

MONOGRAFÍAS  
DE LA  
**ACADEMIA  
DE  
CIENCIAS**

Exactas  
Físicas  
Químicas y  
Naturales  
DE  
ZARAGOZA

**Una estructura cónica para la homotopía**

F. J. Díaz y S. Rodríguez-Machín

Trabajo financiado por la Dirección General de Universidades  
e Investigación del Gobierno de Canarias y D.G.E.S.



N.º 15

2000

Depósito legal: Z. 813 – 2000

*Imprime:*

Sdad. Coop. de Artes Gráficas

LIBRERÍA GENERAL

Pedro Cerbuna, 23

50009 Zaragoza

# ÍNDICE

|                                                     | <u>Págs.</u> |
|-----------------------------------------------------|--------------|
| <i>Introducción</i> .....                           | 7            |
| <i>I. Categoría con cono natural</i> .....          | 11           |
| I.0 Notación .....                                  | 11           |
| I.1 Como natural. C-categorías .....                | 12           |
| I.2 Homotopía .....                                 | 16           |
| <i>II. Grupos de homotopía generalizada</i> .....   | 19           |
| II.1 Grupoides de homotopía .....                   | 19           |
| II.2 Grupos de homotopía .....                      | 25           |
| <i>III. Sucesiones exactas de homotopía</i> .....   | 31           |
| III.1 Categoría de pares .....                      | 31           |
| III.2 Sucesiones exactas .....                      | 33           |
| <i>IV. Categorías punteadas</i> .....               | 37           |
| <i>V. Ejemplos</i> .....                            | 47           |
| V.1 Ejemplos teóricos .....                         | 48           |
| V.1.1 Funtores adjuntos en homotopía cónica .....   | 49           |
| V.1.2 Homotopía cónica en categorías aditivas ..... | 51           |
| V.1.3 Homotopía cónica y cilíndrica .....           | 52           |
| V.2 Ejemplos .....                                  | 53           |
| V.2.1 EE'-categorías .....                          | 53           |
| V.2.2 C-categorías y C'-categorías .....            | 57           |
| <i>Bibliografía</i> .....                           | 63           |



# Introducción.

Aquí se presenta un avance para un futuro desarrollo de homotopía a través de estructuras cónicas.

El concepto clásico de homotopía en espacios topológicos desarrollado por J.H.C. Whitehead en 1950 [W2] se basa en el uso de un funtor cilindro para obtener identificaciones de aplicaciones continuas, dando lugar a grupos, sucesiones exactas y otros entes algebraicos que permiten un conocimiento más amplio de los espacios. A partir del cilindro topológico, identificando una de sus tapas a un punto, surge el funtor cono, que preserva los objetos algebraicos obtenidos a través del cilindro.

Otro procedimiento desde el punto de vista homotópico para el estudio de los espacios topológicos consiste en definir un funtor con dominio esa categoría y codominio una algebraica, en la cual se puede definir una homotopía, entendiendo por ello una relación de equivalencia con propiedades similares a las de la homotopía clásica. La aproximación simplicial introducida por D.W. Kan en 1955 [Ka] es uno de los primeros y más importantes ejemplos en este sentido.

Con la noción anterior de homotopía en categorías algebraicas, existen también ejemplos que no se corresponden, en principio, con ningún funtor asociado desde los espacios topológicos, entre los cuales destacan, entre otras cosas por ser precursores en este sentido, las homotopías proyectiva e inyectiva creadas por B. Eckmann y P.J. Hilton para R-módulos entre los años 1956 y 1958 [E] [Hi1] [Hi2].

En 1961 P.J. Huber intenta relacionar la homotopía de Whitehead en espacios topológicos con las de Eckmann y Hilton para R-módulos [Hub2], utilizando para ello las construcciones standard definidas por R. Godement en 1958 [Go]. Huber asocia así a los espacios topológicos y R-módulos complejos semisimpliciales cuyos grupos y sucesiones exactas coinciden con los ya conocidos. Pero de sus axiomas no se deduce que los complejos asociados sean necesariamente de Kan, lo cual no permite, en general, la obtención de grupos y sucesiones exactas de homotopía. El cono topológico es un ejemplo de construcción standard dual, pudiéndose considerar por ello la teoría de Huber como uno de los primeros intentos de axiomatizar la homotopía a través de un funtor cono.

Posteriormente, H. Kleisli en 1962 [K11] y J.A. Seebach Jr. en 1972 [Se] intentan

generalizar el concepto de cono topológico basándose en las homotopías ya mencionadas de Eckmann y Hilton para  $R$ -módulos, pero sus desarrollos sólo son válidos en categorías muy particulares, aditivas con propiedades adicionales en el primer caso y con objetos inyectivos en el segundo, lo cual hace que dichas axiomáticas sean muy pobres, pues incluso en categorías aditivas existen homotopías no inyectivas ni proyectivas.

La axiomática de homotopía funtorial sobre categorías aditivas más amplia desarrollada hasta el momento, pues engloba todos los ejemplos anteriormente mencionados y da origen a otros no proyectivos ni inyectivos, es la introducida por el segundo autor en 1990 [R] y [P-]. Usando axiomas similares a los de categoría con un cilindro natural descritos por H.J. Baues [B2] y un funtor cono obtiene grupos de homotopía, sucesiones exactas de homotopía y, a semejanza de lo hecho por Huber con las construcciones standard,  $\Delta$ -grupos abelianos cuyos grupos de homotopía coinciden con los obtenidos a través del cono. En esta teoría todos los corchetes de homotopía son grupos abelianos, en particular los grupos de homotopía, y dado un cilindro en el sentido de Baues es posible asociarle un cono del tipo de Rodríguez-Machín, y viceversa, de forma que las teorías de homotopía resultantes son coincidentes.

Existen diversas teorías de homotopía algebraica que no utilizan funtores, destacando, pues la mayoría de las homotopías existentes en la actualidad son ejemplos de ellas, las categorías de modelo creadas por D.G. Quillen en 1969 [Q1] y más aún, por no ser una teoría autodual, las categorías cofibradas obtenidas por H.J. Baues en 1989 [B2]. La exigencia de límites y colímites finitos, así como el hecho de ser una teoría autodual, posibilitan la existencia de homotopías que no sean categorías de modelo. Además, las dificultades que presentan ciertos cálculos en el caso de teorías no funtoriales, el hecho de que gran número de las homotopías conocidas sí lo sean y, por último, que las categorías cofibradas de Baues incluyan a las homotopías cilíndricas, sugiere que una axiomática basada en un funtor cono, no necesariamente incluida en dichas categorías cofibradas y que englobe a la mayoría de las homotopías es de gran importancia a la hora de simplificar cálculos y de obtener nuevos ejemplos, así como para llegar a dar una axiomática definitiva en homotopía.

La teoría de homotopía algebraica aquí presentada usa como cono la construcción standard dual de Huber [Hub2], junto con axiomas relativos a cofibraciones deducidos de los respectivos dados por Baues en las categorías con un cilindro natural [B2]. Esto permite, por una parte, desarrollar la teoría desde el punto de vista clásico, sin asociar funtorialmente una categoría algebraica, y por otro lado usar las técnicas de Huber para obtener complejos semisimpliciales, que en este caso son de Kan, cuyos grupos y sucesiones exactas coinciden con los obtenidos a través del primer método.

Análogamente a lo que sucede en categorías cofibradas y a diferencia de lo que ocurre

en categorías con un cilindro natural, sólo se puede hablar de homotopía relativa a una cofibración, pues no se exige la existencia de objetos cofibrantes, ni siquiera de objeto inicial. Esto impide usar, a diferencia de lo hecho con cilindro, las equivalencias de homotopía como equivalencias débiles, pues no se puede asegurar su existencia y por ello, en principio, una categoría con cono natural no tiene por qué ser una categoría cofibrada.

No obstante, haciendo uso del concepto aquí denominado “homotopía generalizada” se obtienen grupos de homotopía relativa basados en un morfismo que, a su vez, dan lugar a sucesiones exactas cuando se tiene un par. La homotopía generalizada se obtiene para evitar las categorías punteadas con su funtor suspensión, tan necesarias en otras teorías de homotopía algebraica para la obtención de grupos, y que de esta forma resultan como un caso particular cuando se toma como morfismo base del grupo al cero. Este concepto de homotopía generalizada se puede también desarrollar de forma análoga en la mayoría de las teorías que hacen uso de cofibraciones, obteniéndose no sólo los grupos de homotopía relativa basados en un morfismo sino también, usando las cofibraciones de pares adecuadas, las sucesiones exactas correspondientes, resultando los grupos y sucesiones exactas ya existentes como caso particular. Las categorías cofibradas y las categorías con un cilindro natural son importantes ejemplos de lo anteriormente dicho.

El producto de los números reales induce una transformación natural desde el doble cilindro en el cilindro topológico de forma que su composición con las inclusiones asociadas a éste y consigo misma dan relaciones entre estas transformaciones y la proyección. Usando estas relaciones como definición de producto natural en un cilindro, si se tiene una categoría con objeto final y un cilindro natural que admita un producto del tipo anterior, se induce una estructura de cono, en el sentido axiomático aquí presentado, cuya homotopía relativa coincide con la asociada al cilindro. Este producto natural no sólo existe, como en un principio pudiera pensarse, para el cilindro topológico, sino que también está presente en otros que se relacionan de alguna forma con él, como por ejemplo el cilindro en la categoría de espacios exteriores para el estudio de la homotopía propia, o sin ninguna relación directa, como pueden ser los cilindros de la homotopía de los complejos de cadena sobre categorías aditivas.

El cono de Rodríguez-Machín es también un caso particular de esta axiomática, pues en categorías aditivas la operación de los grupos de homotopía viene unívocamente determinada por la suma de morfismos existente en la categoría pudiéndose, cuando la categoría tiene conúcleos o las cofibraciones se definen por la propiedad de extensión de nulhomotopía, reducir el número y la exigencia de los axiomas. De esta forma, homotopías proyectivas e inyectivas similares a las definidas por Eckmann y Hilton para  $R$ -módulos, así como otras no de este tipo relacionadas con funtores  $\text{Hom}$  y productos tensoriales pueden ser encuadradas dentro de esta axiomática.

El concepto dual de categoría con un cono natural se ha denominado categoría con un

cocono natural, y es el equivalente a los desarrollos usando fibraciones en la homotopía clásica, a las categorías con un funtor caminos naturales y a las construcciones standard de Huber. Como sucede con la teoría cilindro-caminos, en determinadas circunstancias una homotopía puede venir definida mediante un par de funtores adjuntos cono-cocono. Es más, todo par de funtores adjuntos induce nuevas estructuras duales de este tipo a partir de una dada, pudiéndose así crear homotopías en categorías relacionadas por dichos funtores.

El trabajo que aquí se presenta está dividido en tres partes. La primera parte comprende los capítulos I, II y III, y en ella se desarrolla la teoría de homotopía algebraica a través de un cono, comenzando por el concepto de homotopía relativa a una cofibración, siguiendo con la creación de los grupos de homotopía y finalizando con las sucesiones exactas asociadas a un par. La parte segunda consta de un capítulo que analiza el caso particular de las categorías punteadas, expresando su homotopía en función de la generalizada. La última parte, capítulo V, está dedicada a la obtención, a partir de desarrollos teóricos, de ejemplos concretos de homotopías que verifican la axiomática.

# Capítulo I

## Categoría con cono natural.

El concepto de cono para espacios topológicos es bien conocido, pero su utilización en los desarrollos de la homotopía ordinaria queda relegado a un segundo término al poseer éstos una construcción cilindro. Las principales axiomáticas sobre teoría de homotopía han usado fundamentalmente este segundo concepto, existiendo pocos estudios que usen como noción básica el cono.

Aquí se inicia el desarrollo de una axiomática que tiene como soporte una categoría arbitraria y cuyo fundamento principal es la idea generalizada de cono. A través de ella se obtienen de forma análoga a la teoría clásica los conceptos de nulhomotopía y objeto contráctil con sus primeras propiedades. Junto con el funtor cono se destacan los morfismos que hacen de cofibraciones con su propiedad característica de extender nulhomotopías, que jugará un papel primordial a lo largo de este trabajo. Como caso particular se analizan en este sentido las categorías punteadas, aunque posteriormente se verá que es posible prescindir de ellas.

Por último se introduce el concepto de homotopía relativa a cofibraciones con codominio contráctil como un primer paso para una posterior generalización, observando que verifica las propiedades comunes a la homotopía relativa en las diversas teorías.

Antes de iniciar el primer párrafo se fijará la notación referente a push outs (pull backs) que se usará a lo largo de este trabajo.

### I.0 Notación.

El objeto push out de dos morfismos  $f, g$  se notará por  $P\{f, g\}$ .  $\bar{f} : \text{codom } g \rightarrow P\{f, g\}$  y  $\bar{g} : \text{codom } f \rightarrow P\{f, g\}$  designarán, respectivamente, los morfismos inducidos por  $f$  y  $g$

que completan el diagrama push out. Si  $f = g$ , entonces  $\bar{f}_0$  y  $\bar{f}_1$  notarán los morfismos  $\bar{g}$  y  $\bar{f}$ , respectivamente.

Dados morfismos  $r$  y  $s$  verificando  $rf = sg$ ,  $\{r, s\}$  notará el único morfismo tal que  $\{r, s\}\bar{g} = r$  y  $\{r, s\}\bar{f} = s$ .

Si  $\text{codom } f$  es un objeto push out, la componente  $r$  puede tener una expresión del tipo  $\{r_1, r_2\}$ . Frecuentemente, en este caso, si no hay posibilidad de confusión, el morfismo  $\{r, s\} = \{\{r_1, r_2\}, s\}$  será notado por  $\{r_1, r_2, s\}$ . En este sentido, pueden aparecer llaves con un número finito de morfismos separados por comas.

Dados dos objetos push out  $P\{f, g\}$ ,  $P\{f', g'\}$ , y morfismos  $r : \text{codom } f \rightarrow \text{codom } f'$ ,  $s : \text{codom } g \rightarrow \text{codom } g'$  y  $t : \text{dom } f = \text{dom } g \rightarrow \text{dom } f' = \text{dom } g'$  verificando  $rf = f't$  y  $sg = g't$ , se notará el único morfismo  $\{\bar{g}'r, \bar{f}'s\}$  por  $r \cup s$ . De forma análoga a lo dicho anteriormente, si no hay posibilidad de error se usarán expresiones con un número finito de morfismos separados por uniones y sin paréntesis.

Dualmente, la notación para pull backs será  $P < f, g >$ ,  $\bar{f}, \bar{g}$ ,  $< r, s >$  y  $r \cap s$ .

## I.1 Cono natural. $C$ -categorías.

Tras establecer los axiomas que se utilizarán a lo largo de todo este trabajo, se estudian las primeras propiedades derivadas de los mismos relativas a objetos contráctiles y nulhomotopía.

La definición que a continuación se presenta, de categoría con cono natural, es el resultado del estudio comparativo de diversas teorías de homotopía, entre las que destacan la inyectiva de B. Eckmann y P.J. Hilton [E] [Hi1] [Hi2], las construcciones standard duales de P.J. Huber [Hub2], las categorías de modelo de D. Quillen [Q1], las categorías cofibradas de H.J. Baues [B2], y las construcciones cono de S. Rodríguez-Machín [R] [P-]. Sus axiomas son los mínimos exigibles que permiten obtener grupos, sucesiones exactas y demás propiedades que debe poseer toda teoría de homotopía.

**Definición I.1.1** Una  $C$ -categoría, o *categoría con cono natural* es una categoría  $C$ , con un funtor  $C : C \rightarrow C$  denominado funtor cono, transformaciones naturales  $k : 1 \rightarrow C$  y  $p : CC \rightarrow C$ , y una clase de morfismos *cof*, llamados cofibraciones y representados por " $\rightarrow$ ", verificando los axiomas (C1), (C2), (C3) y (C4).

