MONOGRAFÍAS
DE LA

ACADEMIA DE CIENCIAS

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

MATEMÁTICAS EN EL AÑO 2000

N.º 19

2001

Depósito legal: Z. 2.390 – 2001

Imprime:
Sdad. Coop. de Artes Gráficas
LIBRERÍA GENERAL
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

DOS DÍAS MATEMÁTICOS

Tabla de contenidos

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19**: 7–9, (2001).

Introdución

María Teresa Lozano[1]

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza

La celebración del año 2000 como *Año mundial de las Matemáticas*, así proclamado por la Unión Matemática Internacional, ha tenido su reflejo en muchos ámbitos de nuestra sociedad.

La Academia de Ciencias de Zaragoza no podía quedar al margen de esta celebración, y además de numerosas conferencias impartidas por sus académicos en distintos actos, ha brindado su apoyo institucional a un grupo de matemáticos de la Facultad de Ciencias y del Seminario Matemático "García de Galdeano", que han organizado una particular actividad: *Dos días Matemáticos.*

La idea surgió en un consejo del Departamento de Matemáticas a propuesta del profesor Pedro Miana, que puso todo su entusiasmo en la organización del evento. Se buscaba mostrar a los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, y por extensión a la comunidad universitaria, algunos de los rasgos de esta ciencia universal, que está involucrada en casi todas las actividades humanas.

El objetivo que nos propusimos fue mostrar que las matemáticas son útiles, bellas y divertidas.

El programa concreto de los actos realizados los dias 16 y 17 de noviembre de 2000 dentro de esta celebración fue el siguiente:

16 de noviembre de 2000: Día de la investigación y la enseñanza.

9,30 h Acto inaugural. Aula Magna de Ciencias.

Palabras del Decano de la Facultad de Ciencias y presentación de los actos programados.

Conferencia inaugural: *Del cálculo al análisis: el problema de la cuerda vibrante*, a cargo de Dr. Bienvenido Cuartero Ruiz, catedrático de la Universidad de Zaragoza.

11,00 h Tema de debate: *Invertir en investigación en matemáticas.* Sala de Grados de la Facultad de Ciencias.

[1]Académica Numeraria

Moderador: Dr. Mariano Gasca González, catedrático de la Universidad de Zaragoza.

Invitado: Dr. Santos González Jiménez, catedrático de la Universidad de Oviedo y coordinador del Area de Matemáticas y Física de la A.N.E.P.

11,00 h Cine matemático: *Cube.* Aula Magna de Ciencias

17,00 h Conferencia: *Anillos de Borromeo*, a cargo de Dr. José María Montesinos Amilibia, catedrático de la Universidad Complutense de Madrid. Sala de conferencias del Edificio de Matemáticas.

Inauguración de la escultura *Creación* de John Robinson, donada por su autor a la Universidad de Zaragoza.

18,30 h Mesa redonda: *Enseñanza de las matemáticas: del Bachillerato a la Universidad.* Aula Magna de Ciencias.

Moderador: Don Emilio Palacián Gil, profesor del I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

Invitados: Don Florencio Villarroya Burillo, profesor de enseñanza secundaria. Dr. Fernando Montaner Frutos, profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Doña Eva Cid Castro, profesora de la Escuela de Magisterio de la Universidad de Zaragoza. Don Luis Madoz Arbea, estudiante de la Licenciatura de Matemáticas.

17 de noviembre de 2000: Día de las salidas profesionales.

9,30 h Mesa redonda: *Salidas profesionales de las matemáticas.* Aula Magna de Ciencias.

Moderador: Dr. Antonio Elipe Sánchez, profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.

Invitados: Don Enrique López Mingueza, de EDS. Doña Beatriz Bernal Sierra, controladora aérea. Doña Belén Martín Peiró, de GMV. Doña Almudena Antuña López, profesora de enseñanza secundaria. Dr. Manuel Aguado Benedí, director de Universa.

12,00 h Conferencia: *Las matemáticas y la gestión financiera*, a cargo del Dr. José Luis Fernández Pérez, catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid y presidente del comité español del Año Mundial de las Matemáticas 2000.

17,00 h Cine matemático: π. Cine Club Cerbuma.

19,00 h Vídeos matemáticos. Sala de conferencias del Edificio de Matemáticas.

20,30 h Acto de clausura. Paraninfo de la Universidad de Zaragoza.

Conferencia: *Música y matemáticas* a cargo de Dr. José Garay de Pablo, catedrático de la Universidad de Zaragoza.

Concierto de la Orquesta Pentagruel de la Escuela Popular de Música de Zaragoza.

Durante estos dos días hubo conferencias magistralmente impartidas, mesas redondas, cine, exposiciones,.... Todo con una gran participación que compensó el esfuerzo del Comité organizador.

El acto de clausura, en el Paraninfo de la Universidad de Zaragoza, fue presidido por el Rector Dr. Felipe Pétriz; El Presidente de la Academia Dr. Horacio Marco; el Decano de la Facultad de Ciencias Dr. José Angel Villar; El Director del Seminario Matemático "García de Galdeano", Dr. Manuel Alfaro; y representantes del comité organizador (Dra. María Teresa Lozano y Don Pedro Miana). En este acto, el Dr. José Garay pronunció la original, amena e interesante conferencia *Música y matemáticas*, oportunamente ilustrada con fragmentos musicales por la Orquesta Pentagruel de la Escuela Popular de Música de Zaragoza.

A continuación, esta joven orquesta ofreció en concierto, junto a obras de los grandes autores Jozsef, Beethoven, Purcell, Vivaldi y Handel, el estreno mundial de una obra del profesor José Garay:

"Números y Logaritmos: Logaritmo de π. Número γ. Número π (fragmento)".

Los artículos en este volumen recogen algunas conferencias impartidas por académicos numerarios, y actividades realizadas dentro de *Dos días Matemáticos*. Nuestro agradecimiento a sus autores por su generosa colaboración.

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 11–18, (2001).

Sorpresas en Matemáticas[1]

José Garay[2]

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Si toda conferencia debe llevar implícito un mensaje, quiero que el de ésta sea: *Las Matemáticas no son aburridas.* Pues donde hay expectación hay interés.

Muchas veces dada la densidad de los programas que hemos de explicar a lo largo de un curso, los profesores tenemos que seguir el esquema tradicional: *Definición-Teorema-Demostración-Corolario.* Pero naturalmente somos conscientes de que sería más formativo para nuestros alumnos y al mismo tiempo nuestra clase sería más amena si pudiésemos reproducir los mismos pasos dados históricamente en la elaboración de las teorías matemáticas que tenemos que presentar. Cualquier teorema o fórmula que encontramos en nuestros libros no ha surgido de la noche a la mañana. Primeramente se planteó una cuestión cuyo origen puede ser muy diverso y generalmente tras varias tentativas y fracasos se llegó a la solución tal como nosotros la encontramos.

Pero como antes hemos indicado aunque sería muy formativo que el alumno conociese estas vicisitudes, el desarrollo de la clase siguiendo este camino, exigiría un tiempo del que no disponemos.

En esta conferencia pretendo simplemente exponer algunos hechos matemáticos que al menos para mí resultan sorprendentes. Y lo procuraré hacer con un lenguaje sencillo de forma que pueda ser leido por cualquier lector aunque su bagage matemático no sea muy grande.

Además de ejemplos alguna vez pondré comparaciones, esperando que el juicioso lector sepa distinguir entre una cosa y otra. Si digo por ejemplo que la derivada del seno es el coseno, me he limitado a citar un caso particular de una función derivable. Pero si digo que la relación entre la derivada y las primitivas de una función *(una función tiene varias primitivas pero una sola derivada)* recuerda la relación entre padres e hijos *(una persona puede tener varios hijos pero un solo padre)* estoy haciendo una comparación, pero en

[1]Conferencia pronunciada en el Centro de Estudios Altoaragón, en Huesca, el 26 de octubre de 2000.

[2]Académico Numerario

ningún momento estoy afirmando que las personas sean funciones y mucho menos que la operación matemática de integrar sea la misma que la de tener hijos.

El lector paciente que llegue al final de estas páginas entenderá el porqué me he entretenido en los comentarios anteriores que parecen obvios.

Sorpresas: He preparado seis, pero hay una inicial que me la llevé yo antes del verano y voy a comenzar con ella. La numero con el 0.

Sorpresa 0: Al principio del presente año fui invitado a otro ciclo de conferencias con motivo del año mundial de las Matemáticas, y se me indicó que no había prisa en presentar el título. Cuando antes del verano presenté al organizador del ciclo el título elegido me llevé la sorpresa de que este mismo título había sido ya propuesto por otro conferenciante más madrugador. El título era: *Sorpresas matemáticas.*

Acudí a escuchar a mi competidor y allí me llevé una nueva sorpresa al constatar que las sorpresas elegidas por él eran totalmente distintas de las que previamente yo ya había elegido, y que son las que hoy voy a presentar. Esto me afianzó en el mensaje del mayor interés de las Matemáticas ya que encierran muchas más sorpresas de las que yo pensaba.

Sorpresa 1: Se la dieron los griegos o más bien los *griegos pitagóricos.* El problema consistía en medir longitudes con una unidad y con sus submúltiplos. Si el segmento que queremos medir no contiene a la unidad un número exacto de veces procedemos con algún submúltiplo de la unidad. Así seguimos procediendo utilizando en cada nuevo paso submúltiplos más pequeños. La cuestión es si todos los segmentos pueden ser medidos tras un número finito de pasos, admitiendo la posibilidad de cambiar a nuestra conveniencia los submúltiplos de la unidad.

Este era un asunto de discusión entre los griegos. Los pitagóricos daban por hecho que sí se podía y según eso todos los segmentos serían *conmensurables*, o dicho de otra manera los únicos números necesarios serían los *fraccionarios* que hoy llamamos *racionales.*

Si las matemáticas fuesen experimentales, como lo son la mayor parte de las ciencias no matemáticas, y la única forma de deducción fuese la experimental, esta cuestión nunca se podría resolver. Ninguno podría convencer al otro de su afirmación. Pero una de las grandezas de las Matemáticas es que podemos afirmar hechos sin experimentarlos, solamente con nuestros razonamientos. Podemos asegurar que los ángulos de cualquier triángulo suman 180 grados sin medir absolutamente ninguno.

En el caso que nos ocupa este fue el camino que permitió resolver la cuestión. Y la respuesta fue antipitagórica. Hay segmentos *inconmensurables.* Es decir que si solo utilizamos los números racionales hay *segmentos no medibles.* Por ejemplo la diagonal de un cuadrado respecto del lado o la circunferencia respecto del radio. Esto trajo como consecuencia que tuvieron que ampliar los números. A los recién llegados se les llamó *irracionales*, apodo con el que aún son designados. Todos juntos forman los que llamamos *reales.*

Y a la desagradable *sorpresa* que se llevaron los pitagóricos de constatar que se habían equivocado, tuvieron que añadir la quizá mayor de ver que el instrumento matemático que sirvió para su demostración fue su propio *Teorema de Pitágoras.*

Sorpresa 2: Ya se ha visto antes que con los números reales se pueden medir todos los segmentos. Pero, con dichos números ¿se pueden medir todos los subconjuntos de la recta, sean o no sean segmentos? La sorpresa saltó muchos siglos más tarde, a principios de éste que ya va a terminar.

¿Qué ocurre si en lugar de un segmento queremos medir un conjunto formado por dos segmentos disjuntos? Pues parece que no hay problema, se miden los dos por separado y luego se suman las dos longitudes. Y si en lugar de dos son dos mil, pues se hace igual. Solo que la suma será un poco más larga. El asunto se complica un poco si nos piden que midamos el conjunto formado por todos los números racionales que hay en un cierto segmento. Quizá alguien piense *como cada número racional representa un punto y la longitud de un punto es cero, pues medir todos juntos equivale a sumar ceros y la suma de ceros es cero. Así que la longitud de todos los números racionales es cero.*

Pues quien piense así habrá acertado pero *por casualidad.* Porque con el mismo argumento todos los segmentos medirían cero ya que están formados por puntos.

Vemos pues que el asunto de medir subconjuntos de la recta no es nada baladí. Esto también se podría plantear en el plano con la cuestión de medir superficies. Aquí además podríamos pensar en una mayor complicación al encontrar figuras con fórmulas complicadas para calcular su área.

Y ¿dónde está aquí a sorpresa? os estaréis preguntando. Pues la sorpresa está en que se ha demostrado que existen subconjuntos, tanto en la recta, como en el plano o en el espacio tridimensional, que no se pueden medir. pero no porque sea muy difícil medirlos o nosotros no lo suficientemente hábiles, sino sencillamente porque *no tienen medida* o con palabras más técnicas porque *no son medibles.* Pero !cuidado con el lenguaje! En el lenguaje de la calle es igual decir que *Juan no tiene dinero* a decir que *Juan tiene cero pesetas.* En cambio en Matemáticas no es igual decir *no tener medida* que *medir cero.* Por eso es más precisa la segunda expresión: Existen conjuntos *no medibles.* Pensemos en lo que esto supondría llevado al terreno físico. Sería como decir que habría materia a la que no se le podría asociar la idea de masa.

Y la diferencia con la primera sorpresa está en que así como los griegos pudieron ampliar los números para dar medida a todos los segmentos, nosotros no encontramos nuevos números para dar medida a todos los subconjuntos de la recta.

Sorpresa 3: Ahora estamos en un hotel, todas cuyas habitaciones son individuales y están todas ocupadas. Llegan unos viajeros para alojarse y el dueño les dice: *No se preocupen, Sres. que aunque tengo el hotel completo, haré un reajuste con los huéspedes para que queden habitaciones libres y poder alojarles a todos Uds. Eso sí, tanto los anteriores clientes como Uds. tendrá su habitación individual.* Si algún hotelero nos dijese esto pensaríamos que está un poco chalado. Y claro, por grande que sea el hotel si están todas las habitaciones ocupadas ya puede hacer reajustes que si nos quiere alojar a nosotros tendrá que echar a gente del hotel, o hacer compartir alguna habitación por varios huéspedes.

Pero pensemos ahora que el hotel es tan grande que hay una habitación por cada número natural, y que estas habitaciones están todas ocupadas. Numeramos a estos primeros ocupantes con la letra A seguida del número de su habitación. Así que por ejemplo $A8$ es el huésped de la habitación número 8. En esto llegan nuevos viajeros, y no uno ni dos ni tres mil sino tantos como ya están dentro del hotel. A estos nuevos viajeros los etiquetamos con la B y el número correspondiente. Si a los huéspedes no les importase compartir su habitación con otra persona el arreglo sería inmediato. El viajero $B9$ entra en la habitación 9 y la comparte con $A9$, y así todos los demás. Pero claro esta solución no vale pues todos quieren estar solos en su habitación. ¿Qué puede hacer el hotelero? Pues tendrá que molestar un poco a los primeros huéspedes pero sí que tiene solución. Hace salir a todos de su habitación y les hace ocupar la del número doble correspondiente. Así $A7$ se va a la habitación 14 y los demás igual.

Ahora tiene libres todas las habitaciones impares y a los recién llegados les da la siguiente orden: Cada uno que multiplique su número por dos y al resultado réstele uno, y entre en la habitación correspondiente. De esta manera $B1$ entra en 1,$B2$ en 3, y así los siguientes.

Al final quedan todos alojados individualmente y el hotel vuelve a estar completo, pero disponible para recibir nuevos viajeros. Claro que si esto se repite varias veces tendrá que hacer un buen descuento para compensar por las molestias originadas.

Está claro que esta propiedad que podríamos llamar mágica de este hotel se debe a la ficción de haber supuesto que tenía infinitas habitaciones. Y alguien quizá esté pensando que en tratándose del infinito todo es posible, y que en ese hotel cabría cualquier conjunto de viajeros que llegue. Pues no. Ahora supongamos que los viajeros que acuden al hotel anterior son todos los puntos de un pequeño segmento de la recta. Pues en este caso aunque hubiesen encontrado el hotel enteramente vacío, por mucho que pensase el dueño no podría acomodar a estos viajeros en su hotel.

En cambio aunque el hotel fuese *tan pequeño* que solo tuviese tantas habitaciones como puntos hay en ese pequeño segmento, el hotelero podría alojar en su hotel a todos los puntos del espacio tridimensional.

Cuando en 1877 el gran matemático *Cantor* descubrió este hecho su sorpresa fue tan grande que exclamó en una carta dirigida al también matemático *Dedekind: !Lo veo pero no lo creo!*

Parece que siguiendo con la ficción, el mayor hotel que podríamos imaginar sería aquél tan grande como todo el Universo y donde cada habitación fuese tan pequeña que se redujese a un solo punto. Quizá pensemos que este hotel tendría capacidad para alojar a cualquier conjunto de viajeros que imaginemos. Pues no es así. Supongamos sencillamente que cada función real es un viajero. Pues este conjunto no cabría en ese hotel tan inmenso.

Sorpresa 4: Ahora hablemos de un comerciante. En su establecimiento entran muchos clientes y va guardando en su caja los correspondientes ingresos. De vez en cuando entra también algún acreedor y en este caso es él quien debe desembolsar la correspondiente cantidad.

Al final del día hace su balance y sabe que el resultado del mismo solo depende de los compradores y acreedores que han entrado sin influir su orden. Es lo que decimos que el orden de los sumandos no altera la suma.

Pero dejemos intervenir otra vez al infinito. Ahora cada número natural se convierte en un visitante del establecimiento, unos como compradores y otros como acreedores. Y ahora las cosas ya no son tan sencillas. Sí que puede suceder que ocurra como en el caso anterior, es decir que el balance final sea el mismo sin importar el orden en que han acudido unos u otros. Pero también puede darse el caso, y esto solo depende de las cantidades objeto de las entradas y salidas, que el balance final del día sea muy distinto según el orden en que se han ido sucediendo las operaciones. Y cuando decimos muy distinto lo decimos en sentido total. Con más precisión se demuestra matemáticamente que si el comerciante piensa de antemano en un determinado ingreso, por grande que le parezca, existe un orden de los visitantes tal que el balance final coincidirá exactamente con ese ingreso. Y aunque es muy probable que no lo haga también ocurre igual con cualquier cantidad negativa. Incluso puede elegir el orden para que el balance final sea infinito tanto en ingreso como en salida.

Al igual que en la sorpresa anterior hay que sacar de aquí la moraleja de que las propiedades que tan sólidamente manejamos con las cosas finitas se tambalean cuando pasamos a movernos con las infinitas.

Sorpresa 5: Ahora estamos en un teatro viendo la actuación de un ilusionista. Vemos que tiene una bolsa en la que va introduciendo papeles, pañuelos, monedas y muchas más cosas. Ahora lo revuelve todo y se dispone a abrir la bolsa. Cuando la abre nos quedamos todos baquiabiertos pues por allí no sale nada de lo que antes ha metido. Lo que sale revoloteando es una hermosa paloma. Parece que ha hecho el milagro de transformar los primeros objetos en esa ave.

Y ¿qué tiene que ver esto con las Matemáticas?, estaréis pensando. No hemos visto a ningún profesor en clase haciendo algo parecido.

Pues hacia 1800 el ilusionista-matemático alemán Leibniz *metió en una bolsa* todos los números impares, luego les dio la vuelta tomando sus inversos, y a continuación fue sumando y restando en forma alternativa y para terminar, el resultado lo multiplicó por cuatro. Entonces *abrió la bolsa* y ¿sabéis lo que salió? No fue una paloma pero por allí salió un número que nadie se lo podía esperar, porque parece que no tenía nada que ver con todos los anteriores. *Salió el número π.* Este popular número del que todos saben que es el cociente que aparece al dividir una circunferencia por su diámetro resulta que también puede ser definido a partir de los números impares por el procedimiento anterior.

Pero no es éste el único *juego ilusionista* para obtener el número π o alguna de sus potencias. Citaré solamente el caso de otro ilustre matemático, *Euler*, quien siguiendo con el mismo símil, toma todos los números naturales, los eleva al cuadrado, les da la vuelta, suma todo y al final multiplica el resultado por seis. Y ¿sabéis lo que sale esta vez? Pues no el número π, sino su cuadrado.

La moraleja que quiero sacar de aquí es que muchas veces las cosas tienen muchas caras, y concretamente en matemáticas hay conceptos que admiten varias definiciones aparentemente distintas. Y como suelo decir yo a mis alumnos, ese hecho que puede parecerles a primera vista negativo porque son más definiciones para estudiar al final es positivo pues supone disponer de más herramientas matemáticas para razonar y resolver cuestiones.

Sorpresa 6: En un viaje polar (por elegir un lugar neutral) se encuentran cinco excursionistas, cada uno procedente de los cinco continentes de la Tierra. Nunca se habían visto de antemano, pero en cuanto comienzan a hablar resulta que descubren unas relaciones mutuas de parentesco que hace formar a los cinco una auténtica familia. *!Qué sorprendente!* diría cualquiera que presenciase el hecho. Pues este hecho tan sorprendente que no creo haya ocurrido nunca, sí que ha ocurrido en el mundo matemático. Nuestros cinco personajes son los números *0,1,i,e,* y π. Cada uno ha entrado en el mundo matemático procedente de una región totalmente distinta de la de los otros. El número 0 es el símbolo de la no existencia, el 1 está en el polo opuesto, simboliza la existencia de algo. El i es un número *tan raro*, que se le llama *imaginario.* Se introduce para que los números negativos también tengan raiz cuadrada. Como base de los logaritmos neperianos, el número e lo podemos asociar con fenómenos de crecimiento y finalmente ya hemos recordado antes el origen geométrico del número π.

Pues bien ¿no sería una gran sorpresa la existencia de alguna fórmula que reuniese a estos cinco números?

Pues la fórmula existe. Es llamada de *Euler* y es la siguiente

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta fórmula viene a ser un símbolo de la armonía interna que reina en el mundo matemático.

También quiero llamar la atención con relación a esta fórmula de que una de las cuestiones que más interesan en Matemáticas es el buscar relaciones entre teorías y conceptos aparentemente independientes y establecer superestructuras. Esto simplifica los esfuerzos. Un ejemplo importante de ello es la estructura de *grupo.*

A modo de *epílogo:*

Última sorpresa: He prometido al paciente lector que llegase en su lectura hasta este lugar, le daría una explicación razonada de mi insistencia en que distinguiese los diversos términos en una comparación, y lo ilustré con el ejemplo de las funciones derivables. Si ha leido todo lo que precede habrá observado que en algunas de las sorpresas he acudido a este recurso de las comparaciones para ilustrar mejor lo que quería decir y espero que no habrá incurrido en el error de confundir unas cosas con otras.

Pues bien unos días después de impartir esta conferencia, me llevé la sorpresa de ver que se hacía eco de ella la prensa local, pero que se ve que el periodista encargado de hacer la crónica no había reparado en las diferencias antes aludidas y decía cosas como las siguientes:

Ha dicho el conferenciante que una vez un ilusionista metió objetos en una bolsa. Y cuando abrió la bolsa extrajo una paloma. Y como resultado de unas manipulaciones matemáticas con los números impares esa paloma es el número pi.

Cuando lo leí me dije: *La gente que me vea dirá: Este es el chalado que asegura saber transformar pájaros en números.*

Pero es que el periodista añadía esta otra información:

Ha dicho el conferenciante que un comerciante podrá aumentar sus pérdidas o ganancias según el orden en que venda los productos de su establecimiento.

Como esta segunda frase aparecía con letras más grandes y además al lado incluía una foto mía, tuve problemas con algún pastelero que se empeñaba en que le explicase si para ganar más, debía vender antes los pasteles de nata o los de crema.

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 19–28, (2001).

