipsing pair as 1.09 ± 0.05 , provides a value of 13.45 ± 0.38 mas as well as a mass ratio, $q = 0.789 \pm 0.009$. With these values we obtain a dynamical mass of $3.14 \pm 0.40 \mathcal{M}_\odot$ ($\mathcal{M}_A = 1.76 \pm 0.22 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_B = 1.38 \pm 0.18 \mathcal{M}_\odot$). Moreover, if we consider the visual magnitude of the primary given by Finsen, 6.34 ± 0.01 , along with a larger magnitude difference between the third star and the eclipsing pair, 1.75 ± 0.02 , derived using the broadening function formalism [41], we obtain a dynamical parallax of 13.82 ± 0.39 mas as well as a mass ratio, $q = 0.683 \pm 0.005$. With these values we obtain a dynamical mass of $2.90 \pm 0.40 \mathcal{M}_\odot$ distributed in such a way that $\mathcal{M}_A = 1.72 \pm 0.24 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_B = 1.18 \pm 0.16 \mathcal{M}_\odot$. We must note that, in any case, both dynamical solutions are very similar.

Now, if we consider the mass ratio for the components of the eclipsing binary, 0.186 ± 0.002 [41], we find that $\mathcal{M}_{Aa} = 1.48 \pm 0.19 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_{Ab} = 0.28 \pm 0.03 \mathcal{M}_\odot$, for the first dynamical solution, while $\mathcal{M}_{Aa} = 1.45 \pm 0.20 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_{Ab} = 0.27 \pm 0.04 \mathcal{M}_\odot$, for the second one. Exactly the same values are found by considering the mass ratio, 0.187 ± 0.005 [34].

These results are also in agreement with masses estimated by [8] for the components Aa, Ab, and B: 2.10 , 0.39 , and $1.36 \mathcal{M}_\odot$, respectively. This would indicate that the distant component is more massive than expected as compared to the eclipsing binary using only astrometric information which gives a mass ratio between those of 0.41 ± 0.04 with $\mathcal{M}_A = 2.16 \pm 0.47 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_B = 0.89 \pm 0.20 \mathcal{M}_\odot$ [43]. Indeed, smaller masses have been obtained for each component ($\mathcal{M}_A = 1.653 \pm 0.289 \mathcal{M}_\odot$ and $\mathcal{M}_B = 0.522 \pm 0.126 \mathcal{M}_\odot$) from astrometric analysis after obtaining a dynamical parallax of 15.66 ± 0.81 mas [35].

Furthermore, masses obtained for Aa and B would be in agreement with those

expected (considering the spectral type and $\Delta m = 0.2$) for a F3/2V ($1.4\mathcal{M}_\odot$) and a F4V ($1.3\mathcal{M}_\odot$) star.

4 Conclusions

We reported the improved orbits of 4 binaries discovered by W. S. Finsen. In each case and in order to check the quality of the orbits, we have calculated the root mean square and the mean of the residuals, given different weights for the observations taking into account both the observational technique and the telescope used.

For each of the four binary, some orbits from several authors have been compared. On the other hand, precise individual masses of the components are provided from the *Hipparcos* parallax and/or from the dynamical parallax. In this last case, we have considered updated parameters for both the bolometric correction and the mass-luminosity relation. Complete information on the spectral types of the objects studied is also included.

Acknowledgments

This research has been supported by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness under Project AYA2011–26429. The authors made use of the Washington Double Star Catalogs maintained at the U.S. Naval Observatory, the SIMBAD database operated at CSD (Strasbourg, France), and the Ramon Maria Aller Observatory Catalog of Orbits and Ephemerides of Visual Double Stars (OARMAC) [15].

References

- [1] Abt H. A., Levy S. G., 1976, ApJS, 30, 273
- [2] Baize P., 1962, JO, 45, 247
- [3] Baize P., Romani L., 1946, AnAp, 9, 13
- [4] Corbally C. J., 1984, ApJS, 55, 657
- [5] Cousins A. W. J., Stoy R. H., 1962, RGOB, 49, 3
- [6] Cowley A. P., Bidelman W. P., 1979, PASP, 91, 83
- [7] Cvetković Z., Ninković S., 2010, AN, 331, 304
- [8] D’Angelo C., van Kerkwijk M. H., Rucinski S. M., 2006, AJ, 132, 650
- [9] Docobo J. A., 1985, Celest. Mech., 36, 143
- [10] Docobo J. A., 2012, in Arenou, F., Hestroffer, D., eds., Orbital Couples: Pas de Deux in the Solar System and the Milky Way, Observatoire de Paris, Paris, p. 196

- [11] Docobo J. A., Andrade M., 2006, ApJ, 652, 681
- [12] Docobo J. A., Andrade M., 2012b, IAUDS, Inf. Circ., 177
- [13] Docobo J. A., Andrade M., 2012c, IAUDS, Inf. Circ., 178
- [14] Docobo J. A., Andrade M., 2013, MNRAS, 428, 321
- [15] Docobo, J. A., Ling, J. F., Campo, P. P., 2013, Catalog of Orbits and Ephemerids of Visual Double Stars (OARMAC), on-line version [viewed 20 March 2013]. Available from <http://www.usc.es/astro/catalog.htm>
- [16] Duflo M., Figon P., Meyssonier N., 1995, A&AS, 114, 269
- [17] Duquennoy A., Mayor M., 1991, A&A, 248, 485
- [18] Edwards T. W., 1976, AJ, 81, 245
- [19] Finsen W. S., 1951a, MNSSA, 10, 42
- [20] Finsen W. S., 1951c, CiUO, 112, 94
- [21] Finsen W. S., 1952b, Obs, 72, 125
- [22] Finsen W. S., 1953a, MNSSA, 12, 18
- [23] Finsen W. S., 1963, ROCi, 122, 32
- [24] Finsen W. S., 1964b, AJ, 69, 319
- [25] Finsen W. S., 1970a, ROCi, 130, 261
- [26] Finsen W. S., 1970b, IAUDS, Inf. Circ., 52
- [27] Finsen W. S., 1971, Ap&SS, 11, 13
- [28] Harlan E. A., Taylor D. C., 1970, AJ, 75, 165
- [29] Hartkopf W. I., McAlister H. A., Franz O. G., 1989, AJ, 98, 1014
- [30] Hartkopf W. I., Mason B. D., McAlister H. A., 1996, AJ, 111, 370
- [31] Hiltner W. A., Garrison R. F., Schild R. E., 1969, ApJ, 157, 313
- [32] Hohle M. M., Neuhäuser R., Schutz B. F., 2010, AN, 331, 349
- [33] Jaschek C., Conde H., de Sierra A. C., 1964, Catalogue of stellar spectra classified in the Morgan-Keenan system. Observatorio Astronomico de la Universidad de la Plata, La Plata, Argentina
- [34] Karami K., Ghaderi K., Mohebi R., Sadeghi R., Soltanzadeh M. M., 2009, PASA, 26, 121
- [35] Martin C., Mignard F., 1998, A&A, 330, 585
- [36] Mason B. D., Wycoff G. L., Hartkopf W. I., The Washington Double Star Catalog [viewed 20 March 2013]. Available from: <http://www.usno.navy.mil/USNO/astrometry/optical-IR-prod/wds/WDS>

- [37] Olević D., Cvetković Z., 2004, *A&A*, 415, 259
- [38] Overbeek M. D., 1997, *MNASSA*, 56, 9
- [39] Pourbaix D., 2000, *A&AS*, 145, 215
- [40] Rodríguez E. et al., 1998, *A&A*, 336, 920
- [41] Rucinski S. M., Lu W., Capobianco C. C., Mochnecki S. W., Blake R. M., Thomson J. R., 2002, *AJ*, 124, 1738
- [42] Rucinski S. M., Pribulla T., van Kerkwijk M. H., 2007, *AJ*, 134, 2353
- [43] Söderhjelm S., 1999, *A&A*, 341, 121
- [44] Straižys V., Kuriliene G., 1981, *Ap&SS*, 80, 353
- [45] Tokovinin A., 2008, *MNRAS*, 389, 925
- [46] van den Bos W. H., Finsen W. S., 1971, *MNASSA*, 30, 6
- [47] van Leeuwen F., 2007, *A&A*, 474, 653
- [48] Wilson, R. H., 1979, *A&AS*, 35, 193
- [49] Yakut K., Kalomeni B., İbanoğlu C., 2004, *A&A*, 417, 725

Configuraciones de cuatro cuerpos en escenarios de exoplanetas

P. P. Campo y J. A. Docobo

Observatorio Astronómico R. M. Aller

Universidade de Santiago de Compostela

Abstract

Lately, more and more exoplanets have been discovered and, thanks to the excellent programs dedicated to this task, the number is expected to increase considerably even with the detection of Earth-sized planets. Thus it is important to study the dynamical behavior of planetary systems. Among all the problems that may be considered, in this research we have focused on four-body planetary systems.

First we examine all the possible situations that may be present in four-body planetary systems, including satellites, in both single and multiple stars. Step decomposition is a methodology explained by A. Abad and J. A. Docobo to deal with n -body problems with hierarchy. The use of this technique permits the reduction of the different cases to five configurations.

Finally, we analytically integrate one of the cases established before. It is that in which a planet with a satellite orbits a component of a double star. Once the Hamiltonian of the problem is established, we formulate it in terms of three small parameters which can be reduced to two as is justified. After that, using Hori's biparametric method, the angular variables are removed, thereby allowing the integration of the problem.

1 Introducción

La búsqueda de exoplanetas es hoy en día uno de los campos de investigación más activos en Astronomía. Gracias al desarrollo de distintas técnicas de detección, cada vez se están descubriendo más sistemas planetarios. En la actualidad hay programas de observación de gran calidad, tanto en el espacio (KEPLER y CoRoT) como en tierra (HARPS, HIRES, SuperWASP, HATNet o TrES, entre otros) que están detectando un gran número de exoplanetas; hoy hay ya más de 850 catalogados (<http://exoplanet.eu/catalog>, [37]). Estos descubrimientos han llevado a la necesidad de estudiar su dinámica para lograr una mejor comprensión de los mismos.

Entre los posibles escenarios de planetas extrasolares, aquellos que involucran sistemas estelares múltiples son quizás los más interesantes en términos dinámicos. En la década de los setenta comenzaron a aparecer los primeros estudios en esta área. Fueron publicados por Harrington ([22], [23], [24]), Dvorak ([8], [9], [10], [11], [12], [35]), y Szebehely ([39], [40], [41]), entre otros.

En la mayoría de estos trabajos se usaban los siguientes modelos:

- una estrella con un planeta (el problema de dos cuerpos),
- una estrella doble con un planeta (el problema restringido de tres cuerpos), y
- n estrellas con ν planetas (el problema restringido de $n+\nu$ cuerpos ([42])).

Con los primeros descubrimientos, quedó claro que los modelos restringidos no eran adecuados debido a que en ellos se admite que los cuerpos pequeños no afectan al movimiento de los mayores, ya que es preciso tener en cuenta que el descubrimiento de los exoplanetas ha sido posible gracias a los efectos gravitatorios que estos causan en la estrella alrededor de la que giran.

En 1984, Dvorak estableció los diferentes tipos de órbitas que se pueden encontrar en sistemas estelares dobles con planetas ([10]):

- órbitas de tipo planeta (Tipo P, el exoplaneta se mueve alrededor de ambas componentes),
- órbitas de tipo satélite (Tipo S, el exoplaneta orbita una de las estrellas), y
- órbitas de tipo libración (Tipo L, el exoplaneta está en uno de los puntos de Lagrange).

Los planetas en órbitas de tipo L se espera que sean muy infrecuentes debido a que la relación entre las masas de las componentes es muy restrictiva para asegurar la estabilidad del sistema. Es más probable el escenario de una estrella con un gigante gaseoso orbitándola y un pequeño planeta en uno de los puntos de Lagrange. Schwarz et al. ([38]) estudiaron este escenario y obtuvieron una lista de candidatos potenciales.

Holman y Wiegert ([26]), siguiendo un estudio de Rabl y Dvorak ([35]), realizaron simulaciones numéricas para evaluar la estabilidad de las de tipo P y S. En el primer caso, obtuvieron expresiones para el valor mínimo (a_i) del semieje mayor de una órbita circular y en el segundo, el valor máximo (a_s) del mismo. Además, para las de tipo P, el semieje mayor no debe ser muy grande o de otro modo podría sufrir perturbaciones de estrellas cercanas.

La mayoría de los planetas descubiertos en la actualidad en sistemas binarios describen órbitas de tipo S. Todavía no se ha descubierto ninguno en un punto de Lagrange y hay un pequeño número de órbitas de tipo P debido a la mayor dificultad de detectarlas. Sin embargo, el número de planetas circumbinarios hallados ha ido creciendo desde el descubrimiento de uno orbitando ambas componentes del sistema NN-Serpentis en 2010 ([5]).

En los últimos años, muchos especialistas han estado investigando no sólo la dinámica de planetas extrasolares, sino también otras cuestiones interesantes como la habitabilidad en los

mismos. Hay técnicas contrastadas que han sido usadas a lo largo de los años en el problema general de n cuerpos o cualquiera de sus casos particulares y que pueden aplicarse ahora al estudio de exoplanetas. Véase por ejemplo Ferraz-Mello y Michtchenko ([16]); Pilat-Lohinger y Dvorak ([33]); Dvorak y Sli ([14]); Kiseleva-Eggleton et al. ([28]); Pilat-Lohinger, Funk y Dvorak ([34]); Funk et al. ([18]); Ferraz-Mello, Michtchenko, Beaugé y Callegari ([17]); Michtchenko, Beaugé y Ferraz-Mello ([31]); Ferraz-Mello ([15]); Haghighipour ([20]); Schwarz et al. ([38]); Desidera y Barbieri ([7]); Chatterjee et al. ([6]); Scharf y Menou ([36]); Kopparapu y Barnes ([30]); Hansen ([21]); Kita, Rasio y Takeda ([29]); Dvorak et al. ([13]); Funk, Schwarz, Dvorak y Roth ([19]); Perryman y Schulze-Hartung ([32]); y Heller, Leconte y Barnes ([25]), entre otros.

El artículo que aquí se presenta está estructurado como sigue. Tras esta introducción estableceremos los 17 casos posibles que pueden encontrarse en sistemas planetarios de cuatro cuerpos en estrellas aisladas, dobles y triples. Luego expondremos una metodología denominada “descomposición escalonada”, desarrollada por A. Abad ([1]), y A. Abad y J. A. Docobo ([2]) para tratar sistemas jerárquicos de n cuerpos, que se aplicará a los distintos escenarios posibles, los cuales veremos que pueden ser reducidos a sólo cinco configuraciones. Nuestra meta es lograr la integración analítica de uno de estos casos, concretamente el de una estrella doble y un planeta con un satélite en una órbita tipo S.

Una vez hayamos establecido la formulación hamiltoniana del problema utilizando el conjunto de variables de Delaunay, el problema se escribirá en términos de tres pequeños parámetros. Usando las expresiones de Holman y Wiegert podemos establecer el orden de cada uno de los parámetros, lo que nos permitirá, como veremos, trabajar sólo con dos de ellos. Luego se aplicará el método biparamétrico de Hori para completar la integración.

2 Escenarios de cuatro cuerpos

Centraremos nuestro trabajo en escenarios de cuatro cuerpos, pudiendo ser estos: estrellas, planetas y satélites. Más tarde aplicaremos la metodología de la “descomposición escalonada” para reducir toda la casuística a cinco configuraciones. Finalmente estudiaremos de forma completa el caso antes comentado.

Dado que estamos considerando escenarios de exoplanetas, las estrellas pueden aparecer aisladas o formando parte de sistemas binarios o triples. Los planetas pueden tener satélites o aparecer en subsistemas dobles. Es posible, asimismo, que existan dos satélites.

2.1 Casos con una estrella (Figuras 1-3)

- Caso 1: Una estrella con tres planetas.
- Caso 2: Una estrella con dos planetas, uno de ellos con un satélite.
- Caso 3: Una estrella con un planeta que tiene dos satélites.
- Caso 4: Una estrella con un planeta doble y un satélite orbitando a ambos.

- Caso 5: Una estrella con un planeta doble y un satélite orbitando a uno de ellos.
- Caso 6: Una estrella con un planeta y un satélite doble.

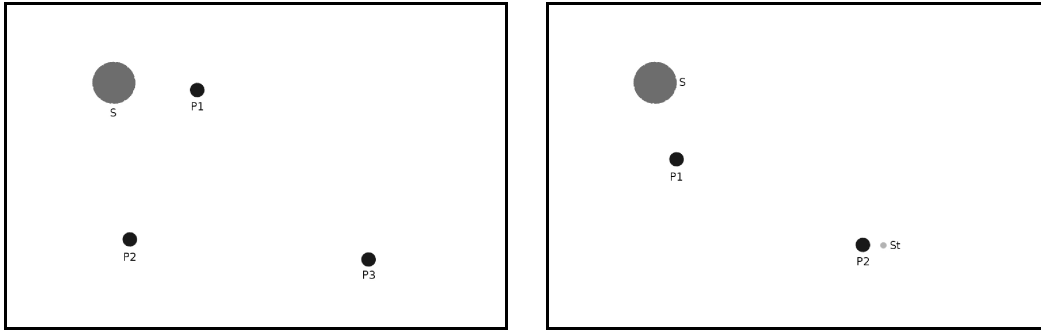


Figure 1.— Casos 1 y 2

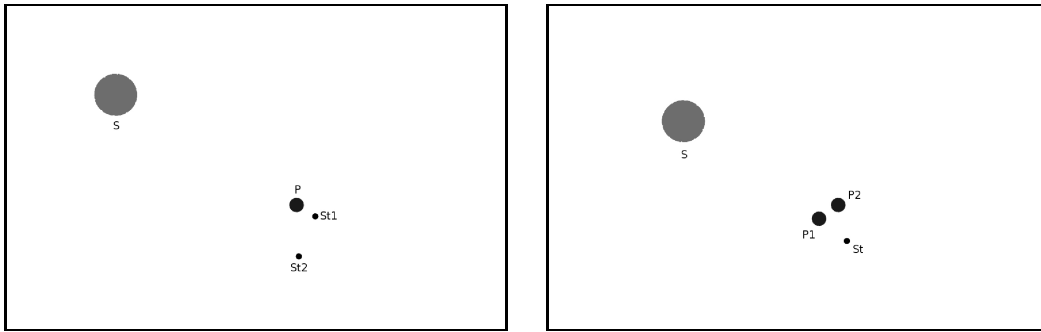


Figure 2.— Casos 3 y 4

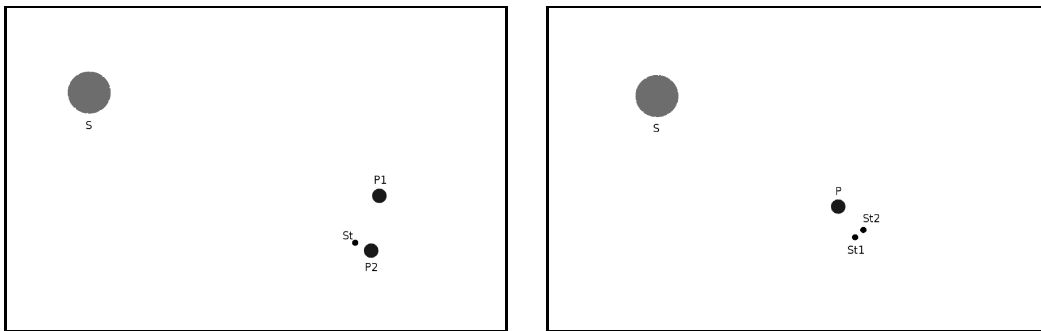


Figure 3.— Casos 5 y 6

2.2 Casos con dos estrellas (Figuras 4-6)

- Caso 7: Una estrella doble con un planeta y un satélite orbitando una de las componentes.
- Caso 8: Una estrella doble, cada una con un planeta.
- Caso 9: Una estrella doble, una con un planeta, y otro planeta orbitando a los otros tres.
- Caso 10: Una estrella doble con un planeta y un satélite orbitando a ambas componentes.

- Caso 11: Una estrella doble con dos planetas lejanos orbitando a ambas.

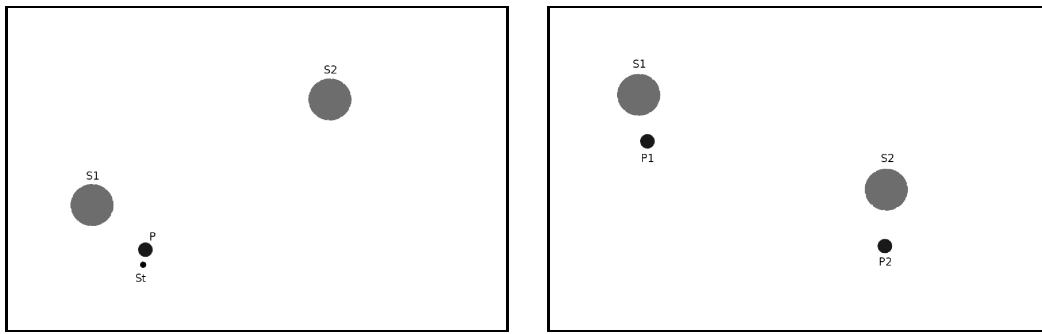


Figure 4.— Casos 7 y 8

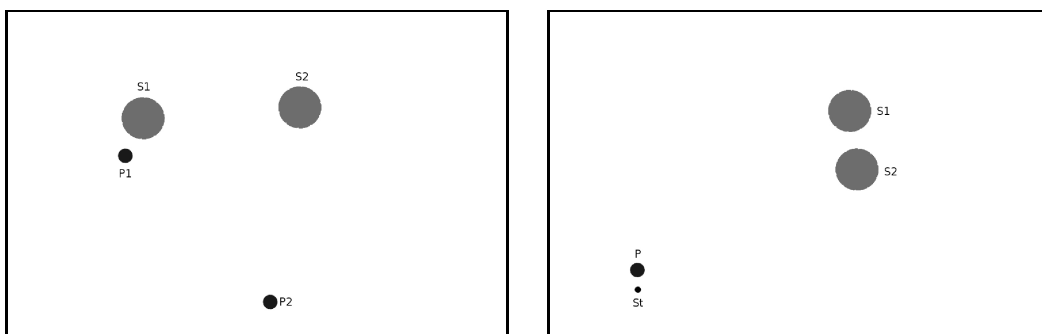


Figure 5.— Casos 9 y 10

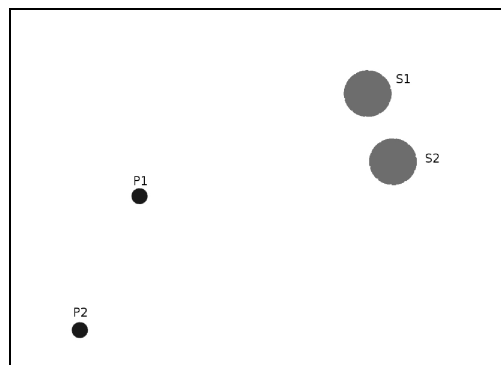


Figure 6.— Caso 11

2.3 Casos con tres estrellas (Figuras 7-9)

- Caso 12: Una estrella triple con dos componentes formando un par cerrado y un planeta orbitando a una de este par.
- Caso 13: Una estrella triple con un par cerrado y un planeta orbitando la componente exterior.
- Caso 14: Una estrella triple con un par cerrado y un planeta orbitando a éste.
- Caso 15: Una estrella triple con un par cerrado y un planeta orbitando a las tres.
- Caso 16: Una estrella triple sin jerarquía con un planeta orbitando a una de ellas.
- Caso 17: Una estrella triple sin jerarquía y un planeta orbitando a las tres.