(C1) **Axioma de cono.**

$$p(kC) = p(Ck) = 1C \quad \text{y} \quad p(pC) = p(Cp).$$

(C2) **Axioma de push out.**

Para una cofibración  $i : B \rightarrow A$  y un morfismo  $f : B \rightarrow X$ , siempre existe el siguiente push out

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ A & \xrightarrow{\bar{f}} & P\{f, i\} \end{array}$$

donde  $\bar{i}$  es también una cofibración. A este tipo de push outs se les denominará *cofibrados*. Además el funtor  $C$  transforma push outs cofibrados en push outs:  $C(P\{f, i\}) = P\{Cf, Ci\}$ .

(C3) **Axioma de cofibración.**

Para todo objeto  $X$ ,  $1_X$  y  $k_X$  son cofibraciones. La composición de cofibraciones es cofibración. Además, toda cofibración  $i : B \rightarrow A$  tiene una retracción  $r$  para su cono ( $rCi = 1$ ). A esto último se le denomina propiedad de extensión de nulhomotopía (PEN).

(C4) **Axioma de cono relativo.**

Para una cofibración  $i : B \rightarrow A$ , el morfismo  $i_1 = \{Ci, k\}$ , definido por el siguiente push out, es una cofibración:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{k} & CB & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} & & \downarrow Ci \\ A & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma^i & \xrightarrow{i_1} & CA \\ & \searrow k & & & \end{array}$$

El objeto  $\Sigma^i$  se denomina *cono relativo a la cofibración  $i$* .

Consecuencias directas de la definición I.1.1 son las siguientes propiedades:

- Los isomorfismos y el cono de toda cofibración son cofibraciones.

- El cono de un push out cofibrado es también un push out cofibrado.
- $C\{f, g\} = \{Cf, Cg\}$  y  $C(f \cup g) = Cf \cup Cg$ .
- $k_{P\{f, g\}} = k_{\text{codom } f} \cup k_{\text{codom } g}$  y  $p_{P\{f, g\}} = p_{\text{codom } f} \cup p_{\text{codom } g}$ .
- $C^n k_{P\{f, g\}} = C^n k_{\text{codom } f} \cup C^n k_{\text{codom } g}$  y  $C^n p_{P\{f, g\}} = C^n p_{\text{codom } f} \cup C^n p_{\text{codom } g}$ .

Los axiomas (C2), (C3) y (C4) proporcionan métodos para obtener cofibraciones. Sin embargo, comprobar si un morfismo dado es cofibración o no verificando directamente si está en *cof* es, en ocasiones, muy difícil. El siguiente resultado es muy importante en este sentido, por su frecuente utilización durante el desarrollo de esta teoría.

**Teorema I.1.1** *Dado el siguiente cubo conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \swarrow g & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha \\
 Z & \xrightarrow{\quad} & P\{f, g\} & & \\
 \downarrow \beta & & \downarrow f' & & \downarrow \alpha \cup \beta \\
 & \swarrow g' & X' & \xrightarrow{\quad} & Y' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z' & \xrightarrow{\quad} & P\{f', g'\} & & 
 \end{array}$$

donde las caras superior e inferior son push outs.

Si  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son cofibraciones, y  $\{\beta, g'\} : P\{g, \gamma\} \rightarrow Z'$  ó  $\{\alpha, f'\} : P\{f, \gamma\} \rightarrow Y'$  es cofibración, entonces  $\alpha \cup \beta$  también lo es.

A lo largo de este trabajo serán utilizados conceptos como extensión, morfismo nulhomótopo y objeto contráctil cuyas definiciones son análogas a las que existen en teoría de homotopía.

**Definición I.1.2** Dados una cofibración  $i : B \rightarrow A$  y un morfismo  $f : B \rightarrow X$ , los morfismos del conjunto  $\text{Hom}(A, X)^{f(i)} = \{g : A \rightarrow X \mid gi = f\}$  se denominan *extensiones de f relativas a la cofibración i*. Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  se dice *nulhomótopo* ( $f \simeq 0$ ), cuando tiene una extensión relativa a  $k$ . Todo morfismo  $F \in \text{Hom}(CX, Y)^{f(k)}$  se denomina una *nulhomotopía* para  $f$  y se nota por  $F : f \simeq 0$ . Un objeto  $X$  se dice *contráctil* cuando  $1_X \simeq 0$ , esto es, cuando existe una retracción  $q$  para  $k_X$ . Se notará por  $X \simeq 0$ .

PEN es la propiedad básica que servirá para extender la nulhomotopía a homotopía. Es importante por ello obtener otras caracterizaciones de la misma.

**Teorema I.1.2** *Dado un morfismo  $i : B \rightarrow A$  son equivalentes:*

- a)  *$i$  verifica PEN.*
- b) *Todo morfismo nulhomótopo tiene una extensión nulhomótopa relativa a  $i$ .*
- c) *Todo morfismo nulhomótopo tiene una extensión relativa a  $i$ .*
- d)  *$k$  tiene una extensión relativa a  $i$ .*

El concepto “contráctil” se puede extender a cofibraciones, que como se verá en el capítulo III son los objetos contráctiles en la categoría de pares de una  $C$ -categoría.

**Definición I.1.3** Se denomina *cofibración contráctil* a cualquier cofibración con dominio y codominio contráctiles.

**Teorema I.1.3** *Todo push out de cofibraciones contráctiles es contráctil.*

Del anterior teorema se deduce que si  $i$  es una cofibración contráctil, entonces  $\Sigma^i$  e  $i_1$  son también contráctiles.

Cuando la categoría donde se desarrolla una teoría de homotopía tiene objeto inicial, surge de forma natural la noción de objeto cofibrante. Las homotopías en las cuales todos los objetos son cofibrantes permiten desarrollos menos complicados.

**Definición I.1.4** Un objeto  $X$  de una  $C$ -categoría  $C$ , con objeto inicial  $\phi$ , se dirá  $\phi$ -cofibrante o simplemente *cofibrante* cuando  $\phi_X : \phi \rightarrow X$  es cofibración.

El concepto de “punto” es imprescindible para la obtención de suspensiones y éstas, a su vez, son necesarias para definir los grupos de homotopía de objetos punteados,  $\pi_n^A X = [S^n A, X]$ , a semejanza de lo que sucede en la homotopía ordinaria de los espacios topológicos. En una  $C$ -categoría se pueden obtener grupos y sucesiones exactas de homotopía para objetos no necesariamente punteados, y conseguir  $C$ -categorías punteadas cuyos grupos y sucesiones se reduzcan a los anteriores haciendo innecesario el uso de suspensiones y el concepto de punto. No obstante, se introduce aquí dicha noción para posteriormente confirmar lo expresado.

**Definición I.1.5** Una *C-categoría punteada* es una *C-categoría* con todos sus objetos cofibrantes y tal que el cono del objeto inicial coincida con él. Se notará dicho objeto por  $*$  y se denominará *punto*. El morfismo inicial  $*_X : * \rightarrow X$  se notará simplemente por  $*$  cuando no lleve a error. Obsérvese que  $(*_X)_1 = k_X$ . El coproducto de dos objetos  $X$  e  $Y$  se notará en este caso  $X \vee Y$ .

Obsérvese que por ser todos los objetos cofibrantes el coproducto de dos objetos siempre existe, y que por el cono conservar push outs  $C(X \vee Y) = CX \vee CY$ . Además  $*$  es contráctil, por ser un cono.

Dadas  $i : B \rightarrow A$  e  $i' : B' \rightarrow A'$  cofibraciones, entonces  $i \vee i' : B \vee B' \rightarrow A \vee A'$  es también cofibración. Además, si  $X$  y  $X'$  son objetos contráctiles, entonces  $X \vee X'$  es contráctil.

## I.2 Homotopía.

La definición de homotopía relativa a una cofibración con codominio contráctil es un primer paso que permitirá extender, en el capítulo siguiente, dicha noción para una cofibración cualquiera. Esta verifica las propiedades básicas comunes a todas las homotopías: relación de equivalencia, trivialidad sobre objetos contráctiles, transformación de coproductos en productos y compatibilidades con la composición de morfismos. En su definición se usa una retracción de la transformación natural  $k$ , y posteriormente se observa que la homotopía es independiente de la elección de la misma.

**Definición I.2.1** Dada  $i : B \rightarrow A$  cofibración, con  $A$  contráctil, y dados  $f_0, f_1 : A \rightarrow X$ , se dirá que  $f_0$  es homótopo a  $f_1$  relativo a  $i$  cuando exista una extensión  $H$  de  $\{f_0 q C i, f_1\}$  relativa a  $i_1$ , donde  $q k_A = 1_A$ .  $H$  se denomina *homotopía relativa a  $i$  entre  $f_0$  y  $f_1$*  ( $H : f_0 \simeq f_1 \text{ rel. } i$ ).

Obsérvese que por existir  $\{f_0 q C i, f_1\}$  se tiene que  $f_0 i = f_1 i$ .

Como todas las homotopías, ésta establece una relación de equivalencia entre los morfismos. Una extensión  $\mu$  de  $q k C i \cup k = k(q C i \cup 1) : \Sigma^i \rightarrow P\{i, i\} \rightarrow C(P\{i, i\}) = P\{C i, C i\}$  relativa a  $i_1$ , donde  $q k_A = 1_A$ , permite probar este hecho, y posteriormente será usada, como también sucede en diversas teorías de homotopía algebraica, para la creación de los grupoides de homotopía. En particular,  $f q$  es la homotopía que da la propiedad reflexiva,

$\overline{H} = \{H, f_0 q\}_\mu$  es la homotopía que da la propiedad simétrica para  $H : f_0 \simeq f_1$  rel.  $i$  y  $H * G = \{\overline{H}, G\}_\mu$  es la homotopía que da la propiedad transitiva para  $H : f_0 \simeq f_1$  rel.  $i$  y  $G : f_1 \simeq f_2$  rel.  $i$

**Definición I.2.2** Dados  $i : B \rightarrow A$  cofibración,  $A$  contráctil ( $qk_A = 1_A$ ), y  $u : B \rightarrow X$ , se define el *corchete de homotopía de  $X$  relativo a  $i$  basado en  $u$*  por

$$[A, X]^{u(i)} = \text{Hom}(A, X)^{u(i)} / \simeq$$

donde “ $\simeq$ ” es la relación de equivalencia “ser homótopo relativo a  $i$ ”. Cuando la categoría tiene objeto inicial y  $A$  es contráctil y cofibrante,  $[A, X]^{\phi_X(\phi_A)}$  se notará simplemente por  $[A, X]$  y se denominará *corchete de homotopía de  $X$  referido a  $A$* .

La compatibilidad de la homotopía con la composición a izquierda viene dada por el siguiente funtor:

**Proposición I.2.1** Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ , con  $A$  objeto contráctil, entonces  $[A, \text{codom } -]^{-(i)} : \mathbf{C}^B \rightarrow \mathbf{Set}$ , definido de forma obvia sobre los objetos y dado  $h : u \rightarrow v$  en  $\mathbf{C}^B$   $[A, \text{codom } -]^{-(i)}(h) = h_*$ , es un funtor.

La acción de los corchetes de homotopía sobre contráctiles y coproductos es la habitual.

**Proposición I.2.2** Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ , con  $A$  objeto contráctil, y morfismos  $f_0, f_1 : A \rightarrow X$ , si el objeto  $X$  o la cofibración  $i$  es contráctil entonces  $f_0$  y  $f_1$  son homótopos relativo a  $i$  si y sólo si  $f_0 i = f_1 i$ .

De lo anterior se deduce que en una  $C$ -categoría punteada  $[A, X]$  es un conjunto unitario, para todo objeto  $X$ . Obsérvese que dicho corchete existe, según lo anterior, cuando  $A$  es contráctil.

**Proposición I.2.3** Dadas  $i : B \rightarrow A$ ,  $i' : B' \rightarrow A'$  cofibraciones, con  $A, A'$  objetos contráctiles, existe una equivalencia natural:

$$[A \vee A', \text{codom } \{-, \sim\}]^{(-, \sim)(i \vee i')} \rightarrow [A, \text{codom } -]^{-(i)} \times [A', \text{codom } \sim]^{-(i')} (\mathbf{C}^{B \vee B'} \rightarrow \mathbf{Set}).$$

Para ver la compatibilidad con la composición a derecha se hace uso de una equivalencia natural derivada de la transformación  $k$ . La independencia de la homotopía respecto de la retracción usada en su definición permite crear dicha equivalencia.

**Lema I.2.1** Sean  $i : B \rightarrow A$  cofibración,  $f : A \rightarrow X$  y  $h_0, h_1 : CB \rightarrow X$  tales que  $h_0 \simeq h_1$  rel.  $k$ . Entonces  $\{h_0, f\}$  tiene una extensión relativa a  $i_1$  si y sólo si  $\{h_1, f\}$  la tiene.

**Teorema I.2.1** La homotopía relativa a  $i$  es independiente de la retracción para la transformación natural  $k$ .

La independencia de la homotopía respecto de la retracción para la inclusión en el cono permite usar la transformación natural  $p$  como la retracción idónea en homotopía para  $kC$ .

**Lema I.2.2** Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ , con  $A$  objeto contráctil, entonces  $k^* : [CA, \text{codom } -]^{- (ki)} \rightarrow [A, \text{codom } -]^{- (i)} (C^B \rightarrow \mathbf{Set})$  es una equivalencia natural.

**Teorema I.2.2** Dado el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ \downarrow i & & \downarrow i' \\ A & \xrightarrow{g} & A' \end{array}$$

con  $i, i'$  cofibraciones y  $A, A'$  objetos contráctiles.

a)  $g^* : [A', \text{codom } -]^{- (i')} \rightarrow [A, \text{codom } -]^{- h (i)} (C^{B'} \rightarrow \mathbf{Set})$  es una transformación natural.

b) Si el cuadrado es un push out, entonces  $g^*$  es una equivalencia natural.

## Capítulo II

# Grupos de homotopía generalizada.

Una vez establecida la noción de homotopía relativa en una categoría con cono natural, el siguiente paso es obtener los grupos de homotopía. Para ello se introducen primeramente los grupoides de homotopía relativos a una cofibración y se estudia su carácter funtorial sobre objetos y cofibraciones. De la actuación de dichos funtores sobre push outs surge una generalización del concepto de homotopía relativa a una cofibración que no tenga, necesariamente, codominio contráctil como sucedía en el capítulo anterior. Es posible crear los grupoides superiores de homotopía, que darán lugar a los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un objeto basados en un morfismo, que se denominarán grupos de homotopía generalizada relativos a una cofibración.

Cuando se tiene una categoría punteada, a través del concepto de suspensión y usando el morfismo cero, se obtienen los grupos de homotopía relativos a una cofibración y los referidos a un objeto como un caso particular de la homotopía generalizada, dando lugar a funtores que actúan similarmente a los respectivos de la homotopía ordinaria respecto a contráctiles y coproductos.

### II.1 Grupoides de homotopía.

Usando el concepto “contráctil fundamental” se crean los grupoides de homotopía relativos a cofibraciones cuyo codominio sea un objeto de este tipo. Para ello se hace uso de una extensión, aunque posteriormente se demuestra que cualquier otra genera grupoides isomorfos.

Reiterando el proceso dado en el axioma de cono relativo se obtienen los grupoides de orden superior para dichas cofibraciones, permitiendo esta técnica su obtención para una

cofibración cualquiera. Generalizando el isomorfismo que inducen los morfismos push out entre la homotopía relativa a una cofibración y la relativa a su inducida, se extiende el concepto de grupoide de primer orden para cofibraciones cuyo codominio no sea contráctil.

Para definir homotopía relativa a una cofibración se ha exigido que el codominio de ésta sea contráctil. Aunque esto sea suficiente para ver que la homotopía es una relación de equivalencia mediante el operador  $\mu$  introducido, no basta para que se verifiquen las propiedades homotópicas que darán lugar a la estructura de grupoide. Para ello es necesario usar el concepto de contráctil fundamental.

**Definición II.1.1** Un objeto  $A$  de una  $C$ -categoría se dice *contráctil fundamental* cuando es contráctil y posee una retracción  $q$  para  $k_A$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C^2A & \xrightarrow{Cq} & CA \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ CA & \xrightarrow{q} & A \end{array}$$

donde  $p$  es la transformación natural del axioma de cono. A  $q$  se le denominará una *retracción fundamental de  $k_A$* . Una cofibración  $i : B \rightarrow A$  se dirá *fundamental* cuando  $A$  sea un contráctil fundamental.