El Análisis Matemático como representación de la Naturaleza[1]

José Garay[2]

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Amueblar un piso. Hemos comprado un piso y queremos amueblarlo con nuestros muebles del piso viejo. Como no sabemos la forma de distribuirlos para que encajen bien, podemos empezar a hacer pruebas metiendo los muebles de una cierta manera y sacándolos si observamos que esa no es la solución. Reiterando estas operaciones las veces necesarias llegaremos a encontrar el acomodo más idóneo para que nuestros muebles ocupen el lugar preciso.

Naturalmente este método nos resultaría muy trabajoso y hay otra forma más inteligente y cómoda de llegar al mismo resultado. Podemos dibujar a escala el piso y los diferentes muebles y ahora trabajar con estas representaciones colocando nuestros enseres a nuestro capricho en las diversas estancias hasta encontrar la distribución que más nos guste. Luego procederíamos a situar los auténticos muebles según la solución que hubiésemos elegido.

Lo que habremos hecho de esta manera es representar una realidad formada por el piso y los muebles por un modelo sobre un papel y luego actuar con el modelo, sabiendo que los resultados que se tengan son luego válidos en el mundo real al cual representa. Podemos decir que nuestro dibujo es una representación de una realidad.

Algo parecido ocurre cuando utilizamos el plano de una ciudad o un mapa de carreteras.

Predicción de eclipses. El ejemplo anterior es muy elemental y cualquiera, sin más herramientas que un papel, lápiz, regla y cinta para medir, será capaz de utilizarlo. Pero ahora imaginemos que tratamos de adivinar cualquier efeméride celeste, desde la conjunción de dos planetas hasta un eclipse solar. Ahora no podemos utilizar el primer método descrito arriba que consistiría en mover a nuestro antojo los diversos astros para exper-

[1]Conferencia pronunciada en el Centro Asociado de la UNED, en Barbastro, el 28 de enero de 2000.

[2]Académico Numerario

imentar, y sin embargo sabemos que los astrónomos son capaces de adivinar con mucha antelación dichos acontecimientos siderales.

Lo que ocurre es que sí que podemos utilizar otro tipo de representación del fenómeno, aunque ahora esto ya encierra una mayor dificultad.

Si conocemos las leyes fundamentales que rigen el movimiento de los astros, podemos representar dichos movimientos mediante las fórmulas correspondientes y de esta manera reproducir con nuestros cálculos los fenómenos que están ocurriendo a enormes distancias y adivinar así cuándo y cómo van a suceder ciertos hechos.

Necesidad de las matemáticas. Como puede comprender el lector, si el primer ejemplo estaba al alcance de cualquiera con unas nociones muy elementales de dibujo, en este segundo ejemplo solamente se logrará tener éxito, con unos profundos conocimientos matemáticos que nos permitan en primer lugar expresar las leyes naturales mediante relaciones matemáticas, y luego saber hacer los cálculos necesarios para deducir los resultados que nos interesan.

Si en el primer ejemplo, el dibujo representaba al piso y los muebles, en este segundo los fenómenos celestes los hemos representado mediante fórmulas matemáticas.

Es éste el sentido que queremos dar al título de esta conferencia. Las matemáticas representan la Naturaleza y esto nos permite conocer el comportamiento de la misma mediante la adecuada utilización de los conceptos matemáticos.

Historia de las matemáticas. El hombre ya se percató hace mucho tiempo de la utilidad de lo que hoy llamamos matemáticas, y las fue creando a medida que veía su necesidad. De esta forma se podría reconstruir la *historia de las matemáticas*, siguiendo la historia de las necesidades de la Humanidad. Pero como luego veremos, así solamente se haría una parte muy pequeña de esta historia.

Nos detendremos solamente en los dos conceptos más elementales del Análisis Matemático, los *números* y las *funciones*.

Números. Una de las primeras necesidades que se presenta al hombre es la de *contar*, y aquí ya aparecen los *números naturales*, que forman las piezas más simples que manejamos en matemáticas. No voy a hablar de los diversos sistemas que ha tenido el hombre para representar estos números, solo haré una pequeña mención al detalle del *número cero*. En principio podía parecer inútil su introducción, ya que quien no tiene nada que contar no necesita de ningún número. De hecho los romanos no lo contemplan en su sistema de numeración, y esto ha sido uno de los motivos de la existencia de la polémica del cambio de milenio.

Luego van apareciendo las operaciones de *sumar* y *multiplicar* y se introducen los *números enteros negativos*, que nos permiten hablar también de la *resta* con toda generalidad. Pero donde va a haber un salto cualitativamente grande es con la aparición de los *números fraccionarios o racionales* como hoy día los llamamos.

Aparecen con el problema de medir magnitudes cuando se elige una unidad. En el caso más simple de medir longitudes sobre una recta, si la unidad elegida no cabe un número exacto de veces se procede a subdividirla y a medir ahora con las subunidades. El proceso es repetitivo y surge la gran cuestión. ¿Se llegará siempre a un final o puede haber casos en los cuales el proceso es indefinido?

Es la primera gran polémica en la historia de las matemáticas. Esta vez a cargo de los griegos. Equivale a preguntarse: *¿Existen magnitudes inconmensurables?* La escuela pitagórica da respuesta negativa, pero el hecho es que sí que existen y precisamente esto se prueba fácilmente utilizando el *teorema de Pitágoras.* Efectivamente, de dicho teorema se deduce que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no es conmensurable en el sentido anterior, o en términos modernos no es un número racional. Así aparecieron los *números irracionales*, y con ellos los *reales.* Todos ellos pueden ser colocados en una recta. El *Análisis* (todavía *Aritmética*) se identifica con la *Geometría.* !Pero también esto es *una representación*! Como consecuencia de este descubrimiento *Eudoxio* (408-355), sustituye la aritmética pitagórica conmensurable por la nueva inconmensurable.

Funciones. Pero hay que dar un paso más. Con los números solo representamos la Naturaleza *estática*, y la Naturaleza es *dinámica* y las magnitudes varían dependiendo unas de otras. Aparecen las *funciones*, objeto fundamental del Análisis Matemático.

Aquí hay una bifurcación entre lo natural y lo artificial de la enseñanza. Las funciones que hay en la Naturaleza suelen ser de *varias variables*, pero en la enseñanza se comienza con las de *una sola variable.*

Hay funciones *académicas* y funciones *naturales.* No siempre las naturales son las más sencillas desde el punto de vista de la enseñanza. Por ejemplo las funciones trigonométricas *seno* y *coseno* están muy presentes en la Naturaleza. Están asociadas a todos los fenómenos vibratorios y su estudio tiene gran interés pensando en las técnicas modernas. Pero en la enseñanza antes se estudian los *polinomios* y otras.

Las funciones más sencillas son las *lineales* y los fenómenos correspondientes son los que siguen la popular *regla de tres.* Pero no todo es lineal. Por ejemplo cuando un cuerpo cae, el espacio que recorre no es directamente proporcional al tiempo de caída.

Propiedades de las funciones. Se estudian especialmente las que están vinculadas a propiedades importantes de los fenómenos que representan.

Las tres más estudiadas son la *continuidad, derivabilidad* e *integrabilidad.*

La continuidad refleja la propiedad de aquellos fenómenos en los cuales *causas pequeñas* producen *efectos pequeños.*

La derivabilidad exige algo más que la continuidad. Si en una tabla de dos columnas registramos los incrementos de las causas y los correspondientes efectos y el fenómeno es continuo ya hemos dicho que cuando aquéllos sean pequeños éstos también lo son, pero podría ocurrir que no haya correlación entre ambas tablas. Pues bien, cuando estas dos listas de incrementos tienden a ser proporcionales decimos que la función que representa el fenómeno es *derivable.*

Quien mirase los hechos *a simple vista* no distinguiría la diferencia entre ser continua y ser derivable. Quien lo observase con *una lupa* lo podría distinguir. Si luego utilizásemos un *microscopio* aun podríamos afinar más las relaciones y más aún con instrumentos más potentes. Y es que hay muchos grados de derivabilidad, aunque habitualmente nos detenemos en los dos primeros.

Un fenómeno de la Naturaleza en el que es fácil identificar estas dos primeras derivadas es el del movimiento. Cuando expresamos el espacio recorrido en función del tiempo, resulta que la primera y segunda derivada de la función es lo que llamamos habitualmente *velocidad* y *aceleración* del móvil. Pero esto mismo puede decirse de cualquier magnitud. Y siempre puede haber alguna derivada que decrezca. Los políticos utilizan esto muy bien, cuando dicen frases como las siguientes:

El paro SI que ha aumentado, pero menos que en el mismo período que con el gobierno anterior. Equivale a decir que la primera derivada ha sido menor.

Otras veces dicen: *El paro SI que ha aumentado, incluso más que durante el mismo período del gobierno anterior, pero a mediados del año ha habido una inflexión en su crecimiento, y ha crecido más despacio que con el gobierno anterior.* Ahora están afirmando que la segunda derivada ha sido menor,

De esta forma jugando con las sucesivas derivadas sería fácil para un gobierno encontrar una derivada que les favorezca, y lanzar el correspondiente mensaje. Otra cosa sería que los ciudadanos entendiesen este lenguaje.

La *integración* de una función nos permite calcular la totalidad de una magnitud a lo largo del tiempo o del espacio y que se distribuye en forma no uniforme.

Pasamos ahora a comentar algunas peculiaridades de las Matemáticas.

Idealización. Entendida en dos sentidos.

a) Las matemáticas van más allá de la primera necesidad. Esto es intrínseco a la naturaleza humana. Lo mismo pasa en otros aspectos, arte, atletismo, conquista del espacio, etc.

Se empieza con lo necesario y luego uno se olvida de ello y se sumerge en otras cuestiones alejadas. En el caso del piso es como si preparamos muchos más pisos y muebles de los primeramente necesarios.

Por ejemplo con los números. ¿Cuántos son necesarios? Ciertamente hay números tan enormes que nunca los vamos a utilizar. Sin embargo estudiamos los infinitos números naturales, y curiosamente esta aparente complicación facilita el estudio de sus propiedades. Por ejemplo en este caso de los números, al tomar todos podemos decir que la suma y el producto son *operaciones internas*.

b) Las matemáticas *idealizan la Naturaleza*. Por ejemplo cuando estudiamos una corriente eléctrica utilizamos todos los números reales para medir su intensidad, pensando que puede variar en forma continua, y de hecho derivamos la función correspondiente. Pero si tenemos en cuenta que la corriente está formada por electrones vemos que en realidad se trata de cantidades discretas y que la función correspondiente no es continua, y tampoco derivable. Lo que ocurre es que dado el gran número de electrones que integran la corriente aproximamos un fenómeno real que es discontinuo por un fenómeno ideal dado por una función continua e incluso derivable. La *separación* de lo ideal con lo real se aprecia en los casos extremos. Así ocurre con el comportamiento de un condensador cargado. Si unimos sus bornes y hacemos el cálculo teórico resultaría que la corriente de descarga nunca sería nula, pero sabemos que de hecho esto no es así.

El edificio de las Matemáticas. Nunca se termina. Y esto por dos motivos.

Continuamente surgen nuevas necesidades que requieran tratamiento matemático. Esto mantiene una continua polémica sobre lo que se debe entender por matemáticas. Hoy en día hay muchos desarrollos de la mente humana sobre los cuales no hay un acuerdo general sobre si deben ser considerados como parte de las matemáticas.

Otro motivo es el apuntado antes. La tendencia a la idealización inherente al hombre. Cada cuestión resuelta abre otras nuevas. A veces se habla de *Matemáticas puras y aplicadas.* ¿Pero cuándo se puede decir que algo no es útil? Una teoría matemática es como si un billete de Lotería nunca se pudiese tirar porque siguiese siendo válido en todos los sorteos siguientes.

Para ilustrar esta idea citaremos dos ejemplos.

Las cónicas: Para los griegos la circunferencia era suficiente, era la figura perfecta. Encerraba el número pi. Pero *Menechmo* se entretiene en cortar secciones en un cono y así encuentra que además de la circunferencia aparecen otras curvas que más tarde *Apolonio* llamó elipse, parábola o hipérbola, y en general cónicas, y cuyo estudio apareció entonces como un asunto caprichoso y no necesario. Muchos siglos más tarde se encontró que aquellos estudios eran muy útiles al descubrir que las órbitas de los astros son en general de forma cónica.

Geometrías no euclídeas: *Euclides* enuncia como postulado la existencia de *una sola* *paralela* a una recta por un punto exterior.

Desde entonces una legión de matemáticos ha tratado inútilmente de demostrar que esta propiedad era consecuencia de otras más elementales. El empeño termina cuando se prueba que esto no se puede probar y que la propiedad de la paralela es realmente un axioma, y que en consecuencia si lo suprimimos o cambiamos pueden aparecer nuevas geometrías que se llamarán con toda lógica *geometrías no euclídeas*. En principio su estudio, por otra parte nada sencillo, se presenta como una cuestión de capricho, ya que el espacio en el cual estamos parece que es euclídeo. Pero cuando más tarde *Einstein* en su *teoría de la Relatividad* postula la existencia de espacios no euclídeos, lo que durante el siglo XIX era matemática pura o idealista se convierte en el siguiente siglo en matemática práctica y realista.

Los constructores. Son y han sido miles. Se sigue construyendo. Unos ponen *vigas fundamentales.* Otros *ladrillos.* Y cualquiera que posea un mínimo bagaje de conocimientos puede entrar a trabajar en este gran Edificio, siendo ésta por otra parte una de las principales obligaciones de todo profesor universitario. De hecho para ser admitido a impartir enseñanza en este nivel el candidato tiene que presentar previamente algunos de estos *ladrillos* en forma de artículos de investigación publicados en alguna revista.

Los matemáticos son seres humanos. A fuerza de ver sus nombres en los libros y en los enunciados de los teoremas y fórmulas, podemos caer a veces en la tentación de pensar que los grandes matemáticos que han construído y siguen construyendo este gran edificio de las matemáticas son o han sido semidioses, unos seres no pertenecientes a nuestra raza humana. Algo parecido nos puede ocurrir cuando oimos una gran sinfonía respecto de su creador o admiramos una obra de arte respecto del artista que la hizo.

Para que vea el lector que al menos los matemáticos tienen y han tenido nuestra misma condición humana incluímos los siguientes comentarios.

Algún chantaje: Hay bastantes nombres cambiados en algunos resultados, pero en general es consecuencia de errores históricos y no tienen origen malévolo. Pero sí que ha habido un caso que hoy día diríamos que es de Juzgado de guardia. Recordamos *la regla de L'Hospital*, que utilizamos para calcular algunos límites o para ser más precisos *la regla del Marqués de L'Hospital.* Pues bien, esta regla aparece enunciada y demostrada en un libro de *Análisis Infinitesimal* que escribió el tal Marqués (1661-1704). En 1698, *Jean Bernoulli* le escribe a *Leibniz* una carta en la que se queja de que el Marqués le ha plagiado ese y otros resultados en su libro pero al mismo tiempo le pide que no cuente nada a nadie. Pero al morir el Marqués las quejas de *Jean Bernoulli* ya son públicas como en una carta que escribe a *Taylor.* Pero dada la buena fama que tenía por entonces *L'Hospital* todos dan la razón a éste y la regla se siguió llamando como hasta ahora regla de *L'Hospital.*

Sin embargo ya en este siglo se han descubierto unas cartas entre *Bernoulli* y el Marqués, en las cuales *L'Hospital* se comprometía a pagarle 300 libras anuales a cambio de que *Bernoulli* le cediese algunos resultados matemáticos como propios.

Polémicas. Parecería que en este terreno, dada la objetividad de la materia de estudio no debería haberlas.

Antes ya hemos indicado que suele haber una polémica constante sobre si las nuevas ideas que van surgiendo son matemáticas o no.

Pero también se han producido a veces sobre el propio contenido de lo ya admitido como matemáticas. Citamos dos ejemplos.

Cantor, fundador de la actual teoría de conjuntos, tuvo que soportar una fuerte oposición por parte de muchos matemáticos capitaneados por *Kronecker*, antes de que su genial teoría fuese universalmente aceptada. Esto le costó padecer una enfermedad mental.

Sobre la existencia de *logaritmos de los números complejos*, cuestión que hoy vemos con tanta claridad, hubo una fuerte polémica entre *Leibniz* (negaba la existencia de logaritmos de los números negativos), *Jean Bernoulli, D'Alembert* (ambos afirmaban que los números negativos tienen logaritmos reales), y *Euler*, quien en 1749, establece las cosas tal como hoy las conocemos.

Errores. Los ha habido, y no está mal que los profesores no lo olvidemos cuando calificamos a nuestros alumnos.

Ya han aparecido algunos en los párrafos anteriores. Pero citaremos solamente uno por el gran peso de la persona que lo sostenía.

Agustín Luis Cauchy (1789-1857) es una de las figuras más relevantes de todas las matemáticas. Creó toda la teoría de variable compleja tal como ahora mismo la estudiamos y muchas más cosas. Pero sostuvo durante la mayor parte de su vida la idea errónea de que una función continua en un intervalo debía ser derivable en casi todos sus puntos. Y eso que *Bolzano* ya en en 1834 había presentado una función continua y no derivable en ningún punto. Pero, como ha dicho algún historiador de las matemáticas, haciendo alusión a su carácter sacerdotal, *Bolzano* predicaba en el desierto.

Dificultades. El trabajo matemático es fruto casi siempre de un gran esfuerzo, y muchas veces exige invertir mucho tiempo en su realización. Además, y esto es cada vez más frecuente, es fruto de un trabajo en equipo. Y a veces se queda uno con el sinsabor de no haber llegado donde se pretendía y haber dejado una cuestión sin resolver. Esto no es como construir un edificio de los de verdad. Si uno cuenta con el material y la mano de obra necesaria puede fijar la fecha de terminación.

Citamos solamente como ejemplo ilustrativo de lo que estamos diciendo el caso del *teorema fundamental del algebra*, según el cual todos los polinomios no constantes se anulan al menos en un punto del plano complejo.

En 1629, *Girard* formula la cuestión de la descomposición de un polinomio en factores lineales o cuadráticos, cuestión que con la introducción de los números complejos equivale a preguntarse por la existencia de raíces de cualquier ecuación polinómica de grado mayor o igual a uno.

Euler creyó haber resuelto el problema pero su demostración no es rigurosa y además se limitaba a considerar coeficientes reales.

Más tarde, en 1746, *D'Alembert* publica una demostración ya con coeficientes complejos, pero también resulta incompleta.

Luego *Gauss*, llamado el *Príncipe de las Matemátics* en su tesis doctoral, presenta una demostración de carácter geométrico que es correcta pero en ella se limita a considerar sólo coeficientes reales.

Finalmente tras varios intentos, el propio *Gauss*, presenta la que puede ser considerada como la primera demostración general correcta y así queda solucionado el problema que más de dos siglos antes había propuesto *Girard.*

Sorpresas. Aparecen en el proceso de idealización. La fuente de mayores sorpresas radica en la introducción del infinito.

Ya hemos comentado en párrafos anteriores las sorpresas que supusieron en su día el constatar la existencia de números no racionales y de funciones continuas no derivables.

Citaremos sólo otra gran sorpresa que supuso más tarde otro nuevo hallazgo.

Si pedimos al lector que mida la longitud de un segmento sobre una recta no tiene más que coger una cinta métrica y proceder a la medición. Esto lo hacen continuamente muchos carpinteros, sastres y otros profesionales y no necesitan especiales conocimientos matemáticos para ello. Si en lugar de un solo segmento nos preguntan por la longitud de un conjunto formado por la unión disjunta de varios segmentos, el problema sigue siendo igualmente sencillo. Medimos cada segmento por separado y luego efectuamos una suma. Si a continuación el número de segmentos es infinito, ya la solución consiste en sumar una serie, y esto ya supone tener algún conocimiento matemático más específico. Se nos puede complicar el problema presentando conjuntos cada vez más sofisticados. Entonces podríamos pensar que a todos los subconjuntos de la recta se les puede atribuir una longitud, aunque quizá nosotros no seamos capaces de calcularla, cuando sean de estructura demasiado complicada. Pues no es así. En la teoría de la medida se demuestra que existen conjuntos a los que no se les puede asociar ninguna longitud o medida porque en caso de hacerlo nos llevaría a la contradicción de que el cero y el uno serían iguales.

Es decir *¡existen conjuntos no medibles!*

Lenguaje matemático. Sirve para precisar mejor las ideas y evitar ambigedades. La falta del mismo fue a veces la causa de estériles discusiones y malos entendimientos. Es de contrastar la forma de los antiguos libros, en los que las definiciones y muchas fórmulas se escribían *en prosa* y los actuales, en los que abundan los símbolos que precisan el significado de cada afirmación.

Uno de los matemáticos a quienes más debemos en este sentido es *Peano* (1858-1932), que fue ilustre profesor en la Universidad de Turín. Además de trabajar en cuestiones matemáticas se preocupó de introducir los símbolos a los que ya estamos habituados, con la sana intención de presentar las cosas con más sencillez. Pero a sus alumnos les pareció tan complicada esta innovación que lograron expulsarlo de la Universidad. Luego se dedicó a cuestiones linguísticas y trató de crear un idioma universal, que llamó *Interlingua.*

Hemos de tener cuidado con los términos matemáticos. Hay muchas palabras que se usan simultáneamente en la calle y dentro de las matemáticas, y no siempre la relación entre ellas es la misma. Por ejemplo una puerta siempre está o *abierta* o *cerrada* y no puede estar simultáneamente *abierta y cerrada.* En cambio en matemáticas hay *intervalos abiertos no cerrados, cerrados no abiertos, ni abiertos ni cerrados y simultáneamente abiertos y cerrados.* En nuestro lenguaje de la calle el prefijo *hiper* supone que hablamos de algo de la misma naturaleza pero más grande. Así un hipermercado es un mercado pero mucho mayor. En cambio en el mundo matemático encontramos que todas las *series geométricas* son *hipergeométricas* pero no a la inversa.

Y no conviene olvidar los pares de palabras históricas *racional-irracional, real-imaginario*, cuyos significados literales no tienen nada que ver con sus significados dentro del mundo matemático.

Nuevas técnicas: Solo mencionaremos la utilización de los *ordenadores* para *comprobar* y *adelantar* resultados. Pero no sustituyen a las demostraciones a menos que se tratase de un numero finito de casos.

Transmisión de las matemáticas. Terminaremos haciendo un breve comentario sobre el papel de los profesores de matemáticas. Ya hemos dicho anteriormente que muchas de las teorías que hemos de explicar a nuestos alumnos han sido fruto de largos y prolongados esfuerzos de los que nos han precedido. Y no es justo que despachemos en cinco minutos un teorema que pudo costar siglos, sin hacer ni una sola mención a la génesis del tal resultado. Es lo mismo que cuando disfrutamos escuchando durante media hora una bella sinfonía sin dedicar ni un solo recuerdo al compositor que dejó parte de su vida en su creación.

Además el comentar a nuestros alumnos el origen y motivación de las diversas partes de las matemáticas sirve también para su mejor comprensión.

Pero también tenemos que advertir a nuestros estudiantes que por más amenidad e interés que nosotros podamos poner en nuestras clases, es imprescindible que ellos pongan su trabajo y esfuerzo si quieren avanzar en su aprendizaje. Y para ello no estará de más que les recordemos aquella anécdota que le ocurrió a *Alejandro Magno* cuando se acercó a *Menechmo* (le hemos citado antes al hablar de las cónicas). El gran *Alejandro* le dijo que quería aprender Geometría, pero que dadas sus múltiples ocupaciones no podía dedicar tanto tiempo como los otros discípulos en el aprendizaje y que en consecuencia pensase alguna forma más rápida especial para él. Entonces *Menechmo* le respondió con gran sabiduría: *Señor, para viajar por vuestros reinos hay caminos plebeyos y caminos reales* (hoy le hubiese dicho hay carreteras de segunda y autopistas), *pero para aprender Geometría solo hay un camino común para todos.*

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 29–36, (2001).