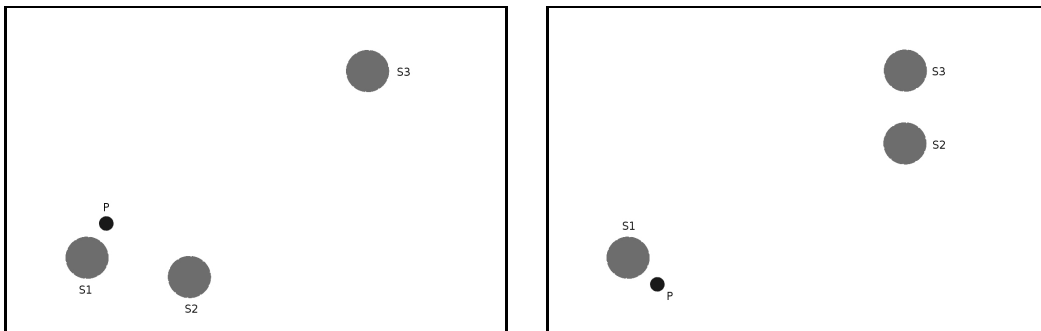


Figure 7.— Casos 12 y 13

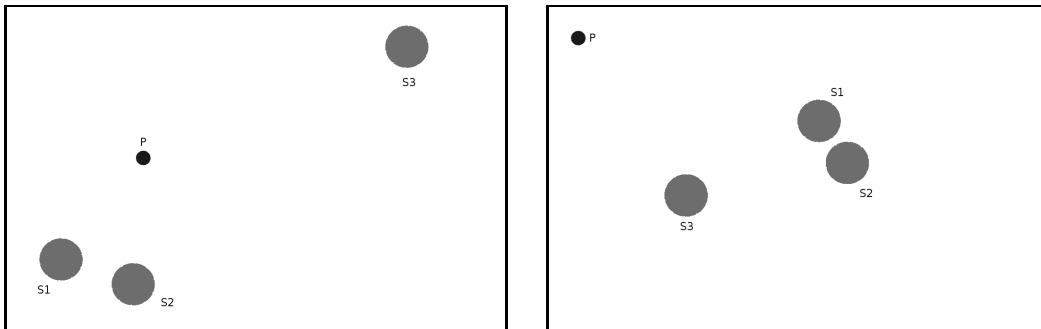


Figure 8.— Casos 14 y 15

3 Descomposición escalonada de n cuerpos

Primero Abad en su tesis doctoral [1], y posteriormente el mismo autor junto con J. A. Docobo [2], establecieron una metodología para el estudio de sistemas de n cuerpos jerarquizados. Consiste en descomponer sucesivamente el sistema original hasta conseguir subsistemas compuestos por un único objeto que se llamarán simples. Las descomposiciones se hacen teniendo en cuenta la jerarquía de distancias. En cada nivel de descomposición se define un nuevo sistema de coordenadas, llamadas coordenadas relativas escalonadas, en el cual el baricentro de

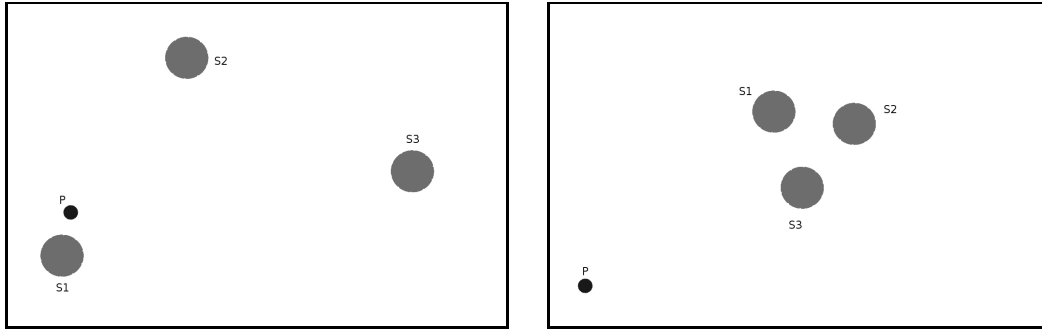


Figure 9.— Casos 16 y 17

cada subsistema se refiere al de uno de ellos. De esta forma, para un sistema de n cuerpos, se pueden definir $n-1$ vectores que generan un conjunto de coordenadas.

Cuando aplicamos esta descomposición, los 17 casos propuestos anteriormente se reducen a 5 configuraciones. En lo que sigue, denominaremos:

- P_i a cada uno de los cuerpos,
- S_0 al sistema de cuatro cuerpos,
- S_i a uno de los subsistemas en el primer nivel de descomposición,
- S_{ii} a los subsistemas en el segundo nivel de descomposición,
- S_{iii} a los subsistemas en el tercer nivel de descomposición.

con $i=1, 2, 3, 4$.

La primera configuración (Figura 10) corresponde, en general, al caso sin ninguna jerarquía, esto es, el 1. Así, cada subsistema corresponde a uno de los cuerpos del sistema. Para este caso, la descomposición no supone ninguna ventaja. Hay que notar que puede haber casos particulares en los que sí tendremos jerarquía de distancias, con lo que podremos incluirlo en la última configuración. Sin embargo, en general no es así, por ejemplo si tenemos dos planetas con órbitas similares a las de Neptuno y al planeta enano Plutón, o si tenemos un gigante gaseoso con un planeta tipo Tierra en uno de los puntos de Lagrange.

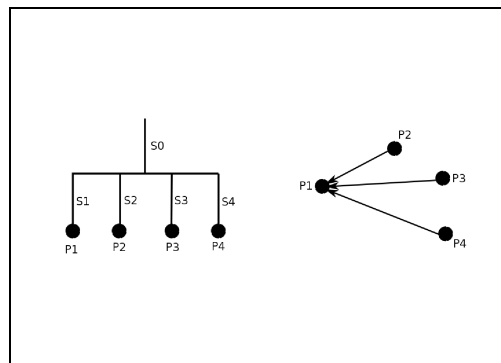


Figure 10.— Caso 1

En la segunda configuración (Figura 11) tenemos dos subsistemas en el primer nivel de descomposición, uno compuesto por tres de los cuerpos y otro compuesto por un único objeto. El que tiene tres se divide en otros tantos subsistemas simples. Los casos 3 y 16 pueden descomponerse de esta forma. De nuevo habrá casos particulares en los que podamos definir una jerarquía de distancias, pero no es el caso general. Si no se puede dar esa jerarquía, los cocientes de distancias no servirán para definir pequeños parámetros, por lo que su integración no se puede realizar mediante métodos analíticos de perturbaciones como el propuesto en la sección 4.

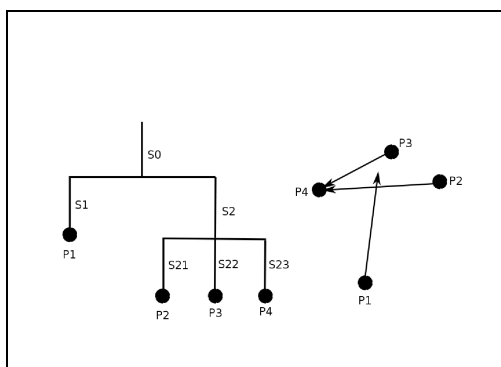


Figure 11.— Casos 3 y 16

En los casos 2, 11, y 15, podemos considerar tres subsistemas en el primer nivel de descomposición (Figura 12), dos de ellos con un único objeto y el otro con dos cuerpos. Este es el tercer escenario en el que no se puede garantizar en general una jerarquía de distancias.

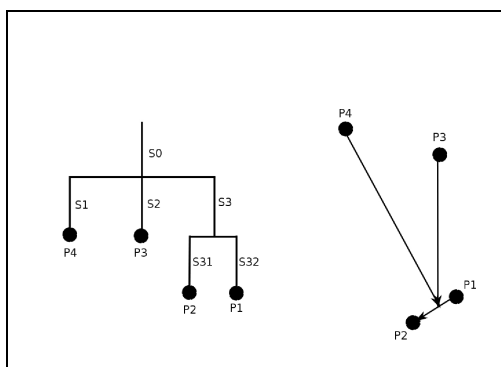


Figure 12.— Casos 2, 11, y 15

La cuarta configuración tiene dos subsistemas (Figura 13), cada uno con dos cuerpos en él. Los casos 8, 10 y 13 se pueden analizar de esta forma. Aquí ya tenemos una jerarquía de distancias que nos permite utilizarlas para realizar una integración analítica en órdenes de perturbación. Esta configuración ya fue estudiada por Abad ([1]) para el caso de una estrella cuádruple.

La última configuración (Figura 14) es la descomposición completamente escalonada. El sistema se descompone en dos subsistemas, uno de ellos con tres objetos y el otro con uno. El de tres cuerpos de nuevo se descompone en dos subsistemas más, uno con dos objetos y el otro con uno. Esta configuración corresponde a la conocida con el nombre de cadena baricéntrica.

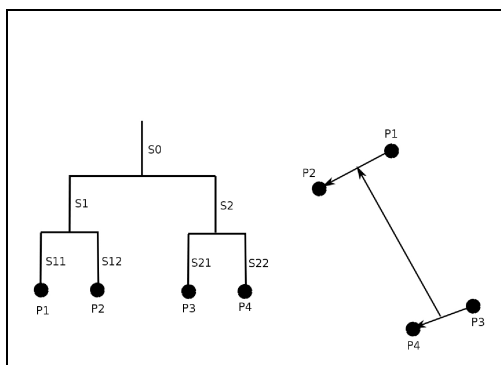


Figure 13.— Casos 8, 10, y 13

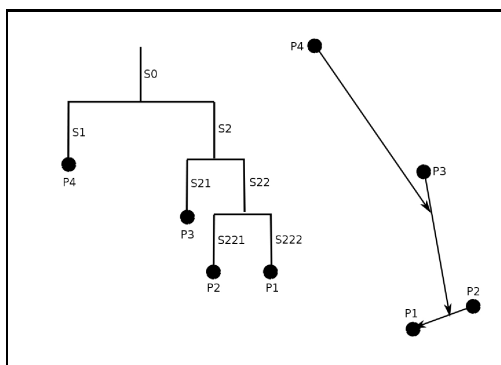


Figure 14.— Casos 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, y 17

Aunque hay tres configuraciones no jerárquicas, la mayoría de los casos están comprendidos en las configuraciones que sí se pueden tratar analíticamente e incluso incluyen problemas particulares de los otros.

4 Integración de las ecuaciones de movimiento en un caso concreto

El escenario en el que hemos centrado nuestro estudio consiste en una estrella doble con un planeta orbitando a una de las componentes (órbita tipo S), el planeta a su vez tiene un satélite (Figure 15). Esto corresponde al caso 7 de los anteriormente considerados. Seguidamente formulamos el problema usando la descomposición escalonada, llamando P_3 y P_4 a las estrellas, P_2 al planeta y P_1 al satélite.

Como hemos visto, la formulación escalonada del problema en esta configuración es equivalente a la cadena baricéntrica. Llamaremos:

- \vec{r}_2 : vector de posición de P_1 a P_2 .
- \vec{r}_1 : vector de posición de P_3 al centro de masas de P_1 y P_2 .
- \vec{r}_0 : vector de posición de P_4 al centro de masas de P_1 , P_2 y P_3 .

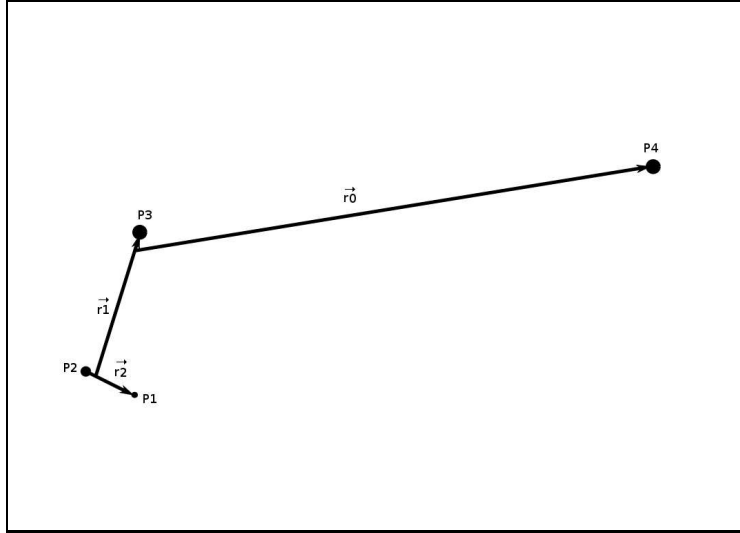


Figure 15.— Sistema de cuatro cuerpos

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_2 &= \vec{\xi}_2 - \vec{\xi}_1 \\
 \vec{r}_1 &= \vec{\xi}_3 - \frac{m_1 \vec{\xi}_1 + m_2 \vec{\xi}_2}{m_1 + m_2} \\
 \vec{r}_0 &= \vec{\xi}_4 - \frac{m_1 \vec{\xi}_1 + m_2 \vec{\xi}_2 + m_3 \vec{\xi}_3}{m_1 + m_2 + m_3}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\
 M_1 &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 M_0 &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3) m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Siendo $\vec{\xi}_i$, $i=1,2,3,4$, los vectores de posición de cada uno de los cuatro cuerpos con respecto a un sistema baricéntrico inercial.

Así, podemos formular las ecuaciones newtonianas del movimiento de la forma:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{1}{M_2} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} \\
 \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{1}{M_1} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} \\
 \ddot{\vec{r}}_0 &= \frac{1}{M_0} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_0}
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde V es el potencial, dado por:

$$V = -\tilde{G} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{m_i m_j}{|\vec{\xi}_j - \vec{\xi}_i|} \tag{4}$$

y \tilde{G} es la constante gravitatoria.

Si llamamos ahora $\vec{\xi}_{ij} = \vec{\xi}_j - \vec{\xi}_i$, $1 \leq i < j \leq 4$, se llega a:

$$\begin{aligned}
\vec{\xi}_{12} &= \vec{r}_2 \\
\vec{\xi}_{13} &= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + a \vec{r}_2 \\
\vec{\xi}_{23} &= \vec{r}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + b \vec{r}_2 \\
\vec{\xi}_{14} &= \vec{r}_0 + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + c \vec{r}_1 + a \vec{r}_2 \\
\vec{\xi}_{24} &= \vec{r}_0 + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{r}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + c \vec{r}_1 + b \vec{r}_2 \\
\vec{\xi}_{34} &= \vec{r}_0 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + d \vec{r}_1
\end{aligned} \tag{5}$$

habiendo puesto:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\
b &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \\
c &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
d &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, si designamos σ_1 , σ_2 y σ_0 a los cosenos de los ángulos entre \vec{r}_2 y \vec{r}_0 , \vec{r}_1 y \vec{r}_0 y \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\xi_{12}^2 &= r_2^2 \\
\xi_{13}^2 &= r_1^2 + 2ar_1r_2\sigma_0 + a^2r_2^2 \\
\xi_{23}^2 &= r_1^2 + 2br_1r_2\sigma_0 + b^2r_2^2 \\
\xi_{14}^2 &= r_0^2 + 2cr_0r_1\sigma_2 + 2ar_0r_2\sigma_1 + 2acr_1r_2\sigma_0 + c^2r_1^2 + a^2r_2^2 \\
\xi_{24}^2 &= r_0^2 + 2cr_0r_1\sigma_2 + 2br_0r_2\sigma_1 + 2bcr_1r_2\sigma_0 + c^2r_1^2 + b^2r_2^2 \\
\xi_{34}^2 &= r_0^2 + 2dr_0r_1\sigma_2 + d^2r_1^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Extrayendo como factor común r_1^2 en la segunda y la tercera expresiones de (7), y en la quinta r_0^2 y teniendo en cuenta que $(1 + 2hx + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(h)$, donde $|x| \leq 1$, $0 \leq h < 1$ y $P_n(h)$ es el polinomio de Legendre de grado n, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1 m_2}{\xi_{13}} &= \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a \frac{r_2}{r_1}\right)^n P_n(\sigma_0) \\
\frac{m_2 m_3}{\xi_{23}} &= \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(b \frac{r_2}{r_1}\right)^n P_n(\sigma_0) \\
\frac{m_3 m_4}{\xi_{34}} &= \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(d \frac{r_1}{r_0}\right)^n P_n(\sigma_2)
\end{aligned} \tag{8}$$

Si ahora tenemos en cuenta que para $|x| \leq 1$, $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$, tomando en primer lugar $x = (\frac{\xi_{14}}{r_0})^2 - 1$ y luego $x = (\frac{\xi_{24}}{r_0})^2 - 1$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_4}{\xi_{14}} &= \frac{m_1 m_4}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \sum_{j_1, \dots, j_5=1, \sum j_i=n}^n \frac{n!}{j_1! \dots j_5!} \sigma_2^{j_3} \sigma_1^{j_4} \sigma_0^{j_5} 2^{j_3+j_4+j_5} c^{2j_1+j_3+j_5} \\ &\quad a^{2j_2+j_4+j_5} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2j_1+j_3+j_5} \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{2j_2+j_4+j_5} \\ \frac{m_2 m_4}{\xi_{24}} &= \frac{m_2 m_4}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \sum_{j_1, \dots, j_5=1, \sum j_i=n}^n \frac{n!}{j_1! \dots j_5!} \sigma_2^{j_3} \sigma_1^{j_4} \sigma_0^{j_5} 2^{j_3+j_4+j_5} c^{2j_1+j_3+j_5} \\ &\quad b^{2j_2+j_4+j_5} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2j_1+j_3+j_5} \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{2j_2+j_4+j_5} \end{aligned} \quad (9)$$

Con estas expresiones podemos obtener el potencial del problema en coordenadas baricéntricas:

$$\begin{aligned} V &= -\tilde{G} \left(\frac{m_1 m_2}{r_2} + \frac{(m_1 + m_2) m_3}{r_1} + \frac{(m_1 + m_2 + m_3) m_4}{r_0} + \sum_{n=2}^{\infty} N_n \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} P_n(\sigma_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} N_n^* \frac{r_1^n}{r_0^{n+1}} P_n(\sigma_2) + \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \right. \\ &\quad \left. \sum_{j_1, \dots, j_5=1, \sum j_i=n}^n \frac{n!}{j_1! \dots j_5!} \sigma_2^{j_3} \sigma_1^{j_4} \sigma_0^{j_5} N_n^{**} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2j_1+j_3+j_5} \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{2j_2+j_4+j_5} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

con:

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{m_1 m_2 m_3 (m_1^{n-1} - (-m_2)^{n-1})}{(m_1 + m_2)^n} \\ N_n^* &= \frac{(-1)^n (m_1 + m_2)^n m_3 m_4}{(m_1 + m_2 + m_3)^n} \\ N_n^{**} &= 2^{j_3+j_4+j_5} m_4 \left(\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{2j_1+j_3+j_5} \frac{m_1 m_2^{2j_2+j_4+j_5} + m_2 (-m_1)^{2j_2+j_4+j_5}}{(m_1 + m_2)^{2j_2+j_4+j_5}}. \end{aligned} \quad (11)$$

También se puede demostrar que en estas variables, la energía cinética se expresa como

$$T = \frac{1}{2} (M_0 \dot{r}_0^2 + M_1 \dot{r}_1^2 + M_2 \dot{r}_2^2) \quad (12)$$

con lo que el Hamiltoniano:

$$F = T + V \quad (13)$$

será la suma de (12) y (10)

Finalmente, desarrollaremos el Hamiltoniano en serie de tres pequeños parámetros: $\epsilon_0 = a_2^{(0)}/q_1^{(0)}$, $\epsilon_1 = a_1^{(0)}/q_0^{(0)}$ y $\epsilon_2 = a_2^{(0)}/q_0^{(0)}$, donde $a_i^{(0)}$, $i=0,1,2$ son los semiejes mayores y $q_i^{(0)}$, $i=0,1,2$ las distancias al periastro en cada una de las tres órbitas consideradas.

Formularemos el problema en un sistema de variables de Delaunay modificado, en el que los momentos L_i , G_i , y H_i son los originales multiplicados por M_i , lo que constituye también un sistema canónico de variables. Trabajando de esta forma resulta:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{A_0}{L_0^2} + \frac{A_1}{L_1^2} + \frac{A_2}{L_2^2} + \frac{\epsilon_0^2}{2!} B_1 \frac{L_1^2}{r_0^2} \frac{r_1}{a_1} P_1(\sigma_2) + \frac{\epsilon_0^3}{3!} B_2 \frac{L_1^4}{r_0^3} \frac{r_1^2}{a_1^2} P_2(\sigma_2) \\
&+ \frac{\epsilon_1^3}{3!} C_2 \frac{L_2^4}{r_1^3} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^2 P_2(\sigma_0) + \frac{\epsilon_1^4}{4!} C_3 \frac{L_2^6}{r_1^4} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^3 P_3(\sigma_0) \\
&+ \frac{\epsilon_2^3}{3!} D_2 \frac{L_2^4}{r_0^3} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^2 P_2(\sigma_1) + \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

con:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{\tilde{G}^2(m_1 + m_2 + m_3)^3 m_4^3}{2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)} \\
A_1 &= -\frac{\tilde{G}^2(m_1 + m_2)^3 m_3^3}{2(m_1 + m_2 + m_3)} \\
A_2 &= -\frac{\tilde{G}^2 m_1^3 m_2^3}{2(m_1 + m_2)} \\
B_1 &= -2\tilde{G}N_1^* \\
B_2 &= -\tilde{G}(N_2^* - (m_1 + m_2)m_4 \left(\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^2) \\
C_2 &= -\tilde{G}N_2 \\
C_3 &= -\tilde{G}N_3 \\
D_2 &= -\tilde{G}m_4 \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \\
&\dots
\end{aligned} \tag{15}$$

Tenemos ya el hamiltoniano formulado en términos de tres pequeños parámetros, por lo tanto, necesitaríamos aplicar un método de perturbaciones triparamétrico como el desarrollado por M. Andrade ([4]) para n parámetros, pero veremos que se puede reducir a sólo dos parámetros. Para esto, usaremos la expresión empírica de Holman y Wiegert para la estabilidad de órbitas de tipo S:

$$\begin{aligned}
\frac{a_s}{a} &= (0.464 \pm 0.006) + (-0.380 \pm 0.010)\mu + (-0.631 \pm 0.034)e \\
&+ (0.586 \pm 0.061)\mu e + (0.150 \pm 0.041)e^2 + (-0.198 \pm 0.047)\mu e^2
\end{aligned} \tag{16}$$

donde a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la binaria, respectivamente, y $\mu = \frac{m_4}{m_3 + m_4}$.