Obsérvese que para cualquier objeto  $A$  de  $C$ ,  $CA$  es un contráctil fundamental, de donde toda cofibración con codominio un cono es fundamental. En particular, la transformación  $k$  para todo objeto  $X$  e  $i_1$  para toda cofibración  $i$  son cofibraciones fundamentales.

Dados  $i : B \rightarrow A$  cofibración fundamental con  $A$  contráctil ( $qk_A = 1$ ) y  $f_0, f_1 : A \rightarrow X$ , el conjunto de las clases de homotopía relativa a  $i$  entre  $f_0$  y  $f_1$ ,  $[CA, X]^{(f_0 q C i, f_1)(i_1)}$ , se notará también por  $H_i(f_0, f_1)$ . Obsérvese que si  $i$  ó  $X$  es contráctil entonces  $H_i(f_0, f_1)$  es un conjunto unitario.

La extensión  $\mu$  usada para probar que la relación de homotopía es de equivalencia permitirá demostrar las propiedades homotópicas de los grupoides.

**Lema II.1.1**  $\mu^* : [C(P\{i, i\}), \text{codom } -]^{(-\sim)^{(k)}} \rightarrow H_i(-, \sim) (C^{P\{i, i\}} \rightarrow \text{Set})$  es una *equivalencia natural*.

**Teorema II.1.1** Considerando como clase de objetos  $\text{Hom}(A, X)$ , como morfismos entre dos objetos  $f_0$  y  $f_1$  los elementos de  $H_i(f_0, f_1)$ ,  $[fq]$  como morfismo identidad asociado a

un objeto  $f$ ,  $[\overline{F}]$  como morfismo inverso de  $[F]$  y  $[F * G]$  como composición del morfismo  $[F]$  con el  $[G]$ , se tiene un grupoide que se notará por  $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_X$ .

Para la obtención de los grupoides de homotopía  $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_X$  se hace uso de un elemento  $\mu \in \text{Hom}(CA, C(P\{i, i\}))^{kqCi \cup k(i_1)}$ . Otro elemento cualquiera de este conjunto va a generar grupoides idénticos, por lo que éstos son independientes de la elección hecha.

La creación de los grupoides permite introducir un concepto usual en homotopía como es el de conexidad por caminos, teniendo en cuenta que si  $f, g$  son objetos del grupoide  $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_X$  y  $H : f \rightarrow g$ , entonces  $\Lambda_H : H_i(f, f) \rightarrow H_i(g, g)$  definido por  $\Lambda_H([F]) = [\overline{H} * F * H]$  es un isomorfismo de grupos.

Los grupoides de homotopía pueden ser interpretados como bifuntores y sus conjuntos de morfismos como funtores con variación sobre morfismos fijada la cofibración, o con variación sobre ambos.

**Proposición II.1.1**  $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_\sim : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , definido de forma obvia sobre los objetos y dado  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathbf{C}$   $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_\sim(f) = f_*$ , es un funtor.

**Corolario II.1.1**  $H_i(-, -) : \mathbf{C}^A \rightarrow \mathbf{Grp}$ , definido de forma obvia sobre los objetos y dado  $h : f_0 \rightarrow g_0$  en  $\mathbf{C}^A$   $H_i(-, -)(h) = h_*$ , es un funtor.

La categoría de cofibraciones de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$ , es la subcategoría llena de  $\mathbf{C}(2)$  que tiene por objetos las cofibraciones de  $\mathbf{C}$ .

La categoría de cofibraciones fundamentales de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{coff} \mathbf{C}$ , es la que tiene por objetos pares de la forma  $(i, q)$ , donde  $i : B \rightarrow A$  es cofibración fundamental con retracción fundamental  $q$ , y por morfismos los pares  $(g, h) : (i, q) \rightarrow (i', q')$ , donde  $g, h$  son morfismos en  $\mathbf{C}$  con  $gi = i'h$  y  $gq = q'Cg$ .

La categoría de cofibraciones de  $\mathbf{C}$  que tienen como codominio un cono,  $\mathbf{cof}_C \mathbf{C}$ , puede ser considerada subcategoría llena de cada una de las anteriores, según se consideren sus objetos de la forma  $i$  o  $(i, p)$ , con  $p$  la transformación natural del axioma de cono.

En el axioma de cono relativo se obtiene la cofibración  $i_1$  a partir de la  $i$ . De forma inductiva se define  $i_n = (i_{n-1})_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , considerando  $i_0 = i$ . Observar que  $i_n = (i_s)_{n-s}$  para  $n, s \in \mathbb{N}^*$ ,  $s \leq n$ , y que  $i_n$  es cofibración fundamental para todo  $n \in \mathbb{N}$ , independientemente de que lo sea  $i$ .

Si  $\mathbf{A}$  representa una cualquiera de las categorías de cofibraciones definidas anteriormente,  $\mathbf{A}^{P\{-n,-m\}}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ ,  $(n, m) \neq (-1, -1)$ , es la categoría que tiene como objetos pares de la forma  $(A, \{f_0, f_1\})$ , con  $A$  un objeto de  $\mathbf{A}$  y  $\{f_0, f_1\}$  un morfismo de  $\mathbf{C}$  con dominio  $P\{i_n, i_m\}$ , donde  $i$  es la cofibración de  $A$ , y como morfismos  $(g, h) : (A, \{f_0, f_1\}) \rightarrow (A', \{f'_0, f'_1\})$  donde  $(g, h) : A \rightarrow A'$  verificando  $f_0 = f'_0 C^n g$  y  $f_1 = f'_1 C^m g$ . Obsérvese que cuando  $n = -1$  ó  $m = -1$ ,  $\{f_0, f_1\} = f_1$  ó  $\{f_0, f_1\} = f_0$ , respectivamente, y la categoría también se podrá notar por  $\mathbf{A}^{codom -m}$  o  $\mathbf{A}^{codom -n}$ , respectivamente. Cuando  $n = 0$  ó  $m = 0$ , pueden suprimirse en la notación de la categoría.

Un morfismo  $(g, h)$  en cualquiera de las anteriores categorías se denomina morfismo push out si el siguiente cuadrado lo es:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ \downarrow i & & \downarrow i' \\ A & \xrightarrow{g} & A' \end{array}$$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{A})^{P\{-n,-m\} \vee P\{-n',-m'\}}$  es la subcategoría llena de  $\mathbf{A}^{P\{-n,-m\}} \times \mathbf{A}^{P\{-n',-m'\}}$  que tiene como objetos los pares de la forma  $((A, \{f_0, f_1\}), (A', \{f'_0, f'_1\}))$ , con  $codom \{f_0, f_1\} = codom \{f'_0, f'_1\}$ .

**Teorema II.1.2**  $\mathbf{H\_C_X} : (\mathbf{coff\ C})^{\mathbf{op}} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , definido sobre los objetos de forma obvia, y que dado  $(g, h) : (i, q) \rightarrow (i', q')$  en  $(\mathbf{coff\ C})^{\mathbf{op}}$   $\mathbf{H\_C_X}(g, h)$  es el funtor que sobre los objetos actúa como  $g^*$  y sobre los morfismos como  $(Cg)^*$ , es un funtor.

**Proposición II.1.2**  $\mathbf{H\_C_{\sim}} : (\mathbf{coff\ C})^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$  es un funtor.

**Corolario II.1.2**  $H_{-}(\sim, \sim) : ((\mathbf{coff\ C})^{P\{-,-\}})^{\mathbf{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  y  $H_{-}(\sim, \sim) : ((\mathbf{coff\ C})^{codom -})^{\mathbf{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , definidos de forma obvia sobre los objetos y dado  $(g, h) : ((i, q), \{f_0, f_1\}) \rightarrow ((i', q'), \{f'_0, f'_1\})$  en  $((\mathbf{coff\ C})^{P\{-,-\}})^{\mathbf{op}}$ ,  $H_{-}(\sim, \sim)(g, h) = (Cg)^*$ , son funtores que transforman los morfismos push out en isomorfismos.

**Teorema II.1.3**  $\psi : \mathbf{H_{-}\vee_{-}C_{\sim}} \rightarrow \mathbf{H_{-}C_{\sim}} \times \mathbf{H_{-}C_{\sim}} ((\mathbf{coff\ C})^{\mathbf{op}} \times (\mathbf{coff\ C})^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat})$  definida por  $\psi_{((i,q),(i',q'),X)} : \mathbf{H_{i\vee i'}C_X} \rightarrow \mathbf{H_iC_X} \times \mathbf{H_{i'}C_X}$ , con  $\psi_{((i,q),(i',q'),X)}(\{f, f'\}) = (f, f')$  y  $\psi_{((i,q),(i',q'),X)}([F, F']) = ([F], [F'])$ , es una equivalencia natural.

**Corolario II.1.3** La equivalencia natural  $\psi$  induce otras equivalencias naturales:

- i)  $H_{i \vee i'}(\{\sim, \sim'\}, \{\approx, \approx'\}) \cong H_i(\sim, \approx) \times H_{i'}(\sim', \approx') \text{ (} \mathbf{C}^{P\{i \vee i', i \vee i'\}} \rightarrow \mathbf{Set} \text{)}.$
- ii)  $H_{i \vee i'}(\{\sim, \sim'\}, \{\sim, \sim'\}) \cong H_i(\sim, \sim) \times H_{i'}(\sim', \sim') \text{ (} \mathbf{C}^{codom \ i \vee i'} \rightarrow \mathbf{Grp} \text{)}.$
- iii)  $H_{-\vee -'}(\{\sim, \sim'\}, \{\approx, \approx'\}) \cong H_-(\sim, \approx) \times H_{-'}(\sim', \approx')$   
 $((\mathbf{coff} \ \mathbf{C} \times \mathbf{coff} \ \mathbf{C})^{P\{-, -\} \vee P\{-', -'\}} \rightarrow \mathbf{Set}).$
- iv)  $H_{-\vee -'}(\{\sim, \sim'\}, \{\sim, \sim'\}) \cong H_-(\sim, \sim) \times H_{-'}(\sim', \sim')$   
 $((\mathbf{coff} \ \mathbf{C} \times \mathbf{coff} \ \mathbf{C})^{codom \ - \vee codom \ -'}) \rightarrow \mathbf{Grp}).$

Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$  no necesariamente fundamental, como ya se ha hecho notar  $i_n$  es siempre una cofibración fundamental. Por el teorema II.1.1  $\mathbf{H}_{i_n} \mathbf{C}_X$  es un grupoide, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por la proposición II.1.1  $\mathbf{H}_{i_n} \mathbf{C}_\sim : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$  es un funtor, y por el corolario II.1.1,  $H_{i_n}(-, \sim) : \mathbf{C}^{P\{i_n, i_n\}} \rightarrow \mathbf{Set}$  y  $H_{i_n}(-, -) : \mathbf{C}^{codom \ i_n} \rightarrow \mathbf{Grp}$  también lo son.

Los funtores precedentes también pueden ser interpretados como funtores que actúan sobre la cofibración  $i$ . Como consecuencia de ello,  $\mathbf{H}_{i_n} \mathbf{C}_X$  se denominará grupoide de homotopía de orden  $n$  relativo a  $i$  del objeto  $X$ .

**Proposición II.1.3**  $\Sigma^n : \mathbf{cof} \ \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , definido por  $\Sigma^n(i) = \Sigma^{i_n-1}$  y dado un morfismo  $(g, h) : i \rightarrow i'$  en  $\mathbf{cof} \ \mathbf{C}$ ,  $\Sigma^n(g, h) = C^n h \cup C^{n-1} g \cup \dots \cup C^{n-1} g$ , es un funtor para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Obsérvese que  $\Sigma^n(g, h) = \Sigma^{n-m}(C^m g, \Sigma^m(g, h))$ ,  $0 \leq m \leq n$ ,  $\Sigma^n(1_B) = C^n B$  y  $(1_B)_n = 1_{C^n B}$ .

**Corolario II.1.4**  $\Sigma^n(k) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , definido por  $\Sigma^n(k)(A) = \Sigma^n(k_A)$  y dado un morfismo  $f : A \rightarrow A'$ ,  $\Sigma^n(k)(f) = \Sigma^n(Cf, f)$ , es un funtor para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Teorema II.1.4**  $I_n : \mathbf{cof} \ \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{cof}_C \ \mathbf{C}$ , definido por  $I_n(i) = (i_n, p)$  e  $I_n(g, h) = (C^n g, \Sigma^n(g, h))$ , es un funtor que transforma morfismos push out en morfismos push out, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corolario II.1.5**  $I_n : (\mathbf{cof} \ \mathbf{C})^{codom \ -n} \rightarrow (\mathbf{cof}_C \ \mathbf{C})^{codom \ -}$ , definido de forma obvia, es un funtor.

Para  $n = 1$  el funtor anterior permite extender los funtores definidos sobre la categoría  $(\mathbf{cof}_C \ \mathbf{C})^{codom \ -}$  a  $(\mathbf{cof} \ \mathbf{C})^{codom \ -1}$ , pasando de cofibraciones con codominio un cono a

cofibraciones totalmente arbitrarias, resultado que será muy útil a la hora de definir grupos de homotopía generalizada.

**Corolario II.1.6**  $k_n : \Sigma^n(k) \rightarrow C^{n+1}(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C})$  es una transformación natural.

En consecuencia  $k_n(P\{f, g\}) = k_n(\text{codom } f) \cup k_n(\text{codom } g)$ .

Considerando  $I_n : (\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{op}} \rightarrow (\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{op}}$  y como consecuencia del teorema II.1.4 se tiene  $\mathbf{H}_{-n} \mathbf{C}_{\sim} = \mathbf{H}_{-n} \mathbf{C}_{\sim}(I_n \times 1) : (\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , esto es,

$$\mathbf{H}_{-n} \mathbf{C}_{\sim}(i, X) = \mathbf{H}_{-n} \mathbf{C}_{\sim}((i_n, p), X)$$

$$\mathbf{H}_{-n} \mathbf{C}_{\sim}((g, h), f) = \mathbf{H}_{-n} \mathbf{C}_{\sim}((C^n g, \Sigma^n(g, h)), f)$$

Por otro lado se pueden definir:

$$H_{-n}(\sim, \sim') : ((\mathbf{cof } \mathbf{C})^{P\{-n, -n\}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$H_{-n}(\sim, \sim) : ((\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{codom } -n})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$$

por  $H_{-n}(\sim, \sim')(i, \{f_0, f_1\}) = H_{-n}(\sim, \sim')((i_n, p), \{f_0, f_1\})$ ,  $H_{-n}(\sim, \sim)(i, f) = H_{-n}(\sim, \sim)((i_n, p), f)$  y  $H_{-n}(\sim, \sim')(g, h) = H_{-n}(\sim, \sim')(C^n g, \Sigma^n(g, h))$ .

Análogamente existen

$$\mathbf{H}_{-n \vee -'_m} \mathbf{C}_{\sim} : (\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{op}} \times (\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}.$$

$$H_{-n \vee -'_m}(\{\sim, \sim'\}, \{\approx, \approx'\}) : ((\mathbf{cof } \mathbf{C} \times \mathbf{cof } \mathbf{C})^{P\{-n, -n\} \vee P\{-'_m, -'_m\}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

$$H_{-n \vee -'_m}(\{\sim, \sim'\}, \{\sim, \sim'\}) : ((\mathbf{cof } \mathbf{C} \times \mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{codom } -n \vee \text{codom } -'_m})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}.$$

De lo anterior y por el teorema II.1.3 y el corolario II.1.3 existen equivalencias naturales:

$$H_{-n \vee -'_m} \mathbf{C}_{\sim} \cong H_{-n} \mathbf{C}_{\sim} \times H_{-'_m} \mathbf{C}_{\sim}$$

$$H_{-n \vee -'_m}(\{\sim, \sim'\}, \{\approx, \approx'\}) \cong H_{-n}(\sim, \approx) \times H_{-'_m}(\sim', \approx')$$

$$H_{-n \vee -'_m}(\{\sim, \sim'\}, \{\sim, \sim'\}) \cong H_{-n}(\sim, \sim) \times H_{-'_m}(\sim', \sim')$$

**Observación II.1.1 (Homotopía relativa a cofibraciones con codominio no contráctil.)**

La segunda parte del teorema I.2.2 y el teorema II.1.4 permiten una extensión de la homotopía relativa a cofibraciones con codominio no contráctil:

Dado el push out

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ A & \xrightarrow{\bar{f}} & P\{f, i\} \end{array}$$

con  $i$  cofibración, se dirá que  $f_0 \simeq f_1$  rel.  $i$  si y sólo si  $\{u, f_0\} \simeq \{u, f_1\}$  rel.  $\bar{i}$ . Esta equivalencia permite definir homotopía relativa a una cofibración si existe homotopía relativa a la otra, obteniéndose como consecuencia obvia un isomorfismo entre  $[A, Z]^{uf(i)}$  y  $[P\{f, i\}, Z]^{u(\bar{i})}$ .