El infinito en las Matemáticas[1]

José Garay[2]

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Me corresponde cerrar este ciclo de conferencias que se han ido desarrollando en este Salón de Ibercaja con motivo del año mundial de las Matemáticas.

Y cerrar algo siempre supone un cierto honor. Es algo así como decir la última palabra. El inconveniente está en que como aquí ocurre, ya casi no queda una última palabra para decir. Afortunadamente ha habido a lo largo del año tantas conferencias, artículos de prensa, jornadas matemáticas y otras efemérides que ya casi se ha dicho y escrito todo lo que se puede decir y escribir sobre las Matemáticas.

Así que para esta intervención he ido lo más lejos posible, tratando de escaparme de todo lo expuesto hasta ahora. He huido hacia el *infinito*.

De todas las maneras quiero también decir que no supone ninguna pérdida de tiempo el escuchar un mismo tema a diversas personas ya que casi siempre se puede encontrar algún matiz distinto que nos hará asimilar con más riqueza el contenido del concepto.

Una forma de acercarse a un concepto puede ser pensar en el concepto contrario.

Decimos muchas veces que solo apreciamos lo que es estar sanos cuando caemos enfermos, y que no nos damos cuenta del gran placer que supone el poder andar y desplazarnos de un sitio a otro hasta que por algún percance tenemos que pasar una temporada en una silla de ruedas. Y para qué poner más ejemplos.

El concepto contrario al infinito es ser finito. Y sabemos que lo finito es aquello que por grande que sea se puede terminar. No hace falta ir muy lejos para encontrar ejemplos. Los tenemos dentro de nosotros mismos. Por citar un solo aspecto todos reconocemos que nuestra fuerza es finita. Podemos levantar pequeños objetos pero no podríamos levantar un edificio. Pero si fuésemos capaces de levantar cualquier objeto por pesado que fuese e incluso fuésemos capaces de mover los astros del firmamento con nuestro empuje, estaríamos pensando que nuestra fuerza es ilimitada, o dicho en otros términos que es

[1] Conferencia pronunciada en el Salón de Ibercaja, en Zaragoza, con motivo del año mundial de las Matemáticas.

[2] Académico Numerario

infinita.

Pero aquí no vamos a hablar del infinito desde un punto de vista demasiado general, sino que vamos a concretar hablando del infinito desde el punto de vista matemático.

En matemáticas hay varios significados del concepto de infinito.

Aquí voy a referirme solamente a dos, a los que llamaré *infinito estático* e *infinito dinámico.*

Comenzaremos por el infinito estático. Tiene que ver con el problema de *contar* los elementos de un conjunto.

Imaginemos dos niños que aún no saben contar y que tienen *fichas* de juego, el uno *azules* y el otro *rojas.* Quieren saber quién tiene más fichas pero recordamos que no saben contar. Pueden poner sus fichas en fila hasta que uno de los dos se quede sin ninguna. El primero que se quede sin fichas es el que tiene menos, aunque no sepan cuántas tiene cada uno.

En el caso de que ambos niños tengan *igual número de fichas*, vemos que se pueden colocar unas enfrente de las otras de tal manera que cada ficha de uno *se corresponde con otra del otro.*

Esto lo formalizamos en matemáticas diciendo que los dos conjuntos son *coordinables.*

Ejemplos de conjuntos coordinables los encontramos a montones en la vida diaria. En una reunión de matrimonios los conjuntos de maridos y mujeres son coordinables. También lo son los dos equipos en un partido de fútbol mientras el árbitro no expulse a nadie.

Vemos que aunque no supiésemos contar, la idea de conjuntos coordinables es muy sencilla y nos sirve para comparar números.

Pero pongamos un segundo ejemplo en el cual se puede hacer una trampa.

Dos jugadores tienen *cartulinas circulares y cuadradas.* Pero ahora hemos de suponer la ficción de que cada uno tiene escritos en sus fichas todos los números naturales, entendiendo que en cada ficha se escribe un solo número.

Pero el que las tiene circulares es *ingenuo* y el otro *astuto.* El ingenuo presenta las fichas en orden: 1,2,3... El astuto va respondiendo con los dobles.

De esta forma al terminar el juego al astuto le sobran fichas, todas las que están escritas con números impares y podrá decir que tiene *más.* Pero se podrían invertir los papeles y resultar lo contrario.

Estamos con un comportamiento distinto del caso de las fichas de los niños.

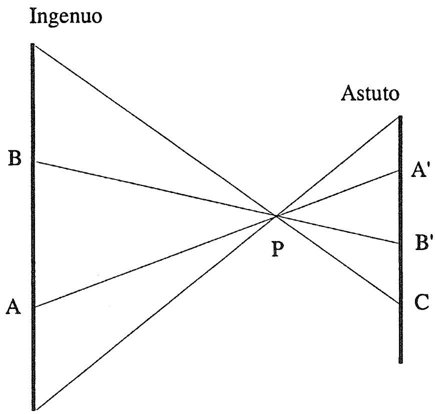
Esto es justamente lo característico de los *conjuntos infinitos.* Son los que permiten *hacer trampas.*

!Vaya definición! Si alguien ve que el que está sentado a su lado se lleva las manos

a la cabeza es que se ha sentado al lado de un matemático profesional. Y es que esta definición no está en ningún libro serio de Matemáticas.

Pero ya he avisado a algún colega que quería venir que no iba a aprender nada nuevo y que en todo caso escucharía alguna barbaridad.

Pongamos otro ejemplo en el cual también se puede hacer una trampa. Esta vez los dos conjuntos para comparar están formados por los puntos de dos segmentos, uno más largo que otro. El jugador astuto permite al ingenuo elegir segmento y comenzar el juego. El ingenuo elige naturalmente el segmento más largo. El astuto marca mentalmente un punto C en su segmento y fija el punto P en el plano tal como se indica en la figura. Cuando el ingenuo presenta un punto de su conjunto, el astuto lo une con P y responde con el punto de encuentro de su segmento con la prolongación. De esta forma cuando el ingenuo ha agotado todos los puntos de su conjunto, al astuto aún le queda una parte de su segmento sin utilizar y puede volver a decir que en su segmento hay más puntos que en el otro.



De esta forma en los ejemplos anteriores diríamos que las dos filas de fichas de los niños eran *coordinables* y que también lo son todos los números naturales con los números pares. Y también los puntos de dos segmentos aunque no tengan la misma longitud.

Y si los niños tenían veinte fichas también serían coordinables con esos conjuntos todos aquellos que tengan veinte elementos sin importarnos la naturaleza de estos.

Así que esos veinte lo mismo pueden ser los discos que ha grabado un cantante o los goles que ha marcado un futbolista durante la liga o los años que acaba de cumplir un amigo.

El número 20 está por encima de todo eso y ya pasa a ser un *concepto abstracto matemático* que representa a todos los conjuntos coordinables con los que hemos señalado antes.

Y ahora nos preguntamos ¿cuál es el número o los números que representan a los conjuntos de los números naturales, o de los puntos de un segmento o de los demás conjuntos que hemos llamado infinitos?

Pues quizá estemos tentados a simplificar las cosas pensando que si un conjunto es infinito ya no hay otro que tenga más elementos que él y que en consecuencia a todos estos conjuntos les podemos asignar un único número al que llamaremos simplemente *infinito*.

Pues si procedemos así nos estamos comportando más o menos como un gato que tengo yo en mi casa. Este gato sabe contar hasta 4, y a partir de ahí igual le dan 5 que 15. El no me lo ha dicho pero yo lo deduzco de su comportamiento.

En casa somos cuatro, y cuando suena el timbre, si falta alguno de la familia el gato se va a la puerta a esperarle, pero en caso contrario corre a esconderse en algún sitio.

Para él, todo lo que pase de 4 lo identifica y le da igual. Supongamos que lo llama *MUCHOS=M*. Entonces su tabla de sumar sería:

ARITMETICA GATUNA
$0 + M = M$
$1 + M = M$
$2 + M = M$
$3 + M = M$
$4 + M = M$
$M + M = M$
$M - M = ?$

Hemos de observar que la interrogación de la última línea no hay que atribuirla a ignorancia por parte del gato. Es que sencillamente si de un grupo de muchas personas se marchan muchas no podemos saber a priori cuántas van a quedar. De eso decimos en Matemáticas que es una indeterminación.

Volviendo a recordar que el gato identifica todo lo que pase de cuatro, llamando a tal cantidad *muchos*, nuestra inteligencia superior sí que distingue entre esos *muchos* y puede precisar más, y nuestra tabla de sumar es más larga y detallada.

Análogamente ocurre con los infinitos. *No todos son iguales.* Por ejemplo no podemos numerar los puntos de un segmento, porque hay más puntos en el segmento que números naturales. Aquí el astuto nunca ganaría al ingenuo.

El infinito del segmento es más grande que el de los números naturales. En cambio, aunque nos cueste creerlo, el infinito de los puntos del segmento es igual de grande que el de todos los puntos del Universo.

Pero a su vez éste no es el mayor infinito que existe. Por ejemplo es más pequeño que el infinito de todas las funciones.

No hay ningún infinito mayor que todos los demás, pero sí que hay uno que es el más pequeño de todos, es el de los números naturales.

Y existe una aritmética con estos números llamados trasfinitos, con sus tablas de sumar y multiplicar, análoga en algunos aspectos a la aritmética finita que nos resulta más familiar. Incluso también se pueden definir potencias entre números trasfinitos.

Y con esto pasamos a hablar ya del *infinito dinámico.*

Al infinito dinámico también lo podríamos llamar *infinito potencial.* Va unido a la idea de *variable.* En la Naturaleza casi todas las magnitudes varían y unas en su variación dependen de otras. Esto es lo que origina el concepto matemático de *función* y gran parte de la matemática se dedica al estudio de las funciones y ver como varían.

Un caso particular y más sencilo es hablar de *sucesiones.* En una sucesión la magnitud también varía pero lo hace en forma discreta. Si tomamos la temperatura de un enfermo con un aparato que la mide constantemente estamos ante una función, pero si la registramos solamente una vez al día estaremos ante una sucesión.

Muchas sucesiones son acotadas. Si lanzamos un dado y vamos tomando nota del número que sale, estaremos formando una sucesión cuyos valores no pasan de 6. Estamos ante una sucesión acotada. Pero si en lugar de anotar el número que ha salido tomamos nota de la suma del nuevo número con la suma acumulada hasta ese momento, esta nueva sucesión irá creciendo y sus valores podrán sobrepasar cualquier número que pensemos previamente.

En términos matemáticos decimos que este tipo de sucesiones *tienden a infinito*, o bien que *su límite es infinito.* Pero tengamos en cuenta que aunque una sucesión tienda a infinito, todos sus términos son finitos. Por eso he llamado a este infinito dinámico o potencial.

También estos nuevos infinitos dan lugar a una aritmética, donde las igualdades de las operaciones hay que interpretarlas como igualdades de los límites de las sucesiones correspondientes, y curiosamente esta aritmética es muy similar a la aritmética gatuna de la que hablamos antes.

Presentamos aquí las dos tablas aritméticas para que el lector observe esta curiosa analogía.

ARITMETICA GATUNA	ARITMETICA del INFINITO
0+M=M	$0+\infty=\infty$
1+M=M	$1+\infty=\infty$
2+M=M	$2+\infty=\infty$
3+M=M	$3+\infty=\infty$
4+M=M	$4+\infty=\infty$
$\vdots$	$\vdots$
M+M=M	$\infty+\infty=\infty$
$M-M=?$	$\infty-\infty=?$

Aunque en esta tabla aritmética se identifican todos los infinitos dinámicos, de hecho, al igual que ocurría con los estáticos, no todas las sucesiones que tienden a infinito lo hacen con la misma rapidez, lo cual también nos permite hablar de diversos infinitos dinámicos. Podemos pensar que estamos ante una carrera en la que cada uno de los corredores avanza un espacio determinado cada segundo. Las sucesiones con límite infinito corresponderían a aquellos corredores que pueden llegar tan lejos como quieran. Es solo cuestión de tiempo.

Pero aun entre estos corredores, no todos serán igual de rápidos. Entre las sucesiones con límite infinito resulta que no hay ninguna más rápida que todas las demás y ninguna más lenta que todas las demás. Esto nos permite establecer una relación de orden entre los infinitos dinámicos. En esto se parecen en parte a los infinitos estáticos. Recordemos que entre éstos había uno que era el menor de todos pero no había ninguno que fuese mayor que todos los demás.

De algunas sucesiones se ve inmediatamente su carácter infinito. Es el caso de la que dijimos antes que iba acumulando la sumas de los dados. Otra que resulta ser muy conocida por varios motivos tiene nombre propio, es la llamada *sucesión de Fibonacci.* Sus primeros términos son *1,1,2,3,5,8,13,21*....Sus términos van apareciendo mediante una sencilla regla y no dudamos que el lector la descubrirá sin más que observar atentamente los que le hemos ofrecido

Pero hay otras sucesiones en las cuales solo mediante la observación de sus términos podríamos tener duda de si tienden o no a infinito. Pongamos un ejemplo muy sencillo.

Cada término de lugar n lo obtenemos sumando los inversos de todos los números naturales desde *1* hasta el propio n. De esta forma se puede ver que la sucesión comienza con los valores: *1, 1.5, 1.83, 2.083, 2.283...*

Podemos visualizar la evolución de esta sucesión pensando que plantamos un árbol de altura un metro (primer término) y que cada segundo crece hasta el valor del siguiente término. Así tendríamos la siguiente tabla:

SERIE ARMÓNICA	
Un segundo	1
2 segundos	1.5
3 segundos	1.83
4 segundos	2.08
Un día	11.88
Un mes	15.29
Un año	17.75
Un siglo	22.35
2 siglos	23.04
Un milenio	24.65

Si tuviésemos que juzgar por la sola observación de esta tabla si nuestro árbol tiende a infinito, es decir si llegará a sobrepasar cualquier altura, o bien tiene un límite en su crecimiento, es posible que a la vista de la lentitud de su desarrollo a partir de un año, nos inclinásemos a pensar que estamos ante una sucesión acotada, y que nuestro árbol terminará estancándose y que por ejemplo no llegará jamás a alcanzar 100 metros de altura.

Pues si pensáramos esto estaríamos equivocados. En efecto, hay una sencilla demostración matemática que nos asegura que estas sumas que vamos acumulando, y que por cierto tienen el curioso nombre de *serie armónica*, llegan a sobrepasar cualquier número previo que hayamos pensado por grande que sea, es decir su límite es infinito.

Pero claro, éste es un ejemplo de una sucesión que tiende a infinito muy lentamente. Pero hay otras más lentas. Una muy notable y muy relacionada con la anterior está formada por los *logaritmos neperianos* de los números naturales. La comparación entre estas dos sucesiones recuerda al comportamiento del príncipe *Felipe de Edimburgo* respecto de la *Reina Isabel.* En las ceremonias, el *Príncipe* va siempre unos pasos detrás de la reina. Así también los términos de la sucesión de los logaritmos neperianos se mantienen algo inferiores a los correspondientes de la serie armónica. Y precisamente la distancia entre ambas sucesiones tiende a acortarse pero manteniéndose siempre por debajo de una cota mínima dando lugar a uno de los números más enigmáticos de las Matemáticas. Es el llamado *número gamma.* Y decimos que el número gamma es enigmático porque a pesar de la legión de ilustres matemáticos que han tratado de desvelarlo, no sabemos aún si este número es *racional* o *irracional*.

Por esta tribuna desfiló hace unos meses un conferenciante que en su ánimo de humanizar las Matemáticas nos leyó una carta de amor que él había dedicado a un trapezoide. Pues bien, siguiendo en la misma línea yo he dedicado a este enigmático número gamma una breve composición musical, formada por sus primeras 30 cifras decimales. Haciendo corresponder a la cifra 0 el do de la tercera octava, las demás cifras se convierten en notas musicales por extensión a partir de esta primera elección. Luego la duración de las notas y sus alteraciones ya son fruto de la imaginación del compositor.

Para que el lector pueda cantar el número gamma trascribimos aquí esta breve melodía, transcribiendo antes las 30 cifras decimales, que originan las 30 notas de la partitura.

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ldots$$

Número Gamma

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19**: 37–44, (2001).

Las Matemáticas en la vida del año 2000[1]

Mariano Gasca[2]

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

El objeto de esta exposición es explicar en qué se usan las Matemáticas en la vida cotidiana en este año 2000, declarado por la Unesco y otros organismos internacionales Año Mundial de las Matemáticas.

Intentaré romper la frecuente asociación

$$\text{Matemáticas} = \text{Matemáticas escolares.}$$

A lo largo de la Historia, las Matemáticas han variado su enfoque de aplicación: mediciones terrestres, construcciones, navegación, observación de los astros, etc. Por ejemplo, hace unos siglos era la Astronomía lo que más ocupaba su atención. La necesidad de tener que manejar muchas tablas numéricas con tediosos cálculos fue determinante para que aparecieran los logaritmos, que se dice que al menos doblaron la vida de los astrónomos de la época en cuanto a rendimiento. La aparición del ordenador a mitad del presente siglo tiene una importancia todavía mayor: si los logaritmos sirvieron para el avance de matemáticos, astrónomos y similares, la utilidad del ordenador llega ya hoy a todo el mundo.

Un breve vistazo a algunas situaciones nos puede hacer ver la continua presencia de unas Matemáticas vivas en la sociedad actual.

La Estadística, con sus muestreos y encuestas, el Cálculo de Probabilidades y la Investigación Operativa, de alguna manera pueden ser descritas como las Matemáticas de la Administración. En ésta y en la empresa privada es frecuente que de un problema complicado se intente hallar una solución óptima, como minimizar el tiempo necesario para hacer unas determinadas tareas. Por ejemplo, repartir el correo en un barrio en un tiempo mínimo. O saber si hay una ruta en un pueblo que una máquina que pinta los aparcamientos pueda recorrer pasando una sola vez por cada calle y volviendo al punto

[1] Conferencia pronunciada en el Paraninfo de la Universidad de Zaragoza el 15 de noviembre de 2000, con motivo de la celebración de San Alberto Magno, patrono de la Facultad de Ciencias

[2] Académico Numerario

de partida... Son problemas que estudian la Teoría de Grafos, fundada por Euler ya en el siglo XVIII, y la Investigación Operativa, aparecida precisamente hacia la Segunda Guerra Mundial.

Coordinar las tareas y programar los horarios de un gran Hospital para que funcione con la máxima eficacia, son problemas tan ingentes que no basta la simple experiencia del personal directivo para resolverlos. En los negocios actuales la diversificación de productos da estabilidad a la compañía, puesto que el aumento de la demanda de unos puede venir en detrimento de la de otros. Por pura economía, los productos que fabrican las empresas suelen compartir recursos. Por ejemplo, una empresa panadera puede producir pan, galletas, pasteles y tartas, de acuerdo con las previsiones del mercado. El objetivo del fabricante es maximizar las ganancias, pero la producción estará sujeta a algunas limitaciones. Muchos problemas de este tipo entran dentro de la Programación Lineal, cuya resolución habitual es a través del método del Simplex, también aparecido durante la Segunda Guerra Mundial y que conocen muchos de nuestros alumnos universitarios, pero que, como todo, tiene sus limitaciones que han sido superadas en otros algoritmos posteriores más complicados.

En cuanto al Cálculo de Probabilidades, hay que recordar el lío que se armó hace unos años en el sorteo del Servicio Militar por el desconocimiento de algún responsable de la Administración de que si se sortea algo entre 11 personas sorteando primero la cifra de las decenas, 0 o 1 y luego la de las unidades, el 10 y el 11 tienen más probabilidad de que les toque lo que se sortea, bueno o malo, que los otros.

Se dice que estamos en la Era de la Información. Veamos algunas de las cuestiones surgidas en torno a ella y que en el fondo son problemas matemáticos más o menos intricados. Se usan mucho los códigos de barras para identificar un producto. Se trata de barras blancas y negras que al ser leídas rápidamente por láser se traducen en ceros y unos, sistema binario, que a su vez se traducen a numeración decimal. En el caso del Código Universal de Productos, el más frecuente, son unos 12 dígitos decimales, de los que uno advierte del grupo de productos de que se trata, el grupo siguiente identifica al fabricante, otro grupo da idea del producto concreto, a veces de su tamaño, etc., y el último dígito es de control.

Si han observado los números de sus cuentas bancarias de 20 dígitos, los 4 primeros son la entidad, 4 para la Agencia, 2 de control y luego 10 para su cuenta personal. Observarán que en ambos casos hablamos de dígitos de control. Es muy fácil al transmitir tantos números bailar su orden o confundir una cifra. Mediante un algoritmo matemático muy simple el ordenador detecta el error. Se entenderá mejor con el NIF. Hacienda tenía graves problemas con la gente que daba, intencionadamente, un número erróneo de DNI, sin poderse demostrar la intencionalidad del error. Un algoritmo muy simple asigna a cada número de DNI una letra, dando lugar al NIF. Para ello, Hacienda seleccionó 23 letras del alfabeto eliminando i, ñ, o y u por causar confusiones, y les asignó un número aleatorio entre 0 y 22: la A tiene el 3, la W el 2, la T el 0, etc. Dividiendo el número del DNI entre 23, prescindiendo de decimales en el cociente y volviendo a multiplicar por 23, se obtiene un número igual o menor que el del DNI. La diferencia entre el DNI y ese nuevo número es el que decide la letra. Si ahora Vd. cambiara algo en su número de DNI, como bailar dos dígitos, es sumamente probable que la letra final no saldría la misma y el ordenador avisará del error. Observen que el proceso no es más que calcular el resto de la división entera por 23, o en lenguaje matemático las congruencias módulo 23. Sería facilísimo cambiar el número y a la vez cambiar la letra para que concuerden y el ordenador no detecte el error, pero si posteriormente se descubre, ya hay manifiesta mala fe.

En el caso de la cuenta bancaria, los dígitos son 2 porque se usa uno para el grupo de cifras Banco-Agencia y otro para el número de la cuenta.

Todos estos controles recordarán un poco a las personas de mi edad para arriba la prueba del 9 que nos enseñaban en la escuela para multiplicar. Si salía bien no se garantizaba del todo que la operación fuera correcta, pero si salía mal era seguro que estaba mal.

El mismo principio se puede usar para corregir errores en la transmisión de datos. Si una persona oyera que un acto se celebrará a las cuatro de la tarde corregiría mentalmente para entender que es a las cuatro. Los sofisticados aparatos actuales, incorporan sistemas de control y corrección que pueden conseguir que las transmisiones desde el espacio lleguen en forma adecuada o que un disco compacto siga sonando a veces bien, a pesar de una raya pequeña en su cara de grabación.