Utilizando la expresión (16), podemos hacer una estimación de los parámetros. Para órbitas circulares y, por ejemplo, con dos estrellas de masa solar cada una de ellas, un planeta con masa semejante al planeta Júpiter, y un satélite de masa terrestre, en los límites de estabilidad resultan: $\epsilon_0 \approx 0.27$, $\epsilon_1 \approx 0.08$ y $\epsilon_2 \approx 0.02$. Estos valores serán los máximos, así que normalmente serán mucho menores, por lo que trabajaremos en cuarto orden para ϵ_0 , tercer orden para ϵ_1 , y segundo orden para ϵ_2 . Este último aparece por primera vez en orden tres, por lo que sólo necesitamos considerar dos parámetros, pudiendo así aplicar el método biparamétrico de Hori, que coincide con el multiparamétrico de Andrade para $n=2$.

Hasta ahora, la metodología es válida para cualquiera de los casos que pueden ser reducidos a la configuración 5. Este último paso, sin embargo, depende de las condiciones de los sistemas, particularmente de las relaciones de masa. De ahora en adelante, el análisis sólo será adecuado si podemos reducir el orden de perturbación a los valores que hemos tomado.

4.1 Aplicación del método de Hori

Si consideramos estos órdenes de perturbación comentados, el Hamiltoniano se puede formular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F = & \frac{A_0}{L_0^2} + \frac{A_1}{L_1^2} + \frac{A_2}{L_2^2} + \frac{\epsilon_0^2}{2!} B_1 \frac{L_1^2}{r_0^2} \frac{r_1}{a_1} P_1(\sigma_2) + \frac{\epsilon_0^3}{3!} B_2 \frac{L_1^4}{r_0^3} \frac{r_1^2}{a_1^2} P_2(\sigma_2) \\
& + \frac{\epsilon_1^3}{3!} C_2 \frac{L_2^4}{r_1^3} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^2 P_2(\sigma_0) + \frac{\epsilon_1^4}{4!} C_3 \frac{L_2^6}{r_1^4} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^3 P_3(\sigma_0).
\end{aligned} \tag{17}$$

Elijamos ahora un sistema de referencia OX'Y'Z' de tal forma que el plano OX'Y' coincida con el plano orbital de \vec{r}_1 y además que el eje OX' sea la línea de los nodos de dicha órbita con respecto al sistema de referencia inicial. Para ello bastará con hacer dos giros, uno de argumento h_1 con respecto al eje OZ original y otro de argumento I_1 con respecto al nuevo eje OX'.

En este sistema de referencia tendremos unas nuevas variables $(L'_i, G'_i, H'_i, l'_i, g'_i, h'_i)$, $i=0,1,2$, que verifican:

$$\begin{aligned}
L'_i &= L_i \\
G'_i &= G_i \\
l'_i &= l_i
\end{aligned} \tag{18}$$

y para que el nuevo sistema sea completamente canónico (ver [1] para un análisis muy similar en el caso de una estrella cuádruple) deberemos elegir los elementos de la órbita 1 como sigue:

$$\begin{aligned}
H'_1 &= H_0 + H_1 + H_2 \\
g'_1 &= g_1 \\
h'_1 &= h_1
\end{aligned} \tag{19}$$

Para las órbitas 0 y 2, los h'_i , $i=0,2$ se tomarán como los ángulos entre el nuevo eje OX' y los nodos ascendentes de las órbitas en este nuevo plano fundamental, mientras que g'_i , $i=0,2$ serán los argumentos de los periastrós con respecto a este nuevo nodo. Elegiremos también $H'_i = G'_i \cos I'_i$, $i=0,2$ siendo I'_i la inclinación entre la órbita i y la órbita 1.

Para simplificar la notación, una vez hecho el cambio prescindiremos de las '. Ahora podemos escribir σ_0 y σ_2 en este nuevo sistema como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= -\frac{1}{2}((1 + \cos I_0)\cos(f_0 + g_0 - f_1 - g_1 + h_0) + (1 - \cos I_0)\cos(f_1 + g_1 + f_0 + g_0 - h_0)), \\
\sigma_0 &= -\frac{1}{2}((1 + \cos I_2)\cos(f_2 + g_2 - f_1 - g_1 + h_2) + (1 - \cos I_2)\cos(f_1 + g_1 + f_2 + g_2 - h_2)).
\end{aligned} \tag{20}$$

donde f_i $i=0,1,2$ son las anomalías verdaderas en cada una de las órbitas.

El Hamiltoniano queda entonces formulado de la siguiente forma:

$$F = F_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \epsilon_1^k \epsilon_0^{n-k} F_{k,n-k}. \quad (21)$$

donde F_0 será la parte independiente de los parámetros, mientras que los $F_{k,n-k}$ serán los términos que multiplican a $\epsilon_1^k \epsilon_0^{n-k}$.

Llegados a este punto, podemos usar el método biparamétrico de Hori ([27], [3]) para eliminar sucesivamente las variables angulares. Hacemos esto promediando en $[0, 2\pi]$. Esto nos lleva a un nuevo conjunto de variables $(\bar{L}_i, \bar{G}_i, \bar{H}_i, \bar{l}_i, \bar{g}_i, \bar{h}_i)$ y un nuevo Hamiltoniano \bar{F} en cada eliminación.

Las transformaciones de variables se hacen utilizando las funciones generatrices:

$$W_{\epsilon_0 \epsilon_1} = \sum_{i=0}^1 \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon_i^{n+1}}{n!} W_{n+1}^i. \quad (22)$$

las cuales se obtienen a partir de las ecuaciones del método:

$$\begin{aligned} n \{F_0, W_n^0\} &= \bar{F}_{0n} - F_{0n} = C_{0n}, \\ n \{F_0, W_n^1\} &= \bar{F}_{n0} - F_{n0} = C_{n0}. \end{aligned} \quad (23)$$

siendo

$$\{F_0, W_n^i\} = \frac{2\bar{A}_0}{\bar{L}_0^3} \frac{\partial W_n^i}{\partial \bar{l}_0} + \frac{2\bar{A}_1}{\bar{L}_1^3} \frac{\partial W_n^i}{\partial \bar{l}_1} + \frac{2\bar{A}_2}{\bar{L}_2^3} \frac{\partial W_n^i}{\partial \bar{l}_2}. \quad (24)$$

Podemos encontrar integrales primeras de estos sistemas para calcular las funciones generatrices mediante sus ecuaciones asociadas:

$$\begin{aligned} \frac{dW_n^0}{C_{0n}} &= \frac{d\bar{l}_0}{\frac{2\bar{A}_0}{\bar{L}_0^3}} = \frac{d\bar{l}_1}{\frac{2\bar{A}_1}{\bar{L}_1^3}} = \frac{d\bar{l}_2}{\frac{2\bar{A}_2}{\bar{L}_2^3}} \\ \frac{dW_n^1}{C_{n0}} &= \frac{d\bar{l}_0}{\frac{2\bar{A}_0}{\bar{L}_0^3}} = \frac{d\bar{l}_1}{\frac{2\bar{A}_1}{\bar{L}_1^3}} = \frac{d\bar{l}_2}{\frac{2\bar{A}_2}{\bar{L}_2^3}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Por último, en cada transformación, el paso de variables antiguas a las nuevas se realiza de acuerdo con las expresiones:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_i &= L_i - \frac{\epsilon_1^2}{2!} 2 \frac{\partial W_2^0}{\partial \bar{l}_i} - \frac{\epsilon_1^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^0}{\partial \bar{l}_i} - \frac{\epsilon_0^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^1}{\partial \bar{l}_i} - \frac{\epsilon_1^4}{4!} 2 \frac{\partial W_4^1}{\partial \bar{l}_i}, \\
\bar{l}_i &= l_i + \frac{\epsilon_1^2}{2!} 2 \frac{\partial W_2^0}{\partial \bar{L}_i} + \frac{\epsilon_1^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^0}{\partial \bar{L}_i} + \frac{\epsilon_0^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^1}{\partial \bar{L}_i} + \frac{\epsilon_1^4}{4!} 2 \frac{\partial W_4^1}{\partial \bar{L}_i}, \\
\bar{G}_i &= G_i - \frac{\epsilon_1^2}{2!} 2 \frac{\partial W_2^0}{\partial \bar{g}_i} - \frac{\epsilon_1^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^0}{\partial \bar{g}_i} - \frac{\epsilon_0^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^1}{\partial \bar{g}_i} - \frac{\epsilon_1^4}{4!} 2 \frac{\partial W_4^1}{\partial \bar{g}_i}, \\
\bar{g}_i &= g_i + \frac{\epsilon_1^2}{2!} 2 \frac{\partial W_2^0}{\partial \bar{G}_i} + \frac{\epsilon_1^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^0}{\partial \bar{G}_i} + \frac{\epsilon_0^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^1}{\partial \bar{G}_i} + \frac{\epsilon_1^4}{4!} 2 \frac{\partial W_4^1}{\partial \bar{G}_i}, \\
\bar{H}_i &= H_i - \frac{\epsilon_1^2}{2!} 2 \frac{\partial W_2^0}{\partial \bar{h}_i} - \frac{\epsilon_1^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^0}{\partial \bar{h}_i} - \frac{\epsilon_0^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^1}{\partial \bar{h}_i} - \frac{\epsilon_1^4}{4!} 2 \frac{\partial W_4^1}{\partial \bar{h}_i}, \\
\bar{h}_i &= h_i + \frac{\epsilon_1^2}{2!} 2 \frac{\partial W_2^0}{\partial \bar{H}_i} + \frac{\epsilon_1^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^0}{\partial \bar{H}_i} + \frac{\epsilon_0^3}{3!} 2 \frac{\partial W_3^1}{\partial \bar{H}_i} + \frac{\epsilon_1^4}{4!} 2 \frac{\partial W_4^1}{\partial \bar{H}_i}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Para simplificar la notación, prescindiremos también del uso de las barras en las nuevas variables y Hamiltonianos. De este modo, el Hamiltoniano queda finalmente escrito en la forma:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{A_0}{L_0^2} + \frac{A_1}{L_1^2} + \frac{A_2}{L_2^2} + \frac{\epsilon_0^3}{3!} \frac{B_2(5 + 3(\frac{G_1}{L_1})^2)(-1 + 3(\frac{H_0}{G_0})^2)L_1^4}{16 \frac{L_0^4 G_0^2}{M_0^6 \mu_0^3}} \\
&+ \frac{\epsilon_1^3}{3!} \frac{C_2(5 + 3(\frac{G_2}{L_2})^2)(-1 + 3(\frac{H_2}{G_2})^2)L_2^4}{16 \frac{L_1^4 G_1^2}{M_1^6 \mu_1^3}}
\end{aligned} \tag{27}$$

que ya no depende de l_i , g_i y h_i , para $i=0,1,2$.

Por tanto, las ecuaciones finales del movimiento:

$$\begin{aligned}
\frac{dL_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial l_i} = 0 & \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_i} & i &= 0, 1, 2, \\
\frac{dG_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial g_i} = 0 & \frac{dg_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_i} & i &= 0, 1, 2, \\
\frac{dH_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial h_i} = 0 & \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_i} & i &= 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{28}$$

pueden ser ya integradas dado que L_i , G_i y H_i resultan ser constantes, y consecuentemente:

$$\begin{aligned}
l_i &= k_i \frac{\partial F}{\partial L_i} t + c_i & i &= 0, 1, 2, \\
g_i &= k_i^* \frac{\partial F}{\partial G_i} t + c_i^* & i &= 0, 1, 2, \\
h_i &= k_i^{**} \frac{\partial F}{\partial H_i} t + c_i^{**} & i &= 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{29}$$

5 Conclusiones

Como hemos visto, la casuística de cuatro cuerpos en escenarios de exoplanetas puede reducirse a cinco configuraciones. De éstas, dos de ellas son jerárquicas en distancia, por lo que el Hamiltoniano correspondiente puede desarrollarse en términos de pequeños parámetros,

obtenidos como cocientes de distancias. De hecho, la mayor parte de los diecisiete casos comentados en este trabajo caen dentro de este tipo de configuraciones, e incluso en los otros casos hay situaciones particulares en las que también existe jerarquía.

Hemos estudiado exhaustivamente el escenario en el que tenemos una estrella doble, alrededor de una de cuyas componentes orbita un planeta, el cual a su vez tiene un satélite. El Hamiltoniano se ha desarrollado en términos de tres pequeños parámetros, que a su vez hemos visto que se pueden reducir finalmente a dos, utilizando las expresiones empíricas de estabilidad dadas por Holman y Wiegert. Una vez hecho esto, se aplica el método biparamétrico de Hori para eliminar la dependencia en las variables angulares y de esta forma es posible integrar analíticamente el problema.

El desarrollo hecho para este caso, antes de la eliminación de uno de los parámetros, es común a los restantes de esta misma configuración, por lo que se puede tomar como base para el estudio de estos escenarios. Si además, los órdenes de perturbación y la distribución de las masas permiten eliminar el parámetro ϵ_2 , como en este caso, el análisis aquí aplicado también sería válido en aquellas otras circunstancias.

References

- [1] A. J. Abad. *Estudio de sistemas estelares múltiples*. Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Universidad de Zaragoza, Spain, 1984.
- [2] A. J. Abad and J. A. Docobo. The application of hierarchical relative coordinates to the analysis of the movement of subsystems of many-body problems. *Celestial Mechanics*, 41(1–4):333–342, 1988.
- [3] A. Abad and J. Ribera. *Método biparamétrico de perturbaciones del tipo Hori*. Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Universidad de Zaragoza, Spain, 1984.
- [4] M. Andrade. N-parametric canonical perturbation method based on Lie transforms. *The Astronomical Journal*, 136(3):1030–1038, 2008.
- [5] K. Beuermann, F. V. Hessman, S. Dreizler, T. R. Marsh, S. G. Parsons, D. E. Winget, G. F. Miller, M. R. Schreiber, W. Kley, V. S. Dhillon, S. P. Littlefair, C. M. Copperwheat, and J. J. Hermes. Two planets orbiting the recently formed post-common envelope binary NN-serpentis. *Astronomy and Astrophysics*, 521:L60, 2010.
- [6] S. Chatterjee, E. B. Ford, S. Matsumura, and F. A. Rasio. Dynamical outcomes of planet-planet scattering. *The Astrophysical Journal*, 686(1):580–602, 2008.
- [7] S. Desidera and M. Barbieri. Properties of planets in binary systems. the role of binary separation. *Astronomy and Astrophysics*, 462(1):345–353, 2007.
- [8] R. Dvorak. Numerical investigations of the development of the planetary systems. *Mitteilungen. Astron. Gesellschaft*, 48:87, 1980.

- [9] R. Dvorak. Planetary orbits in double star systems. *Oesterreichische Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Sitzungsberichte, Abteilung 2*, 191(10):423–437, 1982.
- [10] R. Dvorak. Numerical experiments on planetary orbits in double stars. *Celestial Mechanics*, 34:369–378, 1984.
- [11] R. Dvorak, C. Froeschle, and Ch. Froeschle. Stability of outer planetary orbits (p-types) in binaries. *Astronomy and Astrophysics*, 226(1):335–342, 1989.
- [12] R. Dvorak, Ch. Froeschle, and C. Froeschle. Planetary orbits in binaries. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 18:842, 1986.
- [13] R. Dvorak, E. Pilat-Lohinger, E. Bois, R. Schwarz, B. Funk, C. Beichman, W. Danchi, C. Eiroa, M. Fridlund, T. Henning, T. Herbst, L. Kaltenecker, H. Lammer, A. Léger, R. Liseau, J. Lunine, F. Paresce, A. Penny, A. Quirrenbach, H. Röttgering, F. Selsis, J. Schneider, D. Stam, G. Tinetti, and G. J. White. Dynamical habitability of planetary systems. *Astrobiology*, 10(1):33–43, 2010.
- [14] R. Dvorak and Á. Süli. On the stability of the terrestrial planets as models for exosolar planetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83(1):77–95, 2002.
- [15] S. Ferraz-Mello, C. Beaugé, and T. A. Michtchenko. *Some open questions in the dynamics of extrasolar planetary systems*, pages 295–302. Frontier Group, Paris, 2006.
- [16] S. Ferraz-Mello and T. A. Michtchenko. Extra-solar planetary systems. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (Serie de Conferencias)*, 14:7–10, 2002.
- [17] S. Ferraz-Mello, T. A. Michtchenko, and C. Beaugé. The orbits of the extrasolar planets hd 82943c and b. *The Astrophysical Journal*, 621(1):473–481, 2005.
- [18] B. Funk, E. Pilat-Lohinger, R. Dvorak, F. Freistetter, and B. Èrdi. Resonances in multiple planetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 90(1–2):43–50, 2004.
- [19] B. Funk, R. Schwarz, R. Dvorak, and M. Roth. Dynamical habitability of planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 410(1):455–460, 2011.
- [20] N. Haghighipour, R. Dvorak, and E. Pilat-Lohinger. *Planetary Dynamics and Habitable Planet Formation in Binary Star Systems*, pages 285–327. Astrophysics and Space Science Library, Volume 366. Springer Science+Business Media B.V., 2010.
- [21] B. M. S. Hansen. Calibration of equilibrium tide theory for extrasolar planet systems. *The Astrophysical Journal*, 723(1):285–299, 2010.
- [22] R. S. Harrington. Planetary orbits in binary stars. *The Astronomical Journal*, 82:753–756, 1977.

- [23] R. S. Harrington. The solar system in a binary star. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 9:435, 1977.
- [24] R. S. Harrington and B. J. Harrington. Planetary orbits in binary stars. *Mercury*, 7:34–37, 1978.
- [25] R. Heller, J. Leconte, and R. Barnes. Tidal obliquity evolution of potentially habitable planets. *Astronomy and Astrophysics*, 528:id.A27, 2011.
- [26] M. J. Holman and P. A. Wiegert. Long-term stability of planets in binary systems. *The Astronomical Journal*, 117(1):621–628, 1999.
- [27] G. Hori. Theory of general perturbation with unspecified canonical variable. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 18:287, 1966.
- [28] L. Kiseleva-Eggleton, E. Bois, N. Rambaux, R. Dvorak, and E. J. Rivera. On the dynamical state of new multi-planet systems. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 34:1144, 2002.
- [29] R. Kita, F. Rasio, and G. Takeda. Pervasive orbital eccentricities dictate the habitability of extrasolar earths. *Astrobiology*, 10(7):733–741, 2010.
- [30] R. K. Kopparapu and R. Barnes. Stability analysis of single-planet systems and their habitable zones. *The Astrophysical Journal*, 716(2):1336–1344, 2010.
- [31] T. A. Michtchenko, C. Beaugé, and S. Ferraz-Mello. Stationary orbits in resonant extrasolar planetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(4):411–432, 2006.
- [32] M. A. C. Perryman and T. Schulze-Hartung. The barycentric motion of exoplanet host stars. tests of solar spin-orbit coupling. *Astronomy and Astrophysics*, 525:id.A65, 2011.
- [33] E. Pilat-Lohinger and R. Dvorak. Stability of s-type orbits in binaries. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 82(2):143–153, 2002.
- [34] E. Pilat-Lohinger, B. Funk, and R. Dvorak. Stability limits in double stars. a study of inclined planetary orbits. *Astronomy and Astrophysics*, 400:1085–1094, 2003.
- [35] G. Rabl and R. Dvorak. Satellite-type planetary orbits in double stars - a numerical approach. *Astronomy and Astrophysics*, 191(2):385–391, 1988.
- [36] C. Scharf and K. Menou. Long-period exoplanets from dynamical relaxation. *The Astrophysical Journal Letter*, 693(2):L113–L117, 2009.
- [37] J. Schneider, C. Dedieu, P. Le Sidaner, R. Savalle, and I. Zolotukhin. Defining and cataloging exoplanets: The exoplanet.eu database. *Astronomy and Astrophysics*, 532:A79, 2011.

- [38] R. Schwarz, R. Dvorak, Á. Süli, and B. Érdi. Survey of the stability region of hypothetical habitable trojan planets. *Astronomy and Astrophysics*, 474(3):1023–1029, 2007.
- [39] V. Szebehely. Stability of inner planetary systems. *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Physik*, 30:364–369, 1979.
- [40] V. Szebehely. Stability of planetary orbits in binary systems. *Celestial Mechanics*, 22:7–12, 1980.
- [41] V. Szebehely and R. McKenzie. Stability of planetary systems with bifurcation theory. *Astronomical Journal*, 82:79–83, 1977.
- [42] A. L. Whipple and V. Szebehely. The restricted problem of $n + v$ bodies. *Celestial Mechanics*, 32:137–144, 1984.

Handling space orbits as mathematical or computational objects

A. Abad and E. Lacruz

Grupo de Mecánica Espacial & IUMA

Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza. Spain

Resumen

In this paper we analyze the concept of space orbit to extract the parameters and properties that characterize it in the same way that object oriented programming encapsulate the objects. We use these parameters as the base to construct a software, named ORBITS, to handle orbits in an educational environment.

1. Introduction

Currently there are a great variety of software [7] to handle problems of Astrodynamics. Together with commercial products, like STK, there are more and more open source products, like GAL, GMAT, JAT, ODTBX, OREKIT, etc.

With STK and GMAT you can design real-world space missions by introducing data into a graphical user interface (GUI) window and propagate them with a kernel library that acts as a black box for a user.

GAL, JAT and OREKIT are software libraries written in C++ (GAL) and Java (JAT and OREKIT). They provide very efficient tools to make space dynamic calculations, but they lack of the flexibility of tools like *Mathematica*, [9], to work with more general Astrodynamics concepts.

Learning Celestial Mechanics and Astrodynamics needs two essential tools: a text book and a good and flexible software tool to make and understand the exercises proposed. There are a lot of books of these topics [1, 3, 4, 6], but there are not good Astrodynamics software easy to learn and to use in an educational environment. With this objective we created a *Mathematica* package, named ORBITS [8], to study, understand and handle the concept of space orbit.

Handling mathematical objects with a computer is a difficult task. Modern mathematical software take care in the identification of the object and its properties and relations with other objects better than create a library of procedures to make “operations”. For instance to handle polynomials it is sufficient to store them as a list of coefficients and recreate its algebraic structure

and properties by means of operations between lists. This gives a closed environment that permits manipulate polynomials in a very easy way. In this way, the methods proposed by the object oriented programming becomes a very powerful tool to handle mathematical objects.