Si alguna de las cofibraciones tiene codominio contráctil induce homotopía relativa a la otra, sin necesidad de que ésta lo tenga, pudiendo así darse la circunstancia de un push out cofibrado con homotopía relativa a ambas cofibraciones sin codominios contráctiles.

Intuitivamente una cofibración fundamental es aquella cuyo codominio es un objeto contráctil que se comporta de forma similar a un cono. Más aún, toda cofibración fundamental puede ser sustituida por una con codominio un cono, obteniéndose homotopías relativas equivalentes y haciendo así superflua la relativa a cofibraciones fundamentales.

**Teorema II.1.5** *Dada  $i : B \rightarrow A$  cofibración fundamental, se tienen las equivalencias naturales:*

$$(C^n k)^* : H_{(ki)_{n-1}}(-C^{n-1}q, -'C^{n-1}q) \rightarrow H_{i_{n-1}}(-, -') (C^{P\{i_{n-1}, i_{n-1}\}} \rightarrow \mathbf{Set})$$

$$(C^n k)^* : H_{(ki)_{n-1}}(-C^{n-1}q, -C^{n-1}q) \rightarrow H_{i_{n-1}}(-, -) (C^{C^{n-1}A} \rightarrow \mathbf{Grp}).$$

## II.2 Grupos de homotopía.

Los grupoides introducidos en el párrafo anterior permiten ahora definir los grupos de homotopía relativos a una cofibración basados en un morfismo y estudiar su actuación,

pues pueden ser interpretados como funtores, sobre objetos distinguidos, los contráctiles, sobre las cofibraciones contráctiles y sobre los coproductos.

En categorías punteadas se crean a través de funtores suspensión grupos de homotopía relativos a una cofibración y grupos de homotopía referidos a un objeto similares a los obtenidos en homotopía ordinaria. Además se analiza su actuación en los casos particulares ya reseñados para grupos de homotopía generalizada.

**Definición II.2.1** Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ , se denomina  $n$ -grupo de homotopía relativo a  $i_m$  del objeto  $X$  basado en  $f : C^r A \rightarrow X$ ,  $1 \leq r \leq n + m - 1$ , al grupo  $H_{i_{n+m-1}}(fp^{n+m-r-1}, fp^{n+m-r-1})$ , y se notará por  $\pi_n^{im}(X, f)$ .

Si  $A = CA'$ , entonces  $r$  también puede tomar el valor 0, existiendo  $\pi_1^i(X, f)$ . Nótese que por el teorema II.1.5 también existe dicho grupo para las cofibraciones fundamentales. Por esto el 1-grupo de homotopía recibirá el nombre de grupo fundamental de  $X$  relativo a  $i$  basado en  $f$ .

Como consecuencia inmediata de la definición de los grupos de homotopía se tiene:

$$\pi_n^{im}(X, f) = \pi_n^{im}(X, fp^s), 0 \leq s \leq n + m - r - 1.$$

$$\pi_n^{im}(X, f) = \pi_{n-s}^{im+s}(X, f), -m \leq s.$$

y, por tanto, se puede reducir el desarrollo de la teoría a grupos de homotopía de la forma  $\pi_n^i(X, f)$ , donde  $i$  es una cofibración con codominio un cono y  $f$  es un morfismo con dominio dicho cono.

Como sucede en la mayoría de las teorías de homotopía, también en ésta los funtores grupos de homotopía actúan de forma trivial sobre contráctiles.

**Proposición II.2.1** Si  $i$  ó  $X$  es contráctil,  $\pi_n^i(X, f) \cong \{0\}$ .

Los grupos de homotopía se pueden considerar funtores actuando sobre morfismos, si la cofibración es fija, o sobre ambos.

### Teorema II.2.1

- Dada  $i : B \rightarrow CA$  cofibración,  $\pi_n^i : C^{CA} \rightarrow \mathbf{Grp}$  son funtores, para  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\pi_n^- : ((\mathbf{cof}_C C)^{\mathbf{codom}^-})^{\mathbf{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , definido por  $\pi_n^-((i, p), f) = \pi_n^i(X, f)$  y dado un morfismo  $(g, h) : ((i, p), f) \rightarrow ((i', p), f')$ ,  $\pi_n^-(g, h) = (C^n g)^* : \pi_n^i(X, f) \rightarrow \pi_{n'}^i(X, f')$ ,

donde  $X = \text{codom } f$ , es un funtor que transforma morfismos push out en isomorfismos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

c)  $\pi_n^- : ((\mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{codom } -1})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$  es un funtor que transforma morfismos push out en isomorfismos, para todo  $n \geq 2$ .

La actuación sobre coproductos de los funtores grupos de homotopía es la esperada.

**Proposición II.2.2** *Existen equivalencias naturales, para  $n \in \mathbb{N}$ :*

$$\pi_n^{-\vee -'} \cong \pi_n^- \times \pi_n^{-'} (((\mathbf{cof } \mathbf{C} \times \mathbf{cof } \mathbf{C})^{\text{codom } -\vee \text{codom } -'})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp})$$

y dadas  $i : B \rightarrow CA$  e  $i' : B' \rightarrow CA'$

$$\pi_n^{i\vee i'} \cong \pi_n^i \times \pi_n^{i'} (\mathbf{C}^{CA\vee CA'} \rightarrow \mathbf{Grp})$$

Una vez creados los grupos de homotopía generalizada, esto es, los basados en morfismos cualesquiera, se procede a estudiar en categorías punteadas el caso particular que tiene como morfismo base al cero, dando origen a los grupos de homotopía ordinaria relativos a una cofibración o referidos a un objeto, similarmente a lo que sucede en la homotopía ordinaria de los Espacios Topológicos Punteados. Para ello se comienza definiendo el funtor suspensión.

**Definición II.2.2** Dada  $\mathbf{C}$  una  $\mathcal{C}$ -categoría punteada con punto  $*$ , la categoría  $\mathbf{C}_*$  se denominará *categoría basada de  $\mathbf{C}$* . Dado un objeto  $\alpha : A \rightarrow *$  en  $\mathbf{C}_*$  se dirá que  $A$  es un *objeto basado en  $\alpha$*  o que  $\alpha$  es el *morfismo base de  $A$* , y se notará también por  $(A, \alpha)$ . La categoría  $(\mathbf{cof } \mathbf{C})_{1*}$  se denominará *categoría de cofibraciones basadas de  $\mathbf{C}$* .

Todo morfismo basado  $i : (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha)$  que sea cofibración en  $\mathbf{C}$  se denominará *cofibración basada*. Un morfismo entre cofibraciones basadas  $i : (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha)$  e  $i' : (B', \beta') \rightarrow (A', \alpha')$  es un par de morfismos basados  $(g, h)$  donde  $g : (A, \alpha) \rightarrow (A', \alpha')$  y  $h : (B, \beta) \rightarrow (B', \beta')$  tales que  $gi = i'h$ . Es fácil ver que la categoría así formada es isomorfa a  $(\mathbf{cof } \mathbf{C})_{1*}$  identificando  $i$  con  $(\alpha, \beta)$ , y por ello se utilizará indistintamente una u otra categoría.

### Proposición II.2.3

- a)  $C : C_* \rightarrow C_*$ , actuando como en los morfismos de  $C$ , es un funtor que transforma push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas.
- b)  $\Sigma^n : (\text{cof } C)_{1_*} \rightarrow C_*$  definido como en la proposición II.1.3 para morfismos, es un funtor que transforma push outs en push outs para  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- c)  $\Sigma^n(*) : C_* \rightarrow C_*$ , definido sobre morfismos  $f : A \rightarrow A'$  por  $\Sigma^n(*) (f) = \Sigma^n(f, 1_*)$  es un funtor que transforma push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas, para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposición II.2.4** Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ , el siguiente cuadrado es un push out, para  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^{k_{n-1}} & \xrightarrow{k_n} & C^{n+1} B \\
 \downarrow \Sigma^n(Ci, i) & & \downarrow \bar{i}_n C \bar{i}_{n-1} \dots C^{n-1} \bar{i}_1 C^n \bar{i} \\
 \Sigma^{k_{n-1}} & \xrightarrow{\{\bar{i}_n C \bar{i}_{n-1} \dots C^{n-1} \bar{i}_1 C^n \bar{k}, \bar{i}_n C \bar{i}_{n-1} \dots C^{n-2} \bar{i}_2 C^{n-1} \bar{k}, \dots, \bar{i}_n C \bar{k}, \bar{k}\}} & \Sigma^{i_n}
 \end{array}$$

**Definición II.2.3** Dada una cofibración basada  $i : (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha)$  se define la suspensión de  $i$  por el siguiente push out:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\beta} & * \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{\bar{\beta}} & S(i)
 \end{array}$$

### Proposición II.2.5

- a)  $S(-) : (\text{cof } C)_{1_*} \rightarrow C_*$  definido para un morfismo  $(g, h) : i \rightarrow i'$  por  $S(-)(g, h) = 1_* \cup g : S(i) \rightarrow S(i')$  es un funtor que transforma push outs en push outs.
- b)  $S(-_n) : (\text{cof } C)_{1_*} \rightarrow C_*$  definido para un morfismo  $(g, h) : i \rightarrow i'$  por  $S(-_n)(g, h) = S(C^n g, \Sigma^n(g, h)) : S(i_n) \rightarrow S(i'_n)$  es un funtor que transforma push outs en push outs.

c)  $S(*_n) : C_* \rightarrow C_*$  definido para un morfismo  $f : (A, \alpha) \rightarrow (A', \alpha')$  por  $S(*_n)(f) = S(-)(C^n f, \Sigma^n(f, 1_*)) : S((*_A)_n) \rightarrow S((*_A')_n)$  es un funtor que transforma push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas, para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Por convenio se notará al funtor suspensión  $S(*_1) = S(k)$  simplemente por  $S$ , resultando entonces  $S(k_A) \approx SA$  y  $S(-)(Cf, f) \approx Sf$ . Para evitar confusiones obsérvese que  $S(i) \neq Si = S(k)(i)$ .

También por convenio se usará  $S^n(k)(S(-)(g, h)) = S^n S(-)(g, h) \approx S^{n+1}(g, h)$  y  $S^n(k)(S(i)) = S^n S(i) \approx S^{n+1}(i)$ . Esta notación se justifica en parte observando que  $CS(i) = S(Ci)$  y  $SS(i) = S(Si)$ .

**Definición II.2.4** Dado un objeto  $A$  basado en  $\alpha$  y un objeto  $B$ , se define el morfismo cero entre  $A$  y  $B$  por  $0 = *\alpha : A \rightarrow B$ .

Las proposiciones anteriores dotan a conos,  $\Sigma^n(*)$  y  $S(*_n)$  de objetos basados, así como a  $\Sigma^n$  y suspensiones de cofibraciones basadas ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de un morfismo base. Cuando se usen estos objetos sin hacer referencia a un morfismo base se supondrá que el utilizado es el mencionado anteriormente. En particular el cero con dominio uno de estos objetos se considerará de esta forma.

A partir de ahora y hasta el final del párrafo cuando se hable de objetos basados se obviará en general el morfismo base.

Como consecuencia de que el siguiente cuadrado es un push out.

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^n(i) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & * \\
 \downarrow i_n & & \downarrow \\
 C^n A & \xrightarrow{S^n(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) C S^{n-1}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \dots C^{n-1} S(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) C^n \bar{\beta}} & S^{n+1}(i)
 \end{array}$$

se tiene:

## Teorema II.2.2

a) Existe una equivalencia natural entre  $S(-)_n$  y  $S^{n+1}((\text{cof } C)_{1_*} \rightarrow C_*)$ , para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Existe una equivalencia natural entre  $S(*_n)$  y  $S^n(C_* \rightarrow C_*)$  para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Proposición II.2.6

- a) Para todo objeto  $i$  de  $(\text{cof } C)_{1*}$  (de  $(\text{cof}_C C)_{1*}$ ),  $[S^n(i), X] \cong \pi_{n-1}^i(X, 0)$  para  $n \geq 3$  (para  $n \geq 2$ ).
- b) Para todo objeto basado  $A$ ,  $[S^n A, X] \cong \pi_n^{*A}(X, 0)$ , para  $n \geq 2$ .

### Observación II.2.1 (Axioma de cono ordinario.)

Las propiedades que debe verificar la transformación  $p$  para que se pueda definir la estructura de grupo en los corchetes de homotopía anteriores pueden ser obtenidas por PEN, asociando a toda cofibración  $i$  una transformación  $p_i$  tal que  $p_i C^2 i = C i p$ , haciendo así innecesaria para la homotopía ordinaria la existencia de la transformación natural  $p$  y el axioma de cono, sin más que sustituir éste por

#### (C1)' Axioma de cono ordinario.

Para todo objeto  $X$  de  $C$ ,  $k_{CX}$  tiene una retracción  $p$ :  $p k_{CX} = 1_{CX}$ .

Se notará a  $\pi_n^i(X, 0)$  y  $\pi_n^{*A}(X, 0)$  simplemente por  $\pi_n^i(X)$  y  $\pi_n^A(X)$ , y se denominarán  $n$ -grupo de homotopía de  $X$  relativo a  $i$  y  $n$ -grupo de homotopía de  $X$  referido a  $A$ , respectivamente.

Las propiedades estudiadas anteriormente para los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un objeto basados en un morfismo adquieren ahora nuevos significados.

### Proposición II.2.7

- a)  $\pi_n^i(X) \cong \pi_{n-r}^{i_r}(X)$ ,  $0 \leq r$ .
- b)  $\pi_n^A(X) \cong \pi_{n-r}^{S^r A}(X)$ ,  $0 \leq r \leq n-2$ .
- c) Si  $X$  contráctil,  $\pi_n^i(X) \cong \{0\}$  y  $\pi_n^A(X) \cong \{0\}$ , para todo  $n$ .
- d) Si  $i$  es contráctil,  $\pi_n^i(X) \cong \{0\}$ , para todo  $n$ .
- e) Si  $A$  es contráctil,  $\pi_n^A(X) \cong \{0\}$ , para todo  $n$ .

**Proposición II.2.8**  $\pi_n^- : (\text{cof } C)_{1*}^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Grp}$  y  $\pi_n^- : C_*^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Grp}$  son funtores.

**Proposición II.2.9**  $\pi_n^{-\vee} \cong \pi_n^- \times \pi_n^- ((\text{cof } C)_{1*}^{\text{op}} \times (\text{cof } C)_{1*}^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Grp})$  y  $\pi_n^{-\vee} \cong \pi_n^- \times \pi_n^- (C_*^{\text{op}} \times C_*^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Grp})$  son equivalencias naturales.

## Capítulo III

### Sucesiones exactas de homotopía.

La mayoría de las teorías de homotopía con cofibraciones tienen como uno de sus resultados más importantes la creación de sucesiones exactas de grupos de homotopía asociadas a un par.