Hoy se necesita almacenar y transmitir casi todo, desde una imagen a música o las huellas digitales de todos los ciudadanos. Una cuestión crucial es la compresión de esos datos para que ocupe el menor espacio posible. Fíjense por ejemplo que con sólo 5 cifras en el correo identificamos un barrio de una ciudad o una comarca de una provincia. Pero ¿cómo guardar o transmitir una fotografía o un cuadro?. Supongamos por ejemplo un cuadro con un paisaje de bosque en el otoño en el que lo fundamental son los colores. La técnica matemática conocida como multirresolución se puede vulgarizar así: en un análisis de todo el cuadro se detecta que el color medio es una cierta gama de verde. Esa sería la primera y básica información. Se van a almacenar sucesivas informaciones similares. Para ello, se divide el cuadro en cuatro partes y se analiza si el color medio de cada parte está por encima o por debajo de la media general y se guarda información sólo de las correspondientes diferencias. Observemos que si sumáramos las dos etapas habríamos mejorado la primera. En una nueva etapa, cada cuarta parte se divide en otras cuatro y en cada una de ellas se analiza si hay que hacer alguna corrección de la información que se tiene hasta ahora. Así sucesivamente, cuando se haya subdividido lo suficiente se llegará a unas correcciones tan pequeñas que el ojo humano no las detectará ya. No vale la pena hacer refinamientos mayores, y la información almacenada nos proporcionará una reproducción suficientemente buena del cuadro de que se trate. Similarmente, la música conocida como MP3 para el ordenador está basada en que los detalles musicales de una pureza tan fina que sólo oídos muy exquisitos pueden detectar, pueden omitirse en aras de la economía de almacenamiento, dividiendo por diez aproximadamente el espacio necesario para guardar la versión completa. Caben 150 o más canciones en un solo disco compacto. Hay alta matemática detrás de todo esto. La teoría de las ondículas, onditas o wavelets, con no más de 20 años de antigüedad, es el resultado de la confluencia de intereses del Análisis Matemático, la Matemática Aplicada, la Física y la Ingeniería.

La Criptografía es otro tipo de transmisión de datos pero codificados por razones de seguridad. Se dice que Julio César codificaba sus mensajes trasladando un cierto número de unidades el alfabeto. Puesto que se conoce hoy perfectamente la estadística de los porcentajes con que aparece una letra en un determinado idioma sería casi un juego de niños descifrar aquella clave. En este tema en concreto hay una continua lucha entre el codificador por conseguir un método complicado de descifrar y el descodificador para intentar descifrarlo. No hablemos ya de la complicación de enviar imágenes codificadas también. Los matemáticos han sido clave a lo largo de los tiempos en este terreno por su proceder metódico y concienzudo citado al principio de esta charla y porque alguna de las ramas de la Matemática Pura, como la teoría de grupos o las congruencias ayudan a entender y mejorar muchos procedimientos de la Criptografía, que podría ser descrita familiarmente como la Matemática de los espías.

El problema de la elección social es cotidiano. Lo estamos viendo continuamente cuando una Comunidad de Propietarios tiene que tomar una decisión, o en las Juntas de Departamento, Juntas de Gobierno, Claustro, etc. Mientras hay sólo dos opciones a tomar no hay mucho que decir, pero en cuanto alguien hace una enmienda que hay que rechazar o no, o se presentan varias alternativas las cosas se complican. Por ejemplo entre 5 opciones difícilmente se producirá una mayoría absoluta a favor de una. Entonces ¿cómo se decide? ¿La que más votos obtiene, aunque solo tenga un 25% de apoyos? ¿Hacemos segunda vuelta después de eliminar las menos apoyadas? ¿Las vamos confrontando 2 a 2 y eliminando la que pierda?. Y si en lugar de un simple voto damos cada uno un orden de preferencia de las cinco opciones, todavía aumentan las maneras de decidir, porque podemos asignar puntos a cada orden de preferencia y sumar. ¿Cuántos puntos, 5, 4, 3, 2, 1? ¿ 10, 6, 3, 2, 1, para remarcar más a la preferida, como se puntúa en las carreras de motos y coches?.

Hay ejemplos de situaciones concretas en que después de efectuar una votación entre cinco opciones o candidatos A, B, C, D, E, dependiendo del modo de decidir gana uno u otro de cada uno de los cinco.

Estamos pues enormemente expuestos a la manipulación de resultados con toda legalidad y bendiciones democráticas, y en esto existen verdaderos maestros y no precisamente matemáticos.

¿Cómo actúa un matemático en estos casos? Analizando el problema e intentando que el sistema de decisión cumpla unas ciertas premisas lógicas. Por ejemplo, si todos los votantes prefieren a A por delante de B, éste no debería ser nunca el ganador. O si A confrontado uno a uno con cada uno de los demás gana siempre, en conjunto debería ser él el ganador. Bueno, pues simplificando, cuando se ponen varias condiciones de estas juntas, el teorema de imposibilidad de Arrow muestra que no puede existir ningún sistema que cumpla todas cuando hay más de dos opciones. La siguiente cuestión es analizar las ventajas e inconvenientes de prescindir de alguna de esas condiciones e intentar algún nuevo método que aminore esos inconvenientes. Es una investigación siempre abierta.

Similar es la situación en las votaciones para Diputados en Cortes en España. Nuestro sistema es proporcional, lo que quiere decir que hay que repartir por ejemplo 350 escaños proporcionalmente al número de votos. Como nunca salen números enteros en el reparto y no se pueden hacer fracciones de Diputado, el problema es el reparto de los restos. De nuevo ocurre como en el caso anterior, que no hay método perfecto, y la elección de método hay que hacerla con criterios políticos. Así la Ley d'Hondt que se aplica en España favorece a los partidos más votados en cada circunscripción, lo que se traduce en mayor favor a nivel nacional, y que un partido que ha recibido un 40% de votos pueda tener mayoría absoluta. Este método se elige pensando en la gobernabilidad, en detrimento del fraccionamiento que se produce con otros. Pero ese mismo método favorece, por ejemplo, que los partidos nacionalistas de Cataluña y País Vasco, mayoritarios actualmente en sus regiones, recojan allí esa prima y puedan tener más representación nacional que la que les correspondería en pura proporción.

En este tipo de elecciones, los partidos que no obtienen un cierto porcentaje bajo de votos no cuentan a la hora del reparto, es como si no existieran. Cuando el Parlamento Vasco, por ejemplo, tenía el 5% como umbral, quería eliminar del campo a los partidos muy minoritarios. Si en un momento dado ese Parlamento decide rebajarlo al 3%, como sucedió recientemente, es porque alguien quiere repescar a un partido que estaba ligeramente por encima del límite de ese umbral y corre el riesgo de quedar fuera por estar perdiendo intención de voto. Como se ve, siempre hay alguien echando las cuentas por nosotros en ese tema.

El diseño de carrocerías de coches por ordenador registró un gran avance debido al trabajo conjunto de matemáticos e ingenieros a partir de los 60. Nació una nueva especialidad de la Matemática Aplicada como es el Diseño Geométrico por Ordenador, donde se combinan la Geometría y los Métodos Numéricos de la Teoría de Aproximación. Desde esta técnica tan actual podemos echar una mirada retrospectiva a los grandes conocimientos geométricos que mostraban los arquitectos y decoradores hispano-musulmanes en nuestras torres mudéjares y en nuestra Aljafería, y no digamos en la Alhambra donde la simetría es la reina del Palacio. Metiéndonos en Arte, ya no tan clásico, ¿qué decir de las obras de M. C. Escher, basadas en los recubrimientos o teselaciones, y fuertemente influídas, precisamente, por las simetrías de la Alhambra?.

Para finalizar, voy a dar un ejemplo muy sencillo de cómo están presentes las Matemáticas en la Naturaleza, de manera aún por aclarar completamente. Cojamos una piña de cualquiera de nuestras coníferas y observemos las escamas que salen de su eje. Van formando unas líneas de tipo espiral o helicoidal que van descendiendo hacia la punta de la piña, y que según se mire lo hacen en el sentido de las agujas del reloj o en el contrario. Contemos el número de espirales hacia un lado y hacia otro y observemos que son, salvo algún defecto, 5, 8 o 13.

Con la piña tropical las escamas parecen pentágonos, a veces exágonos. Según la dirección en que se mire se ven hasta 3 alineaciones de espirales distintas, dependiendo de en qué lado del pentágono o exágono nos fijamos, pero los números siguen siendo 8 para un lado, 13 para el otro y 21 para la dirección más vertical, cuando ésta está aparente. A veces son más bien rombos y puede no percibirse la tercera alineación, y entonces son 8 y 13. Según la especie estos números pueden ser 5, 8 y 13.

En la flor, muy grande o menos grande, de cualquier girasol, se ven las semillas o pipas trazar dos espirales distintas, de nuevo coincidiendo o no con las agujas del reloj. Contadas con suma paciencia se verá que son 55 hacia un lado y 89 hacia el otro. En otras variedades 34 y 55, o 21 y 34. ¿Qué tienen entre sí todos estos números?

Retrocedamos casi 800 años para encontrar a Leonardo de Pisa o Leonardo Fibonacci, el matemático que debido a sus viajes comerciales a Oriente introdujo en Europa la numeración indo-arábiga que hoy usamos, desplazando a la incómoda numeración romana anterior. En su *Liber Abbaci* plantea el siguiente problema: *En un corral se deja una pareja de conejos recién nacidos, macho y hembra. Pasado un mes los conejos son adultos y se aparean. Acabado el segundo mes la coneja pare una nueva pareja, macho y hembra,* *y acto seguido se vuelve a aparear con el macho. El proceso se va reiterando y cada pareja se aparea por primera vez al mes de nacer, y luego lo hace cada mes, originando, cada mes, una nueva pareja descendiente. Se trata de saber el número de parejas que hay al final de k meses.*

Si observamos que al inicio del primer mes hay 1 pareja, que al principio del segundo mes sigue habiendo 1, al inicio del tercero hay 2, al siguiente hay 3, luego 5, luego 8, etc., se obtiene la llamada sucesión de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

en la que cada número es la suma de los dos anteriores. Reconocerán en esa sucesión todos los números citados en piñas y girasol. Parece algo mágico el hecho de que en la Naturaleza aparezcan con tanta frecuencia los números de esa sucesión. Es un fenómeno conocido como filotaxis y no es una ley universal, válida para todas las plantas, pero sí una tendencia de la Naturaleza respecto a la forma en que aparecen las hojas de los árboles o los pétalos de las flores. Se ha pretendido explicar de varias formas relacionadas con el crecimiento de las plantas, y de la máxima ocupación del espacio, pero ninguna enteramente convincente. Por el contrario, los conejos no se reproducen en esa forma, era un simple problema de cálculo.

Pero sin embargo hay unos animalitos en los que vuelve a aparecer esta sucesión de Fibonacci. Entre las abejas, los huevos no fecundados que pone la reina dan lugar a machos o zánganos, y los fecundados a hembras, de las que seleccionan a nuevas reinas para formar otro enjambre.

Así pues, los machos sólo tienen un padre (que es madre), mientras las hembras tienen 2 padres (padre y madre). Entonces los machos tendrán solo 2 abuelos (los padres de su madre), pero 3 bisabuelos, 5 tatarabuelos, y así el árbol seguirá subiendo a 8, 13, 21,... en las siguientes generaciones de ascendientes. Las hembras tendrán 3 abuelos, 5 bisabuelos, 8 tatarabuelos, 13, 21, 34, etc..

Pues bien, calculemos el cociente de cada término de la sucesión de Fibonacci por su anterior. Es fácil demostrar que los cocientes

$$1/1 = 1, \quad 2/1 = 2, \quad 3/2 = 1.5, \quad 5/3 = 1.666666..., \quad 8/5 = 1.6, \quad \text{etc.}$$

tienden hacia el límite

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\ldots$$

conocido como número áureo, número dorado o razón de oro, o divina proporción, uno de los números míticos de las Matemáticas. Luca Paccioli escribió en el siglo XV un libro precisamente con el título *De Divina Proportione* describiendo en sucesivos capítulos las propiedades geométricas de este número con los adjetivos: de una, con el lenguaje de la época dice que es esencial, otra singular, otra inefable, otra suprema, otra excelentísima, otra casi incomprensible, inestimable, etc. Los dibujos fueron hechos por su amigo Leonardo da Vinci.

Un rectángulo con la proporción áurea entre sus lados resulta agradable a la vista, además de fácil de construir con regla y compás.

Parece haber sido usado con frecuencia en el arte y se dice que la proporción perfecta en la figura humana es cuando la altura de la persona es la altura de su ombligo multiplicada por el número áureo. Si se toma un rectángulo de papel de esa proporción, se dobla para formar un cuadrado y se recorta éste, el nuevo rectángulo tiene la misma proporción y así sucesivamente.

Los caracoles marinos *Nautilus* presentan en su concha aproximadamente una espiral logarítmica o equiangular, que a su vez puede construirse fácilmente mediante rectángulos áureos. Si se la amplía en una fotocopia la copia encaja exactamente con el original, algo que sucede también con los fractales, que son usados en el ordenador para dibujar paisajes y para hacer bonitos diseños,

En fin, espero con esta charla haberles convencido de que las Matemáticas de finales del siglo XX ni son aburridas, ni son inútiles, ni son una cosa cerrada y acabada, sino muy viva, y que está mucho más presente en nuestras vidas de lo que parece.

Muchas gracias.

Bibliografía

[1] Las Matemáticas en la vida cotidiana. COMAP (Consortium for Math.and Applic.). Addison-Wesley 1999.

[2] How Nature works. Per Bak. Oxford University Press, 1997.

[3] `http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/`

[4] `http://www.willamette.edu/ sekino/fractal/`

[5] `http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/`

[6] `http://www.bangor.ac.uk/ma/`

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 45–47, (2001).

Invertir en Investigación en Matemáticas

Mariano Gasca[1]

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

En el primero de los **Días Matemáticos** celebrados en la Facultad de Ciencias de Zaragoza los días 16 y 17 de noviembre de 2000, con motivo del **Año Mundial de las Matemáticas**, tuvo lugar una Mesa Redonda sobre el estado actual de la Investigación en Matemáticas en España y su financiación.

Presidió la Mesa la Sra. Vicerrectora de Investigación de la Universidad de Zaragoza, Dña. Blanca Conde, actuó de moderador D. Mariano Gasca, catedrático de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias y Secretario de la Academia de Ciencias de Zaragoza y fue invitado especial D. Santos González, Catedrático de Álgebra de la Universidad de Oviedo y Coordinador del Área de Física y Matemáticas de la Agencia Nacional de Evaluación de Proyectos.

Santos González fue anteriormente estudiante y hasta hace 10 años profesor de Álgebra de la Universidad de Zaragoza. Actualmente compatibiliza su trabajo en Oviedo con su participación, desde hace 5 años, en los trabajos de esa Agencia Nacional de Evaluación. Es el primer matemático que ocupa el cargo de Coordinador del área, ya que hasta ahora todos los coordinadores habían sido físicos.

La Agencia fue creada en 1986 por el Ministerio de Educación y Ciencia como un organismo independiente, profesional y apolítico. Actualmente ha pasado a depender del Ministerio de Ciencia y Tecnología y goza de gran prestigio como referencia para juzgar la calidad de proyectos de investigación, propuestas de becas, etc.

Está dividida en 19 áreas siendo el área más grande en volumen de trabajo la de Físicas y Matemáticas. Un ejemplo de esto es que de los 1500 proyectos de investigación solicitados el año pasado 262 fueron de esta área, divididos entre 117 de Física, 138 de Matemáticas y 7 de Ingeniería y Matemáticas. Las convocatorias últimas se han visto retrasadas probablemente por las elecciones generales de marzo pasado.

La mayor parte de la financiación de los proyectos viene de los Presupuestos Generales del Estado, pero también son importantes los fondos de la Comunidad Europea.

[1] Académico Numerario

La aportación de la empresa privada todavía no es importante en ninguna rama de la investigación y menos en Matemáticas, pero se la está intentando convencer de la importancia de financiar proyectos relevantes que la ayudarán a desarrollarse. Además hay que convencerla de la necesidad de subvencionar la investigación básica, puesto que es el sustrato fundamental de la aplicada. La investigación no debe confundirse con una consultoría para solucionar problemas concretos e inmediatos.

Santos González insistió mucho en que el prestigio de la Agencia de Evaluación se debe al anonimato de los evaluadores de los proyectos. Agradeció la ayuda y el excelente trabajo de sus colegas en la Universidad de Zaragoza en sus evaluaciones. Además reconoció que "abusa" de la confianza entregándoles más trabajo y exigiéndoselo en periodos más breves.

Animó a los asistentes a presentar más proyectos e intentar colocar a la Universidad de Zaragoza a la cabeza de la investigación matemática. Para ello recordó que a la hora de evaluar positivamente un proyecto se valora la calidad del trabajo y los curricula del grupo investigador. También quiso recordar la evaluación por parte de la ANEP de sabáticos, estancias de extranjeros aquí y estancias en el extranjero.

Reconoció la importancia de los encuentros entre matemáticos como una de las formas fundamentales de intercambio de conocimientos en este campo, por lo que es normal que una parte sustanciosa de los presupuestos de los proyectos en Matemáticas vaya a ese fin al capítulo de viajes.

A este respecto surgieron algunas preguntas sobre dificultades surgidas en años anteriores por la exigencia de prever visitas e intercambios con 3 años de antelación, a lo que respondió que se había tenido en cuenta eso y corregido últimamente.

Continuó haciendo mención a la gran incidencia de los trabajos de investigación de matemáticos españoles en la comunidad internacional, en la que han aumentado sustancialmente el porcentaje de su participación, contándose ahora con matemáticos españoles en comités editoriales de revistas internacionales de impacto. Incluso ha aumentado ese porcentaje más que en otras ramas científicas aparentemente más desarrolladas en España. También nos visitan con frecuencia matemáticos extranjeros de primera fila y organizamos congresos internacionales de prestigio, contando además con la probabilidad que un próximo Congreso Internacional de Matemáticas, el más importante de todos los congresos matemáticos, tenga lugar en España. A este respecto hizo constar que quizás por modestia en España no se es del todo consciente de nuestra actual posición internacional. Si en el cómputo total de la investigación mundial España representa un 2.6%, en Física y Matemáticas el porcentaje es de un 4%.

Destacó también la intervención de la Agencia dirigido a mejorar la calidad del trabajo de los investigadores jóvenes, buscándoles alternativas profesionales que les permitan seguir en la investigación sin necesidad de recurrir únicamente a la docencia.

Se refirió constantemente a la Universidad de Zaragoza como "su casa madre" y expresó su alegría al reencontrarse aquí con quienes compartió trabajo y estudios. También indicó a la Vicerrectora presente la calidad de los investigadores matemáticos de esta Universidad y el peso de la Sección de Matemáticas de Zaragoza en todos los foros matemáticos españoles.

Tanto a lo largo de algunos de los puntos expuestos como al finalizar tuvieron lugar varias intervenciones de aclaración o de petición de opinión, a los que el profesor Santos González respondió en los términos arriba indicados.

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 49–68, (2001).

Del cálculo al análisis: el problema de la cuerda vibrante

Bienvenido Cuartero

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Presentación

La aportación de la Universidad de Zaragoza a la celebración del año 2000 como "Año mundial de las matemáticas" se concretó en los actos realizados a lo largo de "Dos días matemáticos", el 26 y 27 de noviembre. El éxito que tuvieron hubiera sido imposible sin el ímpetu juvenil, la fe y el esfuerzo inagotables de Pedro J. Miana, que proporcionó el impulso fundamental para que la Sección de Matemáticas rompiera su tradicional mezcla de modestia y ensimismamiento y asomase la cabeza al exterior. Con la ayuda de distintas instituciones y organismos, se organizaron una serie de conferencias, mesas redondas, exposiciones, proyecciones de vídeos y películas, que tuvieron una respuesta entusiasta de los relativamente numerosos participantes.

Una de las instituciones que colaboraron con eficacia fue la veterana Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza. Culminando su colaboración, en una excelente iniciativa, la Academia de Ciencias propicia esta publicación que permitirá que quede un testimonio escrito del espíritu de esos días.

La primera actividad de los "Dos días matemáticos" fue una presentación audiovisual, elaborada por el profesor J. F. Ruiz Blasco y el que esto escribe, sobre el problema de la cuerda vibrante y su incidencia en el Análisis matemático, como refleja su título. No se trataba de una conferencia "normal", en el sentido de que iba acompañada de imágenes e ilustraciones musicales que formaban parte sustancial de la exposición. Por otra parte, tampoco era un trabajo erudito sobre el tema. No era, pues, lo más adaptado a una publicación académica.

Siendo imposible reproducir en papel lo que en aquella circunstancia expusimos, hemos decidido aportar simplemente el guión de la charla, describiendo aproximadamente el contenido visual de las diapositivas (realizadas con el programa *PowerPoint*) y los fragmentos musicales que las acompañaban. Marcamos estas "explicaciones" con el símbolo $\Box$, que parece sugerir una pantalla de ordenador o de proyección.

El recuerdo ya un poco lejano de la atmósfera de aquel acto, realizado en un ambiente distendido y cargado de simpatía por parte de los *videoyentes*, nos hace ver estas páginas como el esqueleto descarnado del cuerpo vivo que fue en su momento. Pero si sirven para que los presentes puedan recordar aquellas sensaciones y los ausentes puedan encontrar algún reflejo del clima que allí se inició, quedarán suficientemente justificadas.

Introducción

□ *Aparece el título. Suenan timbales y trompetas (FUERTE):* 'Prélude avec les trompettes, *Rondeau', del* Concierto de Trompetas *de* **M. R. Delalande.**

Del cálculo al análisis: el problema de la cuerda vibrante.

□ *Cambia a logotipo* 'Año Mundial de las matemáticas' *(baja la música). Aparece después el escudo de la Universidad de Zaragoza junto al texto* 'Dos días matemáticos'. *Baja la música.*

Dentro de la celebración del año 2000 como año mundial de las matemáticas, en estos "Dos días matemáticos" organizados en la Universidad de Zaragoza se nos ofrece la oportunidad de dar lo que se anuncia, nada menos, como "Conferencia Inaugural". Vale lo de 'inaugural' —por algo se empieza— pero quitemos solemnidad a lo de 'conferencia', y dejémoslo en una charla informal, dirigida básicamente a los alumnos de esta sección. En ellos está el futuro de nuestro oficio, y posiblemente les interese más lo por venir que un pasado relativamente lejano. No obstante, para saber dónde vamos, generalmente es bueno saber de dónde venimos, y en este sentido

□ *Aparece el texto:* *Estudia el pasado si quieres adivinar el futuro.*

CONFUCIO.

puede ser oportuna una mirada hacia atrás, 'estudiando el pasado para adivinar el futuro', como sugiere Confucio.

Se aprende así que los tanteos,

□ *Aparece el texto:* *La verdad surge del error más fácilmente que de la confusión.*

F. BACON.

errores, reproches mutuos y desconfianzas, ..., tantas cosas que parecen exclusivas de la situación actual de las matemáticas, se encuentran desde antiguo en nuestra disciplina.

Abreviando: os propongo que me acompañéis en un 'paseo turístico' por un momento concreto de la evolución de nuestra ciencia: los comienzos

💻 *Cambia a título "El problema de las cuerdas vibrantes"*

de la resolución del problema de las cuerdas vibrantes, hacia mediados del siglo XVIII.

Oficiando, pues, de simple 'guía turístico', sólo puedo ofrecer una visión extremadamente reducida de la movida que se organizó en su momento a cuenta de las soluciones propuestas al problema de las cuerdas vibrantes. Con esta ojeada 'audiovisual'

💻 *Aparece un violín desplazándose en el aire mientras suena una música.*

—necesariamente superficial e incompleta— intentaré que pasemos un rato entretenido hablando de matemáticas (o de matemáticos).

—PAUSA—*(música de violín)*

¿Por qué la elección precisamente del

💻 *Nueva diapositiva con el título "El problema de las cuerdas vibrantes". Suena un* Preludio *de* **H. Purcell** *transcrito para guitarra.*

problema de las cuerdas vibrantes? Hay múltiples razones:

💻 *Van apareciendo sucesivamente los textos de las 'razones': primero, ...*

primero, el problema ha sido repetidamente examinado por los historiadores de las matemáticas y hay bastantes estudios fácilmente asequibles sobre su evolución histórica.

💻 *... segundo ...*

Otra razón, dentro ya de mi especialidad, es que de aquí proviene, en buena medida, la visión actual del Análisis matemático. Además, las polémicas que suscitó el problema están en el origen de las exigencias de precisión y rigor que acompañan ahora al Análisis matemático.