In this paper we focus our attention in the identification of the minimum set of attributes, or parameters, that characterize an orbit as a mathematical or computational object, and the set of functions to compute the rest of parameters and to interact with other objects. This characterization will be used, like in the object oriented programming, to encapsulate the concept of orbit and handle it.

The paper is presented as follows. In Section 2 we describe the orbital problem and we divide it into four different concepts that, together, complete all the information about one orbit. The orbital model, in Section 3, contains all the physical and logical information of the orbit. The state variables, in Section 4, describe the dynamical state of the orbiter. Section 5 shows the needed characteristics of the propagator. Sections 6 enumerates all the parameters useful to describe any of the characteristics of the orbits. Functions to compute these parameters must be provided with the software. Sections 7 shows the main characteristics of the software ORBITS and finally Section 8 gives an example.

2. What is an space orbit?

An orbit is the path that an object in space takes around another one due mainly to the action of the gravitational forces. We distinguish two bodies in one orbit: the *central body* and the *orbiter*. An orbiter receives different names depending on its nature and the nature of the central body. Natural orbiters moving around the Sun are: planets, asteroids, comets, etc. Natural orbiters moving around planets are moons. Artificial orbiters are “artificial satellites” when they move around a planet or a moon and “space probes” when they move around the Sun.

The main cause of the orbital motion is the Newton gravitational law, but there are other perturbative forces acting on the orbiter. An orbit is the result of the integration of the following differential equations:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}, \quad \dot{\mathbf{X}} = -\frac{\mu \mathbf{x}}{r^3} + \mathcal{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{p}); \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0), \quad (1)$$

where \mathbf{x}, \mathbf{X} represent the position and velocity of the orbiter, $\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{X}}$ their first derivative with respect to the time, $\mu \mathbf{x}/r^3$ is the Keplerian force (due to the Newton gravitational law), $r = \|\mathbf{x}\|$, the distance between the central body and the orbiter and $\mathcal{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{p})$ is the sum of the perturbative forces.

$$\mathcal{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{p}) = \sum_i \mathcal{P}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{p}_i),$$

where each one depends on the parameters \mathbf{p}_i . When \mathcal{P} is zero we have a *Keplerian orbit*, that fulfils the Kepler laws. The perturbative forces always have a small value with respect to the Keplerian term, then we can see an “orbit” as a sucesion of instantaneous “Keplerian orbits” changing with the time.

Taking into account the two previous paragraphs we may conclude that there are two different aspects to consider in order to characterize an orbit:

- *The orbital model, \mathcal{M}* , that contains all the physical information about the orbit and the two bodies involved. The orbital parameter μ is the main parameter of the orbital model, but there a lot of parameters necessities to know different aspects or the orbit.
- *The state variables, \mathbf{s}* , is a vector of dimension six, that contains all the information about the dynamical state of the orbit at the instant τ . To obtain the initial conditions, to integrate the differential equations of the problem, we particularize this vector at the initial instant.

Since here we will represent an instantaneous orbital state as $\mathcal{O}(\tau, \mathbf{s}, \mathcal{M})$. An adequate election of the parameters that define \mathcal{M} , and the state variables at the initial instant, give us the initial orbital state, $\mathcal{O}(\tau_0, \mathbf{s}_0, \mathcal{M})$, used to propagate the orbit, i.e. to find the orbital state, $\mathcal{O}(\tau, \mathbf{s}, \mathcal{M})$, at any time. Once we propagate the orbit we may compute any parameter $\sigma(\tau, \mathcal{O})$, of the orbit, at any instant. To do that we need:

- *The propagation* or integration along the time. Here we take into account only the integration interval, not the integration method, that is considered as a part of the orbital model. In this integration interval we consider the points where we want to know the state of the orbit, expressed in different formats, the points where we apply orbital manoeuvres, the subintervals where the perturbation forces are different, etc.
- *The parameter functions, $\sigma(\tau, \mathcal{O})$* , to obtain the parameter σ from the orbital state obtained by propagation.

3. Orbital model

We can find four different types of parameters to characterize the orbital model.

3.1. Parameters related with μ

The main parameter of the orbital model \mathcal{M} is the orbital constant $\mu = \mathcal{G}(m_C + m_O)$, that characterize the Keplerian part of the orbital motion. This value contains implicitly information about the masses of the central body C and the orbiter O and the units of length and time, that determine the value of the universal gravitational constant \mathcal{G} .

There are several ways to declare the parameter μ :

- Giving directly the value of μ .
- Giving the masses of the central body and the orbiter, and the length and time units.
- If we have a data base of the physical properties of the Solar System bodies we obtain μ by declaring the central body and the length and time units. Then the software must compute μ at the adequate units.

3.2. Parameters to declare the rotational motion of the central body

The differential equation (1) of the orbital motion has been formulated with respect to the spatial frame that is an inertial frame. Usually we need to express the orbit with respect to a non-inertial frame that rotates with the body: the planetocentric frame.

Commonly the central body rotates with a constant angular velocity ω_C with respect to its polar axis. Then the angle between the equinox and the prime meridian of the planet is given by $\theta = \theta_0 + t\omega_C$ where θ_0 represents the rotation angle at the initial instant $t = 0$. Then, the two constants θ_0 , and ω_C , characterize the rotation of the central body. To consider vectors with respect to the planetocentric frame we must declare this two parameters.

3.3. Parameters associated with the gravitational potential of the central body

The most important perturbation of the orbital motion, with respect to the Keplerian motion, is due to the gravity potential of the central body.

The gravity potential of a non spherical body is expressed by means of the expression

$$V_C = -\frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{r_C}{r}\right)^n \left[\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \right], \quad (2)$$

where r_C is the radius of the central body, C_{nm}, S_{nm} are the harmonic coefficients, (r, λ, ψ) the planetocentric coordinates of the orbiter and P_{nm} are the Legendre polynomials. The coefficients $J_n = -C_{n0}$ are the zonal harmonics and the rest are the tesseral harmonics.

A gravity planetary potential $N \times M$, that characterize a central body (planet or moon), is a set of constants $\{C_{nm}, S_{nm}, n = 2, \dots, N, m = 0, \dots, M\}$. These constants, together with the radius, r_C , of the central body, is the information that the orbital model needs to compute the potential of the planet and their derivatives.

A software to handle orbits must include a way to declare the gravity potential of the central body, manually or automatically by reading a file with the harmonics.

3.4. Parameters associated with the propagation

There are two more parameters related with the propagation of the orbit: the force model and the integrator.

The force model declares each one of the perturbative force, $\mathcal{P}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{p}_i)$, different than the gravity planetary potential and the Keplerian force. To declare it, we need to declare the parameters \mathbf{p}_i , and the procedure (function) to compute \mathcal{P}_i .

The propagator indicates the method to integrate the problem. We always need a Keplerian propagator and a numerical propagator. The Keplerian propagator uses the relations of the Keplerian problem to integrate it analytically excluding any force different than the Keplerian one. The numerical integrator it is necessary to integrate a model with any non-keplerian force. We may have different numerical methods to integrate the problem numerically.

4. State variables

From the theory of ordinary differential equations we need n independent integrals (constants of integration) to have a complete information of the solution of the n -th order ODE. A space orbit is the solution of the six order differential equation (1), then, to characterize it we need a vector \mathbf{s}_0 , named state vector, of six independent constants, or variables, \mathbf{s} , particularized at an instant t_0 .

There are several ways to give the state vector \mathbf{s}_0 . The most important are summarized at the following list:

- The initial conditions $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$. The most natural way to define the state vector is by means of the value of the position and velocity vectors at the initial instant, i.e. the initial conditions, because we need them to integrate the problem.
- The initial conditions expressed with respect to the planetocentric frame $(t_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{U}_0)$. In this case we need the values θ_0 and ω_c , of the orbital model, to compute the initial conditions $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$.
- The orbital elements $(a, e, i, \Omega, \omega, T)$. These are the most common elements to handle orbits. If we take Keplerian orbits the orbital elements are constants, but for perturbed orbits these constants becomes variables, the osculating orbital elements, and then to declare them as the state variables we must give t_0 , like in the other cases. Procedures to give the orbital elements from the initial conditions and vice-versa are crucial.
- The Delaunay variables (ℓ, g, h, L, G, H) , or the polar-nodal variables $(r, \theta, \nu, R, \Theta, N)$. These are two set of canonical variables, very useful to use in many different aspects of the orbital motion. To handle them we need to implement the procedure to change between them and the orbital elements.

5. Propagation

Once we have declared the orbit by means of the orbital model and the state variables at any initial instant, $\mathcal{O}(\tau_0, \mathbf{s}_0, \mathcal{M})$, we can propagate it, i.e. we can compute, by integration, the state of the orbit at a set of instants $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}$ inside the interval $[\tau_0, \tau_n]$.

The integration method uses the time t as the way to declare an instant τ , however, the properties of the orbits permit to use different formats to declare the instants where we want to know the orbital state $\mathcal{O}(\tau, \mathbf{s}, \mathcal{M})$:

- The absolute time t .
- The time relative to the pericenter of the orbit: $(t - T)$.
- The mean anomaly: $\ell = n(t - T)$.
- The eccentric anomaly: E . This is possible only for elliptic orbits.

- The true anomaly: f .
- Particular points of the orbit: pericenter passage ($f = 0$), apocenter passage ($f = \pi$), node passage ($\omega + f = 0$), etc.

The relations between the parameters of the Keplerian motion permit to use any format of the instants when we propagate with the Keplerian propagator. However, when we use a numerical propagator it is necessary to add an “event locator” to the numerical integrator in order to use instant formats different than the absolute time. With the event locator the integrator works with the absolute time as independent variable but internally checks the values of the variable in which the instant has been given and it stops when it reaches the required values.

There are two cases in which we must divide the interval of integration, $[\tau_0, \tau_n]$, in consecutive subintervals $[\tau_0, \tau_1] \cup \dots \cup [\tau_{n-1}, \tau_n]$ and propagate successively in the different subintervals:

- When the force model changes from one interval to another. This occurs, for instance, when we apply a tangent force (by means of a ionic thruster) during different subintervals inside the integration interval.
- When we apply one, or several, instantaneous impulses (Δv) inside the integration interval. Then we integrate between the initial instant and the instant of the impulse, we change the velocity at this instant, and we continue the propagation with the new initial conditions.

6. Parameter functions

The orbital motion can be considered as instantaneously Keplerian. This means that in order to find the value of the parameter $\sigma(\tau, \mathcal{O})$, at the instant τ , we need to apply the analytical properties of the Keplerian motion to the orbital state at that instant $\mathcal{O}(\tau, \mathbf{s}, \mathcal{M})$.

The procedures to find the orbital parameters from the orbital state are part of the Keplerian propagator that computes the orbital state, at any time, from the initial orbital state, considering only the Keplerian force.

A program to analyse the orbits must have, at least, the codes to compute the following parameters:

- Position and velocity: position and velocity vectors referred to the spatial and the planetocentric frames; distance, r , and velocity, v ; radial velocity, \dot{r} ; anomalies, ℓ , E and f ; derivatives with respect to the time of the anomalies, \dot{f} and \dot{E} .
- Ordinary orbital elements: semi major axis, a , eccentricity, e , inclination, i , node angle, Ω , argument of the pericenter, ω , and the time of the pericenter passage, T .
- More orbital elements: semilatus rectum p , period, P , mean motion n , pericenter and apocenter distance, r_p, r_a , minimum and maximum altitude, $r_p - r_C, r_a - r_C$, with r_C the equatorial radius of the central planet, pericenter longitude, $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, and the argument of latitude, $\omega + f$.

- Integrals: angular momentum vector and norm, \mathbf{G}, G ; Laplace vector and norm, \mathbf{A}, A ; Keplerian energy, h ; Jacobi constant J .
- Delaunay variables: (ℓ, h, g, L, G, H) .
- Polar-nodal variables $(r, \theta, \nu, R, \Theta, N)$.
- Reference frame vectors: orbital plane vector, \mathbf{n} ; nodal vectors, \mathbf{l}, \mathbf{m} ; apsidal vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} ; orbital vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} ; tangent vector \mathbf{t} ; etc.

7. The *Mathematica* package **Orbits**

With ORBITS we tried to make an educational tool to teach and learn the main characteristics and properties of the space orbits. However, we tried to do a complete tool capable to handle not only Keplerian orbits but more complete orbitals models.

ORBITS has a data base of Solar System objects, that includes the mass, the radius, the rotation parameters and the second zonal harmonic of all the planets, the Sun and the Moon. It also includes several gravity models for the Earth, Mars, the Moon and Venus. We can use this data base or declare manually the parameters (including μ , rotation parameters, and gravity potential) of a fictitious central body.

The user of ORBITS can declare any of the different sets of state variables and the different instant formats enumerated respectively in Sections 4 and 5.

The Keplerian propagator of ORBITS has algorithms to compute any of the parameters enumerated in 6 from any orbital state, and it also includes functions to compare two different orbital states: mutual distance, relative position and velocity, etc.

ORBITS includes three different propagators:

- A completely analytical Keplerian propagator.
- A numerical propagator based on the *Mathematica* numerical integrator `NDSolve`. This integrator is very slow, but we can add, easily, to the orbital models new perturbation forces not included in ORBITS, to integrate them with this propagator.
- A numerical integrator based on an external numerical integrator, compiled and executed outside the *Mathematica* session. This propagator is very fast but, using it, we can not add new forces, non included in ORBITS, to the force model. The numerical integrator is based on a C version of the code `dopri8`, [5], with our own extension to include an “event locator”.

Besides the Keplerian force and the gravity planetary force, ORBITS can include, on the force model the following forces: radial force, tangent force, normal force, third body force, when the third body is fixed with respect to the planetocentric frame (like the Earth for lunar orbiters). The external numerical integrator evaluates the derivatives of the gravity potential by using the new methods developed in [2].

With ORBITS we may add instantaneous impulses (Δv) to change the state variables at any instant τ .

Eventually, we include, in ORBITS, graphics capabilities to show the orbits in two and three dimensions in both the spatial and the planetocentric reference frame.

8. An example

Only to show an easy example we propose the analysis of the orbit of a Earth satellite perturbed, only, with the second zonal harmonic J_2 . First we load the package:

```
In[] := << Orbits';
```

After loading the package we declare the orbital model. In this case, we take the data from the Solar System data base by declaring the central body and the length and time unit, and we choose the external propagator to make the integration.

```
In[] := DeclareOrbitModel[EarthJ2SAT,  
    CentralBody -> Earth,  
    LengthUnit -> Radius[Earth],  
    TimeUnit -> Minute,  
    ZonalHarmonics -> 2,  
    Propagator -> "External"]
```

We compute the value of the critical inclination:

```
In[] := inc = ArcCos[Sqrt[1/5.]];
```

and use it to define the ordinary orbital elements of the orbit:

```
In[] := t0 = 0;  
    a = 2;  
    e = .01;  
    i = inc;  
    Om = 1.2;  
    om = 1.;  
    T = 0.;
```

Finally, we declare the orbit with the desired orbital elements and orbital model:

```
In[] := OrbitJ2E = OrbitalElements[t0, a, e, i, Om, om, T, EarthJ2SAT];
```

then, we propagate the orbit during ten periods:

```
In[] := PrJ2Ea = Propagate[OrbitJ2E,  
    PropagationInstants[t0, 10 Period[OrbitJ2E], Instants[1000]]];
```

and we obtain a list with 1000 equidistant orbital states. If we apply the expressions `SemimajorAxis`, `Eccentricity`, `Node`, `PericenterArgument` to this list we obtain a list with the time evolution of the four orbital elements. To plot them we write:

```
In[]:= ListPlot[SemimajorAxis[PrJ2Ea], Joined -> True];
      ListPlot[Eccentricity[PrJ2Ea], Joined -> True];
      ListPlot[Node[PrJ2Ea], Joined -> True];
      ListPlot[PericenterArgument[PrJ2Ea], Joined -> True];
```

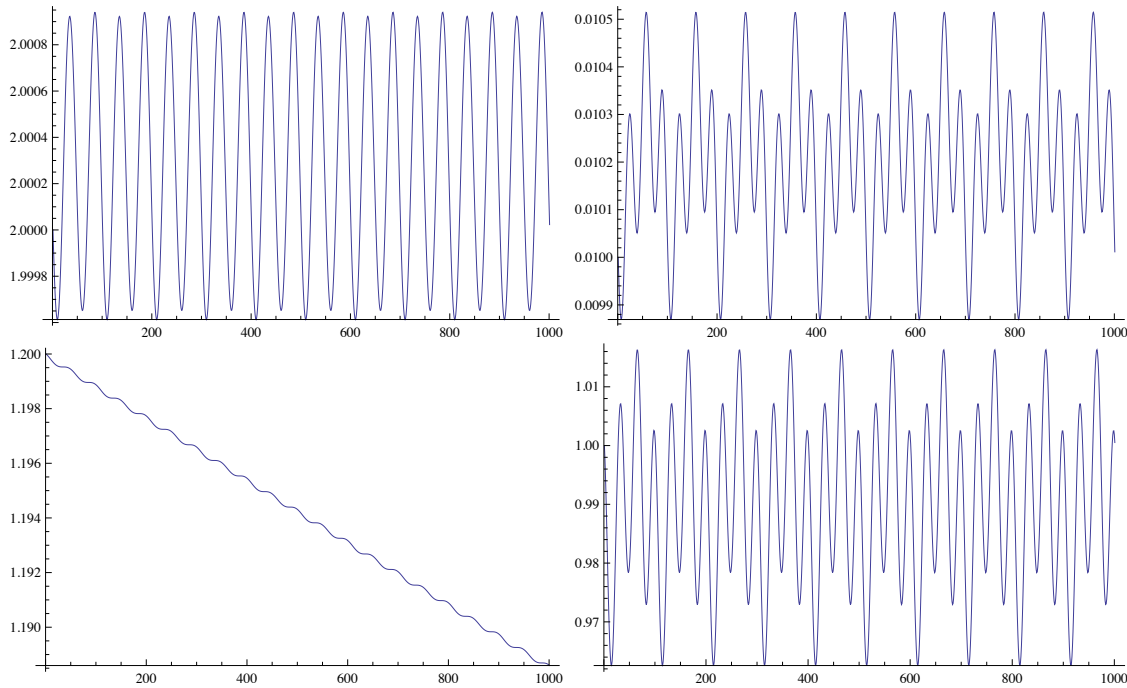


Figure 1: Time evolution of the following orbital parameters: a) Up, left: semi major axis, b) up, right: eccentricity, c) down, left: node angle, d) down, right: argument of the pericenter.

Figure 1 contains the four plots. We can see on them the periodic evolution of the semimajor axis, the eccentricity and the secular evolution of the node angle. The argument of the pericenter does not present secular evolution because we choose the critical inclination.

We may show 3D and 2D plots of the orbit, Figure 2, by using the comands `ShowOrbit2D` and `ShowOrbit3D`:

```
In[]:= ShowOrbit2D[PrJ2Ea, OrbitLine -> Black[4],
      PlanetSurface -> EarthBW]
      ShowOrbit3D[PrJ2Ea, OrbitLine -> Black[4],
      PlanetSurface -> EarthBW, Background -> White]
```

In this example is easy to see that the period is not constant. The period obtained with the initial orbital state, is:

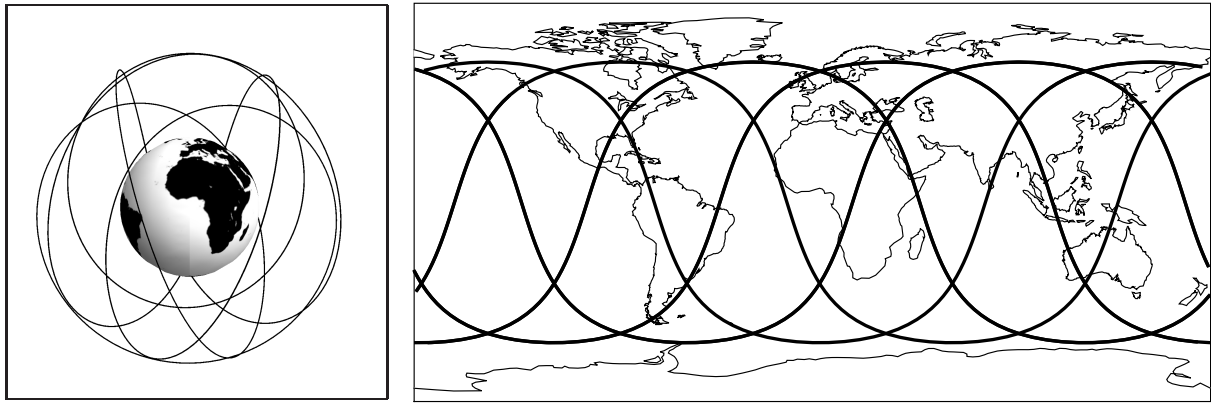


Figura 2: 3D and 2D plots of the orbit.

```
In [] := Period[OrbitJ2E]
Out [] :=238.971117794113
```

does not coincides with the time of the next pericenter passage

```
In [] := Time[Pericenter[1], OrbitJ2E]
Out [] :=239.041064803083
```

To compute this time, it was necessary to use the “event locator” of the external numerical integrator.

Acknowledgements

This paper has been partially supported by the project MTM2012-31883 (MINECO, Spain), and for the project FID-003-2012 (MPPCTI/FIDETEL, Venezuela).

Referencias

- [1] Abad, A., 2012.: *Astrodinámica*. Editorial Bubok (<http://www.bubok.es>), Madrid.
- [2] Abad, A. and Lacruz, E. 2013.: *Computing derivatives of a gravity potential by using automatic differentiation*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117. pp 187–200.
- [3] Battin, R.H., 1999.: *An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition*. AIAA Education Series. Reston, Virginia.
- [4] Deprit, A., 1968.: *Fundamentals of Astrodynamics (Part I)*. Boeing Scientific Research Laboratories. Mathematical Note n. 556.
- [5] Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner, G. 1993.: *Solving ordinary differential equations I. Nons-tiff problems*. 2nd edition. Springer Series in Computational Mathematics. Springer–Verlag.
- [6] Vallado, D., 1997.: *Fundamental of Astrodynamics and Applications*. Ed. McGrawHill.

[7] Web pages of Astrodynamic software:

GAL: http://www.amsat-bda.org/GAL_Home.html

GMAT: <http://gmat.gsfc.nasa.gov>.

JAT: <http://jat.sourceforge.net>.

STK: <http://www.agi.com/products/>.

ODTBX: <http://odtbx.sourceforge.net>.

OREKIT: <http://www.orekit.org>.

[8] Web pages of ORBITS:

<http://gme.unizar.es/software/orbitfiles/orbits.html>.

<http://sourceforge.net/projects/orbitsm/>

[9] Wolfram, S., 1988.: *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison Wesley.

Órbitas cuasiestacionarias no ecuatoriales.