En las  $C$ -categorías también existen dichas sucesiones. Considerando un par  $(X, Y)$  en el sentido clásico homotópico como una cofibración  $f : Y \rightarrow X$  se obtiene que la categoría de estos pares es también una  $C$ -categoría, pudiéndose así definir los grupos de homotopía relativos a pares de cofibraciones de un par basado en un morfismo de pares como los grupos de homotopía generalizada de dicha categoría. A través de ellos se obtienen los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un par basado en un morfismo, que dan lugar a distintas sucesiones exactas de grupos de homotopía generalización de las clásicas: la relativa a una cofibración basada en un morfismo, la relativa a una cofibración y la referida a un objeto.

#### III.1 Categoría de pares.

Para la creación de las sucesiones exactas de grupos de homotopía es necesario un estudio de la categoría de cofibraciones de una dada. Todo como natural en una categoría  $C$  se extiende a la categoría de cofibraciones  $\mathbf{cof} C$ , de forma que conceptos como nul-homotopía, contráctiles, extensiones de morfismos relativas a cofibraciones, cofibrantes, punto y homotopía pueden ser relacionados con los respectivos en la categoría original. Asimismo, a través del funtor inyección desde la categoría de pares de  $C$  en el producto  $C \times C$  se inducen transformaciones naturales entre los distintos funtores de homotopía ya vistos en los capítulos anteriores.

La categoría de pares  $\mathbf{C}(2)$  tiene como objetos los morfismos de  $\mathbf{C}$ . En homotopía es frecuente exigir a dichos morfismos que sean también cofibraciones, obteniéndose la categoría de cofibraciones de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$ , ya definida en el párrafo II.1. En este caso los objetos de dicha categoría se representarán por  $(X, Y)$ , suponiéndose conocida la cofibración. En general a los pares  $(X, Y)$ ,  $(X', Y')$ ,... se les supondrán asociadas cofibraciones  $f : Y \rightarrow X$ ,  $f' : Y' \rightarrow X'$ ,... respectivamente, y a los pares de la forma  $(A, A)$  la cofibración  $1_A$ .

Si  $\mathbf{C}$  tiene una estructura de cono natural entonces  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  también la tiene. Para ello se obtienen un funtor cono  $C$ , transformaciones naturales  $k$  y  $p$  así como cofibraciones en función de los respectivos en  $\mathbf{C}$ :

- $C : \mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{cof} \mathbf{C}$  definido por  $C(X, Y) = (CX, CY)$ , donde  $Cf : CY \rightarrow CX$  es la cofibración asociada, y  $C(g, h) = (Cg, Ch)$ , es el funtor cono en  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$ .
- $k : 1 \rightarrow C$  ( $\mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{cof} \mathbf{C}$ ) definida por  $k_{(X, Y)} = (k_X, k_Y)$  y  $p : C^2 \rightarrow C$  ( $\mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{cof} \mathbf{C}$ ) definida por  $p_{(X, Y)} = (p_X, p_Y)$ , son las transformaciones naturales inclusión y proyección de dicho cono.
- Un morfismo de pares  $(u, v) : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  se dirá cofibración cuando  $v : Y \rightarrow Y'$  y  $\{f', u\} : P\{v, f\} \rightarrow X'$  sean cofibraciones en  $\mathbf{C}$ .

Con lo anterior se tiene:

**Teorema III.1.1** *Si  $\mathbf{C}$  es una categoría con cono natural,  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  también lo es.*

A partir de esta construcción cono en  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  se tienen todos los resultados conseguidos en los capítulos anteriores. La forma de obtención de esta estructura permite relacionar los conceptos y resultados en ambas categorías.

### Proposición III.1.1

- a) Si  $(g, h) : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  es nulhomótopo entonces  $g$  y  $h$  también lo son.
- b) Si  $X'$  contráctil, entonces  $(g, h) : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  es nulhomótopo si y sólo si  $h : Y \rightarrow Y'$  lo es.
- c)  $(X, Y)$  es contráctil si y sólo si  $X$  e  $Y$  lo son.
- d)  $(X, Y)$  es cofibrante si y sólo si  $X$  e  $Y$  lo son.

e)  $\mathbf{C}$  es una categoría punteada si y sólo si  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  lo es.

Asimismo, la homotopía de la categoría  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  puede ser relacionada con la de  $\mathbf{C}$ .

### Proposición III.1.2

- a) Si  $(g_0, h_0) \simeq (g_1, h_1)$  rel.  $(u, v)$ , entonces  $g_0 \simeq g_1$  rel.  $u$  y  $h_0 \simeq h_1$  rel.  $v$ .
- b) Si  $\text{codom } g_0 = \text{codom } g_1$  es contráctil, entonces  $(g_0, h_0) \simeq (g_1, h_1)$  rel.  $(u, v)$  si y sólo si  $g_0 \simeq g_1$  rel.  $u$  y  $h_0 \simeq h_1$  rel.  $v$ .
- c) Si  $X''$  contráctil, entonces  $[(X', Y'), (X'', Y'')](g, h)((u, v)) \cong [Y', Y'']^{h(v)}$ .

Consecuentemente surgen relaciones entre los respectivos funtores de homotopía que se pueden resumir de la siguiente forma.

**Proposición III.1.3** Si  $\sim$  es contráctil entonces existen equivalencias naturales:

- a)  $\iota : \pi_n^{(-,=)}(\sim, \approx) \cong \pi_n^=(\approx) \quad (\mathbf{cof} \mathbf{C} \times \mathbf{cof} (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}).$
- b)  $\iota : \pi_n^{(-,=)}(\sim, \approx) \cong \pi_n^=(\approx) \quad (\mathbf{cof} \mathbf{C} \times \mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Grp}).$

**Proposición III.1.4** Si  $\text{codom } \sim$  contráctil, entonces existen equivalencias naturales:

- a)  $\iota : \pi_n^{(u,v)} \cong \pi_n^v \quad ((\mathbf{cof} \mathbf{C})^{(CX', CY')} \rightarrow \mathbf{Grp}).$
- b)  $\iota : \pi_n^{(-,=)} \cong \pi_n^= \quad (((\mathbf{cof}_C (\mathbf{cof} \mathbf{C}))^{\text{codom } -})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}).$

## III.2 Sucesiones exactas.

Una vez creados los grupos de homotopía de pares se hace uso de ellos para la obtención de un resultado clásico en teoría de homotopía como son las sucesiones exactas de grupos de homotopía. No sólo se obtienen las sucesiones referidas a un objeto, sino que se extienden a homotopía generalizada.

Para ello se introduce primeramente el concepto de grupo de homotopía de un par basado en un morfismo y relativo a una cofibración.

**Definición III.2.1** Dada una cofibración  $i : B \hookrightarrow A$  y un morfismo  $h : CA \rightarrow Y$ , se define:

$$\pi_{n+1}^i((X, Y), h) = \pi_n^{(Ci, i)}((X, Y), (fhp, h))$$

Obsérvese que si  $i$  es una cofibración contráctil, entonces  $\pi_{n+1}^i((X, Y), h) = \{0\}$ , y si  $X$  es contráctil entonces  $\pi_{n+1}^i((X, Y), h) \cong \pi_n^i(Y, h)$ .

Los grupos de homotopía que intervienen en la sucesión, así como ella misma, se pueden expresar como funtores usando los diferentes funtores grupos de homotopía establecidos en el teorema II.2.1. Para ello es necesario crear la categoría  $(\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*}$ , que tiene por objetos los triples de la forma  $(i, f, h)$ , donde  $i, f$  son objetos de  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  y  $h : C(\text{codom } i) \rightarrow \text{dom } f$  en  $\mathbf{C}$ , y como morfismos  $(g_0, g_1, g_2, g_3) : (i, f, h) \rightarrow (i', f', h')$  donde  $(g_0, g_1) : i' \rightarrow i$  y  $(g_2, g_3) : f \rightarrow f'$  tales que  $g_3 h C g_0 = h'$ . Obsérvese que la composición de morfismos se define  $(g'_0, g'_1, g'_2, g'_3)(g_0, g_1, g_2, g_3) = (g_0 g'_0, g_1 g'_1, g'_2 g_2, g'_3 g_3)$ .

### Proposición III.2.1

- a)  $\pi_{n+1}^{\text{codom}} : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , definido por  $\pi_{n+1}^{\text{codom}}(i, f, h) = \pi_{n+1}^-(i, fh)$  y  $\pi_{n+1}^{\text{codom}}(g_0, g_1, g_2, g_3) = \pi_{n+1}^-(g_0, g_1) \pi_{n+1}^i(g_2) = \pi_{n+1}^{i'}(g_2) \pi_{n+1}^-(g_0, g_1)$  es un funtor para  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $\pi_{n+1}^{\text{dom}} : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , definido por  $\pi_{n+1}^{\text{dom}}(i, f, h) = \pi_{n+1}^-(i, h)$  y  $\pi_{n+1}^{\text{dom}}(g_0, g_1, g_2, g_3) = \pi_{n+1}^-(g_0, g_1) \pi_{n+1}^i(g_3) = \pi_{n+1}^{i'}(g_3) \pi_{n+1}^-(g_0, g_1)$  es un funtor para  $n \in \mathbb{N}$ .
- c)  $\pi_{n+1} : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , definido por  $\pi_{n+1}(i, f, h) = \pi_{n+1}^i((\text{codom } f, \text{dom } f), h)$  y  $\pi_{n+1}(g_0, g_1, g_2, g_3) = \pi_{n+1}^{(-, =)}((Cg_0, Cg_1), (g_0, g_1)) \pi_{n+1}^{(Ci, i)}((g_2, g_3)) = \pi_{n+1}^{(Ci', i')}(g_2, g_3) \pi_{n+1}^{(-, =)}((Cg_0, Cg_1), (g_0, g_1))$  es un funtor para  $n \geq 2$ .

De la definición de estos funtores resulta que cuando  $(g_0, g_1)$  es un morfismo push out se tiene que si  $g_2, g_3$  o ambos son isomorfismos entonces  $\pi_{n+1}^{\text{codom}}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ ,  $\pi_{n+1}^{\text{dom}}(g_0, g_1, g_2, g_3)$  ó  $\pi_{n+1}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ , respectivamente, son también isomorfismos.

Una vez obtenidos los funtores que determinan los términos de la sucesión se pasa a crear las transformaciones naturales que relacionan dichos términos.

### Proposición III.2.2 Se tienen transformaciones naturales:

- a)  $j_{n+1} : \pi_{n+1}^{\text{codom}} \rightarrow \pi_{n+1}((\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Grp})$ , definida por  $j_{n+1}(i, f, h)([F]) = [(F, hp^{n-1})]$ .

b)  $\delta_{n+1} : \pi_{n+1} \rightarrow \pi_n^{dom} ((\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Grp})$ , definida por  $\delta_{n+1}(i, f, h)([(F, G)]) = [G]$ .

c)  $u_{n+1} : \pi_{n+1}^{dom} \rightarrow \pi_{n+1}^{codom} ((\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Grp})$ , definida por  $u_{n+1}(i, f, h) = f_*$ .

La exactitud en la composición de las transformaciones naturales anteriores concluirá el resultado principal de este capítulo.

Para verificar la exactitud del último par de transformaciones es necesario crear un isomorfismo natural entre funtores de homotopía.

$\pi_{n+1}^{codom}$ ,  $\pi_{n+1}^{dom}$  y  $\pi_{n+1}$ , definidos en la proposición III.2.1, se pueden componer con el funtor olvido desde  $\mathbf{Grp}$  en  $\mathbf{Set}^*$  y ser considerados como funtores corchetes de homotopía  $P_{n+1}^{codom}$ ,  $P_{n+1}^{dom}$  y  $P_{n+1}$  con codominio la categoría  $\mathbf{Set}^*$ , existiendo también en este caso  $P_1^{codom}$ ,  $P_1^{dom}$  y  $P_2$ .

$Q_{n+1} : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{Set}^*$ , definido por  $Q_{n+1}(i, f, h) = P_2(i_{n-1}, f, hp^{n-1})$  es un funtor naturalmente equivalente a  $P_{n+1}$  ( $n \geq 1$ ). Obsérvese que  $Q_2 = P_2$ .

**Proposición III.2.3** *Los pares de transformaciones naturales  $(j_{n+1}(i, f, h), \delta_{n+1}(i, f, h))$ ,  $(\delta_{n+1}(i, f, h), u_{n+1}(i, f, h))$  y  $(u_{n+1}(i, f, h), j_{n+1}(i, f, h))$  son exactos.*

**SEGrp** y **SESet**<sup>\*</sup> simbolizan las categorías que tienen como objetos sucesiones exactas decrecientes de grupos y conjuntos punteados, respectivamente, indizados sobre los números naturales. Los morfismos de esta categoría son sucesiones de homomorfismos de grupos y aplicaciones punteadas, respectivamente, entre los elementos de las sucesiones con el mismo índice, que hacen conmutativo el diagrama.

La categoría  $(\mathbf{cof} \mathbf{C})^{CA}$  tiene como objetos los pares de la forma  $(f, h)$ , donde  $f \in \mathbf{cof} \mathbf{C}$  y  $h : CA \rightarrow dom f$  morfismo de  $\mathbf{C}$ , y como morfismos pares  $(g_2, g_3) : f \rightarrow f'$  en  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  verificando  $g_3h = h'$ .

**Teorema III.2.1** *Se tienen los siguientes funtores:*

a)  $\pi : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{SEGrp}$ , definido por:

$$\pi = \dots \rightarrow \pi_3^{dom} \xrightarrow{u} \pi_3^{codom} \xrightarrow{j} \pi_3 \xrightarrow{\delta} \pi_2^{dom} \xrightarrow{u} \pi_2^{codom}$$

b)  $P : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{2*} \rightarrow \mathbf{SESet}^*$ , definido por:

$$P = \dots \rightarrow P_2^{dom} \xrightarrow{u} P_2^{codom} \xrightarrow{j} P_2 \xrightarrow{\delta} P_1^{dom} \xrightarrow{u} P_1^{codom}$$

c) Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ ,  $\pi^i : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{CA} \rightarrow \mathbf{SEGrp}$ , definido por  $\pi^i(f, h) = \pi(i, f, h)$  y  $\pi^i(g_2, g_3) = \pi(1, 1, g_2, g_3)$ .

d) Dada una cofibración  $i : B \rightarrow A$ ,  $P^i : (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{CA} \rightarrow \mathbf{SESet}^*$ , definido por  $P^i(f, h) = P(i, f, h)$  y  $P^i(g_2, g_3) = P(1, 1, g_2, g_3)$ .

En el caso de que  $\mathbf{C}$  sea una categoría punteada:

**Teorema III.2.2** *Se tienen funtores*

a)  $\pi : ((\mathbf{cof} \mathbf{C})_{1*})^{\text{op}} \times \mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{SEGrp}$ , definido por  $\pi(i, f) = \pi(i, f, 0)$ .

b)  $P : ((\mathbf{cof} \mathbf{C})_{1*})^{\text{op}} \times \mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{SESet}^*$ , definido por  $P(i, f) = P(i, f, 0)$ .

c)  $\pi : (\mathbf{C}_*)^{\text{op}} \times \mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{SEGrp}$ , definido por  $\pi(A, f) = \pi(*_A, f)$ .

d)  $P : (\mathbf{C}_*)^{\text{op}} \times \mathbf{cof} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{SESet}^*$ , definido por  $P(A, f) = P(*_A, f)$ .

## Capítulo IV

### Categorías punteadas.

En una  $C$ -categoría existen, como se ha probado en los capítulos II y III, grupos de homotopía relativos a una cofibración basados en un morfismo, que se han denominado grupos de homotopía generalizada, y sucesiones exactas de dichos grupos. Cuando la  $C$ -categoría es punteada también existen los grupos de homotopía referidos a un objeto y los relativos a una cofibración, así como las sucesiones exactas respectivas.

La categoría de los espacios topológicos es una  $C$ -categoría no punteada, como se verá en el siguiente capítulo, que tiene asociada una  $C$ -categoría punteada: la categoría de los espacios topológicos punteados.

Los conceptos de punto y de espacio topológico punteado se pueden generalizar a cualquier  $C$ -categoría, asociando  $C$ -categorías punteadas similarmente a lo que sucede en espacios topológicos. Se van a considerar distintos puntos, los conos de objetos, que dan lugar a  $C$ -categorías punteadas cuyos grupos de homotopía referidos a objetos y los relativos a cofibraciones, así como sus sucesiones exactas, vendrán expresados en función de la homotopía generalizada de la  $C$ -categoría primitiva, obteniéndose conceptos como los de esfera punteada, grupos de homotopía esféricos y sucesiones exactas de éstos que terminan en un grupo fundamental.