💻 *... final.*

Para no alargarnos demasiado, señalemos por último que el desarrollo de esta cuestión refleja bien a las claras que 'el progreso matemático' no es lineal, sino que sigue una trayectoria sinuosa y con saltos continuos hacia adelante y hacia atrás.

En este año 2000 sea esta charla, pues, un homenaje

☐ *Cambia a retratos de d'Alembert, Euler, D. Bernoulli, Lagrange, mientras suena el primer movimiento (Allegro) del* Concierto para dos trompetas en Do mayor *de* **A. Vivaldi**.

a los grandes talentos que se concitaron para marcar el cambio al que quiere hacer referencia la expresión *Del cálculo al análisis* (tomada de [1]) que figura en nuestro título.

☐ *Cambia a diapositiva con el "Sumario"*

Aquí tenéis reflejadas las distintas partes de la charla.

—PAUSA—*(mientras lee el público; sigue sonando la música)*

SUMARIO:

1.- Antecedentes.

2.- La ecuación de las cuerdas vibrantes.

3.- El planteamiento de D'Alembert.

4.- Euler frente a D'Alembert

5.- La solución de D. Bernoulli.

6.- Todos contra todos: la polémica general.

Así que comencemos con los antecedentes.

1. Antecedentes.

Situemos nuestra historia en el espacio y en el tiempo.

☐ *Sobre un mapa de Europa suena un dúo del Acto 3, Escena 5 de* L'Incoronazzione di Poppea, *de* **C. Monteverdi**.

—Cuando finaliza el siglo XVII concluye un siglo de contrastes para Europa. Guerras, peste, hambrunas, revueltas, ... coexisten con el despliegue esplendoroso del arte barroco, o con la invención de la ópera y el *concerto grosso* por los músicos italianos. Francia se ha convertido en la primera potencia europea, capaz de resistir a las fuerzas militares de los demás países. Durante su *Grand Siècle*, los ministros de Luis XIV logran que Francia sea el estado mejor administrado del continente,

☐ *aparece una máscara de Apolo-el Sol (Versalles) y sobre ella la imagen de Luis XIV.*

lo que hace del Rey Sol el monarca más rico —y fastuoso— del siglo.

Francia exporta moda; el gusto de Luis XIV por el clasicismo atempera el barroco francés hacia un 'neoclasicismo',

□ *Una luz deslumbrante va disminuyendo en intensidad formándose la imagen de un edificio —Versalles— mientras suena una música apropiada al lugar: Gigue, de la* 12e. Suite *de las* 'Sinfonías para las cenas del Rey' *de* **M. R. Delalande.**

apreciable en Versalles, donde el Rey Sol está construyendo los magníficos palacios y jardines que van a ser modelo durante varios decenios para monarcas absolutos y reyes y príncipes ilustrados; la influencia política y económica de Francia es considerable y está en auge.

—PAUSA—*(Sube y baja la la música)*

□ *Antecedentes del cálculo infinitesimal: Descartes, Fermat, Roberval, Pascal; luego Cavalieri, Torricelli.*

En matemáticas, los más destacados matemáticos franceses (Descartes, Fermat, Roberval, Pascal) abordan, mediante métodos infinitesimales similares a los empleados previamente en Italia (Cavalieri, Torricelli), los problemas de

□ *Listado de los problemas*

cuadraturas (cálculo de áreas), cubaturas (cálculo de volúmenes), cálculo de centros de gravedad, trazado de tangentes a diversas curvas, cálculo de máximos y mínimos, rectificación de curvas, estudio de curvas 'mecánicas' (generadas como trayectorias de movimientos).

□ *cuadro-esquema "Creación del cálculo infinitesimal"*

Estas cuestiones (algunas de las cuales datan de la Grecia clásica y de los estudios medievales sobre la variación y el movimiento) pasan luego a Bélgica y Holanda y después a Gran Bretaña.

Los resultados dispersos obtenidos no cristalizaron en métodos generales hasta la creación de los conceptos de *fluxión* (Newton) y *diferencial* (Leibniz), momento en que puede hablarse de la 'invención' del cálculo diferencial y cálculo integral, o sea, del cálculo infinitesimal, también llamado 'análisis infinitesimal' y 'álgebra infinitesimal'.

Ya se había observado que la *cuadratura* (el cálculo de áreas) era el instrumento adecuado para todos los demás procesos de integración, y se había detectado que diferenciación e integración eran procesos inversos, lo que llevaría a lo que conocemos ahora como *regla de Barrow*:

□ *Cambia a imagen y textos de Barrow, con fondo musical de* **H. Purcell** *(*Preludio, *transcripción para guitarra).*

Aquí tenéis la regla de Barrow tal como la publicó él mismo

□ *Aparecen recuadrados el texto y el dibujo que contienen el 'teorema de Barrow' (baja la música)*

en 1670, en sus *Lectiones geometricae.* Como puede observarse, el planteamiento y los razonamientos son enteramente geométricos, en el estilo de la época.

El alcance de esta reciprocidad entre diferenciación e integración no fue plenamente comprendido hasta los trabajos de Newton y Leibniz.

La generación siguiente,

□ *Cambia a diagrama cronológico "por generaciones"*

entrando ya en el siglo XVIII, iba a hacer evolucionar el 'cálculo infinitesimal' hacia lo que por aquella época justamente comenzó a denominarse 'Análisis matemático', resultando éste de una priorización de la componente *algebraica* sobre la *geométrica* en el tratamiento de los problemas de los que se había ocupado el cálculo infinitesimal y de los nuevos que iban a surgir, principalmente desde la Mecánica, a lo largo de este siglo. Iba tomando forma una nueva disciplina matemática: en cierto sentido, estamos en los momentos fundacionales del Análisis matemático. Sus creadores seguían denominándose a sí mismos *geómetras*, pero sus métodos iban alejándose cada vez más de la Geometría.

□ *Cambia a la portada de la edición de los* Principia *de MDCLXXXVII.*

La gran obra que marcaría de manera fundamental y decisiva la dirección a seguir en el siglo XVIII sería los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural,*

—PAUSA—

sube la música: Suena, grandilocuente, el 'Aleluya' del Mesías *de* **G. F. Händel**, *bajando poco a poco.*

publicada en 1687,

□ *Desciende por el margen derecho un cartel con el texto "sí, pone 1687".*

que contiene los saberes matemáticos y físicos que van a ser la llave del conocimiento del mundo físico en los siglos venideros. Los *Principia*

□ *Cambia a retrato de Newton —se van añadiendo Galileo, Kepler, Descartes, Huygens, Hooke ('sin rostro'), mientras se oye un* Rondó *de* **H. Purcell** *en transcripción para guitarra.*

han sido escritos por un hombre, Newton, que, según sus propias palabras, "ha podido ver más lejos, aupado en hombros de gigantes" (de gigantes como los que vamos a ir viendo: Galileo, Kepler, Descartes, Huygens, Hooke —no quedó ningún retrato suyo, al parecer, así que hemos salido del paso como hemos podido). Newton ha conseguido encerrar en una fórmula lo que parece la esencia de todos los movimientos del cosmos. Él mismo ha sido capaz de aplicar sus ideas con éxito al estudio 'del sistema del Universo' y a algunas otras cuestiones.

La ecuación fundamental de la mecánica ha sido establecida,

> 💻 *Cambia a enunciado de la segunda ley de Newton: " El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime" condensado luego en "Fuerza=masa × aceleración"*

pero su alcance ha sido apenas explorado. Según Truesdell [11], «salvo para ciertos problemas particulares que aunque sencillos son importantes, Newton

> 💻 *Se incorpora "¿Ecuaciones diferenciales de los movimientos?"*

no parece haber sido capaz de plantear ecuaciones diferenciales que rijan el movimiento de un sistema mecánico.»

Es mucho lo que queda por hacer: mucho, y muy difícil. Se requiere el esfuerzo sucesivo y conjunto de grandes talentos.

> 💻 *Cambia a fotos 'volantes' de J. Bernoulli, Taylor, D'Alembert, Euler, D. Bernoulli, Lagrange. Música del 3er. movimiento del* Concierto para dos trompetas en Do mayor *de* **A. Vivaldi.**

Aunque, como sabemos, no son talentos precisamente lo que falta en el 'siglo de las Luces', y las Academias de Ciencias de París, Berlín, San Petersburgo, ..., irán publicando las numerosas memorias que contienen los inicios de lo que en el siglo XIX se consolidará bajo la rúbrica de "Mecánica racional".

> 💻 *Cambia al título siguiente:*

2. La ecuación de las cuerdas vibrantes.

Un problema es especialmente estudiado en detalle a lo largo del siglo XVIII: el problema de la cuerda vibrante.

> 💻 *"El problema de la cuerda vibrante"; dibujo de una cuerda pulsada.*

Familiarizados con la vibración de alambres o de las cuerdas de los instrumentos musicales, prestamos generalmente más atención a su sonido que a su movimiento; pero como ya hemos ido aprendiendo, y a veces observando visualmente, su comportamiento es realmente curioso,

🖵 *se visualiza la oscilación de varias "cuerdas"*

apreciándose a veces a simple vista fenómenos tan sorprendentes como la existencia de puntos nodales que se mantienen en reposo mientras los puntos cercanos están en violenta agitación.

—El primer análisis matemático de una cuerda vibrante que llegara a algún resultado positivo fue llevado a cabo por B. Taylor en 1713.

🖵 *Cambia a retrato de Taylor y enunciado: "en cada punto de la cuerda, la aceleración normal es proporcional a la curvatura."*

Taylor aplicó la segunda ley de Newton a un elemento diferencial de la cuerda, pero a pesar de este prometedor comienzo, no reconoció el resultado como una ecuación diferencial del movimiento; de hecho, aunque se sabían resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias, el concepto de derivada parcial aún no era de uso general.

Sin formar ninguna ecuación en derivadas parciales, demostró directamente que el perfil de la cuerda en cada instante estaba dado, en notación moderna, por

🖵 *se añade* $u = K \text{ sen} \frac{\pi}{\ell}x$

donde u es la elongación (separación de la cuerda de la posición de equilibrio) de un punto a distancia x del origen, ℓ es la longitud de la cuerda y K una constante relacionada con la tensión y la composición material de la cuerda. Esta solución de Taylor corresponde experimentalmente al "armónico fundamental",

🖵 *aparece la fórmula de la frecuencia*

con frecuencia (obtenida por el propio Taylor)

$$\nu = \frac{1}{2\ell}\sqrt{T/\sigma},$$

donde T es la tensión de la cuerda, $\sigma = \rho/g$, ρ densidad de la cuerda y g la aceleración de la gravedad.

Se sabía experimentalmente que la forma de la cuerda no era siempre sinusoidal:

🖵 *Cambia a imagen de la vibración fundamental y los armónicos segundo, tercero, cuarto.*

Mersenne en 1633 había encontrado otros "armónicos", con frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental, y Noble y Pigot (c. 1674) así como otros probaron también experimentalmente que el k-ésimo armónico corresponde a una vibración con $k-1$ nodos.

La deducción estándar de la ecuación de la cuerda vibrante, como puede verse ahora en muchos textos (por ejemplo [6], pp. 417 y ss., o [9]), se obtiene haciendo las siguientes simplificaciones:

HIPÓTESIS:

1.- La cuerda es perfectamente elástica y no ofrece ninguna resistencia a la flexión.

2.- La tensión causada por el estiramiento de la cuerda antes de fijarla en los puntos extremos es tan grande que la acción de la fuerza gravitatoria sobre la cuerda puede despreciarse.

3.- El movimiento de la cuerda es una vibración transversal de pequeña amplitud en un plano vertical, es decir, cada partícula de la cuerda se mueve estrictamente en sentido vertical,

4.- La elongación y la pendiente en cualquier punto de la cuerda son de valor absoluto pequeño ("pequeñas vibraciones").

También suele suponerse

5.- La cuerda es homogénea: la densidad de la cuerda (masa por unidad de longitud) es constante.

—Se consigue con estas hipótesis que la tensión sea tangencial (por 1 y 2) y que las componentes horizontales de la tensión sean constantes por 3. También, que la longitud de la cuerda entre puntos muy próximos sea prácticamente igual a la distancia entre ambos (por 4). Así, planteando la segunda ley de Newton,

Cambia a dibujo de la descomposición de fuerzas en puntos próximos de la cuerda

como puede observarse en la figura, la fuerza que actúa en un trozo pequeñito de la cuerda (entre abscisas x y $x+\Delta x$) debido a la tensión tangencial de la cuerda, se reparte en componentes horizontales iguales y de sentidos opuestos, que se compensan, y componentes verticales de sentidos opuestos que dan como resultante la diferencia expresada en la fórmula

(aparece la fórmula)

$$T\ \tan\alpha^* - T\ \tan\alpha = T\cdot(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t))$$

puesto que $\tan\alpha$ y $\tan\alpha^*$ son las pendientes de las tangentes en los extremos correspondientes a x, $x+\Delta x$. Por su parte,

se añade "masa por aceleración" etc.

el producto de la masa por la aceleración será $\rho \Delta x$ (aquí se usa $\Delta s \approx \Delta x$) por la aceleración u_{tt}.

Cambia la diapositiva a operaciones con las fórmulas anteriores

Igualando y haciendo operaciones, al pasar al límite para $\Delta x \to 0$ encontramos que el movimiento de la cuerda vibrante viene regido

aparece la ecuación $u_{tt} = c^2 \cdot u_x x$

por la "ecuación de ondas unidimensional".

—(PAUSA)

Nueva diapositiva con el título

3. El planteamiento de D'Alembert.

El primero en escribir esta ecuación

Cambia a retrato de D'Alembert con la ecuación de la cuerda vibrante

fue D'Alembert en 1747, a sesenta años de la publicación de los *Principia.* Este año también fue el de la visita de Bach a Federico II de Prusia en su castillo de Sans Souci, que dió lugar a la composición de su *Ofrenda Musical.* Vamos, pues, a relajarnos un momento oyendo un fragmento de esta composición,

suena la 'Fuga canónica' de la Ofrenda Musical *de* **J.S. Bach** *y aparecen varias vistas de Sans Souci, sobre las que se superpone un retrato de Bach*

en honor del gran músico en el 250 aniversario de su muerte.

—PAUSA LARGA—

Nueva diapositiva con la solución mediante cambio de variable

Esta ecuación, que ahora se resuelve simplemente mediante un sencillo cambio de variable para llegar a una solución general del tipo

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

la resuelve D'Alembert (para $c = 1$), tras haberse enfrentado con ella sin éxito en varias ocasiones anteriores, de la siguiente manera:

Cambia a diapositiva con solución de D'Alembert

Llamando p y q a las derivadas parciales de u respecto de x y t, observa que la ecuación significa que hay igualdad entre las derivadas cruzadas de q y p. Para él, esto es suficiente para concluir que la forma $q\,dx + p\,dt$ es una diferencial exacta, la diferencial por tanto de una cierta función v, de modo que, operando con las diferenciales de u y de v, se observaba que $u+v$ tenía que ser una función arbitraria de $x+t$ y $u-v$ una función arbitraria de $x-t$, lo que llevaba a la solución general correspondiente a este caso ($c=1$). En trabajos posteriores utilizaría el método de separación de variables.

—El significado físico de esta solución es realmente notable. Detengámonos un momento en el caso particular

☐ *Cambia a la solución con la condición* $\psi = 0$

$\psi = 0$, y veamos dónde nos lleva la solución $u(x,t) = \phi(x-ct)$.

☐ *Se sustituyen las fórmulas anteriores por* $u(x+\Delta x, t+\Delta t) =$ *etc.*

Una observación tan anodina desde el punto de vista matemático como que $u(x+\Delta x, t+\Delta t) = \phi(x+\Delta x - c(t+\Delta t)) = \phi(x-ct) = u(x,t)$ siempre que $\Delta x = c\cdot\Delta t$, se traduce en que u es una "onda que viaja" a velocidad c: la elongación en un punto x en un instante t se traslada al cabo de un tiempo Δt al punto situado a la derecha de x a una distancia $\Delta x = c\cdot\Delta t$, de manera que $\phi(x-ct)$ representa una "onda viajera"

☐ *se añaden dibujos de "ondas viajeras"*

que se propaga, como en un latigazo, en la dirección de las x positivas con velocidad c sin cambiar de forma, esto es, sin *dispersión*. Análogamente, $\psi(x+ct)$ representa otra onda que se propaga con la misma velocidad en dirección opuesta,

☐ *se sustituyen los dibujos anteriores por otro de superposición de ondas*

¡y la solución general es la superposición de dos de ellas!

☐ *Nueva diapositiva con el título siguiente*

4. Euler frente a D'Alembert

En este punto, como tantas otras veces, por la puerta abierta por D'Alembert,

☐ *Cambia a retrato de Euler. Poco a poco va apareciendo otro más pequeño de D'Alembert.*

se coló Euler como un ciclón.

En los años siguientes a la aparición del trabajo de D'Alembert, Euler va publicando sus propias reflexiones sobre el problema de la vibración de las cuerdas, que aclaran, completan y amplían (como es su costumbre) los resultados previamente conocidos.

Podría decirse que, más pegado a la realidad física, Euler interpretó

aparece "solución determinada por condiciones de contorno y condiciones iniciales."

que la solución de D'Alembert significaba (para c=1) que $u(x,t)$ era conocida una vez que se fijaban las condiciones de contorno y las *condiciones iniciales.*

Cambia a las fórmulas de la solución general y las condiciones $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$.

Es decir, partiendo de la solución general, si conocemos la posición inicial de la cuerda, $f(x)$, y la velocidad inicial, $g(x)$, entonces

aparece la solución de Euler

el valor de $u(x,t)$ está dado explícitamente por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-t) + f(x+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} g(x-\xi)\,d\xi$$

(Euler realmente sólo dió una construcción geométrica equivalente a esta fórmula).

Retratos de Euler y D'Alembert con fondo musical "acaramelado", el 'Adagio' del Concierto para dos trompetas en Do mayor *de* **A. Vivaldi.**

—Las relaciones entre Euler y D'Alembert fueron bastante curiosas.

Euler había tenido noticia de los trabajos de D'Alembert en torno a 1743 a través de cartas de Daniel Bernoulli. «Ciertamente en esta época Euler y D'Alembert estaban en muy buenos términos,

(aparecen dos corazones rojísimos)

Euler tenía gran respecto por la obra de D'Alembert y los dos mantenían correspondencia sobre muchos temas de interés mutuo.»(*MacTutor*)

—(PAUSA musical)—

Sin embargo, las relaciones entre ambos

Cambia a retratos de Euler y D'Alembert mirando en direcciones opuestas, con fondo musical "tormentoso", la 'variación n. 26' de las Variaciones Goldberg *de* **J. S. Bach.**

pronto fueron cambiando a peor.

Entre otras cosas, D'Alembert estaba molesto con Euler porque creía que Euler le robaba sus ideas y no le daba el crédito debido. En cierto sentido esto estaba justificado, pero por otra parte sus trabajos eran habitualmente tan embrollados que Euler no podía seguirlos y recurría a empezar desde el principio a clarificar el problema a resolver e intentaba llevarlo por su cuenta hasta las últimas consecuencias, llegando a la solución más general posible.

Por su parte, Euler recelaba de D'Alembert.

□ *aparecen "corazones rotos"*

—(PAUSA musical)—

Así, cuando Federico II de Prusia intentó persuadir a D'Alembert por segunda vez para que aceptase la presidencia de la Academia de Berlin, Euler se oponía fuertemente y escribió a Lagrange:

□ *Texto de la carta con un pequeño retrato de Euler*

> ... d'Alembert ha intentado socavar [mi solución del problema de la cuerda vibrante] con varias minucias, y esto por la única razón de que él no la obtuvo por sí mismo. ... Él piensa que puede engañar a los semi-instruidos con su elocuencia. ... Quería publicar en nuestra revista no una demostración, sino una mera afirmación de que mi solución es defectuosa. ... Puede juzgar por esto qué alboroto podría desencadenar si se convirtiera en nuestro presidente.

Sin embargo, la estima de D'Alembert hacia Euler nunca decayó. Euler no hubiera debido preocuparse. De hecho, cuando d'Alembert visitó a Federico II, declinó la oferta de la presidencia otra vez, e intentó persuadirle de que hiciera presidente a Euler.

En el problema de las cuerdas vibrantes, sus posiciones pronto resultaron enfrentadas. La discusión entre ambos se centró en la clase de funciones que eran admisibles en la fórmula de la solución general a la que ambos habían llegado.

Euler,

□ *Nueva diapositiva con un retrato de Euler en la parte derecha*

guiado por el significado físico de la situación, pensaba que era necesario admitir incluso

□ *se va formando un dibujo de una función "con picos" y las ecuaciones correspondientes*

funciones "con picos", permitiendo que no tuvieran derivadas en algunos puntos; él estaba dispuesto a aceptar como forma inicial de la cuerda cualquier distribución de valores físicamente realizable, aunque sólo pudiera definirse gráficamente y no mediante una fórmula. D'Alembert en cambio

☐ *aparece d'Alembert en la parte izquierda y vuelve a sonar la 'variación 26'*

sólo veía aplicable su método a aquellos movimientos en los que la $u(x,t)$ pudiera obtenerse a partir de una única expresión formal. Por ejemplo,

☐ *aparecen textos "non" (d'Alembert) / "oui" (Euler)*

D'Alembert no admitía *pizzicatos* (=pellizcos —a la cuerda, se entiende) y Euler sí.

☐ *Nueva diapositiva con resumen de las ideas de D'Alembert*

En síntesis: la postura de d'Alembert podría reflejarse así

— a partir del estudio de un elemento diferencial de la cuerda llega a la ecuación de ondas;

— obtiene la solución general manipulando diferenciales, aunque en un trabajo posterior de 1750 emplea separación de variables;

— considera extremos fijos que le llevan a una expresión concreta de la solución,

— y en cuanto a las funciones que él maneja, deben estar 'sujetas a una misma ley de continuidad', como se decía en la época, es decir, como hemos señalado anteriormente, tienen que ser expresables mediante una sola fórmula.

Por su parte,

☐ *Nueva diapositiva con resumen de las ideas de Euler*

Euler siguió un camino análogo al de d'Alembert en la obtención de la ecuación de ondas y de la solución general, con una exposición más clara y algo más general que la de d'Alembert. Utilizando como hemos visto las condiciones de contorno y las condiciones iniciales llegaba a la expresión anteriormente mostrada. Y, como acabamos de exponer, admitía cualquier función 'con sentido físico'. Una cuestión adicional que tendrá importancia más adelante es la consideración de las soluciones *particulares* que corresponden a funciones iniciales que pueden expresarse como series de senos. Estas jugarán un papel decisivo en discusiones posteriores.

☐ *Nueva diapositiva con el título siguiente*

5. La solución de D. Bernoulli.

Para terminar de complicar las cosas, en medio de esta discusión aparece nuestro "tercer hombre":

☐ *Cambia a retrato de Daniel Bernoulli. Comienza a sonar, suave, el segundo Allegro del 'Trío-Sonata' de la* Ofrenda Musical *de* **J. S. Bach**

Daniel Bernoulli.

☐ *aparecen las fechas 1734–1739*

—... entre 1734 y 1739, Daniel Bernoulli al estudiar diversos sistemas oscilantes había llegado a la conclusión de que era posible la superposición simultánea de pequeñas vibraciones,

☐ *se añade 1753*

y en 1753 escribió un trabajo en el que afirma que el movimiento vibratorio más general que puede llevar a cabo un cuerpo arbitrario puede componerse mediante una superposición de modos simples de vibración.