E. Lacruz y A. Abad

Grupo de Mecánica Espacial & IUMA

Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza. Spain

Resumen

En este trabajo se analiza el concepto de órbita cuasiestacionaria introducido por McInnes. Estas órbitas están basadas en la aplicación de un impulso discreto (maniobra orbital) cada vez que un orbitador pasa por el punto común de un arco kepleriano cerrado. Tras analizar las características de las órbitas que poseen arcos keplerianos, se definen los parámetros que caracterizan las órbitas cuasiestacionarias y se efectúa un estudio sistemático de como son estas órbitas para satélites orbitando en torno a la Luna.

1. Introducción

De entre toda la variedad de órbitas de satélites artificiales las más conocidas son las llamadas órbitas estacionarias. Estas órbitas pertenecen a un conjunto más amplio, que llamaremos *órbitas síncronas*, caracterizado por su sincronía con la rotación del cuerpo central, esto es, porque el valor de su periodo orbital coincide con el de el periodo de rotación del planeta (o la Luna en su caso). Las órbitas estacionarias son aquellas órbitas síncronas cuya excentricidad e inclinación es nula. Las órbitas estacionarias aparecen siempre, para un observador situado en la superficie del cuerpo central, como un punto fijo en el ecuador, moviéndose, por efecto de las perturbaciones de la órbita, dentro de una pequeña ventana de 1° en las direcciones Este–Oeste (longitud) y $0,1^\circ$ en las direcciones Norte–Sur (latitud).

Debido a la dinámica del modelo kepleriano no pueden existir órbitas estacionarias en puntos que no pertenezcan al ecuador del planeta. Una alternativa a este tipo de órbitas consiste en la construcción de órbitas exóticas, no-keplerianas, basadas en el uso de fuerzas externas (motores de bajo impulso, velas solares, etc.). Estas órbitas, que han sido llamadas por McInnes [11] *órbitas desplazadas*, tienen la peculiaridad de situarse en un plano orbital paralelo al ecuatorial con una rotación sincronizada con el planeta para aparecer, desde su superficie, como un punto estacionario fuera del ecuador. En los trabajos [1, 12], se estudian una serie de familias de este

tipo de órbitas, así como su estabilidad, y se demuestra que es posible diseñarlas aplicando una fuerza producida por un sistema de propulsión de bajo empuje, cuya magnitud sea constante y su dirección sea siempre la misma.

La posibilidad de utilizar impulsos discretos para conseguir órbitas desplazadas la introduce Nock en [13]. Con objeto de observar los anillos de Saturno desde las sondas *Voyager*, Nock propuso el uso de pequeños impulsos discretos, en intervalos de tiempos cortos, que desplazaban la órbita a las proximidades del anillo, pero impidiéndole cruzarlo. Posteriormente McInnes [10] considera el uso de impulsos discretos, en lugar de usar motores de bajo empuje de forma continua, para generar desplazamientos más grandes y poder formar familias de órbitas desplazadas no ecuatoriales y circulares.

La propuesta de McInnes consiste en generar una órbita desplazada aplicando una serie de maniobras orbitales realizadas, a intervalos de tiempo constantes, cada vez que el satélite pase por un punto fijo del sistema de referencia planetocéntrico (que rota con el planeta). De esta forma, la órbita está formada por arcos cerrados en el sistema planetocéntrico que se convierten en arcos abiertos en el sistema espacial (inercial). La trayectoria final en el sistema espacial no es exactamente paralela al ecuador, como en el caso de empuje continuo, sino que parece una “corona” formada por arcos que tienen su vértice en un paralelo. Visto desde la superficie, el satélite no ocupa un punto fijo, sino que se desplaza describiendo un arco cerrado cuya magnitud puede ser grande o pequeña.

Este tipo de órbitas, cuando se ven desde el sistema planetocéntrico, no aparecen como un punto del espacio sino como un arco que se cierra, arco que depende del punto de cierre, que llamaremos *vértice del arco* y del tiempo τ que se tarde en recorrerlo. A este tipo de órbita le llamaremos *órbita cuasiestacionaria* si desde algún lugar de la superficie del cuerpo central el orbitador siempre es visible. En cierto modo, es similar una órbita estacionaria situada en cualquier punto, no solo en el ecuador, pero cuya ventana es en general mucho más amplia que la ventana de una órbita estacionaria.

McInnes desarrolla un método numérico para la obtención de las órbitas cuasiestacionarias, que está basado en la expresión de la posición relativa del orbitador respecto al vértice del arco y obtiene la solución en términos de la matriz de transición. Sin embargo, no realiza ningún análisis de la existencia, ni de las características de estas órbitas. En este trabajo partimos de la idea de McInnes y realizamos un estudio profundo de dichas órbitas que permita saber cuántas existen y clasificarlas en función de sus propiedades. Para ello, en lugar de un método numérico adaptado para este problema, hemos utilizado, un método clásico muy estudiado y contrastado y del que se conocen sus propiedades de forma exhaustiva, el problema de Lambert.

Al problema de la determinación de la única órbita de transferencia que une dos puntos, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^3$, expresados en un sistema inercial, en un tiempo τ dado, le llamaremos *problema de Lambert*. La más importante aportación histórica a la resolución del problema de Lambert fue desarrollada por Gauss cuando trató de encontrar la órbita del asteroide Ceres después de que éste fuera perdido tras su descubrimiento por Giuseppe Piazzi en 1801. Gauss [6] desarrolla en un método basado en la relación *área triángulo/área sector* para la resolución del problema de

Lambert que, aunque es válido únicamente para órbitas elípticas, ha sido uno de los métodos más fructíferos en el problema de la determinación de órbitas. Desde entonces, se han desarrollado un gran número de métodos para la resolución de este problema que han hecho uso de muy diversas técnicas como propiedades geométricas de las cónicas, variables universales, el vector de excentricidad, etc. Entre los trabajos más relevantes podemos encontrar los realizados por [3, 4, 7, 9] y entre los más recientes los de [2, 8], los cuales se han adaptado a los métodos de cálculo actuales logrando así la eficiencia computacional, demandada en muchas misiones espaciales. Para obtener los resultados mostrados en este trabajo hemos usado el método desarrollado por Izzo [8].

Además de la definición de *arco kepleriano cerrado*, en el apartado 2 de este trabajo se presenta la forma práctica de calcular la órbita que los contiene mediante la resolución del problema de Lambert. En el apartado 3, se demuestran una serie de propiedades que verifican los elementos orbitales de estas órbitas, y en particular se muestra la relación entre la inclinación de la órbita y el tiempo τ de recorrido del arco particularizada para el caso de órbitas keplerianas en torno a la Luna. En el apartado 4 se define el concepto de órbita cuasiestacionaria y se relaciona con los dos parámetros que las caracterizan: el coste Δv de mantenimiento de esta órbita y el ángulo α , que indica el tamaño de su ventana de visibilidad. Finalmente, en el apartado 5, presenta un estudio sistemático de las características de estas órbitas para satélites en torno a la Luna.

2. Arcos keplerianos cerrados

Llamaremos *arco kepleriano cerrado de periodo τ y vértice \mathbf{u}* , a un segmento de órbita relativa kepleriana que verifica la relación

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}, \quad (1)$$

siendo \mathbf{u}_0 y \mathbf{u}_τ las posiciones del orbitador, referidas al sistema planetocéntrico, en los instantes $t = 0$ y $t = \tau$ respectivamente. La parte izquierda de la figura 1 muestra un arco kepleriano cerrado.

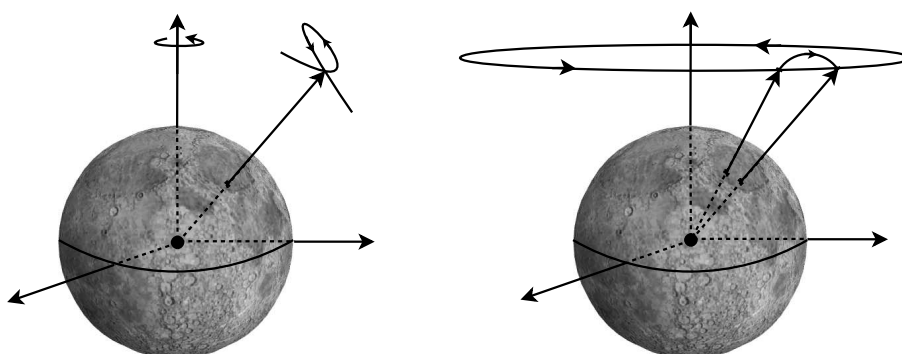


Figura 1: Izquierda: arco kepleriano cerrado. Derecha: el mismo arco mostrado en el sistema espacial.

El método de Lambert solo puede ser aplicado a puntos \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_τ expresados en el sistema inercial, por lo que no puede ser directamente aplicado para buscar la órbita que contiene el arco kepleriano cerrado. Sin embargo, aplicando la relación entre los vectores de un sistema espacial (inercial) y planetocéntrico (rotante), podremos poner

$$\mathbf{x}_0 = \mathcal{R}_3(\theta_0) \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x}_\tau = \mathcal{R}_3(\theta_0 + \omega_\odot \tau) \mathbf{u}_0, \quad (2)$$

donde, ω_\odot y θ_0 representan, respectivamente, la velocidad angular de rotación del cuerpo central y el ángulo de rotación del mismo en el instante $t = 0$.

De esta forma, el arco cerrado de la izquierda de la figura 1 se transforma en el arco abierto de la derecha de la misma figura, y la búsqueda de un arco kepleriano cerrado se transforma en la búsqueda de la órbita que pasa del punto \mathbf{x}_0 , en el sistema inercial, al punto distinto \mathbf{x}_τ , en el mismo sistema, en un tiempo τ , por lo que el método de Lambert puede ser aplicado. Esto demuestra, simultáneamente, que dado un punto del espacio \mathbf{u} y un tiempo τ existen únicamente dos arcos cerrados (uno con una órbita directa y otro con una órbita retrógrada) que tienen como vértice dicho punto y se recorren en ese tiempo.

3. Algunas propiedades de los arcos keplerianos cerrados

Para comenzar a estudiar las propiedades de los arcos keplerianos cerrados trabajaremos con las coordenadas polares esféricas (r, λ, ψ) , esto es, con la distancia r entre el orbitador y el centro de masas del cuerpo central, la longitud, λ , y la latitud planetocéntrica ψ del orbitador, en lugar de las coordenadas cartesianas. Por ello, en primer lugar buscaremos la relación entre estas coordenadas y los elementos orbitales.

Observemos la figura 2, donde S representa la proyección del orbitador sobre la esfera celeste, N el nodo de la órbita y S' la proyección de S sobre el plano fundamental Oxy . El triángulo esférico SNS' contiene toda la información necesaria para determinar las relaciones buscadas, si tenemos en cuenta que la distancia angular SS' representa la latitud planetocéntrica, mientras que la distancia angular NS' viene dada por la relación $\theta + \lambda - \Omega$, siendo $\theta(t)$ el ángulo de rotación o tiempo sidéreo del planeta, como se aprecia en la gráfica de la derecha de la figura 2.

Las coordenadas esféricas del orbitador, respecto a un sistema ecuatorial con origen en la línea de los nodos, corresponde a la terna ordenada $(r, \theta + \lambda - \Omega, \psi)$. Aplicando la matriz de rotación $\mathcal{R}_1(i)\mathcal{R}_3(\omega + f)$, que pasa de éste al sistema orbital, obtendremos las siguientes expresiones:

$$\begin{pmatrix} r \cos \psi \cos(\theta + \lambda - \Omega) \\ r \cos \psi \sin(\theta + \lambda - \Omega) \\ r \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega + f) \\ r \sin(\omega + f) \cos i \\ r \sin(\omega + f) \sin i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

o de forma equivalente:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f(t)}, \\ \lambda(t) = \Omega - \theta(t) - \tan^{-1}(\cos[\omega + f(t)], \cos i \sin[\omega + f(t)]), \\ \psi(t) = \sin^{-1}(\sin i \sin[\omega + f(t)]), \end{cases} \quad (4)$$

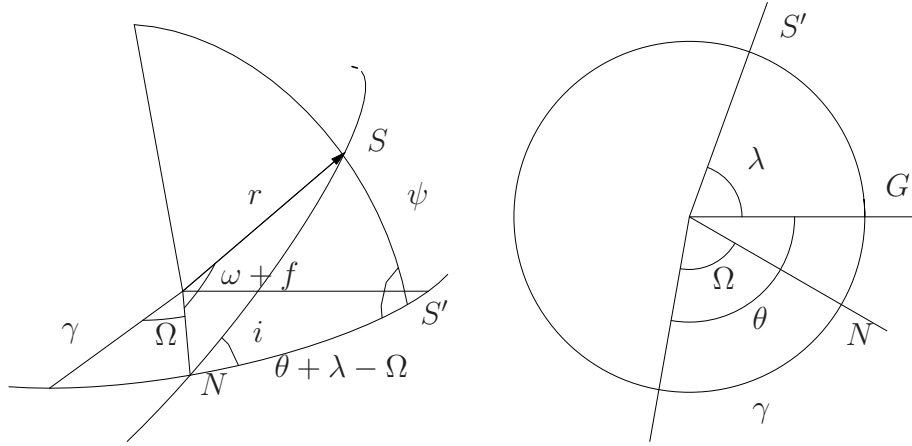


Figura 2: Relación entre las coordenadas planetocéntricas y los elementos orbitales.

donde, hemos llamado $\tan^{-1}(c, s)$ a la función que calcula el ángulo α tal que $\cos \alpha = c$, $\sin \alpha = s$ y hemos tenido en cuenta que tanto θ como f son funciones de t .

Usando las coordenadas esféricas planetocéntricas podemos reescribir la condición (1) en la forma

$$r_\tau - r_0 = 0, \quad \lambda_\tau - \lambda_0 = 0, \quad \psi_\tau - \psi_0 = 0, \quad (5)$$

donde el subíndice representa el instante en que se evalúa la coordenada.

Llevando las expresiones (4) a las igualdades (5) podremos encontrar, de forma analítica, algunas propiedades de las órbitas que poseen los arcos keplerianos cerrados. Así, por ejemplo, de la igualdad de distancias se deduce que $e(\cos f_\tau - \cos f_0) = 0$, que se cumple cuando

$$e = 0, \quad \text{o} \quad f_\tau = 2\pi - f_0 = -f_0, \quad (6)$$

de donde se deduce que, o bien la órbita es circular, o el punto medio del arco cerrado coincide con el periastro o el apoastro.

Igualando la latitud y sustituyendo su valor por la tercera expresión de la ecuación (4), para cada instante de tiempo, se tiene que: $\sin i [\sin(\omega + f_\tau) - \sin(\omega + f_0)] = 0$, condición, esta última, que se cumple cuando $i = 0$, o bien si $\sin(\omega + f_\tau) - \sin(\omega + f_0) = 0$, que equivale a $2 \sin f_0 \cos \omega = 0$, si tenemos en cuenta que $f_\tau = -f_0$. Esta condición se verifica para los valores $f_0 = 0$ o bien para $\omega = \{\pi/2, 3\pi/2\}$. La condición $f_0 = 0$, es incompatible con la condición $f_\tau = -f_0$, puesto que esto conduciría a que el arco se reduce a un punto, lo que es absurdo, luego la igualdad de latitudes demuestra la condición

$$i = 0, \quad \text{o} \quad \omega = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad (7)$$

lo que indica que la órbita con un arco kepleriano cerrado, es ecuatorial o bien el argumento del periastro vale $\pi/2$ o $3\pi/2$. De hecho, tendremos uno de los dos valores para el arco cerrado con órbita directa y el otro para el de órbita retrógrada.

Por otro lado, la tercera de las relaciones (4) permite poner

$$f_0 = \sin^{-1} \left[\frac{\sin \psi_0}{\sin i} \right] - \omega, \quad (8)$$

que nos da la relación entre la latitud del vértice del arco, la inclinación de la órbita y el argumento del periastro (uno de los dos posibles).

En este punto puede demostrarse que la inclinación de la órbita que contiene un arco kepleriano cerrado depende únicamente de la latitud, ψ , del vértice y del periodo, τ , del arco. Para apreciar este hecho, partiremos de las expresiones (2) que representan la posición de los dos extremos del arco en el sistema espacial. En esta expresión tomaremos, para simplificar los cálculos y sin pérdida de generalidad, el valor $\theta_0 = 0$, con lo que obtendremos

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} r \cos \psi \cos \lambda \\ r \cos \psi \sin \lambda \\ r \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\tau = \begin{pmatrix} r \cos \psi \cos(\lambda + \omega_\odot \tau) \\ r \cos \psi \sin(\lambda + \omega_\odot \tau) \\ r \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

La inclinación, i , de la órbita que pasa por esos dos puntos vendrá dada por la expresión $\cos i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3$, donde \mathbf{e}_3 representa la dirección del eje Oz del sistema espacial y \mathbf{n} viene dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_\tau}{\|\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_\tau\|}. \quad (10)$$

Si sustituimos en la expresión (10) los vectores dados en (9) y nos quedamos con la tercera componente de \mathbf{n} obtenemos, después de la correspondiente manipulación trigonométrica y simplificación de términos, la expresión

$$\cos i = \frac{\cos \psi \cos(\omega_\odot \tau)}{\sin \frac{\omega_\odot \tau}{2} \sqrt{3 + 2 \cos(\omega_\odot \tau) \cos^2 \psi - \cos(2\psi)}}, \quad (11)$$

que demuestra que la inclinación i es una función $i = i(\psi, \tau)$. La figura 3 muestra a la izquierda las curvas $i(\tau)$ para diferentes valores de ψ , para el caso de órbitas de satélites alrededor de la Luna. Si buscamos arcos cerrados, con una inclinación dada i_0 , podemos observar que la relación

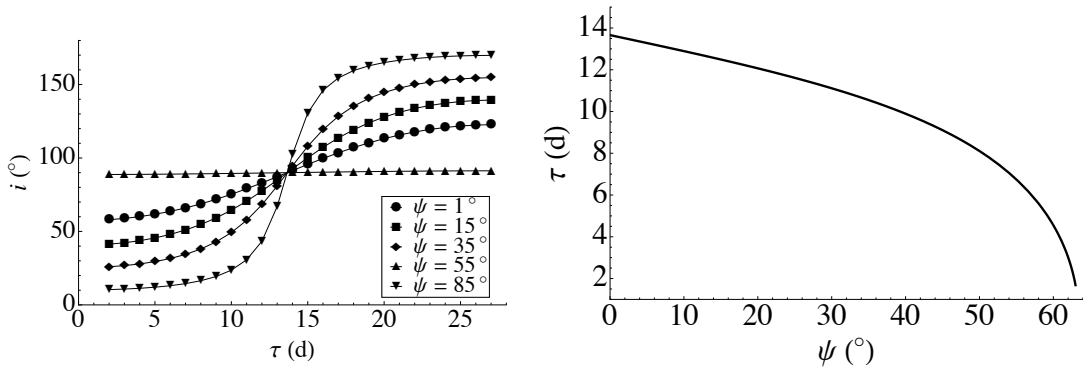


Figura 3: Izquierda: curvas $i(\tau)$ para distintos valores de ψ . Derecha: curva $\tau(\psi)$ para la inclinación crítica. Ambas gráficas se han obtenido para órbitas alrededor de la Luna.

$i_0 = i(\psi, \tau)$ determina una función implícita $\tau = \tau(\psi; i_0)$ que da el valor del periodo del arco para un vértice de latitud ψ y la inclinación deseada. La parte derecha de la figura 3 muestra esta función $\tau(\psi; i_c)$ particularizada para la inclinación crítica i_c , $(1 - 5 \cos^2 i_c = 0)$.

En apartados posteriores buscaremos y estudiaremos las propiedades de los arcos cerrados para distintos valores de \mathbf{u} y τ , o lo que es igual, para distintos valores de (r, λ, ψ, τ) . Si atendemos a las propiedades vistas hasta aquí y a las relaciones (4) podemos restringir más el rango de búsqueda de arcos cerrados.

En efecto, observando la segunda de las relaciones (4) podemos deducir que la longitud es irrelevante en la búsqueda de arcos cerrados, puesto que al cambiar ésta nos dará, para el arco cerrado, una órbita con todos los elementos orbitales idénticos excepto el ángulo del nodo, que variará en una cantidad igual a la variación de la longitud. Es decir, que la orientación del plano orbital del arco kepleriano variará.

4. Órbitas cuasiestacionarias

La proyección de un arco kepleriano cerrado sobre la superficie del planeta puede formar una figura cerrada o abierta. Cada uno de estos casos corresponde a una de las dos soluciones del problema de Lambert (arco directo o retrógrado). Desde el punto de vista de un observador situado en el punto de la superficie del cuerpo central cuyo cenit coincide con el vértice, el recorrido del arco es visible completamente para el observador, en el primer caso, mientras que en el otro caso este arco tiene puntos por debajo del horizonte y por tanto no es siempre observable.

Supongamos un observador, situado en el punto descrito en el párrafo anterior, y un orbitador que pasa por \mathbf{u}_0 , posición inicial del arco cerrado, con velocidad \mathbf{U}_0 tal que al cabo de un tiempo τ el arco pase de nuevo por el vértice $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_0$ y todo el arco sea visible para el observador. En ese momento su velocidad \mathbf{U}_τ no coincide con la inicial, por lo que la órbita continuaría separándose del arco y por tanto el satélite terminaría por alejarse de la zona de visibilidad del observador.

Si en el instante del segundo paso por el vértice se le aplica un impulso $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_\tau$, el orbitador vuelve a comenzar su recorrido por el arco obteniéndose así, una órbita pseudoperiódica no kepleriana que llamaremos *órbita cuasiestacionaria*, pues, para el observador esta órbita es siempre visible y su posición relativa es siempre próxima al vértice del arco. Obviamente esta periodicidad no se consigue de manera natural sino con un coste energético derivado de la realización de una maniobra cada intervalo de tiempo τ .

Uno de los parámetros fundamentales para determinar el coste y duración de una misión espacial es la llamada velocidad característica, $\Delta v = \sum_{i=1}^n \Delta v_i$ [5], o suma del coste, Δv_i , de cada una de las maniobras realizadas a lo largo de la misión. Téngase en cuenta que, la cantidad de combustible de una misión está directamente relacionada con la velocidad característica por medio de la expresión

$$\Delta v = c \log \left(\frac{m_0 + m_c}{m_0} \right),$$

donde m_c es la masa total de combustible gastado para una velocidad característica Δv , mientras que m_0 es la masa de la nave sin combustible y c una constante de los cohetes usados para producir cada impulso.

Hemos llamado órbita cuasiestacionaria a aquella que recorre continuamente un arco kepleriano cerrado de manera que, para un observador, el orbitador sea siempre sea visible. Para establecer con mayor precisión este concepto definiremos un nuevo parámetro que nos indicará y nos dará una medida de la “cuasiestacionalidad” del arco. Para ello, observemos la parte izquierda de la figura 4 que presenta el cono de visibilidad del arco kepleriano cerrado visto desde una estación situada en el punto del cuerpo central cuyo cenit coincide con el vértice del arco. La posición de este punto queda determinada por el vector $\boldsymbol{\rho}_0 = r_\odot \mathbf{u}_0 / \|\mathbf{u}_0\|$, siendo r_\odot el radio del cuerpo central, que suponemos esférico.