Dada una  $C$ -categoría  $C$ , se considerará el cono de cualquier objeto de  $C$  como un *objeto punto*. A lo largo de todo este capítulo se supondrá fijado un punto  $C^\nabla$ , y todo el desarrollo se hará en función del mismo, obteniendo la  $C$ -categoría punteada asociada y surgiendo relaciones entre los conceptos de nulhomotopía y contráctil de ambas categorías.

La categoría punteada  $C^{COF\ C^\nabla}$  es la subcategoría llena de  $C^{C^\nabla}$  que tiene como objetos los pares de la forma  $(X, x)$ , con  $x : C^\nabla \rightarrow X$  cofibración. A  $(X, x)$  se le denominará objeto punteado con punto  $x$ .

Un funtor como en esta categoría se obtiene mediante el siguiente push out

$$\begin{array}{ccc} C^2\nabla & \xrightarrow{p} & C\nabla \\ \downarrow Cx & & \downarrow \overline{Cx} \\ CX & \xrightarrow{\bar{p}} & \hat{C}X \end{array}$$

- $\hat{C} : \mathbf{C}^{COF\ C\nabla} \rightarrow \mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$  se define por  $\hat{C}(X, x) = (\hat{C}X, \overline{Cx})$ , y dado un morfismo  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ,  $\hat{C}f = 1 \cup Cf : \hat{C}(X, x) = P\{p, Cx\} \rightarrow \hat{C}(Y, y) = P\{p, Cy\}$ .
- Las transformaciones naturales inclusión y proyección se definen por  $\hat{k}_{(X,x)} = \overline{p\nabla}k_X : (X, x) \rightarrow \hat{C}(X, x) = P\{p, Cx\}$  y  $\hat{p}_{(X,x)} = \{\overline{Cx}, p\nabla \cup p_X\} : \hat{C}^2(X, x) = P\{p, C\overline{Cx}\} \rightarrow \hat{C}(X, x) = P\{p, Cx\}$ .

La iteración del funtor como se puede expresar mediante otro push out:

**Proposición IV.1** *El siguiente cuadrado es un push out*

$$\begin{array}{ccc} C^{n+1}\nabla & \xrightarrow{p^n} & C\nabla \\ \downarrow C^n x & & \downarrow \overline{Cx}^{(n)} \\ C^n X & \xrightarrow{\bar{p}C\bar{p}\dots C^{n-1}\bar{p}} & \hat{C}^n X \end{array}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , donde  $\overline{Cx}^{(0)} = x$  y  $\overline{Cx}^{(n)} = C \overline{Cx}^{(n-1)}$  obtenido aplicando sucesivamente el funtor  $\hat{C}$ .

Como consecuencia del anterior push out se tiene una nueva expresión para las transformaciones naturales:

- $\hat{k}_{(X,x)} = 1 \cup k_X : (X, x) = P\{1_{C\nabla}, x\} \rightarrow \hat{C}(X, x) = P\{p, Cx\}$ .
- $\hat{p}_{(X,x)} = 1 \cup p_X : \hat{C}^2(X, x) = P\{p^2, C^2x\} \rightarrow \hat{C}(X, x) = P\{p, Cx\}$ .

resultando que:

- $\hat{C}^n f = 1 \cup C^n f : \hat{C}^n(X, x) = P\{p^n, C^n x\} \rightarrow \hat{C}^n(Y, y) = P\{p^n, C^n y\}$ , para todo  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ .

- $\hat{k}\hat{C}_{(X,x)}^n = 1 \cup kC_X^n : \hat{C}^n(X, x) = P\{p^n, C^n x\} \rightarrow \hat{C}^{n+1}(X, x) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}x\}.$
- $\hat{p}\hat{C}_{(X,x)}^n = 1 \cup pC_X^n : \hat{C}^{n+2}(X, x) = P\{p^{n+2}, C^{n+2}x\} \rightarrow \hat{C}^{n+1}(X, x) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}x\}.$

Un morfismo  $i : (B, b) \rightarrow (A, a)$  se dirá cofibración cuando  $i : B \rightarrow A$  lo sea en  $\mathbf{C}$ , es decir, las cofibraciones en  $\mathbf{C}^{COF\ C^\nabla}$  son precisamente las cofibraciones punteadas.

**Teorema IV.1** *Si  $\mathbf{C}$  es una  $\mathbf{C}$ -categoría punteada entonces  $\mathbf{C}^{COF\ C^\nabla}$  es una  $\hat{\mathbf{C}}$ -categoría punteada.*

Los conceptos homotópicos de la categoría punteada de una dada se van a relacionar con los respectivos de la categoría original.

#### Proposición IV.2

- a) *Dado  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  un morfismo punteado,  $f$  es nulhomótopo en  $\mathbf{C}^{COF\ C^\nabla}$  si y sólo si  $f$  es nulhomótopo en  $\mathbf{C}$ .*
- b) *Dado  $(X, x)$  un objeto punteado,  $(X, x)$  es contráctil en  $\mathbf{C}^{COF\ C^\nabla}$  si y sólo si  $X$  es contráctil en  $\mathbf{C}$ .*

La homotopía en categorías punteadas puede expresarse como homotopía generalizada en la categoría primitiva, obteniéndose de esta forma funtores de homotopía en la categoría punteada equivalentes a otros en la original. Para ello, usando teoría de push outs, se expresan las distintas construcciones homotópicas punteadas en función de las respectivas no punteadas.

Como consecuencia de lo anterior y similarmente a lo que sucede en la homotopía ordinaria de los espacios topológicos surgen conceptos como esferas, grupos de homotopía esféricos, grupo fundamental y sucesiones exactas de estos grupos.

Un primer paso en este proceso consiste en relacionar, haciendo uso de las cofibraciones entre push outs, el cono relativo punteado con el cono relativo original, mediante la extensión del concepto de cono de un objeto punteado a sus push outs de definición, push outs cofibrados con inducida vertical el punto base.

En general, cuando se exprese  $(B, b) = P\{s, j\}$  se supondrá  $j : S \rightarrow T$ ,  $s : S \rightarrow C^\nabla$  y  $\bar{j} = b$ . Por otro lado, una cofibración  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$  tal que  $i : T \rightarrow T'$  cofibración con  $S = S'$ ,  $s = s'$  y  $j' = ij$ , se dirá cofibración de push outs.

## Teorema IV.2

- a) Dado un objeto punteado  $(X, x) = P\{s, j\}$ , se verifica  $\hat{C}^n(X, x) = P\{p^n C^n s, C^n j\}$ .
- b) Dado un morfismo punteado  $1 \cup f : (X, x) = P\{s, j\} \rightarrow (Y, y) = P\{s', j'\}$ , se verifica  $\hat{C}^n(1 \cup f) = 1 \cup C^n f : \hat{C}^n(X, x) = P\{p^n C^n s, C^n j\} \rightarrow \hat{C}^n(Y, y) = P\{p^n C^n s', C^n j'\}$ .
- c) Dado un objeto punteado  $(X, x) = P\{s, j\}$ ,  $\hat{k}_{(X, x)} = 1 \cup k_T : (X, x) = P\{s, j\} \rightarrow \hat{C}(X, x) = P\{pCs, Cj\}$  y  $\hat{p}_{(X, x)} = 1 \cup p_T : \hat{C}^2(X, x) = P\{p^2 C^2 s, C^2 j\} \rightarrow \hat{C}(X, x) = P\{pCs, Cj\}$ .

**Lema IV.1** Dada  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$  cofibración de push outs,  $\hat{\Sigma}^{1 \cup i} = P\{pCs, Cj \cup j'\}$  y  $(1 \cup i)_\Gamma = 1 \cup i_1$ .

Obsérvese que  $(1 \cup i)_\Gamma : \hat{\Sigma}^{1 \cup i} = P\{pCs, Cj \cup j'\} \rightarrow \hat{C}(A, a) = P\{pCs, Cj'\}$  vuelve a ser una cofibración de push outs por el teorema I.1.1 y por tanto se puede iterar el proceso.

**Teorema IV.3** Dada una cofibración de push outs  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$

- a) El siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{array}{ccc}
 C^{n+1}S & \xrightarrow{p^{n+1}C^{n+1}s} & C \nabla \\
 \downarrow \Sigma^{n+1}(j', j) & & \downarrow \begin{matrix} (n+1) \\ \overline{Cj} \end{matrix} \cup \begin{matrix} (n) \\ \overline{Cj'} \end{matrix} \cup \dots \cup \begin{matrix} (n) \\ \overline{Cj'} \end{matrix} \\
 \Sigma^{in} & \xrightarrow{\overline{pCp} \dots C^n \overline{pC}^{n+1} \overline{s} \cup \overline{pCp} \dots C^{n-1} \overline{pC}^{n-1} \overline{s'} \cup \dots \cup \overline{pCp} \dots C^{n-1} \overline{pC}^{n-1} \overline{s'}} & \hat{\Sigma}^{(1 \cup i)}_n
 \end{array}$$

que transforma  $(1 \cup i)_{n+1} : \hat{\Sigma}^{(1 \cup i)}_n \rightarrow \hat{C}^{n+1}(A, a) = P\{p^{n+1}C^{n+1}s, C^{n+1}j'\}$  en  $1 \cup i_{n+1} : P\{p^{n+1}C^{n+1}s, \Sigma^{n+1}(j', j)\} \rightarrow \hat{C}^{n+1}(A, a) = P\{p^{n+1}C^{n+1}s, C^{n+1}j'\}$ .

Para simplificar la notación se usará

$$\overline{pCp} \dots C^n \overline{pC}^{n+1} \overline{s} \cup \overline{pCp} \dots C^{n-1} \overline{pC}^{n-1} \overline{s'} \dots \cup \overline{pCp} \dots C^{n-1} \overline{pC}^{n-1} \overline{s'} = p^{n+1} \widetilde{C^{n+1}s}.$$

- b) Si  $s = 1_{C \nabla}$  y  $j = a$ , el siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{array}{ccc}
C^{n+2}\nabla & \xrightarrow{p^{n+1}} & C\nabla \\
\downarrow & & \downarrow \\
C^{n+1}b \cup C^n a \cup \dots (n+1) \cup C^n a & \xrightarrow{\frac{(n+1)}{C}b \cup \frac{(n)}{C}a \cup \dots (n+1) \cup \frac{(n)}{C}a} & C \\
\Sigma^{i_n} & \xrightarrow{\bar{p}C\bar{p} \dots C^n \bar{p} \cup \bar{p}C\bar{p} \dots C^{n-1} \bar{p} \cup \dots (n+1) \cup \bar{p}C\bar{p} \dots C^{n-1} \bar{p}} & \widehat{\Sigma}^{i_n}
\end{array}$$

que transforma  $i_{n+1} : \widehat{\Sigma}^{i_n} \rightarrow \widehat{C}^{n+1}(A, a) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}a\}$  en  $1 \cup i_{n+1} : P\{p^{n+1}, C^{n+1}b \cup C^n a \cup \dots (n+1) \cup C^n a\} \rightarrow \widehat{C}^{n+1}(A, a) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}a\}$ .

c) El siguiente cuadrado es un push out.

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^{i_n} & \xrightarrow{p^{n+1}\widehat{C}^{n+1}s} & \widehat{\Sigma}^{(1 \cup i)_n} \\
\downarrow i_{n+1} & & \downarrow (1 \cup i)_{n+1} \\
C^{n+1}T' & \xrightarrow{\bar{p}C\bar{p} \dots C^n \bar{p} C^{n+1}\bar{s}} & \widehat{C}^{n+1}A
\end{array}$$

Los morfismos punteados considerados como morfismos de push outs, sea su dominio un push out de identificación o no, coinciden con los morfismos en  $\mathbf{C}$  con dominio un push out del tipo anterior y primera componente una cofibración.

$(C^{P\{s,j\}})^{\text{cof}}$  y  $(C^{P\{s,j\}})_{\text{cof}}$  representarán las subcategorías llenas de  $C^{P\{s,j\}}$  cuyas primera y segunda componente de los objetos, respectivamente, son cofibraciones.

**Proposición IV.3** Dado  $(A, a) = P\{s, j\}$ ,  $(C^{COF C\nabla})^{P\{s,j\}} \cong (C^{P\{s,j\}})^{\text{cof}}$ .

Observando que dado un objeto de  $(C^{P\{s,j\}})^{\text{cof}}$ ,  $\{\sim, -\} : P\{s, j\} \rightarrow X$ , se tiene  $\{\sim s, -\} = - : P\{1, j\} = T \rightarrow X$ , que dada una cofibración de push outs  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$  se verifica  $\{j', i\} = i : P\{1, j\} = T \rightarrow T'$ , y considerando  $\widehat{C}^n(A, a) = P\{p^n C^n s, C^n j'\}$  y  $\widehat{\Sigma}^{(1 \cup i)_n} = P\{p^{n+1} C^{n+1} s, \Sigma^{n+1}(j', j)\}$ :

**Proposición IV.4** Dada una cofibración de push outs  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$ , existen equivalencias naturales

a)  $\varepsilon : \text{Hom}((A, a), (-, \sim)) \cong \text{Hom}(T', -)^{\sim s(j')} (C^{COF C\nabla} \rightarrow \mathbf{Set})$  definida por

$$\begin{array}{ccc}
\varepsilon_{(X,x)} : \text{Hom}((A, a), (X, x)) & \rightarrow & \text{Hom}(T', X)^{xs(j')} \\
1 \cup f & \rightarrow & f
\end{array}$$

$$b) \varepsilon : Hom((A, a), (codom \sim, \sim))^{1 \cup - (1 \cup i)} \cong Hom(T', codom \sim)^{\{\sim s, -\}(\{j', i\})}$$

$((C^{P\{s, j\}})^{cof} \rightarrow \mathbf{Set})$  definida por

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_{\{x, u\}} : Hom((A, a), (X, x))^{1 \cup u (1 \cup i)} & \rightarrow & Hom(T', X)^{\{xs, u\}(\{j', i\})} \\ 1 \cup f & \rightarrow & f \end{array}$$

$$c) \varepsilon : Hom(\widehat{\Sigma}^{(1 \cup i)}_{\widehat{n}}, (-, \sim)) \cong Hom(\Sigma^{i_n}, -)^{\sim p^{n+1} C^{n+1} s(\Sigma^{n+1}(j', j))} (C^{COF} C^{\nabla} \rightarrow \mathbf{Set}).$$

$$d) \varepsilon : Hom(\widehat{C}^n(A, a), (codom \sim, \sim))^{1 \cup - ((1 \cup i)_{\widehat{n}})} \cong Hom(C^n T', codom \sim)^{\{\sim p^n C^n s, -\}(\{C^n j', i_n\})} \\ (C^{P\{p^n C^n s, \Sigma^n(j', j)\}})^{cof} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

La relación entre los conos relativos punteado y no punteado establecida en el teorema IV.3 permite extender la equivalencia natural de la proposición IV.4 anterior a los distintos funtores de homotopía. Para ello es necesario introducir previamente la noción de push out contráctil.

**Definición IV.1** El push out de  $P\{s, j\}$  se dirá *contráctil* si  $k_T$  tiene una retracción  $q \in Hom(CT, T)^{jq'(Cj)}$ , con  $q' : CS \rightarrow S$  tal que  $sq' = pCs$ .

Obsérvese que si el push out de  $P\{s, j\}$  es contráctil entonces  $(P\{s, j\}, \bar{j})$  es un objeto contráctil en  $cof \ C$ , y por el apartado b) de la proposición IV.2  $P\{s, j\}$  es un objeto contráctil en  $C$ . También  $T$  es contráctil en  $C$ .