☐ *Cambia a dibujo de distintas vibraciones*

Bernoulli, que se había interesado en acústica, reconoció la relación entre las varias vibraciones normales y los armónicos respectivos que se podían hacer emitir a la cuerda. Había descubierto que los movimientos involucrados retienen, en un sentido muy definido, su individualidad —que en el movimiento completo las varias vibraciones normales simplemente se superponen unas con otras.

Partiendo de la solución de Taylor y de algunos experimentos sencillos que él mismo había realizado, daba un argumento físico en favor de la superposición de las distintas frecuencias de vibración. Según él,

☐ *se añade el siguiente texto*

"la cuerda puede formar sus vibraciones uniformes de una infinidad de maneras" con una multiplicidad que "tiende a infinito", implicando que "todos los cuerpos sonoros contienen potencialmente una infinidad de sonidos y una infinidad de maneras correspondientes de realizar sus vibraciones regulares"

☐ *Cambia a diapositiva con la fórmula de una serie de senos y cosenos*

En fórmulas, cada movimiento de la cuerda es expresable como una serie de senos y cosenos en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{\ell} \cos \frac{\pi n c t}{\ell}$$

con coeficientes constantes apropiados.

Como muchos sabréis,

□ *Nueva diapositiva con soluciones de variables separadas*

a esta fórmula se llega usando el método de separación de variables, es decir, buscando *soluciones estacionarias* de la forma $u(x,t) = F(x)\,G(t)$, que cumplan las condiciones de contorno.

□ *van apareciendo la función característica* u_n *de un valor propio* λ_n *y su frecuencia, con sus fórmulas*

Los cálculos correspondiente llevan a soluciones del tipo

$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + C_n \operatorname{sen} \lambda_n t)\ \operatorname{sen}(n\pi x/\ell)$$

—función característica o autofunción del valor propio $\lambda_n = cn\pi/\ell$ —n-ésimo modo normal, con frecuencia $\lambda_n/2\pi = cn/2\ell$.

□ *Nueva diapositiva con resumen de las ideas de D. Bernoulli*

En resumen: D. Bernoulli se remite a la solución de Taylor, sin plantear la ecuación diferencial; obtiene la solución general por superposición de soluciones "taylorianas", sin demostraciones matemáticas (considera la superposición "un nuevo principio físico"), y acepta como funciones admisibles "todas", afirmando que todas son representables mediante series trigonométricas.

□ *Nueva diapositiva: "¿condiciones iniciales?" y sus expresiones*

—¿Cómo encajan estas soluciones u_n con unas condiciones iniciales arbitrarias? Aquí encontramos el salto quizá más atrevido

□ *aparece el texto "Principio de superposición" y* $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(B_n \cos \lambda_n t + C_n \operatorname{sen} \lambda_n t)\ \operatorname{sen}(n\pi x/\ell$

de D. Bernoulli, que por así decir "lleva el principio de superposición hasta el infinito", proponiendo que la solución se logra tomando $u(x,t)$ como suma de la serie que aparece, con coeficientes B_n y C_n a determinar. Esto supone

□ *se añaden* $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x/\ell)$,
$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\lambda_n \operatorname{sen}(n\pi x/\ell)$

que las condiciones iniciales tienen que ser funciones expresables en términos de series trigonométricas. Que esto es siempre posible fue la propuesta revolucionaria de D. Bernoulli,

🖵 *aparece un monigote observando una bomba a punto de estallar*

escandalosa en su momento por causas muy diversas.

Y aquí

🖵 *explosión de la bomba*

estalló la polémica.

🖵 *Nueva diapositiva con el título*

6. Todos contra todos: la polémica general.

«Ni Euler ni d'Alembert estaban inclinados a aceptar [la solución de D.B.] y cada uno planteó su crítica.

🖵 *Nueva diapositiva: retrato de Euler con un texto de 1766*

Euler se dió cuenta rápidamente de lo que acabamos de decir: que una función arbitraria $f(x)$ podría ser representada por una serie de senos. Como, entre otras cosas, cualquier expresión así es impar y periódica, a Euler le pareció que había reducido la afirmación de Bernoulli a un absurdo manifiesto. Que el resultado de Bernoulli daba soluciones —especiales— él no lo negaba. De hecho, conmo sabemos, él mismo había realizado igual descubrimiento algunos años antes.

🖵 *desaparece el texto de Euler y aparece un retrato de D'Alembert con un texto suyo de 1750*

D'Alembert, por su parte, no sólo suscribió todas las objeciones de Euler, sino que fue mucho más lejos. No estaba dispuesto a aceptar ni siquiera que todas y cada una de las funciones impares y de periodo adecuado pudieran ser representadas por una serie de senos, sosteniendo, en particular, que la función tenía que ser dos veces diferenciable puesto que lo eran todos los términos de la serie.

🖵 *desaparece el texto y se superpone un retrato de Lagrange*

Queriendo zanjar la polémica, en 1759, Lagrange, que se encontraba entonces en los comienzos de su carrera, presentó un análisis nuevo del problema, defendiendo la solución de Euler, pero deduciéndola por un método distinto con el que creía poder excluir el uso de infinitésimos, que le llevaba a expresiones integrales de la solución.

🖵 *Cambia a un resumen de la propuesta de Lagrange*

A grandes rasgos, el trabajo de Lagrange se resumiría así:

—obtiene la ecuación de ondas a partir de una "cuerda cargada" (cuerda elástica sin peso con n masas, estudiada ya por J. Bernoulli en 1728 para $n \leq 7$), haciendo $n \to \infty$;

—su solución se basa en interpolación trigonométrica, aproximando las condiciones iniciales;

—expresa la solución general en forma integral;

—funciones admisibles: 'redondeadas', "... la naturaleza no se entretiene en computaciones, pues, en términos físicos, no hay picos en una cuerda; siempre hay una cierta redondez por la consistencia de la cuerda." ¿Piensa quizá en funciones analíticas?

☐ *Nueva diapositiva: retrato de D. Bernoulli con un icono "triunfal" (un corredor entrando en la meta)*

«El análisis de Bernoulli, y especialmente su paso al infinito, había sido cuando menos somero y fragmentario. Sus oponentes encontraron en él muchas cosas rechazables.

En general, las objeciones dejaron a Bernoulli impertérrito.

☐ *aparece D'Alembert y un icono "insultante" (un burro)*

En réplica a las críticas de D'Alembert

☐ *aparece Euler y un icono "descalificador" (un pulgar hacia abajo)*

y a la declaración de absurdidad de Euler, se refirió al hecho de que una suma finita de m términos de la serie podría, mediante una apropiada determinación de los coeficientes, hacerse coincidir en valor con cualquier función dada f en m puntos cualesquiera. No veía razón, por tanto, para rechazar la posibilidad de que la serie que él proponía, teniendo como tiene infinitos coeficientes, no pudiese coincidir con una función arbitraria en una infinidad de puntos. [...]

☐ *aparece Lagrange y el dibujo de un juez*

El intento de Lagrange de cerrar la polémica como juez supremo resultó vano. La controversia a cuatro bandas se difundió por la literatura matemática a lo largo de un periodo de más de un decenio. Como ninguno de los contendientes consiguió convencer a los otros, la repercusión del tema en aquel momento fue despreciable. Cada uno de los litigantes tenía razón en algunos puntos y en otros estaba equivocado.

☐ *reaparece D. Bernoulli. El dibujo de un león se pasea lentamente de derecha a izquierda*

El tiempo ha dado la parte del león de su beneplácito a Bernoulli.»([8])

Se perdió, pues, la primera oportunidad de crear una teoría sistemática de los desarrollos en serie de funciones trigonométricas. Realmente, «... no se hizo ningún progreso sobre esta cuestión hasta el comienzo de la obra de Fourier

☐ *Nueva diapositiva: texto "teoría del calor, J. Fourier, 1822"; se añade luego "PERO ESTO, etc."*

sobre la teoría del calor». ([2], pp. 12–13).

PERO ESTO, QUERIDOS AMIGUITOS, YA ES OTRA HISTORIA ...

☐ *Diapositiva final: Escudo de la Universidad y música FUERTE (subir música), 'Menuet avec les trompettes' del* Concierto de Trompetas *de* **M. R. Delalande**

Referencias

[1] Bos, H. J. M., 1975: *The Calculus in the Eighteen Century I: Foundations*, The Open University Press, Milton Keynes.

[2] Dieudonné, J., 1981: *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

[3] Grattan-Guinness, I., 1970: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

[4] Grattan-Guinness, I. (comp.), 1984: *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910. Una introducción histórica*, Alianza Editorial, Madrid.

[5] Kline, M., 1992: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días (vol. 2)*, Alianza Editorial, Madrid.

[6] Kreyszig, E., 1972: *Advanced Engineering Mathematics* (3rd Ed.), Wiley, New York.

[7] Kreyszig, E., 1971: *Matemáticas avanzadas para Ingeniería* (2 vols.), Limusa-Wiley, México.

[8] Langer, R. E., 1947: "Fourier Series: The Genesis and Evolution of a Theory" *Amer. Math. Monthly*, **54**, Suppl., pp. 1–86.

[9] Sokolnikoff, I. S.; Redheffer, R. M., 1966: *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, (2nd Ed.) McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.

[10] Struik, D. J. (ed.), 1969: *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Harvard Univ. Press.

[11] Truesdell, C., 1975: *Ensayos de Historia de la Mecánica*, Tecnos, Madrid.

Nota. La bibliografía anterior contiene solamente referencias citadas en el texto o libros de carácter general que es casi obligado obligado señalar. Una bibliografía más completa, que incluye referencias de los trabajos originales, así como estudios sobre distintos puntos mencionados de pasada o meramente sobreentendidos, aparecerá (espero) en algún lugar de la 'página web' del área de Análisis matemático:

`http://www.unizar.es/analisis_matematico/`

Puesto que esta no es una bibliografía al uso, añadimos una lista de direcciones de Internet que contienen información textual o de imágenes utilizada en la elaboración de la charla:

— Harrell, E. M.; Herod, J. V.: Linear Methods of Applied Mathematics. Orthogonal series, boundary-value problems, and integral operators. (Texto interactivo, con ejercicios en Maple y Mathematica):

`http://www.mathphysics.com/pde/`

— *The MacTutor History of Mathematics Archive*, el maravilloso fondo de historia de las matemáticas de la Universidad de St. Andrews creado por John J. O'Connor y Edmund F. Robertson:

`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/`

— La versión en hipertexto de W. W. Rouse Ball, 'A Short Account of the History of Mathematics' (4a. ed., 1908):

`http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/`

— Museo de la ciencia de Florencia:

`http://galileo.imss.firenze.it/museo`

— Sitio oficial de Versalles (merece la pena):

`http://www.ChateauVersailles.fr/`

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza. **19**: 69–73, (2001).

Los anillos de Borromeo

José María Montesinos

Departamento de Geometría y Topología

Universidad Complutense de Madrid

1. Historia[1]

El enlace de la Figura 1, formado por tres nudos triviales, aparece por primera vez, en el contexto matemático, en las tablas de nudos y enlaces elaboradas por Peter Tait en 1876. El primero que se refirió a él bajo el nombre *anillos de Borromeo* fue Ralph H. Fox en su famoso "A Quick Trip through Knot Theory" de 1962. Los anillos de la Figura 1 forman el enlace 6^3_2 de las tablas de D. Rolfsen (basadas en las de Tait).

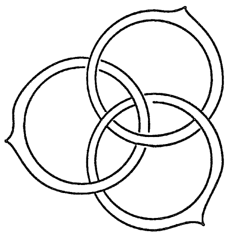


Figura 1.—Anillos de Borromeo en una antigua moneda.

Los anillos aparecen en una moneda de la ciudad de Cremona (Figura 1) y representan la ciudad y la amistad entre el mercenario Cabrino Fondulo (1370–1425), que conquistó Cremona en 1406; el Emperador Segismundo (1368–1475), del que era Vicario; y el antipapa Juan XXIII (1370–1419). Cremona quedó después incorporada a Milán, en 1420, y fue dada en dote a la hija ilegítima del duque de Milán. Su marido, Francisco Sforza (1401–1466) conquistó Milán en 1450 y premió a sus aliados (entre los que estaban los Borromeo) con los anillos. De aquí que aparezcan como símbolo de los Borromeo.

Además de los anillos, tales como están en la Figura 1, es frecuente encontrarlos "mal entrelazados" (y de todas las maneras posibles) en varios lugares cercanos a Milán y

[1]Cfr. Cronwell, Beltrani and Rampichini. *Math. Intell.* **20** (1998), p. 53.

relacionados con los Borromeo. Por mi parte, los he encontrado (mal entrelazados) en el escudo del Almirante Oquendo en su casa del barrio de Ulía en San Sebastián. Desconozco qué origen tienen aquí.

Como símbolo de la Santísima Trinidad, su origen parece ser Petrus Alfonsi (1062–1110), judío converso que luego vivió en Aragón. En su diálogo contra judíos aparece el tetragrama IEUE partido en tres IE, EU, UE.. Luego, de aquí, Joaquín de Fiore (1132–1202) tomó la idea así (Figura 2):

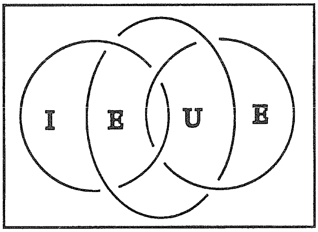


Figura 2.—Tetragrama de Petrus Alfonsi.

En su manuscrito (perdido) del S. XII en Chartres aparecen los anillos de esta manera (Figura 3):

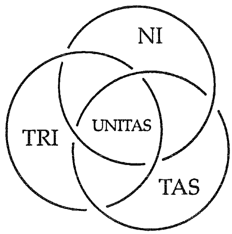


Figura 3.—Anillos de Borromeo como símbolo de la Santísima Trinidad.

2. Geometría

Los anillos de Borromeo interesaron a los cultivadores de la toería de nudos porque tienen la curiosa propiedad de que cada dos componentes están desenlazadas, aunque el enlace no es trivial: cortada una componente, se desenlazan todas. Esto sugirió a Claude Webes (Ginebra) que tal vez fuera este enlace el famoso "nudo gordiano".

Los anillos de Borromeo aparecen espontáneamente en varios contextos matemáticos. Uno de ellos es el de cristalografía geométrica. En las *International tables for Crystalography* están descritos los 219 grupos cristalográficos euclídeos tridimensionales. Uno de ellos, el denotado allí $I_{2_1 2_1 2_1}$, es el grupo generado por rotaciones de 180° en las líneas gruesas del cubo de la Figura 4.

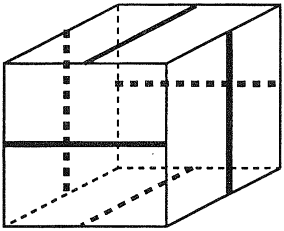


Figura 4.—El cubo fundamental de $I_{2_1 2_1 2_1}$.

El grupo en cuestión actúa propia y discontinuamente en el espacio euclídeo E^3. El cociente de la acción es la 3-esfera S^3 y la imagen de los ejes de rotación son los anillos de Borromeo (Figura 5).

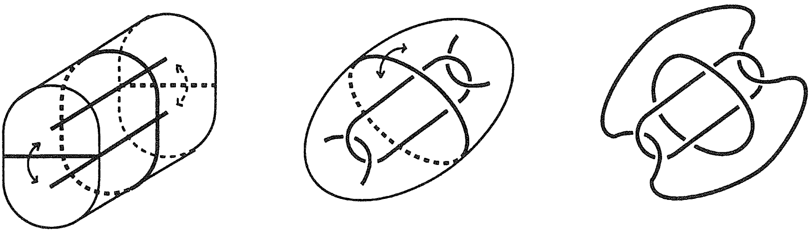


Figura 5.—Anillos de Borromeo en el cociente.

Esto demuestra que S^3 tiene estructura euclídea singular. La singularidad está formada por los anillos de Borromeo. La geometría cerca de una componente de un anillo es $S^1 \times C_\pi$, donde C_π es un cono de ángulo 180° (Figura 6).

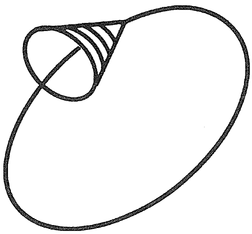


Figura 6.—El cono C_π.

En la cristalografía hiperbólica también aparecen los anillos. El grupo $PSL\,(2,\, \mathbb{Z}[i])$ es el grupo de homografías de la recta proyectiva compleja (denotada $\mathbb{C}P^1$) en cuya expresión

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son enteros de Gauss, es decir, $\alpha = m + ni$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, etc.. Este grupo fue considerado por Picard.

Como $\Gamma = PSL\,(2,\,\mathbb{Z}[i])$ es un subgrupo discreto de $PSL\,(2,\,\mathbb{C})$, y éste es el grupo de isometrías directas del espacio hiperbólico H^3, resulta que $PSL\,(2,\,\mathbb{Z}[i])$ actúa propia y discontinuamente en H^3: es un grupo cristalográfico hiperbólico. La acción de Γ tiene puntos fijos, pero Γ posee un subgrupo Λ de índice 24 tal que $\Lambda\backslash H^3$ es el complemento en S^3 de los anillos de Borromeo. Esto demuestra que este complemento es una variedad hiperbólica, completa y de volumen finito. Este volumen puede calcularse (es aproximadamente 7'3277) y es un invariante de los anillos de Borromeo frente a equivalencia de enlaces. Otro modo de expresar esto es que S^3 tiene estructura hiperbólica "singular": la singularidad son los anillos, cuya longitud es cero y cuyo ángulo cónico (en un disco transversal) es cero también (esto es uno modo útil de hablar nada más).

Así que tenemos dos extremos: los anillos son euclídeos con ángulo de 180° e hiperbólicos con ángulo 0°. Puede verse que son hiperbólicos también para todos los ángulos entre 0° y 180°. Además, entre 180° y 360° son esféricos. Para 360° se produce una degeneración: esto es necesariamente así, ya que en todas estas estructuras geométricas los anillos son tres geodésicas. Para ángulo 360° han de ser tres geodésicas de la 3–esfera y dos cualesquiera de éstas se enlazan. La curva de volúmenes de estas estructuras puede calcularse mediante la fórmula de Schläfli y es como en Figura 7.

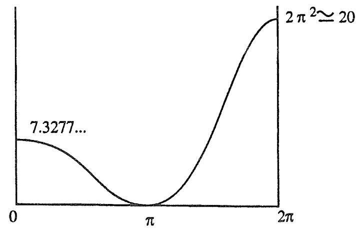


Figura 7.—Curvas de volúmenes obtenidas con la fórmula de Schläfli.

(Estos resultados están en Hilden, Lozano and Montesinos: "On the Borromean Orbifolds: Geometry and Arithmetic" en *Topology' 90*, pp. 133–267, Walter de Gruyten, Berlin, New York, 1992).

3. Variedades tridimensionales

Los anillos de Borromeo están también relacionados estrechamente con la topología y geometría de las variedades de dimensión tres. En efecto, puede verse que los anillos son un enlace universal, es decir, toda variedad de dimensión tres, cerrada y orientable, es una cubierta de S^3 ramificada sobre los anillos de Borromeo ("*branched covering*"). Además, puede especificarse que los índices de ramificación dividen a 4. Si damos a los anillos de Borromeo la estructura hiperbólica con ángulo cónico de $\pi/2$, entonces hay un grupo $U \leq PSL(2, \mathbb{C}[i])$ de isometrías hiperbólicas directas tal que U/H^3 es S^3 con singularidad los anillos de ángulo $\pi/2$. El resultado que se deduce de todo esto es que dada una variedad tridimensional cerrada y orientable M existe un subgrupo $\hat{M}$ de índice finito de U tal que M es $\hat{M}/H^3$. En este sentido decimos que U es un grupo universal. El grupo U es un grupo aritmético y tiene muchas propiedades interesantes.

Este teorema tiene importantes consecuencias. Una de ellas es que M es simplemente conexa si y solo si $\hat{M}$ está generado por rotaciones (necesariamente de ángulos $\pi/2$, $3\pi/2$, π). Uno se pregunta si este resultado no podrá llevar a una demostración de la conjetura de Poincaré (el problema abierto más difícil de esta teoría).

(Estos resultados están en Hilden, Lozano, Montesinos and Whitten: "On universal groups and three manifolds" *Inventiones. Math.* **87** (1987) 441–456).

4. Conclusión

Tres cartulinas aúreas entrelazadas proporcional los 12 vértices de un icosaedro regular (Figura 8). A la vez, los bordes de estas cartulinas son los anillos de Borromeo. Podría construirse una escultura muy bonita colgando este diseño en algún lugar emblemático de la Universidad (¿El Paraninfo?). En espera de este proyecto que sugiero, podemos contemplar la bella simetría trigonal de los anillos de Borromeo de Robinson frente al Edificio de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.

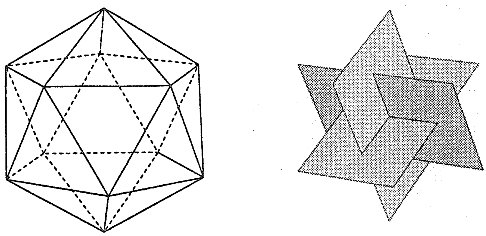


Figura 8.—Anillos de Borromeo obtenidos con tres cartulinas aúreas entrelazadas.

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 75–80, (2001).

A propósito de la escultura "Creación" donada por John Robinson

José Luis Viviente Mateu[1]

1. Introducción

El pasado 16 de Noviembre de 2000, dentro de los actos de celebración del "Año Internacional de las Matemáticas" por la Universidad de Zaragoza, tuvo lugar la inauguración de la nueva y, entendemos acertada, defintiva instalación de la escultura "Creación" donada por su autor, el escultor inglés John Robinson, el pasado mes de junio de 1991 a la Facultad de Ciencias de Zaragoza.

Ante todo permítanme que agradezca al Mgfco. y Excmo. Sr. Rector su sensibilidad y apoyo decidido a la adecuada instalación, al Ilmo. Sr. Secretario General de la Universidad por su ilusión, perseverancia y eficaz superación de cuantos obstáculos se presentaban, al Ilmo. Sr. Decano de la Facultad de Ciencias por sus gestiones y preocupación particularmente desde el 22-II-1998 (en que aprovechamos nuestro discurso de recepción como Académica de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza de la Ilma. Profesora Dra. Dª. MªTeresa Lozano Imizcoz, para reiterar, por escrito, a las autoridades académicas nuestra solicitud de instalación de la escultura), así como a la actual Directora del Departamento de Matemáticas, cuyo interés por su instalación es de todos bien conocido y se ha puesto una vez más en evidencia con motivo de su presidencia de la Comisión organizadora de los actos realizados en la citada celebración. Nuestro agradecimiento comprende de modo muy especial la labor del aparejador D. Fernando Galindo, de la Unidad Técnica de Construcciones de la Universidad de Zaragoza; su observación de las simetrías de la trenza matemática representada por la escultura, le llevaron a decidir fuese de forma exagonal el pedestal y a introducir un eficaz y esbelto sistema de fijación de la escultura al mismo. Su acierto estético y práctico por ambos hechos nos producen una gran satisfacción, de la que estoy seguro todos nos sentimos deudores.