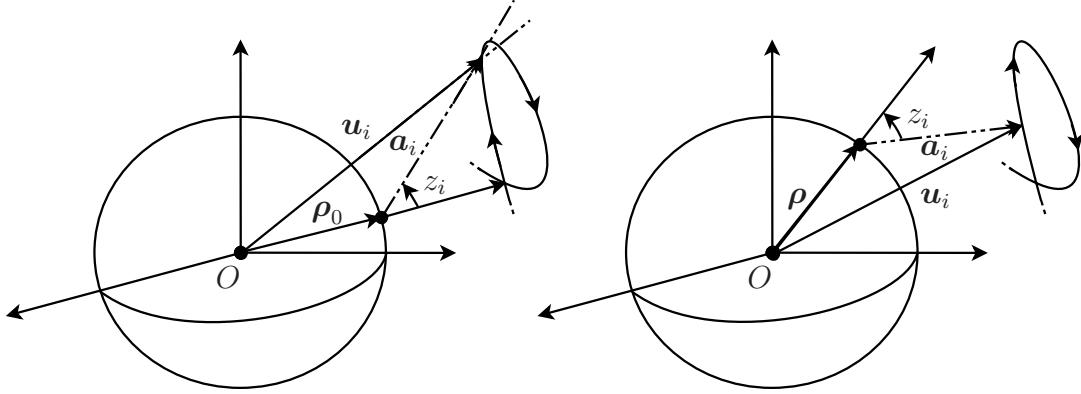


Figura 4: Distancia cenital de un punto del arco visto desde: a) (izquierda) el punto cuyo cenit coincide con el vértice del arco; b) (derecha) un punto cualquiera del cuerpo central definido por el vector $\boldsymbol{\rho}$.

Como puede observarse en la figura, un observador situado en el punto definido por $\boldsymbol{\rho}_0$, observa un punto cualquiera del arco, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$, $t_i \in [0, \tau]$, con una distancia cenital, z_i , que viene dada por la expresión

$$z_i = \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_0}{\|\mathbf{a}_i\| \|\boldsymbol{\rho}_0\|} \right], \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{a}(t_i) = \mathbf{u}(t_i) - \boldsymbol{\rho}_0. \quad (12)$$

El valor máximo de las distancias cenitales de todos los puntos del arco indican la separación más extrema del arco respecto de su cenit. A este ángulo, que representaremos por la letra α le llamaremos *ángulo del arco kepleriano cerrado*, y su valor vendrá dado por

$$\alpha = \max(z_i) = \max \left\{ \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_0}{\|\mathbf{a}_i\| \|\boldsymbol{\rho}_0\|} \right] : t_i \in [0, \tau] \right\}. \quad (13)$$

El ángulo α puede definirse para cualquier arco kepleriano cerrado, independientemente de que este pueda o no formar una órbita cuasiestacionaria. De hecho, un valor del arco menor que $\pi/2$ indicará que el arco se encuentra siempre sobre el horizonte, mientras que un valor mayor indica que habrá instantes en los que el arco no será visible, luego estableceremos como condición para generar una órbita cuasiestacionaria que $\alpha < \pi/2$. Además, cuanto más pequeño sea el ángulo α más “cuasiestacionaria” será la órbita, en el sentido de la proximidad de todos sus puntos al vértice, o tamaño de la ventana de visibilidad.

Dado un vértice \mathbf{u}_0 y un periodo de tiempo τ existen dos arcos keplerianos cerrados para estas condiciones, uno directo y otro retrógrado. En lo que sigue y con objeto de simplificar el estudio de las órbitas cuasiestacionarias elegiremos, de entre estas dos soluciones, la que tenga menor ángulo α . Además, si este valor es mayor que $\pi/2$ diremos que el arco kepleriano correspondiente no puede dar lugar a una órbita cuasiestacionaria.

5. Órbitas cuasiestacionarias en la Luna

En lo que sigue se efectuará un estudio más sistemático de las propiedades de las órbitas cuasiestacionarias para la Luna. Para ello, se ha tenido en cuenta el rango de valores siguiente:

- La distancia r se tomará dentro del intervalo $[1, 50]$, tomando el radio lunar, r_L , como unidad. Aunque para la Luna el radio de influencia de la misma tiene un valor aproximado de $38 r_L$, se ha elegido el valor 50 como valor máximo de la distancia ya que éste está más próximo al valor correspondiente al semieje de las órbitas selenosíncronas.
- La longitud λ no será tenida en cuenta pues, como se ha dicho en el apartado 3, variar λ equivale a variar el ángulo del nodo Ω en la misma cantidad.
- La latitud selenocéntrica ψ se toma en el intervalo $[0, \pi/2]$. No se consideran valores negativos de la latitud porque, de acuerdo con las relaciones del apartado 3, la órbita de un arco kepleriano cerrado, con vértice en el punto (r, λ, ψ) y periodo τ , se corresponde con el de vértice $(r, \lambda, -\psi)$ cambiando directa por retrógrada (o viceversa) y el argumento del periastro ω por $\omega + \pi$.
- El periodo τ del arco cerrado se toma entre 0 y el periodo de rotación de la Luna (unos 27.32 días). Para adaptarnos a este periodo, se usará el día como unidad de tiempo.

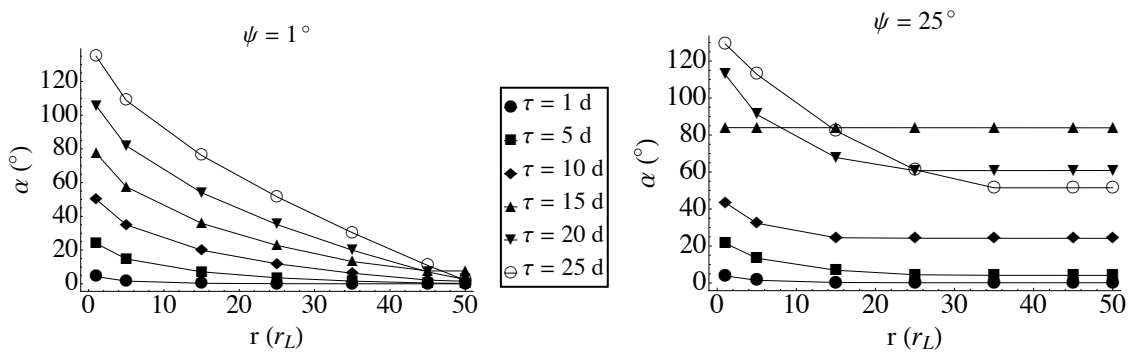


Figura 5: Variación de α vs r para distintos τ y las latitudes $\psi = 1^\circ$ y $\psi = 25^\circ$.

En primer lugar analizaremos, a partir de las figuras 5 y 6, el valor del ángulo del arco kepleriano cerrado para distintos valores de r , ψ y τ . Estas figuras, muestran en el eje Oy el valor de α , y en el eje Ox la distancia r . Cada curva, representada con un símbolo diferente muestra el ángulo para un tiempo τ dado. Finalmente, cada una de la cuatro figuras representa un valor de la latitud ψ .

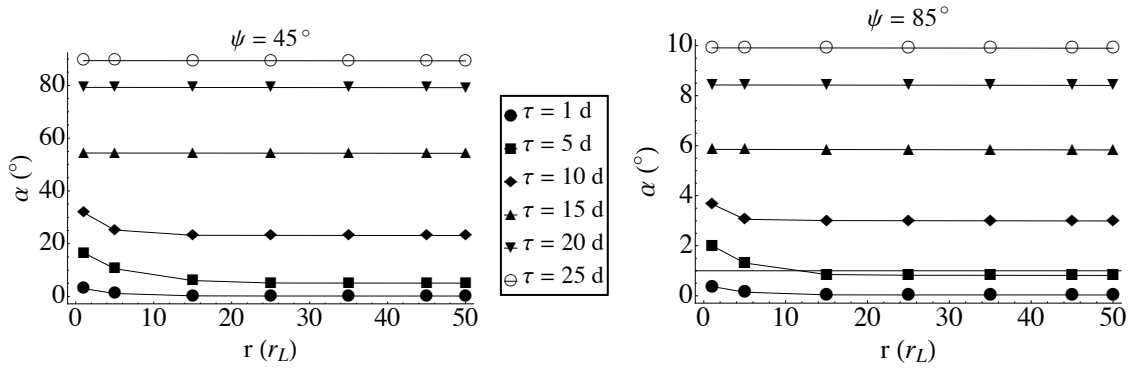


Figura 6: Variación de α vs r para distintos τ y las latitudes $\psi = 45^\circ$ y $\psi = 85^\circ$.

Observemos que para valores bajos de la latitud ψ el ángulo α disminuye conforme aumentamos la distancia, y éste va en aumento al incrementar el periodo τ . La izquierda de la figura 5, que representa una latitud $\psi = 1^\circ$, muestra un valor del ángulo α que varía entre 70° y 5° para un periodo $\tau = 15$ días. Para un periodo mayor el ángulo α aumenta mientras que para un periodo menor disminuye.

Para latitudes más altas, el comportamiento es diferente. La figura 6, que representa latitudes $\psi = 45^\circ$ y $\psi = 85^\circ$ la curva, para cada valor de τ presenta una apariencia horizontal. La realidad es que se presenta una disminución de α para un τ dado pero ésta disminución es muy pequeña y no puede apreciarse en la figura. Para latitudes altas α aumenta al crecer τ y decrece cuando la latitud aumenta. Por ejemplo, para la latitud $\psi = 45^\circ$ el valor del ángulo, cuando $\tau = 15$ días, es de unos 55° , mientras que para $\psi = 85^\circ$, con el mismo τ , se obtiene un α de unos 6° .

El cambio en el comportamiento entre latitudes altas y bajas puede observarse mejor en la gráfica de la izquierda de la figura 5. En esta gráfica vemos dos comportamientos distintos de las curvas para un τ dado. Para algunas se observa una forma casi horizontal, como para latitudes más altas, pero para otros valores la curva de $\alpha(r)$ va disminuyendo hasta que alcanza un comportamiento casi horizontal. La curva para $\tau = 10$ días muestra claramente este fenómeno. Para comprender mejor esto calculemos y dibujemos las órbitas cuasiestacionarias de vértice ($r, \psi = 25^\circ$), con $r = 1, 5, 15, 25, 35, 45, 50$, y para un valor $\tau = 10$ días. La figura 7 muestra esas órbitas en dos y tres dimensiones.

Los dibujos tridimensionales de las órbitas se muestran desde dos puntos de vista diferentes. La imagen de la izquierda muestra como las órbitas, conforme nos alejamos de la Luna, son cada vez más pequeñas. La imagen de la derecha muestra las mismas órbitas desde una perspectiva más alineada con el punto de observación. En esta última, observamos que la visibilidad del arco cerrado se va reduciendo hasta que a partir de un determinado valor, dicha reducción de tamaño se hace mucho más moderada. La figura inferior muestra la traza de las mismas órbitas.

Después de analizar el ángulo del arco kepleriano cerrado pasaremos a estudiar el valor del coste del mantenimiento de la órbita en términos de Δv . La figura 8 muestra este coste para el caso de latitud $\psi = 45^\circ$ y para distintos $r \in [1, 50]$. A la izquierda se da el coste absoluto en km/s de cada maniobra. Como puede observarse el coste es muy grande para órbitas de vértice próximo a la superficie (valores de r pequeños) mientras que disminuye para distancias mayores.

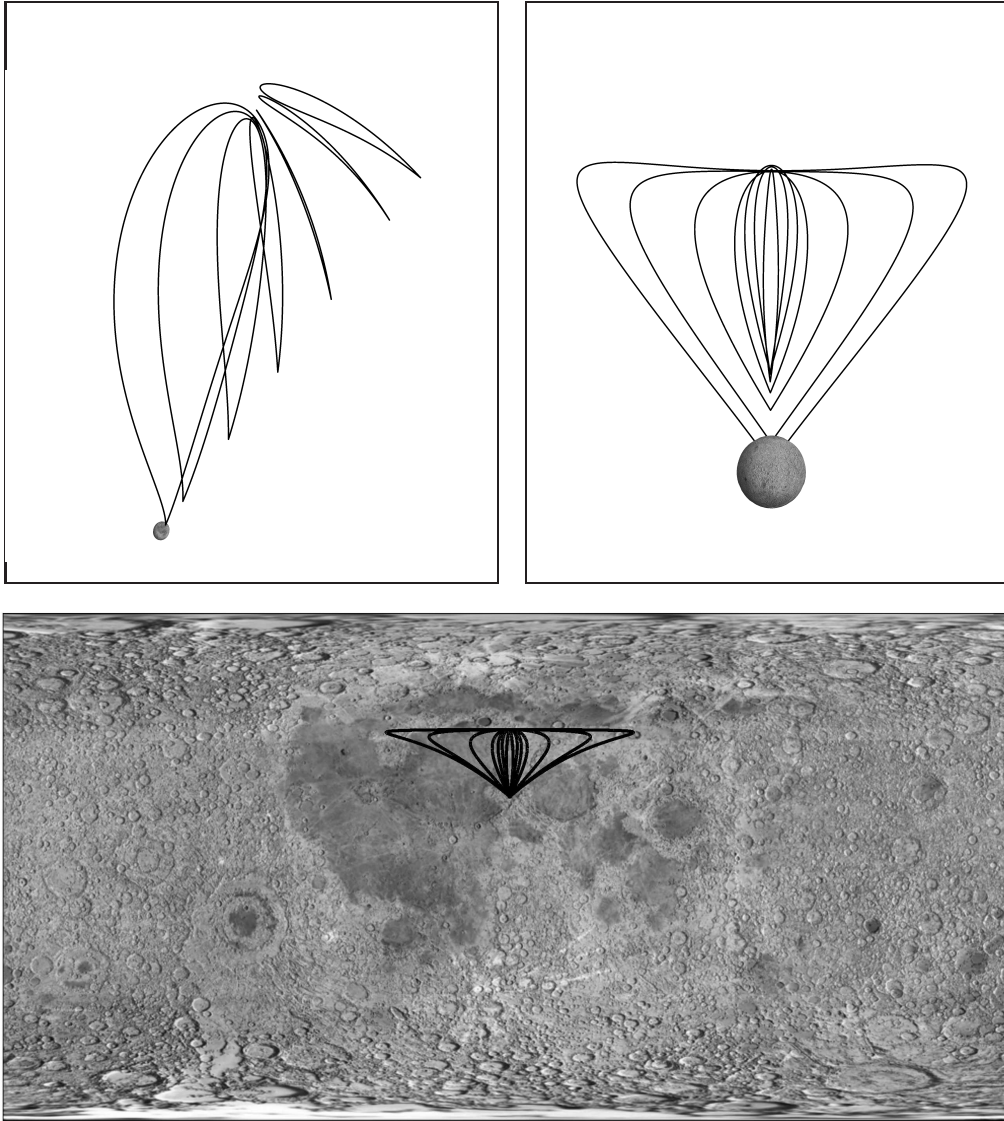


Figura 7: Órbitas cuasiestacionarias correspondientes a un arco de vértice $(r, \psi = 25^\circ)$, con $r = 1, 5, 15, 25, 35, 45$ y 50 , para un valor de $\tau = 10$ días.

Esta medida del coste resulta muy poco representativa pues depende del intervalo de tiempo τ que se tarda en efectuar dos maniobras consecutivas. Por esta razón, se usa en la parte derecha de la misma figura otro parámetro que representa el promedio del Δv_d gastado por día. Para esto, usaremos las unidades $(\text{km/s})/\text{d}$.

Con este parámetro Δv_d , que nos da el coste, por día, de la órbita y no de cada maniobra, podemos observar de nuevo la misma tendencia: para que el coste sea pequeño la distancia r debe ser grande, como se muestra en la gráfica de la derecha de la figura 8.

La figura 9 muestra el coste por día de la órbita para latitudes $\psi = 1^\circ$ (izquierda) y $\psi = 60^\circ$ (derecha). En ambos casos se muestra el coste para valores de r mayores que 25 radios lunares y para distintos valores de τ . La figura muestra que el coste es menor cuanto menor sea la latitud, cuanto menor sea el periodo τ y cuanto mayor sea la distancia r .

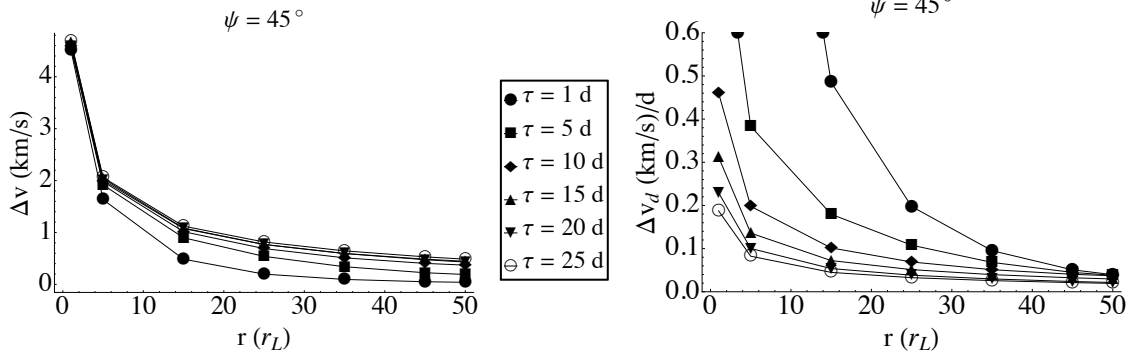


Figura 8: Valor de Δv (izquierda) y Δv_d (derecha) para distintos valores de r y τ , con una latitud $\psi = 45^\circ$.

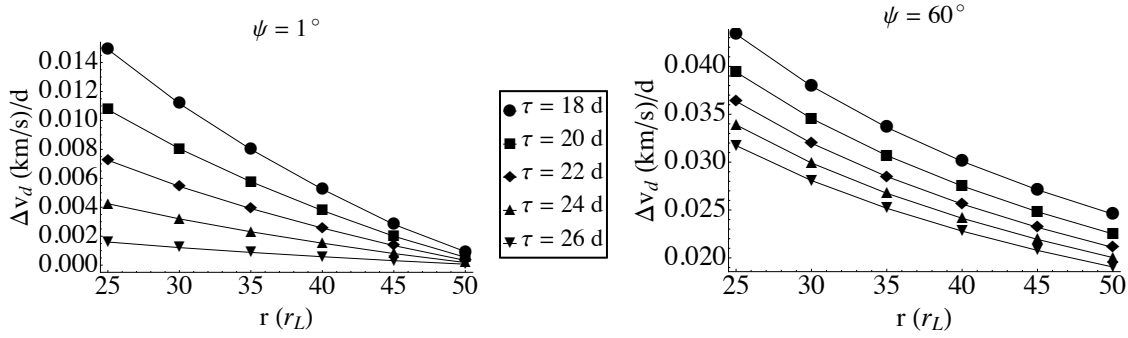


Figura 9: Valor de Δv_d para distintos valores de r y τ y latitudes $\psi = 1^\circ$ y $\psi = 60^\circ$.

Resulta también de interés en el estudio de las órbitas cuasiestacionarias analizar el valor de la excentricidad de la órbita, de la cual el arco es una sección. La figura 10 muestra la evolución de esta excentricidad en los casos $\psi = 1^\circ$ (izquierda) y $\psi = 60^\circ$ (derecha). Como puede verse para una latitud baja la excentricidad toma cualquier valor entre cero y uno. Tiende a un valor cero para distancias, r , muy altas, mientras que si la distancia se hace muy pequeña la excentricidad crece. Por otro lado, la excentricidad resulta menor cuando el periodo τ aumenta. Observemos también, en la parte derecha de esta figura, que al aumentar la latitud no aparecen excentricidades próximas a cero, manteniéndose, para toda distancia y todo periodo, valores grandes de la excentricidad

Finalmente, la figura 11 muestra la evolución de la distancia en el periastro para todo tipo de estas órbitas. Valores por debajo de la unidad, en la zona sombreada, nos indican órbitas balísticas que si se recorren saliéndose del arco cerrado conducen a una colisión con la superficie lunar.

6. Conclusiones

En este trabajo se define en rigor los arcos keplerianos cerrados, se presenta un método de cálculo de los mismos y finalmente se analizan las características de los elementos orbitales de las órbitas que los contienen.

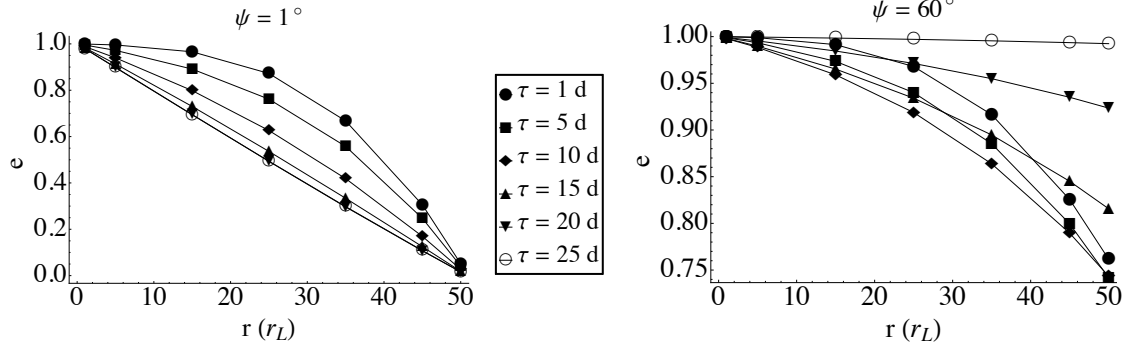


Figura 10: Valor de la excentricidad e para distintos valores de r y τ y, latitudes $\psi = 1^\circ$ y $\psi = 60^\circ$.

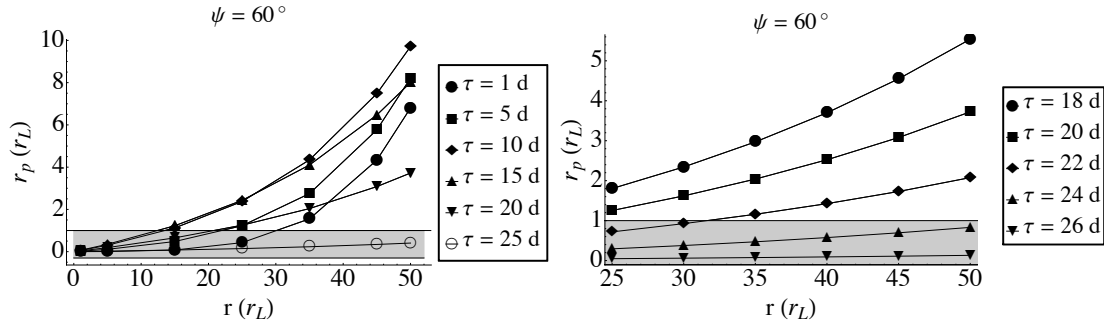


Figura 11: Valor de la distancia en el periastron r_p para distintos valores de r y τ , con una latitud $\psi = 60^\circ$. La zona sombreada representa órbitas balísticas.