Por otro lado, el push out de  $\widehat{C}P\{s, j\} = P\{pCs, Cj\}$  es contráctil, y dados  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$  cofibración de push outs y  $1 \cup f : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (X, x) = P\{s'', j''\}$  con  $(X, x)$  push out contráctil, entonces existe  $1 \cup \tilde{f} : (A, a) = P\{s', j'\} \rightarrow (X, x) = P\{s'', j''\}$  tal que  $(1 \cup \tilde{f})(1 \cup i) = 1 \cup \tilde{f}i = 1 \cup f$ . Como consecuencia se tiene

**Teorema IV.4** Dada una cofibración de push outs  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$ , la equivalencia natural  $\varepsilon$  induce las siguientes:

$$a) \varepsilon : [(A, a), (codom \sim, \sim)]^{1 \cup - (1 \cup i)} \cong [T', codom \sim]^{\{\sim s, -\}(\{j', i\})} ((C^{P\{s, j\}})^{cof} \rightarrow \mathbf{Set}).$$

$$b) \varepsilon : [\widehat{C}^n(A, a), (codom \sim, \sim)]^{1 \cup - ((1 \cup i)_{\widehat{n}})} \cong [C^n T', codom \sim]^{\{\sim p^n C^n s, -\}(\{C^n j', i_n\})} \\ ((C^{P\{p^n C^n s, \Sigma^n(j', j)\}})^{cof} \rightarrow \mathbf{Set}).$$

Una vez establecida la equivalencia entre los corchetes de homotopía punteado y no punteado se procede a la definición de la categoría  $\mathbf{cof po}^{C\nabla} \mathbf{C}$  para extender dicha equivalencia a los grupos de homotopía.

La categoría  $\mathbf{cof po}^{C\nabla} \mathbf{C}$  es aquella que tiene por objetos las cofibraciones de push outs definidas en la introducción de este párrafo y como morfismos los pares de morfismos de push outs que hacen conmutativo el diagrama. Los objetos de esta categoría se representarán por  $1 \cup \sim$ .  $\sim$  representará la cofibración del push out dominio de  $1 \cup \sim$ .

**Teorema IV.5** *Dada una cofibración de push outs  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$  y considerando  $\widehat{C}(A, a) = P\{pCs, Cj'\}$ , se tiene:*

$$a) \varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1 \cup i}(\text{codom } 1 \cup -, 1 \cup -) \cong \pi_n^{\{j', i\}}(\text{codom } -, -) \\ ((\mathbf{C}^{COF C\nabla})^{\widehat{C}(A, a)} \rightarrow \mathbf{Grp})$$

$$b) \varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1 \cup \sim}(\text{codom } 1 \cup -, 1 \cup -) \cong \pi_n^{\{\sim, \sim\}}(\text{codom } -, -) \\ (((\mathbf{cof po}^{C\nabla} \mathbf{C})^{\widehat{C}(\text{codom } (1 \cup \sim))})^{op} \rightarrow \mathbf{Grp})$$

La equivalencia natural anteriormente establecida sigue siendo válida cuando el morfismo base es el “cero”. Para analizar este caso hay que hacer uso de objetos punteados basados.

Si  $(A, a) = P\{s, j\}$ , un morfismo  $a'$  tal que  $a'j = s$  induce un morfismo base  $1 \cup a' : (A, a) = P\{s, j\} \rightarrow (C\nabla, 1)$ . Por abuso de lenguaje, pues en el caso del push out de identificación  $a' = 1 \cup a'$ , se dirá que  $a'$  es el morfismo base de  $(A, a) = P\{s, j\}$ .

Dado  $(A, a) = P\{s, j\}$  basado en  $a'$ , entonces  $0 = 1 \cup xa' : (A, a) = P\{s, j\} \rightarrow (X, x)$ . En particular en el caso de push outs de identificación  $0 = xa' : (A, a) \rightarrow (X, x)$ . Además, una cofibración de push outs  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$ , con  $b'$  y  $a'$  respectivos morfismos base de  $(B, b) = P\{s, j\}$  y  $(A, a) = P\{s', j'\}$ , es basada si y sólo si  $a'i = b'$ .

**Teorema IV.6** *Dada una cofibración de push outs basada  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$ :*

$$a) \varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1 \cup \sim}(-, \approx) \cong \pi_n^{\{\sim, \sim\}}(-, \approx p(Ca')) (((\mathbf{cof C}^{COF C\nabla})^{op}_{1(C\nabla, 1)} \times \mathbf{C}^{COF C\nabla}) \rightarrow \mathbf{Grp}).$$

$$b) \varepsilon : \widehat{\pi}_n^{(-, \sim)}(=, \approx) \cong \pi_n^{(-, \sim)}(=, \approx p(C \sim)) (((\mathbf{C}^{COF C\nabla})^{op}_{(C\nabla, 1)} \times \mathbf{C}^{COF C\nabla}) \rightarrow \mathbf{Grp}).$$

La relación existente entre la categoría de pares  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$  y la categoría  $\mathbf{cof} \mathbf{C}^{COF \ C\vee}$  es similar a la existente entre  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{C}^{COF \ C\vee}$  sin más que observar que  $\mathbf{cof} \mathbf{C}^{COF \ C\vee} \cong (\mathbf{cof} \mathbf{C})^{COF \ C1\vee}$ .

En este sentido se tiene que los objetos de la categoría se pueden identificar con push outs de  $\mathbf{cof} \mathbf{C}$   $f = 1 \cup f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ , pero también estos objetos pueden llevar asociado un push out del tipo  $P\{s, 1_{C\vee}\}$ , no necesariamente de identificación:  $1 \cup f : (X, x) = P\{s, j\} \rightarrow (Y, y) = P\{s', j'\}$ . Como en el caso simple, cuando  $1 \cup f$  tiene asociados push outs de identificación se puede hablar de grupos de homotopía del par  $1 \cup f$ .

Las cofibraciones de pares de push outs serán de la forma  $1_{1_{C\vee}} \cup (i', i) = (1_{C\vee}, 1_{C\vee}) \cup (i', i) : 1 \cup f_0 \rightarrow 1 \cup f_1$ , con  $1 \cup f_t : (X_t, x_t) = P\{s_t, j_t\} \rightarrow (Y_t, y_t) = P\{s'_t, j'_t\}$ ,  $t = 0, 1$ ,  $(i', i) : f_0 \rightarrow f_1$  cofibración de pares,  $f'_0 = f'_1$  (donde  $f'_t$  es el morfismo que permite crear  $1 \cup f_t$ ),  $(s'_0, s_0) = (s'_1, s_1)$ ,  $i'j'_0 = j'_1$  e  $ij_0 = j_1$ . De donde se tiene que  $1 \cup i : (X_0, x_0) = P\{s_0, j_0\} \rightarrow (X_1, x_1) = P\{s_1, j_1\}$  y  $1 \cup i' : (Y_0, y_0) = P\{s'_0, j'_0\} \rightarrow (Y_1, y_1) = P\{s'_1, j'_1\}$  son cofibraciones de push outs. Obsérvese que  $\{1 \cup f_1, 1 \cup i'\} = 1 \cup \{f_1, i'\} : P\{1 \cup i, 1 \cup f_0\} = P\{s'_0, j_1 \cup j'_0\} \rightarrow (Y_1, y_1) = P\{s'_1, j'_1\}$  cofibración de push outs y por tanto cofibración.

Aplicando los resultados obtenidos en  $\mathbf{C}^{COF \ C\vee}$  a este caso resultan equivalencias naturales, que se expresarán entre los funtores adecuados sin hacer mención de las categorías involucradas, pues son fáciles de deducir por analogía y en cambio su notación es compleja.

**Teorema IV.7** *Dada una cofibración de push outs  $1 \cup (i', i) : 1 \cup f_0 \rightarrow 1 \cup f_1$ , y considerando  $\widehat{C}(1 \cup f_1) = 1 \cup C f_1 : \widehat{C}(X_1, x_1) = P\{pC s_1, C j_1\} \rightarrow \widehat{C}(Y_1, y_1) = P\{pC s'_1, C j'_1\}$ :*

- a)  $\varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1 \cup (i', i)}(\text{codom}(1 \cup -, 1 \cup -), (1 \cup -, 1 \cup -)) \cong \pi_n^{\{(j'_1, i'), (j_1, i)\}}(\text{codom}(-', -), (-', -))$
- b)  $\varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1 \cup (\sim', \sim)}(\text{codom}(1 \cup -, 1 \cup -), (1 \cup -, 1 \cup -)) \cong \pi_n^{\{(\sim'_1, \sim'), (\sim_1, \sim)\}}(\text{codom}(-', -), (-', -))$

Como consecuencia de este teorema resulta, para los funtores grupos de homotopía relativos a una cofibración de un par basado en un morfismo:

### Teorema IV.8

$$a) \varepsilon : \hat{\pi}_{n+1}^{1 \cup i}(1 \cup -, 1 \cup V) \cong \pi_{n+1}^{\{j'_1, i\}}(-, V)$$

$$b) \varepsilon : \hat{\pi}_{n+1}^{1 \cup \sim}(1 \cup -, 1 \cup V) \cong \pi_{n+1}^{\{\sim, \sim\}}(-, V)$$

Combinando el teorema IV.8 anterior con el teorema IV.5 se obtienen equivalencias naturales entre sucesiones exactas, observando que un morfismo de pares  $(1 \cup f, 1 \cup g) : 1 \cup f_0 \rightarrow 1 \cup f_1$  es tal que  $(1 \cup f, 1 \cup g) = 1 \cup (f, g)$

### Teorema IV.9

$$a) \varepsilon : \hat{\pi}^{1 \cup i}(1 \cup -, 1 \cup V) \cong \pi^{\{j', i\}}(-, V)$$

$$b) \varepsilon : \hat{\pi}(1 \cup \sim, 1 \cup -, 1 \cup V) \cong \pi(\{\sim, \sim\}, -, V)$$

Para una cofibración de push outs basada  $1 \cup i : (B, b) = P\{s, j\} \rightarrow (A, a) = P\{s', j'\}$  con  $b'$  y  $a'$  respectivos morfismos base de  $(B, b)$  y  $(A, a)$ , usando el apartado a) del teorema IV.6

### Teorema IV.10

$$a) \varepsilon : \hat{\pi}^{1 \cup i}(1 \cup -) \cong \pi^{\{j', i\}}(-, \forall pC a')$$

$$b) \varepsilon : \hat{\pi}(1 \cup \sim, 1 \cup -) \cong \pi(\{\sim, \sim\}, -, \forall pC a')$$

donde  $\text{dom}(1 \cup -) = (\approx, V)$  push out de identificación.

Para objetos punteados basados, usando el apartado b) del teorema IV.6

**Teorema IV.11**  $\varepsilon : \hat{\pi}((\approx, \sim), (1 \cup -)) \cong \pi(\sim, -, \forall pC \sim)$ , donde  $\text{dom}(1 \cup -) = (=, V)$  push out de identificación.

A semejanza de lo que sucede en la categoría de los espacios topológicos punteados, a partir de un punto se pueden crear las sucesivas esferas como suspensiones de  $S^0$ .

$\Sigma^{k\nabla}$  es un objeto punteado basado con punto  $\bar{k}$  y base  $\{1, 1\} : \Sigma^{k\nabla} \rightarrow C\nabla$ .

**Definición IV.2** A  $\hat{S}^n(\Sigma^{k\nabla}, \bar{k})$  se le denominará  $n$ -esfera y se le notará por  $\Sigma^n \nabla$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Los grupos de homotopía esféricos de los espacios topológicos punteados se definen por  $\pi_n(X, x) = \pi_n^{S^0}(X, x)$ , de donde por similitud

**Definición IV.3** Dado un objeto punteado  $(X, x)$ , se define el  $n$ -grupo esférico de homotopía  $\pi_n^{\Sigma^0 \nabla}(X, x) = \hat{\pi}_n^{(\Sigma^0 \nabla, \bar{k})}(X, x)$ .

**Proposición IV.5**  $\pi_n^{\Sigma^0 \nabla}(X, x) \cong \pi_n^{k \nabla}(X, x)$ , para  $n \geq 2$ .

La anterior proposición IV.5 y la observación II.1.1 permiten extender la definición de los grupos de homotopía esféricos para  $n = 1$  y  $x$  no necesariamente cofibración:

$$\pi_n^{\Sigma^0 \nabla}(X, x) = \pi_n^{k \nabla}(X, x), \quad n \geq 1$$

De esta forma  $Hom(C \nabla, X)$  representa el conjunto de puntos de  $X$ .

En particular, si la categoría  $\mathbf{C}$  tiene objeto inicial  $\phi$  se puede considerar como punto  $C\phi$ . En este caso a  $\Sigma^n \phi$  se le denominará  $n$ -esfera standard en  $\mathbf{C}$  y se notará por  $S^n$  y a  $\pi_n^{\Sigma^0 \phi}(X, x)$  se le denominará  $n$ -grupo de homotopía standard del objeto punteado  $(X, x)$  y se notará simplemente por  $\pi_n(X, x)$ . A  $\pi_1(X, x)$  también se le denomina grupo fundamental del objeto  $X$  con punto distinguido  $x$ .

**Definición IV.4** Dados dos puntos  $x, x'$  de  $X$ , un camino de  $x$  a  $x'$  es un morfismo  $\alpha : C^2 \nabla \rightarrow X$  tal que  $\alpha k_1 = \{x, x'\}$ .

Nótese que  $x \simeq x'$  rel.  $k \nabla$  si y sólo si existe un camino de  $x$  a  $x'$ , y que por tanto la relación “estar ligados por caminos”, entre puntos de  $X$ , es una relación de equivalencia cuyas clases se denominan *componentes conexas por caminos* de  $X$ .

**Definición IV.5** Un objeto  $X$  se dirá *conexo por caminos* si tiene una única componente conexa por caminos.

Obsérvese que si  $X$  es conexo por caminos entonces  $Hom(C \nabla, X) = Hom(C \nabla, X)^{x k(k)}$ , para todo punto  $x$ . Si  $\nabla = \phi$  objeto inicial, siempre  $Hom(C \phi, X) = Hom(C \phi, X)^{\phi x(\phi_C \phi)}$ .

**Teorema IV.12** Dados dos puntos  $x$  y  $x'$  de un objeto  $X$ , todo camino  $\alpha$  de  $x$  en  $x'$  induce un isomorfismo  $\Lambda_\alpha : \pi_1^{\Sigma^0 \nabla}(X, x) \rightarrow \pi_1^{\Sigma^0 \nabla}(X, x')$ .

El teorema IV.12 anterior permite, para los objetos conexos por caminos, hablar simplemente del grupo fundamental  $\pi_1^{\Sigma^0 \nabla}(X)$ , al ser independiente del punto fijado. En particular, para este caso, el grupo fundamental standard se notará por  $\pi_1(X)$ .

# Capítulo V

## Ejemplos.

La teoría de homotopía cónica desarrollada en los cuatro capítulos precedentes tiene una dualización que da origen a una axiomática de la cual existen ejemplos bastante conocidos, como son la homotopía proyectiva para  $R$ -módulos [E] [Hi1], [Hi2] la homotopía de complejos de cadenas [K3] y la homotopía de los espacios topológicos punteados a través de caminos punteados.

El proceso dual de la obtención del cono topológico mediante el push out de la inclusión en el nivel cero de un espacio en su cilindro con la proyección de este espacio en el objeto final, da el pull back de la proyección punto inicial desde el cocilindro de un espacio (camino) sobre éste con la inclusión del objeto inicial en dicho espacio, que resulta ser siempre el objeto inicial. Por ello se ha preferido denominar a los conceptos duales que van a intervenir anteponiendo el prefijo “co”: cocilindro, cocono, cosuspensión, etc., excepto en el caso de “cofibración” que será “fibración” pues este concepto sí es el dual en el caso de **Top** desde el punto de vista cilindro-camino (ver [B2]), en lugar de otros nombres no tan genéricos usados en determinados casos. La notación dual de funtores y transformaciones naturales será la “prima” de la ya usada ( $C'$ ,  $k'$ ,  $p'$ , etc.), notándose las fibraciones por  $q : A \twoheadrightarrow B$ . La dual de la propiedad de extensión de nulhomotopía se denominará propiedad de elevación de nulhomotopía y se representará por PLN.