Pese a las naturales limitaciones de la edad, puesto que nos correspondió vivir las

[1]Catedrático de Geometría 5 (Diferencial) ya jubilado, Profesor Emérito, Académico Numerario

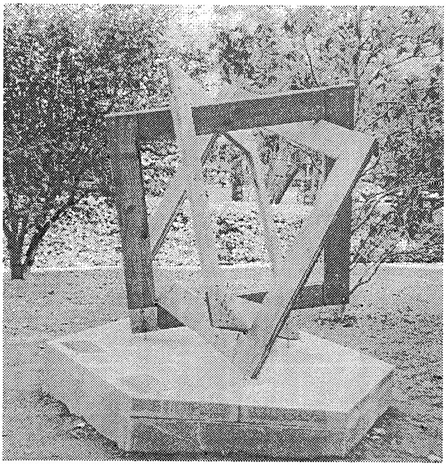


Figura 9.—La escultura *Creación* en su actual emplazamiento, frente al edificio de Matemáticas

circunstancias que motivaron la presencia actual de la escultura "Creación" ante el edificio de Matemáticas en nuestros últimos años de servicio activo, hemos considerado un deber para con la Universidad dejar constancia escrita –aunque sucinta– de tal experiencia. Una más completa publicación se hará en el 2001. Con este escrito, por tanto, esperamos queden precisados los aspectos histórico-sociales que hemos denominado "biográficos" de la escultura Creación una vez que, desde el punto de vista matemático, de modo tan ameno e interesante han sido expuestos en su conferencia por el Profesor Montesinos.

2. Aspectos biográficos de la escultura Creación

Empezaremos haciendo constar que esta escultura, junto con otra análoga donada al Instituto de Estudios Catalanes (en donde desde aquella fecha está expuesta en lugar destacado, y en perfecto estado de conservación) en el mismo mes de junio por su autor, fueron expresamente realizadas en 1991 por John Robinson para tales donaciónes, a la vez que realizaba también en madera otra con cuadrados de 4 metros de lado para la Robert Hefner III Collection, Aspen. Las tres son réplicas de la realizada en madera y neón de 1 m. de lado en 1990 por el autor en su estudio de Somerset (Gran Bretaña) quien, el mismo año de 1990, hizo una primera réplica en bronce con lado de 40 cms. que pertenece a The Philip Trust Collection. Así mismo, el Istituto de Estudios Catalanes en 1991, distribuyó una quinta réplica en acero inoxidable, de 15 cms. de lado, realizadas también en Somerset por el escultor, uno de cuyos ejemplares nos honra poseer y con gusto prestamos para ayudar a la instalación de la escultura inaugurada .

La escultura "Creación" pertenece a la serie de esculturas denominada "Esculturas

Simbólicas" por su autor Jonh Robinson, serie que aparece recogida sobre papel couché en un magnífico volumen que, con el título "Symbolic Sculpture by John Robinson", se publicó en 1992 por la Edition Limitée de Carouge-Geneva Switzerland, y que, recientemente, también ha publicado un CD-ROM con 23 esculturas de la serie, con movimiento rotatorio, en disco realizado por la Nick Mee Virtual Image que, amablemente nos remitió John Robinson en el último mes de junio y que, el mismo mes antes de marchar de vacaciones, pusimos a la disposición del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

En febrero de 1982, asistimos al coloquio sobre "Structure Transverse des Feuilletages" organizada por el Prof. Pradines en la Universidad Paul Sabatier, coloquio en el que volvió a ponerse en relieve el interés de la noción de grupoide introducida por Ehresmann. Por circunstancias [2] asociadas a nuestros trabajos sobre la estructura transversa de una foliación, nos desplazamos en Diciembre del curso 89/90 con una ayuda de la Comisión de las Comunidades Europeas (dentro del marco del programa ERASMUS) y participamos en la School of Mathematics del University College of North Wales para tomar parte en la experiencia que allí desarrollaban sobre un nuevo curso "Mathematics in Context".

Sobre la actividad desarrollada en el mismo, hicimos varias comunicaciones y breves publicaciones[3] aunque, más tarde, apareció una más detallada en mi colaboración a la serie de Contribuciones Matemáticas de la Editorial Complutense, la publicada en 1994 en homenaje al profesor José Javier Etayo Miqueo por su jubilación (a la vez que la nuestra el 30 de Septiembre de 1991). El texto fue remitido en el curso 1990/91 como consta en el propio escrito.

En esta publicación decíamos: "El interés por la teoría de los nudos surgió con la epistemología de los vórtices en Física, debiéndose a Tait el primer resultado básico al establecer una clasificación de los nudos de Thomsom hacia 1870 ..." para seguir unas líneas más abajo: "...En teoría de nudos los modelos físicos son conocidos por el hombre desde el siglo VIII antes de Cristo (el nudo Antrea que se expone en el Museo Nacional de Helsinki). Hoy aparecen en varias áreas importantes de la matemática aplicada, como

[2] En el estudio de la topología del espacio de las hojas el papel del grupoide de holonomía de Godbillon es esencial, pero hasta aquellas fechas los distintos estudios no permitían obtener una caracterización general única. En el coloquio conocimos al Prof. Ronnie Brown, cuyos trabajos sobre grupoides topológicos desde mediados de los 70 eran notorios. Una breve primera visita y toma de datos nos llevaron a organizar una más entretenida serie de discusiones sobre el grupoide de holonomía, aprovechando nuestra participación en el nuevo curso "Mathematics in Context" en diciembre de 1989.

[3] Destacan entre ellas: "La Geometría en la formación personal", Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática, Universidad de Evora, 1990. - "La importancia de la Geometría en la educación Matemática", Actas del I Congreso Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática, Sociedad THALES, Universidad de Sevilla, 1990.

la ya aludida, o aquella de la Física Teórica como la «teoría de cuerdas», en el estudio de la molécula del DNA, etc., o la relación entre la teoría de nudos y las Álgebras de Von Newman".

Comentando, con un buen amigo en el verano de 1991, el interés que en didáctica de la Matemática había despertado la teoría de nudos[4], nos facilitó el conocimiento del texto clásico de náutica, anterior a la consideración de la teoría de nudos por Lord Kelvin, escrito por Mr. Darcy Lever titulado "Arte de Aparejar" en traducción al castellano por el Capitán de Navío D. Baltasar Vallarino y publicado en Madrid en 1842 en la imprenta de D. José Félix Palacios. Este libro que presenta una serie de nudos náuticos con sus nombres, con dibujos exquisitos sobre su construcción, creemos podría ser considerado como lazo de unión entre el nudo fosilizado "Antrea" antes citado, y los estudios matemáticos que de los mismos inició Lord Kelvin. Lo que así comunicamos a los profesores Lozano y Montesinos, facilitandoles unas notas sobre el citado texto clásico. El nuevo curso "Mathemátics in Context", incluía la presentación de una exposición titulada "Mathematics and Knots" en la que se recogían algunas obras de John Robinson, y se hacía referencia al catálogo "Symbolism: sculptures and tapestries", de la exposición en el "Pop Maths. Roadshow" en la Universidad de Leeds en septiembre de 1989. Este curso y las dos exposiciones citadas nos permitieron conocer al escultor John Robinson. Como señalábamos, el catálogo de la exposición "Mathematics and Knots" concluye diciendo que "la estructura geométrica de los nudos parece algo básico para *cómo debe verse la lógica del espacio*", opinión que seguimos compartiendo totalmente.

Agradablemente sorprendido y atraídos por las posibilidades formativas que la exposición "Mathematics and Knots" facilitaba, expresamos al Prof. Brown la posibilidad de presentarla en Zaragoza caso de que coinsiguiese interesar en ello a la Universidad. Hecho que comenté con el Vicerrector de Extensión Universitaria. Ahora bien, en septiembre de 1990 nos enteramos de que el Instituto de Estudios Catalanes se había puesto en contacto con Jonh Robinson y proyectaba realizar la exposición sobre la serie "Esculturas Simbólicas" que el autor había hecho en septiembre de 1989 en la Universidad de Leeds antes aludida. Di cuenta de ello al Vicerrector de Extensión Universitaria y puesto que las esculturas estarían en Barcelona, con lo que su traslado a Zaragoza suponía un gasto mínimo, gestionamos la posibilidad de que, concluida la exposición en Barcelona se trasladase a Zaragoza. Como el propio escultor fue en noviembre de 1990 a Barcelona, se acercó dos días a Zaragoza para confirmar su posible traslado de la exposición y conocer

[4]Después del curso de doctorado que desarrollamos en el 1971/72 con el título "Nudos, enlaces y grupo fundamental", sensibilizados al tema como estábamos, nos fue fácil comprender la naturaleza e interés didáctico que de la teoría de nudos nos descubrió nuestra estancia en la University College of North Wales en 1989

las salas en que se ubicaría. La exposición tuvo lugar en Barcelona, en el Instituto de Estudios Catalanes, del 10 al 24 de junio, con lo que en Zaragoza se realizó del 26 de junio al 12 de julio de 1991.

Debemos señalar que en el Instituto de Estudios Catalanes de Barcelona existe una segunda escultura simbólica de John Robinson, de 1980 en bronce, que titula *Seres Dependientes*, una a modo de toro de 1 m. de diámetro externo pero con sección un cuadrado. De hecho, se trata de un espacio fibrado de base una circunferencia –corazón del toro– fibra un cuadrado y grupo las rotaciones (0, 180).

Desde el primer momento, John Robinson nos dio a conocer su propósito de donar a la Universidad de Zaragoza una réplica de su reciente escultura en madera y neón "Creación". Después de visitarnos en noviembre de 1990, presentarle al Excmo. Sr. Vicerrector de Extensión Universitaria y mostrarle las salas del Paraninfo de la Universidad en que se expondrían sus esculturas, su idea fue construir una "Creación" con unos cuadrados cuyo lado fuese de 3 metros de largo. Posteriormente, como nos precisó por fax, por razones de su trasporte hasta España, las realizó de la longitud que hoy se aprecia en la escultura expuesta.

Tanto los catálogos, como los carteles anunciadores y las tarjetas invitando a las respectivas exposiciones (estos dos últimos reproducidos en blanco y negro al final de esta nota, así como la fotografía[5] del Prof. Brown y el escultor John Robinson mostrando el nudo de trébol realizado con una banda o cinta de Moebius), fueron realizados sirviéndose de las planchas que se hicieron para el tiraje de las utilizadas para la exposición de la Universidad de Leeds, traduciendo el texto al catalán y castellano e introduciendo las modificaciones que los patrocinadores, lugar y fechas de presentación exigían. Es por ello que la escultura "Creación" no aparece en el catálogo (con el ISBN-0-9514947-0-8 en castellano o catalán) que se refiere a la situación de la serie en 1989. Los tres presentan en color el (3,1)-nudo toro de Moebius, que el escultor denomina "Eternity", espacio fibrado de base una circunferencia, fibra un triángulo y grupo el de rotaciones (0, 120, 240). En este caso se observa que sólo aparece una arista que es el (3, 1)-nudo toroidal.

Concluiremos esta nota señalando:

1 Que la estrategia utilizada por Tait en su inicio de clasificación de los nudos, es "still used today in our tabulación" dicen Hoste, Thistlethwaite y Weeks en su publicación, en el vol. 20 del The Mathematical Intelligencer, "The Firts 1.701.936 Knots".

2 Que después de la conferencia del Profesor Montesinos, cualquiera que sea el significado histórico que se le atribuyó o se le pueda atribuir, está claro que la **existencia del enlace representado por la escultura Creación es algo propio y muy**

[5]Reproducida con autorización del Prof. Brown y John Robinson.

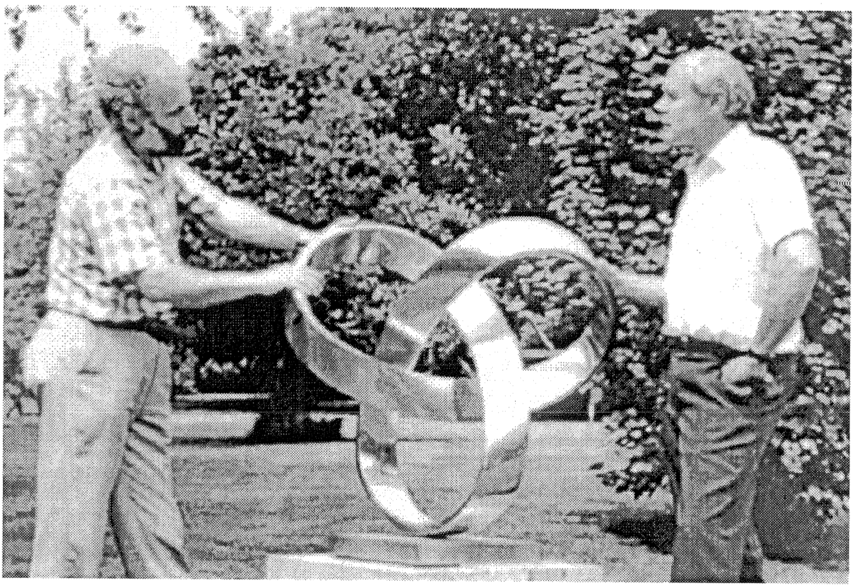
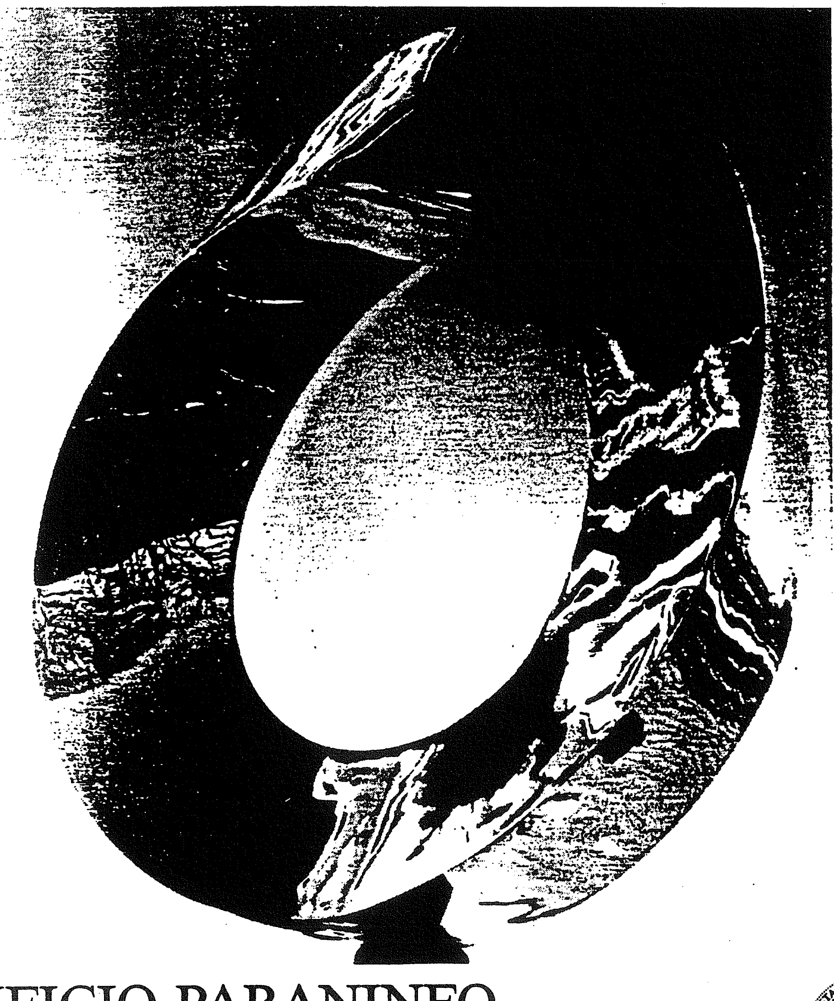


Figura 10.—El Profesor Ronnie Brown (a la derecha) con John Robinson en el estudio de este último en Somerset

ligado a la Universidad de Aragón ya que, no sólo fue engendrado en el ambiente intelectual que frecuentó en estas tierras Pedro Alfonso al principio del siglo XII, sino que, con su propagación personal por toda Europa, nos aparece como precedente de la vocación europeista de Aragón.

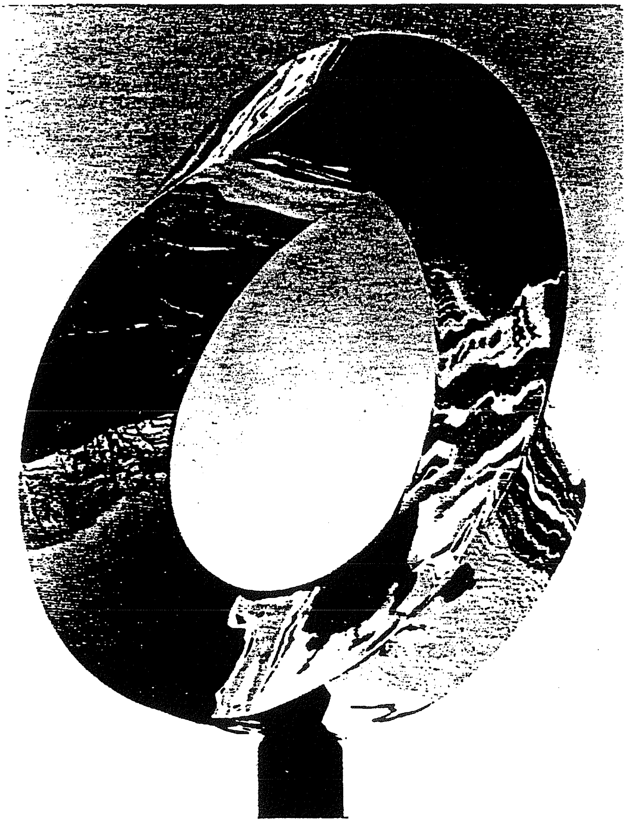
SYMBOLIC SCULPTURES
DE
JOHN ROBINSON



EDIFICIO PARANINFO
(ANTIGUA FACULTAD DE MEDICINA Y CIENCIAS)

DEL 26 DE JUNIO AL 12 DE JULIO

ORGANIZA: SECRETARIADO DE ACTIVIDADES CULTURALES (UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA)
COLABORA: DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS (UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA) DIPUTACION PROVINCIAL DE ZARAGOZA



EL RECTOR DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SE COMPLACE EN INVITARLE A LA INAUGURACION DE LA EXPOSICION

"SYMBOLIC SCULPTURES"

DE

JOHN ROBINSON

QUE TENDRA LUGAR EN EL PARANINFO DE LA UNIVERSIDAD
(ANTIGUA FACULTAD DE MEDICINA Y CIENCIAS)
EL MIERCOLES, 26 DE JUNIO DE 1991, A LAS 20.00 HORAS

ORGANIZA: SECRETARIADO DE ACTIVIDADES CULTURALES (UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA)
COLABORA: DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS (UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA)
DIPUTACION PROVINCIAL DE ZARAGOZA

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19**: 83–85, (2001).

Salidas profesionales de las Matemáticas

Antonio Elipe[1]

Grupo de Mecánica Espacial

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

La llamada *mesa redonda* que me cupo el honor de moderar y que tenía por título *Salidas profesionales de las Matemáticas*, fue programada por los organizadores de los *Dos Días Matemáticos* con objeto de que sirviese de punto de encuentro entre, por un lado, licenciados en Ciencias Matemáticas que estuviesen ya trabajando y, por otro, los todavía estudiantes, y los profesores de la licenciatura, de modo que se dispusiese de información de primera mano de las dificultades con que se habían encontrado esos licenciados para ocupar un puesto de trabajo, así como si dicho trabajo tenía relación con lo que habían estudiado en la Facultad o por el contrario no tenía nada que ver, y era simplemente un modo de sobrevivir. Por otra parte, creímos que dicha mesa redonda también podría ser de gran interés para los profesores de la licenciatura, pues podríamos entresacar información sobre si nuestras asignaturas, que casi siempre impartimos con la creencia de que son las fundamentales en la carrera, realmente son de utilidad a la hora de guerrear en el mercado de trabajo para conseguir un contrato, o en el desarrollo del trabajo, una vez logrado éste.

Parece ser que la inclusión de esta mesa en la programación fue un acierto, dada la respuesta masiva del público asistente, que llenó el Aula Magna de Ciencias, lo que trajo a la memoria de los "viejos del lugar" situaciones personales vividas hace algún tiempo en ese mismo recinto. Añoranzas al margen, creo que hubo una perfecta sintonía entre todos los participantes, tanto en un lado de la mesa como en las gradas del Aula, con un alto grado de participación por ambas partes y un diálogo fluido, yendo directamente a la cuestión, y sin caer en retóricas inoperantes.

Nuestros invitados fueron Enrique López Mingueza, responsable de una aplicación informática en EDS, una empresa multinacional, Beatriz Bernal Sierra, controladora aérea, Belén Martín Peiró, de GMV, empresa del sector aeroespacial, Almudena Antuña López, profesora de Enseñanza Secudaria y Manuel Aguado Benedí, profesor titular de Matemática Aplicada en el CPS de esta universidad y director de Universa. Todos ellos han sido alumnos de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas por esta Universidad

[1]Académico Numerario

de Zaragoza y como podemos ver por su afiliación, en la actualidad se encuentran desarrollando su labor profesional en un amplio espectro de tareas diferentes. Así mismo, con excepción del profesor Aguado, todos ellos son licenciados *recientes*, por lo que los problemas con que han tenido que enfrentarse para conseguir un puesto de trabajo han sido similares a los que se podrían encontrar gan parte de los asistentes a la mesa redonda, es decir, alumnos de la licenciatura de Matemáticas.

En la ronda de intervenciones de los invitados, cada uno de ellos aportó su experiencia personal en el mundo laboral, cómo había obtenido el trabajo, en qué consistía su trabajo actual, su grado de satisfacción, la relación de su tarea con los estudios realizados, etc.. Como era de esperar, la experiencia de cada participante era prácticamente diferente de la de los restantes, puesto que se narraron situaciones desde para quien el trabajo ocupado correspondía a la primera entrevista que había realizado, hasta quien, haciendo caso de la intuición, decicidió no asistir a la entrevista para un trabajo que presumía no le iba a satisfacer, lo que en este caso particular resultó un acierto, dado que su actual ocupación profesional le resulta totalmente gratificante.

Alguno de los puestos ocupados se asocian típicamente con las salidas de un licenciado en Matemáticas, como puede ser la docencia, o la investigación, o la informática. Sin embargo, causó algo de sorpresa el trabajo de Controlador aéreo, pues para este puesto no es requisito el título de licenciado en Matemáticas, ni tan siquiera en Ciencias. En efecto, la oposición consiste en unos temarios e inglés. La presencia de Beatriz Bernal es el contraejemplo de que esta profesión esté vedada para matemáticos. Aunque no participaron directamente en la Mesa, también se mencionaron otros trabajos ocupados por matemáticos y que no suelen estar entre las habituales *salidas profesionales* de matemáticos, tales como analista de inversiones financieras, inspectores de Hacienda o funcionarios del Cuerpo de Informática del Estado.

Una de las conclusiones que pudimos sacar, es que en el mercado laboral no existe la profesión de *matemático*, sino que el matemático debe competir por puestos donde se requiera a alguien con unas determinadas peculiaridades, conocimientos y predisposición a adquirir nuevos. Esto, que parece una desventaja, no resulta tal, puesto que le llevará a ocupar puestos que en principio estarían predestinados a otras profesiones, como ingenieros, informáticos, economistas, etc., como era el caso de alguno de los intervinientes. El profesor Aguado, corroboró tal hecho desde su experiencia como director de Universa, un organismo de la Universdidad, cuya misión, entre otras, es la de promover el contacto entre estudiantes y empresas, con objeto de que los alumnos puedan realizar prácticas en empresas. De un modo coloquial, se expresó que lo que las empresas buscan son *cabezas bien arregladas*, cosa que parece ser que esta Facultad de Zaragoza lo estaba consiguiendo con sus alumnos, toda vez que en el debate se confirmó que en algunos casos, el ser licenciado por Zaragoza fue un factor positivo para conseguir el trabajo. Por otra parte, también quedó de manifiesto que, salvo excepciones, gran parte de los contenidos de las asignaturas cursadas a lo largo de la carrera no eran empleados directamente en el trabajo cotidiano. Sin embargo, todos estuvieron de acuerdo en señalar que el esfuerzo desarrollado en la carrera era lo que les estaba permitiendo ocupar esos puestos de trabajo, pues habían adquirido una madurez de pensamiento, de rigor científico, y motivación por problemas, lo que los hacía especialmente aptos para ciertos trabajos.