A partir de los arcos orbitales cerrados se definen las órbitas cuasiestacionarias así como dos parámetros: el coste Δv y el ángulo α que las caracterizan. Finalmente, se realiza un detallado estudio de los valores de los parámetros de éstas órbitas para satélites moviéndose en torno a la Luna. Este estudio puede ser extendido a cualquier cuerpo central.

Acknowledgements

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio Español de Ciencia y Tecnología, proyecto MTM2012-31883, y por el Fondo de Investigaciones para el desarrollo de las Telecomunicaciones de Venezuela proyecto MPPCTI/FIDETEL FID-003-2012.

Referencias

- [1] P. Anderson and M. Macdonald, 2010.: *Extension of earth objects using low-thrust propulsion*. 61th International Astronautical Congress, IAC, Czech Republic.
- [2] G. Avanzini, 2008.: *A Simple Lambert Algorithm*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 31(6), 1587–1594.
- [3] R. H. Battin, 1977.: *Lambert's Problem Revised*. AIAA Journal, 15(5), 707–713

- [4] R. H. Battin, 1999.: *Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., revised edition.
- [5] H. D. Curtis, 2012.: *Orbital Mechanics for Engineering Students*,. Butterworth-Heinemann.
- [6] C. F. Gauss, 1809.: *Theoria motus corporum celestium in sectionibus conicis solem ambientium*, (English translation by C.H Davis (1857)).
- [7] R. H. Gooding, 1988.: *On the Solution of Lambert's Orbital Boundary-Value Problem*. Royal Aerospace Establishment, AD-A200 383, pages 1–57.
- [8] D. Izzo, 2005: *Lambert's problem for exponential sinusoids*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 29(5), 1242–1245.
- [9] E. R. Lancaster and R. C. Blanchard, 1969.: *A Unified Form of Lambert's Theorem*. NASA Technical Note D-5368, pages 1–15.
- [10] C. R. McInnes, 2011.: *Displaced non-Keplerian orbits using impulsive thrust*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 110(3), 199–215.
- [11] R. C. McInnes, 1999.: *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*. Springer Praxis. Germany.
- [12] R. J. McKay, et al., 2009.: *Non-Keplerian Orbits Using Low Thrust, High ISP Propulsion System*. 60th International Astronautical Congress, Korea.
- [13] K. T. Nock, 1984.: *Rendezvous with Saturn's Rings, Annex des Planètes Planetary Rings*, IAU Colloquium no. 75.

Dynamics of a dual satellite system in the Newtonian field of a polygon configuration of N big bodies: The $N + 2$ ring problem

M.N. Croustalloudi, and T.J. Kalvouridis

National Technical University of Athens

Faculty of Applied Sciences, Department of Mechanics

Abstract

In this contribution we study some dynamical aspects of a dual satellite system in the dynamical field created by a regular polygon formation of N much bigger bodies where $\nu = N - 1$ of them are located at the vertices of the regular polygon and the N th body is located at the center of mass. We extract the equations of motion of the two minor bodies and we study their equilibrium locations. We prove that all these positions are located on the plane of the primaries' revolution and we study their stability and their parametric variation.

1 Introduction

The restricted regular polygon problem of $(N + 2)$ bodies is a combination of the restricted $2 + 2$ body problem which was stated by Whipple in the early 80's ([1]), and of the regular polygon problem of $(N + 1)$ bodies, also known as the ring problem of $(N + 1)$ bodies ([2]-[4]). The former model is a particular case of the $2 + n$ body problem proposed by Whipple and Szebehely almost at the same time and describes the dynamics of two small bodies, natural or artificial, in the gravitational field created by two primary bodies. It was proposed in order to approximate dynamical systems like the Sun-Jupiter-binary asteroids one ([5]). Recently it came to the fore again after the future plans of ESA regarding the flying formation of a dual satellite system (project PROBA3) in order to study the solar corona (one satellite plays the role of the occulter and the other one carries the main equipment and is the coronagrapher) ([6]). The second problem concerns the dynamics of a small body in the field created by N big bodies, the

$\nu = N - 1$ of which have equal masses m and are located at the vertices of a fictitious regular polygon, while the N th body has a different mass m_0 and is located at the center of mass of the system. The primaries are assumed to be in relative equilibrium and rotate about their center of mass with constant angular velocity. In the model proposed in this work, we have replaced the small particle with a pair of small interacting bodies S_i , $i = 1, 2$ (Figure 1) that are influenced by the primaries, while they do not influence their motion. Despite the fact that the masses of the minor bodies are very small and although we assume that they are moving very close to each other (as it happens in a flying formation mission), this weak but existing interaction produces important results. Under these circumstances, the dynamical system has six degrees of freedom in the Euclidean three-dimensional space and is characterized by four parameters. Two of these, that is, the mass parameter $\beta = m_0/m$ and the number ν of the peripheral primaries, are already known from the gravitational version with $(N + 1)$ bodies. The remaining two parameters are the reduced masses μ_1 and μ_2 ($\mu_\alpha = m_\alpha/m$, $\alpha = 1, 2$) of the two small bodies S_1 and S_2 respectively. In what follows, we formulate the new model by giving the analytic expressions of the normalized equations of motion of the two minor bodies in a synodic coordinate system, we prove that all equilibrium positions lie on the plane of the primaries' revolution and we numerically explore their locations, their distribution, their parametric variation and their stability. Among possible applications we could suggest the dual artificial satellites' missions in a stellar system with a "sun" and many (at least two) co-orbital planets.

2 Dimensionless equations of motion of the minor bodies in a synodic coordinate system

By using a synodic coordinate system $Oxyz$, where plane Oxy coincides with the plane of the primaries (Figure 1), and after normalization of the physical quantities, the equations that describe the motions of the two small bodies S_a , $a = 1, 2$ are,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_a - 2\dot{y}_a &= x_a + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta \cdot x_a}{r_a^3} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{X_i - x_a}{r_{ia}^3} + \frac{(-1)^{a+1} \mu_{3-a} (x_2 - x_1)}{\rho^3} \right] = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial x_a} \\ \ddot{y}_a + 2\dot{x}_a &= y_a + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta \cdot y_a}{r_a^3} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{Y_i - y_a}{r_{ia}^3} + \frac{(-1)^{a+1} \mu_{3-a} (y_2 - y_1)}{\rho^3} \right] = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial y_a} \\ \ddot{z}_a &= \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta \cdot z_a}{r_a^3} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-z_a}{r_{ia}^3} + \frac{(-1)^{a+1} \mu_{3-a} (z_2 - z_1)}{\rho^3} \right] = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial z_a}\end{aligned}\quad (1)$$

where,

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \sum_{a=1}^2 \mu_a \left[\frac{1}{2} (x_a^2 + y_a^2) + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_a} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_{ia}} + \frac{\mu_{3-a}}{2\rho} \right) \right] \quad (2)$$

The distances of the minor bodies from the primaries are given by the relations,

$$r_a = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}, \quad r_{ia} = \left[(X_i - x_a)^2 + (Y_i - y_a)^2 + z_a^2 \right]^{1/2}, \quad a = 1, 2$$

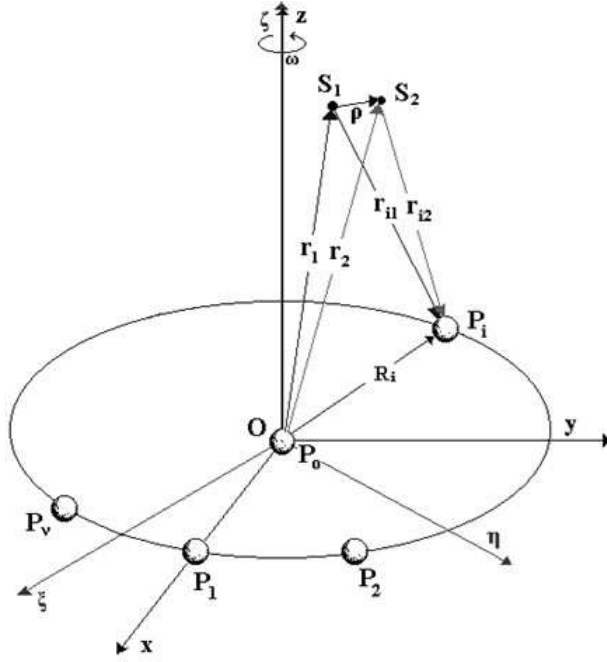


Figure 1.— The configuration of the regular polygon problem of $(N + 2)$ bodies; P_i , $i = 0, 1, \dots, \nu$ are the primaries and S_1, S_2 are the minor bodies. $O\xi\eta\zeta$ and $Oxyz$ are the inertial and the synodic coordinate systems respectively

where X_i, Y_i are the coordinates of the primaries and

$$\rho = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

is the distance between the minor bodies.

Finally,

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m}$$

are the reduced masses of the minor bodies.

From (1) we obtain a Jacobian-type integral of motion

$$2U - \sum_{a=1}^2 \mu_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) = C \quad (3)$$

3 Numerical investigation of the equilibrium positions of the minor bodies. Equilibrium zones. Parametric variation

3.1 Equilibrium positions of the minor bodies

The minor bodies are in equilibrium when

$$\dot{x}_a = \dot{y}_a = \dot{z}_a = \ddot{x}_a = \ddot{y}_a = \ddot{z}_a = 0$$

By replacing these conditions into (1) we obtain the following system of non-linear algebraic equations,

$$\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial x_a} = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial y_a} = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial z_a} = 0, \quad a = 1, 2 \quad (4)$$

Table 1.— Critical values l_ν of the mass parameter β for several values of ν (number of peripheral primaries).

ν	l_ν
3	0.014
4	0.184
5	0.6496
6	1.547
7	3.08
8	5.24
10	12.16
12	23.26
16	62.11
20	129.92

It is easily proved that condition

$$\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial U}{\partial z_a} = 0$$

is satisfied when $z_a = 0$, $a = 1, 2$, which means that all equilibrium states are located on the xy -plane of the synodic system. Therefore, the numerical calculations are restricted to the first two equations of (4) which are solved numerically by using an iteration method for four independent variables (x_1, y_1, x_2, y_2) . Here, we remind, that in the ring problem of $(N + 1)$ bodies, the equilibrium positions of the small body are located on either five or three fictitious circular zones which are called equilibrium zones and are symbolized with A_1, A_2, B, C_2, C_1 or A_1, C_2, C_1 respectively as they appear from the origin outwards ([4], [7]). These zones are concentric to the fictitious circle of the primaries and each one consists of ν dynamically equivalent positions (with the same Jacobian constant and the same status of stability). The points of zones A_1 and C_1 are called collinear since they are located on the radii which connect the central primary with a peripheral one, while the points of zones A_2, B and C_2 are called triangular in accordance to the notation of the restricted three-body problem and are located at the bisections of the angles formed by the central primary and two consecutive peripheral ones. The transition from five to three equilibrium zones occurs in a critical value of the mass parameter $\beta = l_\nu$ which is different for the various configurations. Table 1 gives the critical values l_ν for some configurations.

We also note that Whipple in his 2+2 body problem found that there are 14 different equilibrium solutions of the minor bodies which evolve in the neighborhood of the Lagrangian equilibrium points of the respective restricted three-body problem with the same value of the reduced mass μ . More precisely, two equilibrium solutions evolve in the neighborhood of each collinear Lagrangian point (L_1, L_2 or L_3) and on both sides of it. Whipple called these solutions collinear, adopting the terminology used in the restricted three-body problem. He also found that four equilibrium solutions exist near a triangular Lagrangian point (L_4 or L_5). By reprocessing this problem, we have found that two of them (in-line equilibria) lie on a straight line which forms a small

angle with the direction OL_4 (or OL_5) and depends on the reduced mass μ ([6]). The remaining two equilibrium solutions are located on a line which is perpendicular to the previous one and crosses it at the triangular Lagrangian point (perpendicular equilibria).

In the $(N + 2)$ -body model proposed here, we have adopted the same terminology and we have applied the numerical procedure for a primaries' configuration with $N - 1 = \nu = 7$, $\beta = 3$, $\mu_1 = 10^{-8}$, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-8}$. We have found that in the neighborhood of an equilibrium point of zones A_1 and C_1 , evolve two pairs of collinear equilibrium states of the minor bodies S_1 and S_2 , in the neighborhood of an equilibrium point of zones A_2 and C_2 exist four pairs of equilibrium states (two in-line and two perpendicular) and finally, in the neighborhood of an equilibrium point of zone B exist only two pairs of perpendicular equilibrium states. In Figure 2 we denote the positions of the primaries (large black dots) and the equilibria of the existing five equilibrium zones. The areas inside the dotted frames are enlarged in Figures 3a-3e where we mark the equilibrium locations of the two minor bodies.

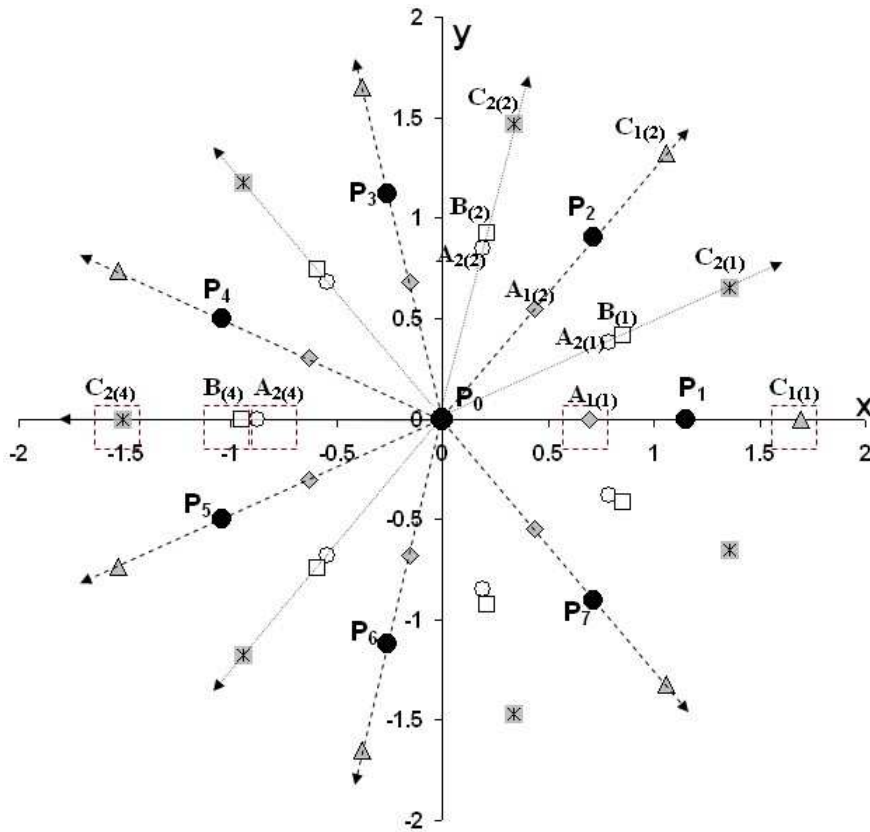
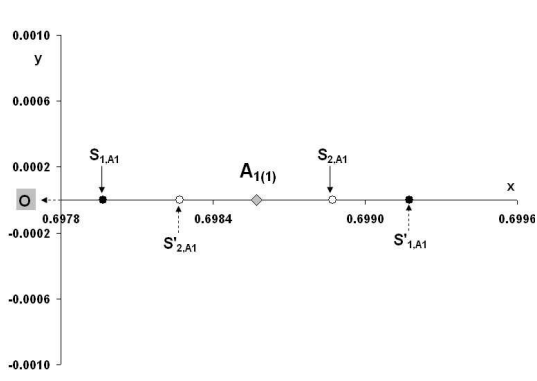


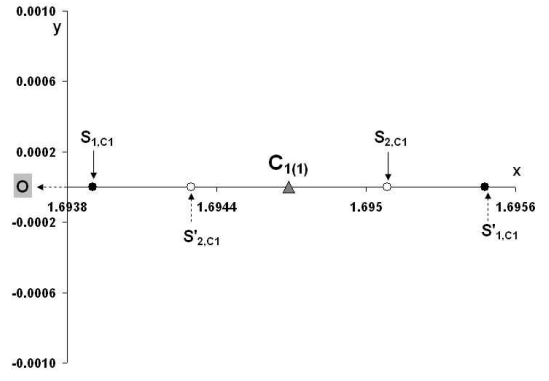
Figure 2.— Locations of the primaries (large black dots) and of the equilibria (small black dots, triangles or squares) for a configuration with $\nu = 7$, $\beta = 3$ (five equilibrium zones). The dotted frames around the equilibria show the areas which are enlarged in Figure 3.

3.2 Equilibrium zones of the minor bodies

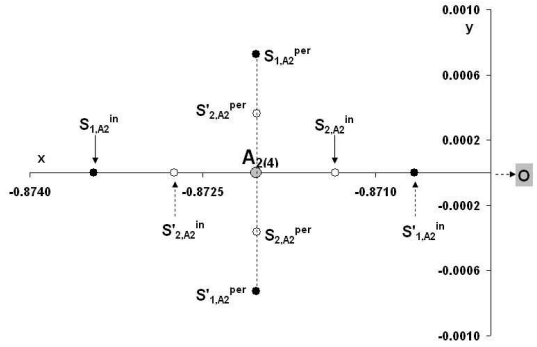
Since the symmetry of the primaries' formation is conserved through rotations $2\pi/\nu$ with respect to the perpendicular z -axis, the dynamically equivalent equilibria will be located on



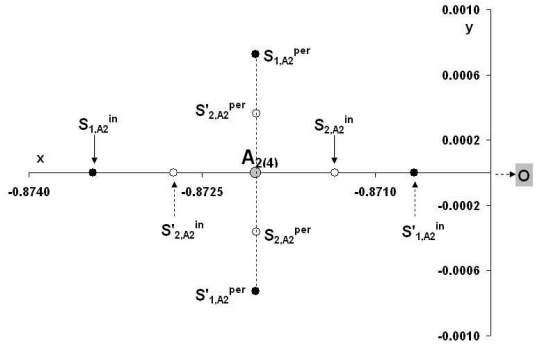
(a)



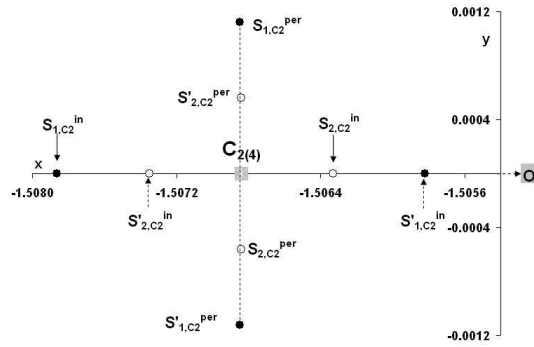
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 3.— Equilibrium locations of the minor bodies S_1 and S_2 in the neighborhood of an equilibrium point of: (a) zone A_1 , (b) zone C_1 , (c) zone A_2 , (d) zone B , (e) zone C_2

imaginary peripheries of circles that are concentric with equilibrium zones A_1 , A_2 , B , C_1 , C_2 and will appear in conjugate pairs. Each zone of a pair consists of the ν dynamically equivalent positions of S_1 while the other zone consists of the ν locations of S_2 (see Figures 4a and 4b).

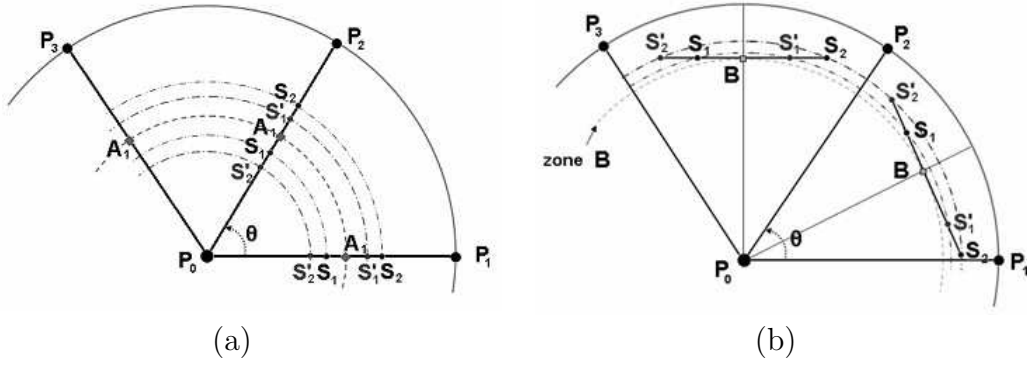


Figure 4.— (a) Distribution of the collinear equilibrium locations of S_1 and S_2 in the neighborhood of A_1 , (b) distribution of the perpendicular equilibrium locations of S_1 and S_2 in the neighborhood of B

3.2.1 EQUILIBRIUM ZONES FOR THE COLLINEAR AND THE IN-LINE LOCATIONS OF S_1 AND S_2

When $\mu_1 \neq \mu_2$, four concentric equilibrium zones are formed by the collinear equilibria of S_1 and S_2 on both sides of A_1 with radii $(P_0S'_2)$, (P_0S_1) , $(P_0S'_1)$, (P_0S_2) (Figure 4a) and on both sides of C_1 . The same picture is observed with the zones formed by the in-line equilibria in the neighborhood of A_2 and C_2 .

In the particular case where $\mu_1 = \mu_2$, the four concentric zones of the collinear or the in-line equilibria which evolve in the neighborhood of A_1 , C_1 or close to A_2 , C_2 respectively, are reduced to two since $P_0S'_2 = P_0S_1$ and $P_0S'_1 = P_0S_2$.

3.2.2 EQUILIBRIUM ZONES FOR THE PERPENDICULAR LOCATIONS OF S_1 AND S_2

When $\mu_1 \neq \mu_2$, two concentric equilibrium zones are formed by the perpendicular equilibria in the neighborhood of A_2 , B and C_2 ; all S_1 and S'_1 positions are on one circular zone, while all S'_2 and S_2 positions are on another one (Figure 4b). When $\mu_1 = \mu_2$, then the above zones are reduced to only one.

3.3 Parametric variations

3.3.1 PARAMETRIC VARIATION WITH β OF THE JACOBIAN CONSTANT C OF THE MINOR BODIES AT THE EQUILIBRIUM LOCATIONS

Figure 5 shows the variation of the Jacobian constant C with β of the various equilibrium states for $\nu = 7$, $\mu_1 = 10^{-8}$, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-8}$. Since the conjugate pairs are characterized by the same C , there are as many curves as the number of the existing equilibrium zones. The curves of all zones show an exponential decrease (only the curve of A_2 for very small values of β increases a little at the beginning). Two of these curves (which correspond to zones A_2 and B) terminate at the critical value $\beta = l_\nu$ which in our case ($\nu = 7$) is 3.08. The remaining three curves (A_1 , C_1 and C_2) evolve almost parallel to β -axis for large values of this parameter. This means that

their Jacobian values remain almost constant.

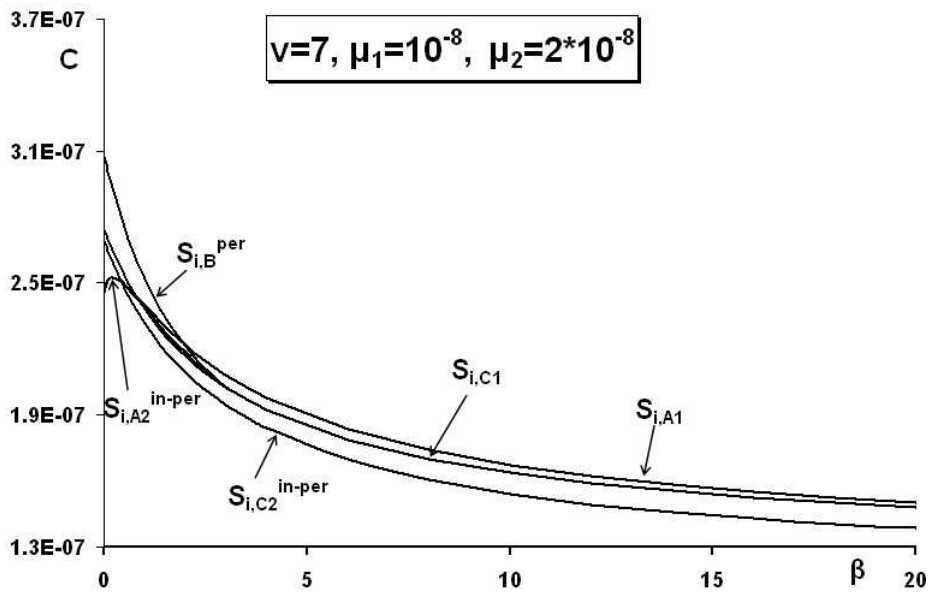


Figure 5.— Parametric variation with β of the Jacobian constant C of the minor bodies at the equilibrium locations

3.3.2 PARAMETRIC VARIATION WITH β OF THE MUTUAL DISTANCE OF THE MINOR BODIES AT AN EQUILIBRIUM STATE

Figure 6 shows the variation with β of the distances between the two minor bodies in an equilibrium state for $\nu = 7$, $\mu_1 = 10^{-8}$, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-8}$. There are totally seven curves representing the existing fourteen equilibrium states since the distances in a (S_{1e}, S_{2e}) situation is the same with its homologous (S_{2e}, S_{1e}) one. In other words, although there are two collinear equilibrium states of A_1 and C_1 , four equilibrium states (two in-line and two perpendicular) of A_2 and C_2 and two states of B (perpendicular), the distances between S_1 and S_2 in the homologous pairs are the same. Since, zones A_2 and B disappear for $\beta > l_\nu$, the curves which describe the variation of the states concerning these zones, terminate to this limit. Almost all curves of the diagram show a steep descent for small values of β and then they evolve almost parallel to β -axis. However, there are two exceptions. The first concerns the curve of the in-line equilibria of A_2 which shows a very fast increasing evolution until it terminates at the critical value of β and the second one concerns the curve of the perpendicular states of B the evolution of which is almost constant for as long as it exists.

3.4 Stability

We have numerically investigated the linear stability of the equilibria by computing the roots of the characteristic polynomial of their variational equations for various values of ν ($\nu \leq 36$), and of $\beta \in (0, 500]$, by considering cases of equal or not equal reduced masses μ_1, μ_2 . In all the examined cases we have found that the existing equilibria are unstable. This is reasonable since

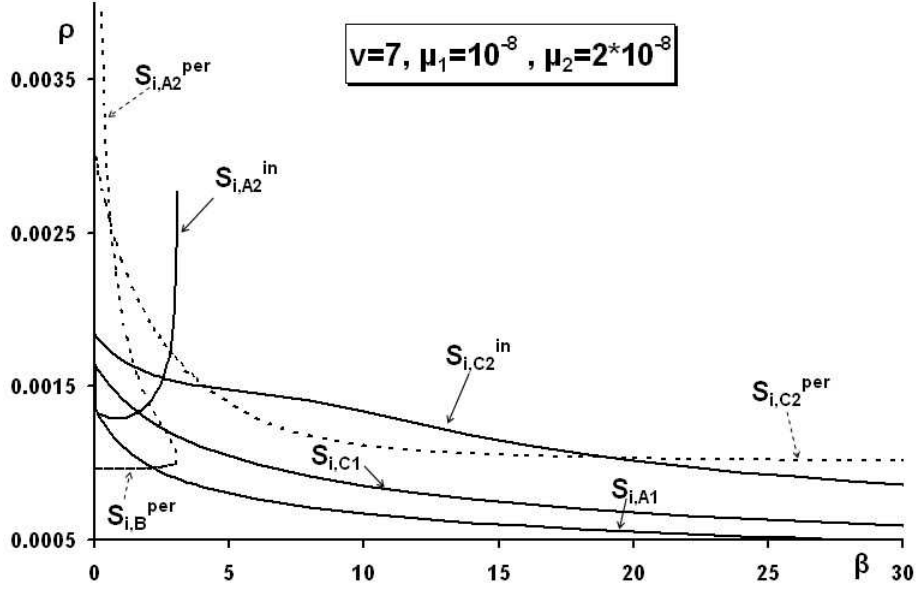


Figure 6.— Parametric variation with β of the distance Re between the minor bodies at their equilibrium locations

the equilibrium points of the original gravitational ring problem of $(N + 1)$ bodies are unstable for any combination of the parameters ν , β in the considered intervals of values.

4 Conclusions and Remarks

We summarize our conclusions as follows:

- As in the 2 + 2 body problem, two pairs of conjugate equilibrium locations of the minor bodies evolve in the neighborhood of each collinear point of zones A_1 and C_1 .
- As in the 2 + 2 body problem, four pairs of conjugate equilibrium locations of the minor bodies evolve in the neighborhood of each point of zones A_2 (provided it exists) and C_2 . Two of them are located along the radius which passes through this point (in-line equilibria) and the other two are located on a line which passes through the same point and is perpendicular to the previous direction (perpendicular equilibria).
- Unlike the 2+2 body problem, two pairs of conjugate equilibria evolve in the neighborhood of each point of zone B (if it exists), along a line which is perpendicular to the position vector of this point.
- As a consequence, for a regular ν -gon:
 - If $\beta > l_\nu$, the total number of equilibrium states (S_{1e}, S_{2e}) is 8ν (2ν for each zone A_1, C_1 , and 4ν for zone C_2).
 - If $\beta < l_\nu$, the total number of equilibrium states (S_{1e}, S_{2e}) is 14ν (2ν for each zone A_1, C_1 , and B , and 4ν for each zone A_2 and C_2).

- All equilibrium locations of S_1 and S_2 are unstable for any configuration ν and any value of the three mass parameters β, μ_1, μ_2 .
- The Jacobian values C and the distances ρ between the minor bodies at an equilibrium state of an equilibrium zone for small values of β ($\beta < 4$) decrease almost exponentially, but for large values of β they almost evolve parallel to the β -axis tending to some constant values. For other values of ν, μ_1, μ_2 the parametric variation with β of C and ρ is similar.

References

- [1] Whipple, A.: 1984, *Equilibrium solutions of the restricted problem of 2+2 bodies*, Cel. Mech. **33**, 271-294.
- [2] Scheeres, D.: 1992, *On symmetric central configurations with application to satellite motion about rings*, Thesis. The University of Michigan, 1-256.
- [3] Scheeres, D.J., Vinh, N.X.: 1993, *The restricted P + 2 body problem*, Acta Astronautica, **29**, No 4, 237-248.
- [4] Kalvouridis, T.J.: 1999, *A planar case of the n + 1 body problem: the “ring” problem*, Astrophysics and Space Science **260**, No. 3, 309-325.
- [5] Milani, A., Nobili, A.: 1988, *Instability of the 2 + 2 body problem*, Cel. Mech. **41**, 153-160.
- [6] Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T. J.: 2013, *The restricted 2+2 body problem: Parametric variation of the equilibrium states of the minor bodies and their attracting regions*, ISRN Astronomy and Astrophysics, 2013, Article ID 281849.
- [7] Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T. J.: 2007, *Attracting domains in ring-type N-body formations*, Planetary Space Science **55**, No. 1-2, 53-69.

Some curious equations that appear in the teaching of the Two-Body Problem

J. A. Docobo

R. M. Aller Astronomical Observatory, University of Santiago de Compostela

P.O. Box 197, Santiago de Compostela, Spain

1 Introduction

Celestial Mechanics (CM) has been taught in different Spanish Universities as a branch of Astronomy and Theoretical Physics for the past few decades. In recent years, and after the changes in university teaching adapted to the European Space of Higher Education by means of the Bologna Plan, the CM course has been reduced to only being offered in the Bachelor and/or Master degree programs in Mathematics as well as in the Mechanics course within the Bachelor of Physics program of studies.

It is important to point out that this significant reduction in the teaching of CM is in stark contrast to the fact that leading Spanish research groups in a broad range of fields such as Maths, Physics, Space Sciences, Computational Sciences, Engineering, Astronomical Observatories, etc. exist and are very active. The great majority of these groups have participated in the Spanish Workshops in CM (Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste) since they began in 1998.

Today, it is almost a privilege to be able to teach this significant course within the University framework.

Higher-level CM is now restricted to only some Masters programs such as in Mathematics in our University of Santiago de Compostela in which the N-Body Problem, perturbation theory, and their applications to the movements of the Moon and the satellite are taught in the Astrodynamics course, among other questions.

This report concerns the teaching of CM and, in particular, practical applications in a basic course taught in the fourth year in the Bachelor Degree program in Mathematics under the title, “Fundamentals of Astronomy”. In the first month, the material that corresponds to the Two-Body Problem is developed.

Herein, some of the original problems created by the author of this paper are described in which, in addition to the appearance of some different and curious equations to be solved, have

turned out to be one of the most interesting for students who have completed this discipline in the Department of Mathematics of the University of Santiago de Compostela.

2 Equations to be solved

In the seven (7) problems that we have selected and will comment on in this section, equations such as these come up:

$$a e^2 + r \cos f e + r - a = 0 \quad (1)$$

$$x - \sin x = \frac{4\pi}{m} \quad (2)$$

$$e^2 - \frac{2}{k-1}e + 1 = 0 \quad (3)$$

$$\sin 2f = 1 - \frac{1}{e} \quad (4)$$

$$e^3 + e^2 + e - 1 = 0 \quad (5)$$

$$F(x)(\pi - G(x) + H(x)) - (\pi - F(x) - H(x))^2 = 0 \quad (6)$$

$$e^2 + 2e \frac{\cos f_2 v_1^2 - \cos f_1 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} + 1 = 0 \quad (7)$$

The students should resolve them using analytic as well as numeric methods in such a way that they should always keep in mind that it is as important to know how to solve a problem as it is to be able to obtain a solution with the greatest possible precision.

3 The selected problems

PROBLEM 1

A material point, P2, describes a Keplerian orbit around another, P1, with a period of 10 u.t., its polar coordinates being: $r = 1.5$ u.d.; $f = 140^\circ$, at a determined moment.

The objective is to determine the eccentricity of the orbit.

Data:

$$\mu = 1 \text{ (u.d.)}^3 / \text{(u.t.)}^2$$

First, we calculate the semiaxis major using:

$$a = \sqrt[3]{\frac{P^2 \mu}{4\pi^2}} \quad (8)$$

obtaining: $a = 1.3631598$ u.d.

Now, using the polar equation of the ellipse:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (9)$$

we arrive at the second degree equation:

$$a e^2 + r \cos f e + r - a = 0, \quad (10)$$

the solution of which is

$$e = \frac{-r \cos f \pm \sqrt{r^2 \cos^2 f - 4a(r - a)}}{2a} \quad (11)$$

yielding two solutions in this case

$$e_1 = 0.699418 \quad (12)$$

$$e_2 = 0.143526 \quad (13)$$

Additional work: using the expression 11, students must be able to investigate the conditions in which the solution is double, single, or does not exist.

PROBLEM 2

A comet moves around the Sun in an elliptical orbit. What is the orbital eccentricity for which the interval of time necessary to move from the periastron to the immediate extreme of the semi-latus rectum is a fraction, $1/m$, of the period?

At the extreme of the semi-latus rectum, we have

$$r = a(1 - e \cos E) = a(1 - e^2), \quad (14)$$

that is, $\cos E = e$.

Substituting this value in Kepler's equation, the result is:

$$E - \cos E \sin E = \frac{2\pi P}{P m}. \quad (15)$$

Finally, using $x = 2E$, the equation 15 is expressed as

$$x - \sin x = \frac{4\pi}{m} \quad (16)$$

Examples:

$$m = 4 \longrightarrow x = \pi \longrightarrow E = \frac{\pi}{2} \longrightarrow e = 0 \quad (17)$$

$$m = 22 \longrightarrow x \approx \frac{\pi}{2} \longrightarrow E \approx \frac{\pi}{4} \longrightarrow e \approx 0.707 \quad (18)$$

For $m = 8$, equation 16 converts into

$$\varphi(x) \equiv x - \sin x - \frac{\pi}{2} = 0. \quad (19)$$

The students in the classroom have to construct a Table:

e	E	x	$\varphi(x)$

and each student must calculate a sequence:

$$e \longrightarrow E \longrightarrow x \longrightarrow \varphi(x) \quad (20)$$

with a hand calculator.

Among all of the students, they can determine the value of the eccentricity in whose neighborhood the function $\varphi(x)$ changes sign and later continues to approximate the solution until the required precision is achieved.

The solution of 19 turns out to be close to the value, $e = 0.40397$.

PROBLEM 3

In a Keplerian movement, the velocity of the periastron (V_0) is “ m ” times the velocity at the extreme of the semi-latus rectum (V_1). What is the corresponding value of the eccentricity?

Using the expression,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (21)$$

that corresponds to the square of the velocity of the elliptical movement, or

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \quad (22)$$

that is the hyperbolic motion, we arrive at the equation,

$$e^2 - \frac{2}{k-1}e + 1 = 0 \quad (23)$$

$$(k = m^2) \quad (24)$$

Keeping the different values of k in mind, the equation 23 yields the following solutions:

$k \leq 1$, NO SOLUTION

$1 < k < 2$, There is one solution with the eccentricity between 0 and 1 (elliptic movement),
and another solution that is greater than 1 (hyperbolic movement).

$k = 2$, ONE SOLUTION ($e = 1$, parabolic movement)

$k > 2$, NO SOLUTION

PROBLEM 4

Is it possible that, in the elliptical Keplerian movement, the radial and transversal components of the velocity be equal at any moment?

The expressions of the radial and transversal components of the velocity vector are:

$$v_r = \frac{2ce}{p} \sin f, \quad (25)$$

$$v_t = \frac{2c}{p}(1 + e \cos f), \quad (26)$$

In order that they are equal, the following conditions must be met:

$$e \sin f = 1 + e \cos f, \quad (27)$$

that is

$$\sin f - \cos f = \frac{1}{e}, \quad (28)$$

or, elevating it to the square,

$$\sin 2f = 1 - \frac{1}{e^2}. \quad (29)$$

We can easily see that the minimal value of the eccentricity (e_0) must be $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$ so that the conditions of the problem are verified.

From expression 29, it follows that:

If $e = e_0$, one value of $f = 135^\circ$ exists.

If $e_0 < e < 1$, we have two values of f (see Figure 1).

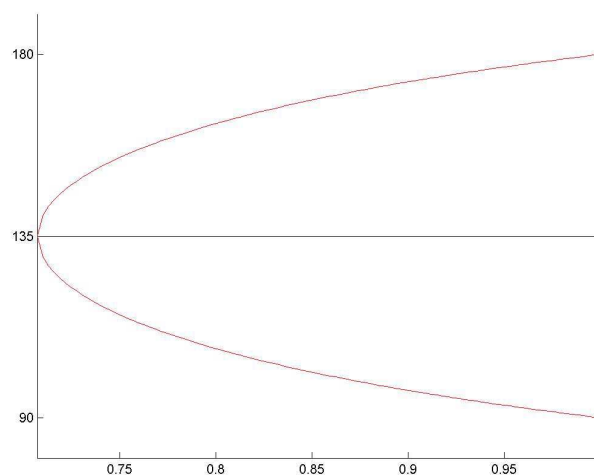


Figure 1: Representation of the function 29

For example,

$$\text{if } e = 0.8 \dots \dots \dots \begin{cases} f = 107^\circ 1 \\ f = 162^\circ 9 \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{and if } e \rightarrow 1 \dots \dots \dots \begin{cases} f = 90^\circ \\ f = 180^\circ \end{cases} \quad (31)$$

At the points 1 and 2 (Figure 2), we have

$$v_r = v_t \quad (32)$$

At the points 3 and 4,

$$v_r = -v_t \quad (33)$$

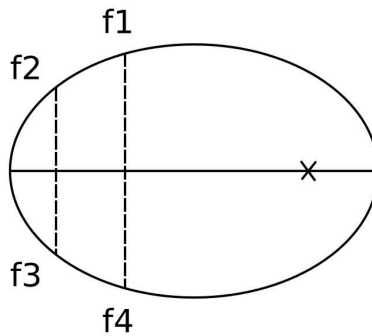


Figure 2: Points 1, 2, 3 and 4 in Problem 4

PROBLEM 5

Now, we are going to play with these 5 points on the ellipse

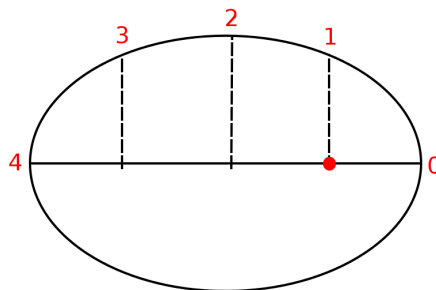


Figure 3: The five points considered in Problem 5

where,

- 0: periastron
- 1: semi-latus rectum
- 2: semiaxis minor
- 3: symmetrical position regarding 1
- 4: apoastron

The expressions of the velocity at these points are:

$$v_0^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e} \quad (34)$$

$$v_1^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e^2}{1-e^2} \quad (35)$$

$$v_2^2 = \frac{\mu}{a} \quad (36)$$

$$v_3^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1-e^2}{1+e^2} \quad (37)$$

$$v_4^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e} \quad (38)$$

$$(39)$$

We want to investigate what the orbital eccentricity must be in order to satisfy the following conditions:

$$a) \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow e^3 + e^2 + e - 1 = 0 \quad (40)$$

$$b) \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_3} \Rightarrow e^4 - 2e^3 - 2e^2 - 2e + 1 = 0 \quad (41)$$

$$c) \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_4} \Rightarrow e = 0 \text{ (No elliptic solutions)} \quad (42)$$

$$d) \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_2}{v_3} \Rightarrow e^3 + e^2 + e - 1 = 0 \quad (43)$$

$$e) \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_2}{v_4} \Rightarrow e = 0 \quad (44)$$

$$f) \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_3}{v_4} \Rightarrow \forall e, 0 < e < 1 \quad (45)$$

$$g) \frac{v_0}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} \Rightarrow e = 0 \quad (46)$$

$$h) \frac{v_0}{v_2} = \frac{v_2}{v_4} \Rightarrow \forall e, 0 < e < 1 \quad (47)$$

$$i) \frac{v_0}{v_2} = \frac{v_3}{v_4} \Rightarrow e = 0 \quad (48)$$

$$j) \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} \Rightarrow \forall e, 0 < e < 1 \quad (49)$$

$$k) \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_4} \Rightarrow e = 0 \quad (50)$$

$$l) \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_3}{v_4} \Rightarrow e^3 + e^2 + e - 1 = 0 \quad (51)$$

Using the expressions 34, in each case we obtain the equation or condition written on the right.

The corresponding results are included in the following summary:

*) The solution of the equation

$$e^3 + e^2 + e - 1 = 0 \quad (52)$$

is $e = 0.543689$, and the relation:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_3}{v_4} \quad (53)$$

is verified for this value.

**) The solution of the equation

$$e^4 - 2e^3 - 2e^2 - 2e + 1 = 0 \quad (54)$$

is $e = 0.346014$, and the relation:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_3} = \frac{v_3}{v_4} \quad (55)$$

is verified for this value.

***) We always have:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}; \quad \frac{v_0}{v_2} = \frac{v_2}{v_4}; \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} \quad (56)$$

****) In the elliptical movement, the following are never verified:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_4}; \quad \frac{v_0}{v_2} = \frac{v_2}{v_3}; \quad \frac{v_0}{v_2} = \frac{v_3}{v_4} \quad (57)$$

PROBLEM 6

Now, we will work with Time.

Is the relation:

$$\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \quad (58)$$

possible in an elliptic movement?

Using the Kepler equation at the points 0, 1, 2, and 3, we arrive at the equation:

$$F(x)(\pi - G(x) + H(x)) - (\pi - F(x) - H(x))^2 = 0, \quad (59)$$

with:

$$x = 2E, \quad e = \cos E \quad (0 \leq x < \pi) \quad (60)$$

$$F(x) = x - \sin x \quad (61)$$

$$G(x) = x + \sin x \quad (62)$$

$$H(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \quad (63)$$

The equation 59 has only one solution:

$$x = 1.692, \quad E = 0.846, \quad e = 0.663 \quad (64)$$

PROBLEM 7

We obtain a nice symmetry in the equation that resolves the following question:

In a Keplerian movement, the velocity is v_1 when the true anomaly is f_1 , and v_2 when f_2 . What is the value of the eccentricity?

Using the expression:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (65)$$

we arrive at:

$$\frac{v^2}{\mu} = \frac{e^2 + 2e \cos f + 1}{p} \quad (66)$$

which, written for the two epochs, t_1 , and t_2 , and dividing one by the other, results

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{e^2 + 2e \cos f_1 + 1}{e^2 + 2e \cos f_2 + 1} \quad (67)$$

and from there,

$$e^2 + 2e \frac{\cos f_2 v_1^2 - \cos f_1 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} + 1 = 0 \quad (68)$$

Application:

$$t_1 \longrightarrow f_1 = 30^\circ, \quad v_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \text{ u.d./u.t.} \quad (69)$$

$$t_2 \longrightarrow f_1 = 60^\circ, \quad v_2 = \sqrt{7} \text{ u.d./u.t.} \quad (70)$$

For these values, the equation 68 yields an elliptic orbit ($e = 0.5$) and another that is hyperbolic ($e = 2$).

Additional work:

Once again , the students can make conclusions regarding the number of possible solutions by studying equation 68.