Entre las carencias que, con carácter general, se pusieron de manifiesto que nuestros licenciados adolecían, podríamos señalar dos: el nivel de Inglés y el desconocimiento de cómo elaborar un *curriculum vitae* o cómo preparar una entrevista de trabajo. En pricipio, puede argumentarse que estas facetas son ajenas a los planes de estudio de la licenciatura de Matemáticas, sin embargo, sí que parece oportuno el que el profesorado estimule y siembre la inquietud necesaria para que el alumno desarrolle estas facetas y haga uso de las oportunidades que la Universidad le brinda, como puede ser el Instituto de Idiomas o Universa.

En resumen, la Mesa Redonda concluyó con tintes optimistas de cara al futuro profesional de los alumnos de Ciencias Matemáticas, si bien el punto agridulce consistió en el hecho de que en Aragón no había tanta oferta como en otros lugares de España. No obstante, el abanico de posibilidades es muy amplio y nuestros matemáticos todavía gozan de cierta reputación entre las empresas, que esperemos siga manteniéndose e incluso incrementádose, a pesar de la incertidumbre que supone el nuevo plan de estudios que entrará en vigor próximamente.

Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza **19:** 87–95, (2001).

Breve historia de las Matemáticas en los mercados financieros:

De Tales de Mileto al premio Nobel de (Black), Merton y Scholes

José Luis Fernández Pérez

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma de Madrid

El uso de las matemáticas, del lenguaje y las herramientas de análisis de las matemáticas, en el mundo financiero ha adquirido una enorme importancia en años recientes, sobre en conexión con los sofisticados mercados de derivados y en la gestión del riesgo. En este texto repasamos algunos de los principales hitos de la historia de esa estrecha conexión entre Matemáticas y Finanzas. Siempre es bueno tener una perspectiva histórica.[1]

La relación de la Matemática con el comercio, en general, y con la economía y las finanzas, en particular, es amplísima. Nada más lejos de nuestra intención que el intentar abarcarla. Sin embargo, para ir enfocando el tema, precisando sobre todo de qué *no* vamos a tratar, conviene describir siquiera someramente ese marco general de relación.

Las matemáticas han colaborado en la **gestión comercial**, desde siempre. Baste quizás tan sólo con recordar que quizás la noción abstracta de número naciera por pura necesidad comercial[2]: contar como parte de un trueque, o bien que el número e apareciera para determinar el interés del dinero cuando este se compone de manera continua. Es tradición que una de las razones (entre otras varias) que justificaban la protección y el apoyo que los matemáticos árabes disfrutaron en la España musulmana estribaba en la importancia de los conocimientos algebraicos en la repartición de herencias prescritas en las leyes coránicas.

La reflexión dirigida a racionalizar el conocimiento y para profundizar en el entendimiento de los **sistemas económicos** reclama un uso intenso de la Matemática, como no podía ser de otro modo. De esta relación se han beneficiado ambos saberes: la Matemática y la Ciencia Económica. Desde la Teoría de Juegos que Von Neumann y Oskar Morgenstern

[1]Este texto recoge de forma extendida parte de la conferencia impartida en los Dos Días Matemáticos celebrados en la Universidad de Zaragoza los días 16 y 17 de noviembre con ocasión del año Mundial de las Matemáticas.

[2]Y también para registrar el paso del tiempo, lo que pronto demandó conocimientos aritméticos.

inician en los años cuarenta hasta la Matemática Actuarial, que, conviene recordar, tiene sus orígenes con de Moivre, pasando por la Teoría de Carteras o la Teoría de Equilibrio General; la Ciencia Económica usa de lenguaje matemático. Son saberes académicos que se trasladan directamente a su uso en el mundo real, en la gestión macroeconómica, Econometría, por ejemplo, o a la gestión empresarial, Investigación Operativa, por ejemplo.

Vamos a centrarnos en cómo la Matemática se usa cuando se aplica a la gestión del riesgo financiero.

Las matemáticas en el mundo financiero aparecen, sobre todo, como una herramienta indispensable para *valorar* y para analizar y entender el *riesgo* asociado a las fluctuaciones de cotización, o de valor o de nivel de los instrumentos de los mercados financieros. Se trata de fluctuaciones debidas a las presiones que los distintos agentes del mercado ejercen sobre los precios de compra y venta en función de sus intereses y expectativas y de las informaciones y percepciones de que disponen.

En finanzas, el término *riesgo*[3] se emplea de manera precisa para referirse a todo tipo de *incertidumbre* sobre el precio o el valor de un determinado activo o posición, o sobre cualquier otra característica que afecte a la operativa del mercado.

Como es natural, esos niveles inciertos que nos interesan se modelizan mediante variables aleatorias. En una situación estocástica como la que nos ocupa, la incertidumbre, el riesgo se mide con la **varianza** de la variable aleatoria. Cuanto mayor es la varianza, mayor dispersión de los posibles valores, y, por tanto, mayor incertidumbre.

Huygens introdujo la expectatio, esperanza, de una variable aleatoria para definir la tarifa justa de un juego de azar. Es decir, introdujo un procedimiento para relacionar los posibles valores futuros con el precio que (hoy) se paga por ellos.

Daniel Bernoulli,[4] por su parte, propuso la desviación típica para calcular explícitamente la *cantidad de riesgo* (o incertidumbre) de esos posibles flujos o pagos. La

[3]El DRAE define *riesgo*, primeramente, como: *Contingencia o proximidad de un daño.* Aunque en una segunda acepción se hace eco del uso que tiene en nuestro contexto: *Cada una de las contingencias que pueden ser objeto de un contrato de seguro.*

[4]La desviación típica aparece primero con de Moivre, en su libro *Annuities upon lives*, uno de los textos fundacionales de la matemática actuarial.

propuesta de Bernoulli aparece en el artículo *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*[5] donde además introduce las funciones de utilidad para dar una solución a la paradoja de San Petersburgo.

Así que los primeros conceptos de la Teoría de la Probabilidad inciden y están motivados por cuestiones financieras tales como valorar y medir riesgos de flujos económicos inciertos. Y nada menos que con dos insignes matemáticos: Huygens y Daniel Bernoulli.
Cuenta la leyenda que el insigne *Tales de Mileto* hizo fortuna negociando con un tipo de opciones que hoy en día consideraríamos como altamente sofisticados. Al comienzo de un verano, Tales previó, en contra de la opinión generalizada, que la cosecha de aceituna de esa temporada iba a ser magnífica.
Decidió Tales negociar con los propietarios de almazaras el derecho a disponer en determinadas fechas del uso exclusivo de sus instalaciones a cambio de pequeñas sumas de dinero. La predicción de Tales resultó correcta y tras la recogida, Tales disponía prácticamente de toda la capacidad de molienda...

La leyenda no nos aporta detalles sobre cómo logró Tales tan magnífica predicción ni si contaba con algún tipo de información privilegiada al respecto, y tampoco nos confirma la fundada sospecha de que esta exitosa operación financiera de Tales precedió a su solazada dedicación a los teoremas de la Geometría.

Esta leyenda, *si non e vero e ben trovato*, apunta dos cosas sobre este asunto de las opciones. En primer lugar, nos hace barruntar que viene de antiguo. Y en segundo lugar, aunque sea de una forma puramente anecdótica, nos presenta a los matemáticos participando en él desde sus comienzos.

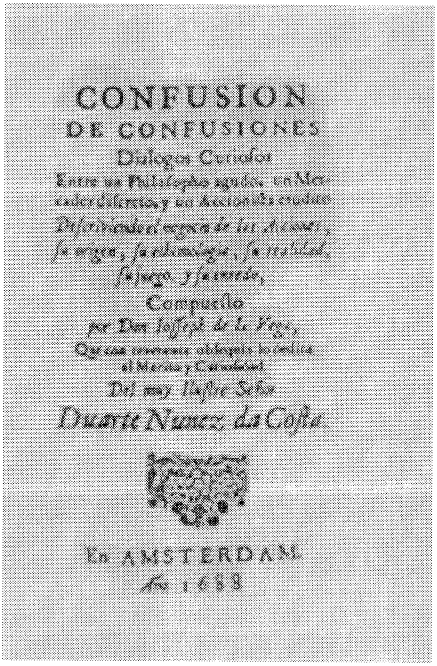
La negociación (organizada) **de opciones** tiene una larga historia. Quizás los tres siguientes sean los hitos fundamentales.

En el siglo XVII, en Ámsterdam, ya operaba un mercado organizado de opciones muy activo. Las opciones eran de compra y de venta (*calls y puts*) y se las llamaba *opsies*. Fundamentalmente, se contrataban opciones como derechos de compra o de venta de las mercancías que el vasto comercio ultramarino holandés transportaba a Ámsterdam. Se

[5]Commentarii Academiae Scientarum Imperailis Petropolitanae 5, 1738, pp. 175-192. Hay traducción al inglés en la revista *Econometrica*

llegó incluso a negociar contratos donde el subyacente era el "jaspeado" de la coloración de los tulipanes. En aquella época, los tulipanes se importaban desde Turquía como bulbos, que arribaban a Holanda ya floreciendo. Estas opciones eran pues una verdadera y abierta apuesta. La enorme incertidumbre, la permanente huída hacia delante, el incumplimiento de contratos y la burbuja financiera que generaba toda esta especulación desenfrenada condujeron a una verdadera catástrofe económica.

Un español, Joseph de la Vega, fue testigo del bullicioso negocio de opciones de Ámsterdam, y allí publicó, en español, una jugosísima descripción de cómo y porqué se contrataban las opsies, de los riesgos que suponía, etc.; una lectura deliciosa. He aquí una pequeña muestra de la prosa de Joseph de la Vega:


CONFUSION
DE CONFUSIONES
Dialogos Curiosos
Compuesto
por Don Joseph de la Vega,
Duarte Nunez da Costa
En AMSTERDAM
Año 1688

Están las acciones al presente en precio de 580, paréceme que por el gran retorno que se espera de la India, aumento de la Compañía, reputación de los géneros, repartición que se promete, y paz de la Europa, subirán a mucho mayor del que logran. No me delibero sin embargo, a comprar partidas efectivas, porque temo que si me faltaren estos designios, podrá alcanzarme un despeño, o sucederme un desaire: llégome pues a los que me dicen que toman esos Opsies, propóngoles cuánto quieren por quedarme obligados a entregar cada partida a 600 hasta tal plazo, ajusto el premio, escríbolo luego en Banco, y sé que no puedo perder más de lo que desembolso, con que todo lo que suben de 600 gano, y lo que bajan, no me sirve de ansia para el juicio, ni de inquietud para la honra, ni de sobresalto para el sosiego.

A finales del siglo XVIII, se negociaban en Nueva York opciones ya también sobre instrumentos financieros, como acciones, y no sólo sobre materias primas tangibles. Pero la negociación era privada y no había un mercado organizado que se responsabilizara del cumplimiento de los contratos. Los frecuentes incumplimientos de los contratos recomendaron la e prohibición de la negociación de opciones.

Desde 1973 funciona en Chicago un mercado organizado de derivados financieros, que ha supuesto un éxito extraordinario de negociación. Conviene recordar la fecha: también es el año de la publicación del fundamental artículo de Black, Merton y Scholes del que hablaremos más adelante.

Hoy en día hay muchos mercados de derivados con amplísimos volúmenes de negociación. Y es que los instrumentos derivados son ahora indispensables para la gestión eficaz del riesgo financiero. En España, desde principios de los años noventa funciona MEFF, el mercado español de futuros.

El uso de las Matemáticas en finanzas puede remontarse a cuando **Ch. Huygens y D. Bernoulli**, como hemos comentado más arriba, introdujeron las nociones de tarifa justa y de riesgo y de cómo medirlos mediante la esperanza matemática y la desviación típica.

Pero el gran primer héroe en toda esta historia es **Louis Bachelier**, quien publicó su tesis doctoral *Théorie de la Spéculation* en los *Annales de la cole Normale Superieur* en 1900. El título de la tesis de Bachelier es bien rompedor y sugerente; recuérdese la fecha. Bachelier fue discípulo de doctorado del gran Henri Poincaré. Parece ser que Poincaré no supo apreciar la enorme riqueza y novedad que la tesis de Bachelier encerraba, lo que, dado el prestigio y la influencia de aquél, no fue particularmente beneficioso para la posterior carrera académica de éste.

Bachelier consideró que la información que llega a los mercados financieros ejerce presiones sobre los presiones empujándolos hacia arriba o hacia abajo y que la llegada de esta información seguía un régimen aleatorio en el que subyacía una cierta tendencia determinista. Para modelizar este comportamiento postuló en su tesis que los precios de los activos seguían un movimiento browniano (del que hablaremos más adelante) con una determinada tendencia o deriva (el ingrediente determinista) y un factor, la hoy muy popular, volatilidad, que medía la amplitud del impacto de la información recibida sobre los precios. Se trata de una modelización de mecánica estadística.

Pero, ¡admirémonos!, Bachelier inventa en este trabajo, y con el objetivo de modelizar el comportamiento de los mercados financieros, el concepto matemático de movimiento browniano[6], años antes de que Einstein lo introdujera en mecánica estadística[7]. Su movimiento browniano no está formalizado y no es completamente funcional, pero ahí estaba. Su formalización matemática tendría que esperar.

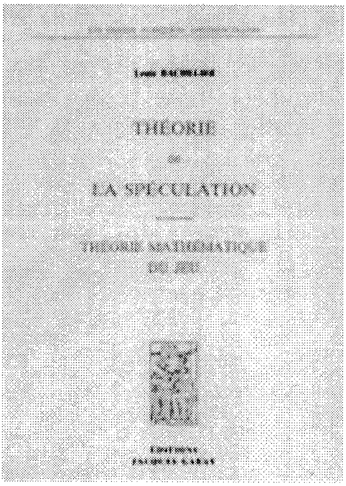
Norbert Wiener fue quién formalizó el concepto de movimiento browniano y lo exhibió como paso al límite del camino aleatorio. Pero fue **K. Ito** quien desarrolló el

[6] Alguien ha dicho: *El movimiento browniano, una joya de la física moderna, es un descubrimiento botánico cuya teoría matemática tiene su origen en las ciencias sociales.*

[7] Logro de Einstein que se menciona explícitamente entre los motivos del premio Noble que le fue concedido en 1905.

cálculo diferencial e integral asociado de los procesos brownianos, es decir, la teoría que permite obtener, a partir de información local de cómo evoluciona el proceso, es decir, a partir de las leyes de probabilidad gobiernan los distintos saltos infinitesimales, qué distribución de probabilidad tienen el proceso en cada instante de tiempo. Cuenta Ito que una de sus motivaciones para la creación de todo este aparato de cálculo fue dar sentido, a la vista de la teoría ya creada por Wiener, a los desarrollos de Bachelier[8].

La tesis de Bachelier paso casi desapercibida, no tuvo impacto alguno ni en la teoría de procesos estocásticos, ni en Finanzas, hasta que **Benoit Mandelbrojt**, de fama fractal, la sacó a la luz[9] en los primeros años sesenta.



El trabajo de Bachelier es muy completo. En él Bachelier valora con cuidado las opciones básicas, usa de la relación del movimiento browniano con la ecuación del calor, pero le faltan dos ingredientes. El primero es realmente simple. Hemos considerado que la llegada de información incide sobre las cotizaciones. Bachelier consideraba que afectaba directamente al valor produciendo un salto en términos absolutos; pero es bien claro que esos salto hay que medirlos en términos relativos: Si una cierta información hace que una cotización pase de 100 a 110, la misma información sobre la misma cotización *ceteris paribus* hará que pase de 200 a 220 no a 210.

Paul Samuelson, Premio Nobel de Economía en 1970, advirtió ese detalle, y utilizó en la modelización de los mercados financieros el movimiento browniano geométrico, que él llamó, movimiento browniano económico. Samuelson, además, pudo ya utilizar todo el aparato del cálculo estocástico para iniciar el desarrollo de una poderosa teoría. El movimiento browniano geométrico es en realidad la exponencial de un proceso y por tanto es siempre positivo. La modelización de Bachelier adolecía del llamativo defecto de permitir cotizaciones que podían ser negativas.

[8]En el cálculo de Ito las integrales estocásticas se calculan evaluando las funciones (funcionales) al comienzo del intervalo, lo que es natural en Finanzas, pues estas integrales reflejan el valor de la gestión de una cartera y los cambios de composición necesariamente ocurren antes del salto. Hay otro cálculo estocástico, con integrales evaluadas en el punto medio del intervalo que se adapta mejor a las aplicaciones a la Geometría.

[9]Las trayectorias del movimiento browniano son ejemplos *naturales* de objetos fractales.

De hecho, Samuelson ya postula el paradigma actual de que: *Los rendimientos de los activos siguen un movimiento Browniano con deriva.* Pero no identifica qué deriva, lo que habría de esperar a los trabajos de Black, Merton y Scholes. En colaboración con H. McKean logra valorar opciones americanas[10] perpetuas, exprimiendo la conexión con la ecuación del calor y el problema de frontera libre a que dan lugar.

El siguiente hito en el desarrollo histórico de la modelización que nos ocupa lo aporta **Stephen Ross**. El papel que el ansia de aprovechar las posibles oportunidades de arbitraje cuando las hubiera desempeñaba en la fijación de precios ya estaba en el ambiente, pero fue Ross quien le dio forma matemática para que pudiera utilizarse para modelizar. El postulado básico es que si los flujos contingentes de una activo financiero son siempre superiores a los de otro entonces la prima que el mercado está dispuesto a pagar por el primero será superior a la del segundo. En plata, *no hay duros a cuatro pesetas*, o en términos técnicos el mercado no permite oportunidades de arbitraje.

Con estos mimbres ya preparados, por una parte, el movimiento browniano geométrico, y, por otra, la ausencia de oportunidad de arbitraje, aparecen en escena **Fischer Black** y **Myron Scholes**, y **Robert Merton** (en la foto).

La idea fundamental es la de contemplar la valoración y la cobertura como dos aspectos de la misma cuestión: el valor del derivado y de la cobertura es la cantidad de dinero (mínima) de la que es necesario disponer para, con una inversión inicial adecuada y una gestión dinámica juiciosa, generar a vencimiento, y pase lo que pase, los flujos requeridos por la opción.

Black y Scholes (y Merton) demostraron que tal gestión existía, bajo una serie de hipótesis ideales de comportamiento de mercado, además del modelo de Bachelier-Samuelson, dando además la forma precisa de cómo llevar a cabo la gestión. La ausencia de oportunidad de arbitraje nos dice entonces que el montante de esa inversión inicial y la prima de la opción han de coincidir, y se obtiene así la afamada fórmula de Black-Scholes. A esta cartera dinámicamente gestionada que replica los flujos del derivado se la conoce como

[10]Las opciones americanas se diferencian de las que hemos comentado anteriormente (y que se conocen con opciones europeas), en que permiten que la opción a que dan derecho puedan ejercerse en cualquier momento hasta el vencimiento.

cartera replicante.

Del argumento (matemático) de Black-Scholes se deduce además que para valorar una opción uno puede proceder como hacía Bachelier, o mejor, Samuelson, pero suponiendo que la rentabilidad del subyacente es la misma que la del dinero. En otras palabras, las opciones se valoran *como si* la renta fija y la renta variable tuvieran la misma rentabilidad. Un resultado bastante chocante que iba contra la intuición imperante, pero no se olvide el "como si" anterior.

A la postre, vemos como a Bachelier *sólo* le faltó entender que la información afecta a la rentabilidad (no a los precios absolutos en sí) e identificar la deriva.

Una vez que la deriva de la rentabilidad ha sido identificada, el único parámetro que queda es **la volatilidad**, es decir, la rapidez con la que se mueve el mercado o la intensidad de sus oscilaciones o la magnitud de la información que le afecta. La volatilidad es desviación típica, pura incertidumbre, puro riesgo. La prima de una opción es entonces una función sólo de la incertidumbre del subyacente, como debe ser.

Por estos trabajos Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía 1997. Black había fallecido en 1995. El artículo original de Black y Scholes, *The pricing of Options and Corporate Liabilities,*[11] es uno de los artículos más citados de toda la bibliografía científica.

He aquí, simplemente como un fetiche, la famosa fórmula de Black-Scholes para la prima de una opción put:[12]

$$\boxed{prima = Ke(-rT)\Phi(-d_{(-)}) - S\Phi(-d_{(+)}).}$$

Esta fórmula desempeña en el mundo financiero un papel fundamental, comparable a algo tan simple y tan básico como la noción de interés continuo. Lo espectacular, revolucionario, en su tiempo, y contra intuitivo de esta fórmula es que a parte de los datos del contrato o de mercado todo queda determinado por la volatilidad, por el nivel de riesgo, y no por la rentabilidad, que no aparece. La fórmula de Black-Scholes es un diccionario que traduce los precios que se pagan por los derivados en la cantidad de riesgo que llevan implícitos. Un tipo de interés no es sino un diccionario entre precios de activos y rentabilidad que permite comparar distintos activos de renta fija. De igual manera, Black-Scholes es un diccionario entre precios y riesgo, que permite comparar precios de activos derivados no homogéneos mediante la cantidad de riesgo que suponen.

La **fórmula de Black-Scholes** es tan sólo el principio. Uno quiere hilar más fino y

[11] Journal of Political Economy, 1973.

[12] Aquí Φ es la función de distribución de la variable normal estándar, K, T son datos dèl contrato, S, R son datos de mercado conocidos y $d_{\pm}$ son parámetros que se calculan a partir de los anteriores y de la **volatilidad**.

modelizar con mayor precisión cuestiones tales como

- Dividendos, costes de transacción...; se quiere incluir aquellos aspectos dela negociación obviados en ese primer modelo que es Black-Scholes.
- Volatilidad incierta, volatilidad estocástica...; en Black-Scholes la volatilidad es un dato determinista, lo que es irreal, la variabilidad de los precios es cambiante...
- Tipos de interés. Sólo hemos comentado la gestión del riesgo asociado a precios de acciones, pero tan importante es la gestión del riesgo asociado al precio del dinero y a los contratos de renta fija. Además interesa saber como integrar los dos aspectos del mercado: la renta fija y la renta variable.
- Riesgo de crédito. Hay muchos otros riesgos importantes. En fechas recientes ha adquirido mucha importancia la gestión del riesgo de crédito, hay contratos que cubren de los posibles impagos de deuda nacional o corporativa e incluso de banca comercial. La modelización del riesgo de crédito está aún en sus primeros y titubeantes pasos.
- Materias primas, electricidad. La liberalización de mercados como la electricidad ha hecho aflorar nuevos riegos de gestión, con nuevos subyacentes como el precio de la electricidad, que hay que cubrir y gestionar.
- Riesgos complejos como el de liquidez parecen lejos de ser entendidos
- ...

Todos estos nuevos horizontes demandan más y mejor modelización que esté muy imbricada con la realidad a la que se aplican. Y también precisan de la maquinaria matemática más avanzada, no sólo del cálculo de Ito, sino del cálculo de variaciones estocástico y, en general, del aparato más avanzado del cálculo de probabilidades y de las ecuaciones en derivadas parciales. O quizás de ideas nuevas.

No conviene olvidar que el objetivo de esta modelización es ayudar a una más eficiente gestión y comprensión de las finanzas. Por supuesto, al investigar estas cuestiones surgen de manera natural cuestiones adicionales de interés académico tanto de la Ciencia económica como de la Matemática. Estas cuestiones son también importantes y es necesario desarrollarlas, pero manteniendo siempre a la vista sobre el objetivo central.