Procesos teóricos a partir de otras estructuras axiomáticas que dan origen a homotopía, así como relaciones categóricas y funtoriales entre éstas, permiten obtener ejemplos de homotopía cónica o cocónica.

Por último se verán ejemplos conocidos de homotopías que resultan ser cónicas o cocónicas, y también se crearán nuevos ejemplos de las mismas. Cabe destacar entre las ya conocidas la clásica de los espacios topológicos y los espacios topológicos punteados,

las homotopías proyectivas e inyectivas [Hi2] y los complejos de cadenas [K3]. Por su curiosidad y vigencia merece especial consideración la homotopía propia a través de los espacios exteriores [G-].

## V.1 Ejemplos teóricos.

Los funtores adjuntos tienen un cierto poder en el traslado de estructuras de homotopía. Es bien conocido que la homotopía ordinaria de los espacios topológicos puede ser obtenida a través de un cilindro o un cocilindro (functor caminos) y que éstos son funtores adjuntos que inducen isomorfismos en las transformaciones naturales asociadas. Este proceso se puede desarrollar también con conos y coconos, e incluso generalizar a funtores adjuntos no necesariamente del tipo anterior, obteniéndose nuevas estructuras cónicas o cócónicas a partir de una dada mediante dichos funtores.

Para el cálculo de grupos esféricos, el uso de cofibraciones (de fibraciones) es innecesario. Basta tener un cono (cocono) que transforme push outs en push outs (pull backs en pull backs) y con  $k_n$  verificando PEN y poseyendo push outs ( $k'_n$  verificando PLN y poseyendo pull backs). De esta forma surge el concepto de  $E$ -categoría ( $E'$ -categoría), que con ciertas cofibraciones (fibraciones) generadas por la estructura dan lugar a  $C$ -categorías (a  $C'$ -categorías). En el caso de una  $E$ -categoría ( $E'$ -categoría) con un funtor adjunto a derecha del cono (a izquierda del cocono) se obtiene que la  $E$ -categoría es también una  $E'$ -categoría (que la  $E'$ -categoría es también una  $E$ -categoría) cuya homotopía coincide con la primitiva, obteniéndose el concepto de  $EE'$ -categoría.

En el caso de categorías aditivas los grupos de homotopía basados en el cero tienen ya determinada su estructura de grupo por la suma de morfismos en la categoría, pudiéndose así hablar, por extensión, de los grupos de homotopía desde el orden cero, siendo siempre éstos abelianos. En este sentido, para estos grupos no es necesario que los funtores cono y cocono transformen push outs en push outs y pull backs en pull backs, respectivamente, surgiendo así los conceptos de  $C_0$  y  $C'_0$ -categorías aditivas.

En la categoría de los espacios topológicos es conocido el método a través del cual, a partir de un cilindro, se obtiene un cono que conserva la homotopía cilíndrica. Este proceso se generaliza con la noción de  $I$ -categoría con producto natural.

### V.1.1 Funtores adjuntos en homotopía cónica.

Un triple  $(C, k, p)$  se dirá un *cono* en  $\mathbf{C}$  cuando  $C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  es un funtor, con transformaciones naturales  $k : 1 \rightarrow C$  y  $p : C^2 \rightarrow C$  verificando el axioma (C1). Dualmente se define un *cocono* en  $\mathbf{C}$ .

Usando resultados de [Hub2], dados  $U : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$  y  $V : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}$  tales que  $(U, V)$  es un par adjunto de funtores con isomorfismo natural de adjunción  $\gamma : \text{Hom}(U-, \sim) \rightarrow \text{Hom}(-, V\sim)$ , se tiene:

- Si  $(C, k, p)$  es un cono en  $\mathbf{C}$ , entonces  $(VCU, (VkU)\gamma(1_U), V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)$  es un cono en  $\mathbf{A}$ .
- Si  $(C', k', p')$  es un cocono en  $\mathbf{A}$ , entonces  $(UC'V, \gamma^{-1}(1_V)(Uk'V), U(C'\gamma(1_{UC'})p')V)$  es un cocono en  $\mathbf{C}$ .
- Si  $(C', k', p')$  es un cocono en  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ , entonces  $(VC'U, (Vk'U)\gamma(1_U), V(p'(C'\gamma^{-1}(1_{VC'})))U)$  es un cono en  $\mathbf{A}$ .
- Si  $(C, k, p)$  es un cono en  $\mathbf{A}^{\text{op}}$ , entonces  $(UCV, \gamma^{-1}(1_V)(UkV), U(C\gamma(1_{UC})p)V)$  es un cocono en  $\mathbf{C}$ .

De esta forma, como  $(1_{\mathbf{D}}, 1, 1)$  es un cono y un cocono en cualquier categoría, todo par adjunto de funtores induce cono en  $\mathbf{A}$  y cocono en  $\mathbf{C}$ . El recíproco de esta afirmación también es cierto (ver [K12]).

Dado un cono, se plantea la cuestión de qué condiciones debe cumplir un morfismo para que la clase de los morfismos así caracterizados verifique los axiomas (C2), (C3) y (C4) como familia de cofibraciones. Dicha cuestión se resuelve mediante la siguiente definición.

**Definición V.1.1** Dado un cono  $(C, k, p)$  en  $\mathbf{C}$ ,  $i : B \rightarrow A$  se dirá una *cofibración generada por el cono* cuando  $i_n$  tiene push outs y verifica PEN para  $n \in \mathbb{N}^*$ . El conjunto de cofibraciones generadas por el cono se notará por  $\text{cof}_C(\mathbf{C})$ .

Para la obtención de los grupos de homotopía esféricos basta tener un cono  $(C, k, p)$  en  $\mathbf{C}$ , con  $C$  transformando push outs en push outs y  $k_A$  una cofibración generada para todo objeto  $A$  de  $\mathbf{C}$ .

**Definición V.1.2** Una *E-categoría* o *categoría con esferas naturales* es una categoría  $\mathbf{C}$

con un cono  $(C, k, p)$  tal que  $C$  transforma push outs en push outs y  $k_A$  es cofibración generada, para todo objeto  $A$  de  $C$ .

Consecuentemente, toda  $E$ -categoría es una  $C$ -categoría, con las cofibraciones generadas.

En los espacios topológicos punteados existe un isomorfismo natural haciendo que el par  $(\Sigma, \Omega)$  sea adjunto, resultando una equivalencia natural entre  $[\Sigma^{n-i}, \Omega^m] \cong [\Sigma^n, \Omega^{m-i}]$ , donde  $\Sigma$  y  $\Omega$  representan respectivamente los funtores suspensión y lazos [Hi2]. Este resultado puede ser generalizado al caso de  $E$ -categorías, de ahí que ciertos autores denominen al funtor cosuspensión como funtor lazos  $\Omega$ . Para ello es necesario hacer uso de estructuras duales compatibles, como sucede en  $\mathbf{Top}^*$ .

**Definición V.1.3** Una  $EE'$ -categoría es una  $E$ -categoría y  $E'$ -categoría tal que  $(C, C')$  es un par adjunto de funtores mediante un isomorfismo natural  $\gamma$  que hace  $k^* \cong k'_*$  y  $p^* \cong p'_*$ .

Como consecuencia de la conservación de límites y colímites por  $C'$  y  $C$ , respectivamente, al ser  $(C, C')$  un par adjunto, se tiene que una  $EE'$ -categoría es una categoría con un cono  $(C, k, p)$  y un cocono  $(C', k', p')$  tales que  $k_A$  y  $k'_A$  son cofibraciones y fibraciones generadas, respectivamente, y  $(C, C')$  es un par adjunto haciendo  $k^* \cong k'_*$  y  $p^* \cong p'_*$ . De donde:

**Teorema V.1.1** En una  $EE'$ -categoría  $\pi_n^{\Sigma^0 A}(X, f) \cong \pi_n^{\Sigma^0 X}(A, \gamma(f))$ .

**Teorema V.1.2** Dada una  $EE'$ -categoría con objeto cero, entonces

$$[S^{n-i}A, S'^m X] \cong [S^n A, S'^{m-i} X]$$

Las relaciones vistas anteriormente entre pares adjuntos de funtores aplicadas a conos y coconos tienen ahora aplicaciones importantes en la construcción de estructuras compatibles.

**Proposición V.1.1** Dado un cono  $(C, k, p)$ , si  $(C, C')$  es un par adjunto de funtores, entonces existe un cocono  $(C', k', p')$  tal que el isomorfismo de adjunción  $\gamma$  hace  $k^* \cong k'_*$  y  $p^* \cong p'_*$ .

Obsérvese que en las condiciones de la proposición anterior,  $f$  es nulhomótopo respecto de  $C$  si y sólo si  $f$  es nulhomótopo respecto de  $C'$ .

**Proposición V.1.2** *Dada una E-categoría  $C$  con pull backs y cono  $(C, k, p)$ , si  $(C, C')$  es un par adjunto de funtores entonces  $(\Sigma^n(k), \Sigma^n(k'))$  también lo es.*

Como consecuencia, el isomorfismo inverso del natural de adjunción  $\gamma'$  asociado al par  $(\Sigma^n(k), \Sigma^n(k'))$  transforma morfismos nulhomótopos en morfismos nulhomótopos. De donde

**Teorema V.1.3** *Si  $C$  es una E-categoría con pull backs y cono  $(C, k, p)$  de forma que  $(C, C')$  es un par adjunto de funtores, entonces  $C$  es una EE'-categoría.*

## V.1.2 Homotopía cónica en categorías aditivas.

La aditividad de las categorías caracteriza la operación de los grupos de homotopía, obteniéndose en este caso una axiomática más simple que da lugar a resultados análogos a los ya vistos en los capítulos precedentes.

**Proposición V.1.3** *Si  $C$  es una categoría aditiva con conúcleos y tiene un cono  $(C, k, p)$  con  $C$  transformando push outs en push outs, entonces  $(C, C, k, p, \text{cof}_C(C))$  es una C-categoría aditiva con cofibraciones generadas los morfismos que verifican PEN.*

Obsérvese que si  $C$  es una C-categoría aditiva e  $i : B \rightarrow CA$  es una cofibración, entonces  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel. } i$  si y sólo si  $f_1 - f_0$  es nulhomótopo mediante una nulhomotopía  $F$  tal que  $FCi = 0$ . Como consecuencia  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel. } i$  si y sólo si  $f_1 - f_0 \simeq 0 \text{ rel. } i$ .

Por otro lado  $\text{Hom}(CA, X)^{0(i)}$  es un subgrupo de  $\text{Hom}(CA, X)$ , y por tanto  $[CA, X]^{0(i)}$  es también un grupo abeliano, de donde se concluye:

**Teorema V.1.4** *Si  $C$  es una categoría aditiva, existe una equivalencia natural*

$$id : \pi_n^\sim \cong [C^n \text{codom} \sim, -]^{0(\sim_n)} ((\text{cof } C)^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Grp})$$

De esta forma, los grupos de homotopía relativos a una cofibración en una C-categoría aditiva son abelianos, y se puede extender la definición de los grupos de homotopía, usando como operación la inducida en los corchetes de homotopía por la suma de la categoría.

**Definición V.1.4** Dada  $i : B \rightarrow A$  cofibración en una  $C$ -categoría aditiva,

$$\pi_n^i(X) = [C^n A, X]^{0(i_n)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

En particular, para un objeto  $A$  cofibrante de una  $C$ -categoría aditiva se tiene  $\pi_0^A(X) = [A, X] = \pi_{-1}^{k_A}(X)$ .

Esto permite obtener, en categorías aditivas, los grupos de homotopía  $\pi_n^i(X)$  sin necesidad de usar la propiedad de que el cono transforme push outs en push outs, propiedad que sólo será necesaria para definir los grupos  $\pi_n^i(X, f)$  cuando  $f \neq 0$ . Una  $C$ -categoría aditiva salvo esta propiedad se llamará  $C_0$ -categoría aditiva, y una proposición análoga a la V.1.3 se verifica.

**Proposición V.1.4** Si  $C$  es una categoría aditiva con un cono  $(C, k, p)$  y con conúcleos, entonces  $(C, C, k, p, \text{cof}_C(C))$  es una  $C_0$ -categoría con cofibraciones generadas los morfismos que verifican PEN.

En una categoría de homotopía, los objetos contráctiles tienen gran importancia pues, con ciertas condiciones, estos objetos caracterizan la homotopía como se ve a continuación.

**Teorema V.1.5** Si  $C$  es una categoría aditiva con dos conos,  $(C, k, p)$  y  $(\tilde{C}, \tilde{k}, \tilde{p})$ , y que posee conúcleos, entonces si los objetos contráctiles mediante  $(C, k, p)$  coinciden con los respectivos mediante  $(\tilde{C}, \tilde{k}, \tilde{p})$  las estructuras de  $C_0$  y  $\tilde{C}_0$ -categoría asociadas son equivalentes.

Para más información sobre homotopía funtorial en categorías aditivas ver [P-], [D-1], [D-2] ó [D-3].

### V.1.3 Homotopía cónica y cilíndrica.

H.J. Baues, en su libro "Algebraic homotopy" [B2], da la noción abstracta de *categoría de homotopía a través de cilindro* o  $I$ -categoría. Tomando como ejemplo lo que sucede en espacios topológicos, se generaliza el producto natural en un cilindro y surge:

**Definición V.1.5**  $(I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$  es un *cilindro con producto natural* en una categoría  $C$  cuando  $I : C \rightarrow C$  es un funtor con transformaciones naturales  $\iota_0, \iota_1 : id \rightarrow I$ ,  $\rho : I \rightarrow id$ , y  $\psi : I^2 \rightarrow I$ , verificando

### (I1) Axioma de cilindro con producto.

$$\rho\iota_0 = \rho\iota_1 = 1, \psi\iota_0 = \psi(I\iota_0) = \iota_0\rho, \psi\iota_1 = \psi(I\iota_1) = 1 \text{ y } \psi(I\psi) = \psi^2.$$

Si  $\mathbf{C}$  tiene push outs, objeto final  $\varepsilon$  y un cilindro con producto natural de forma que  $I$  transforma push outs en push outs, entonces  $C = P\{\varepsilon, \iota_0\}$ ,  $k = q\iota_1$  y  $p = \{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}$  dan un cono en  $\mathbf{C}$ . Además, si se define  $I$ -categoría con producto natural como una categoría con cilindro natural en el sentido de Baues [B2] en la cual se sustituye el axioma de cilindro por el de cilindro con producto, se tiene:

**Teorema V.1.6** *Si  $\mathbf{C}$  es una  $I$ -categoría con producto natural que tiene un objeto final  $\varepsilon$ , entonces  $\mathbf{C}$  tiene inducida una estructura de cono natural con cofibraciones y homotopía coincidentes con las cilíndricas.*

## V.2 Ejemplos.

A partir de los ejemplos teóricos ya vistos se van a obtener otros concretos en categorías conocidas.

### V.2.1 $EE'$ -categorías

La adjunción existente en muchos casos entre el funtor producto tensorial y el Hom, hace surgir en determinadas categorías  $EE'$ -estructuras.

#### 1. Grupos Abelianos.

Dado un anillo con unidad  $R$ , su estructura de grupo abeliano para la suma permite definir el producto tensorial de un grupo por el anillo,  $G \otimes R$ , como producto de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Asimismo  $G^R$  notará el conjunto de homomorfismos de grupos con dominio  $R$  y codominio  $G$ . Se puede considerar de forma natural  $(G^R)^R \cong G^{(R \otimes R)}$ .

Se define

$$CG = G \otimes R$$

$$C'G = G^R$$

$$Cf = f \otimes 1_R$$

$$C'f = f_*$$

$$k(g) = g \otimes 1$$

$$k'(\alpha) = \alpha(1)$$

$$p(g \otimes r \otimes s) = g \otimes rs$$

$$p'(\alpha)(r \otimes s) = \alpha(rs)$$

$g \in G, r, s \in R, \alpha \in R^S$ .

De esta forma los grupos abelianos poseen una estructura de  $EE'$ -categoría. Los objetos contráctiles son los  $R$ -casi módulos, esto es, los grupos para los cuales existe una operación externa desde el anillo verificando las propiedades de los  $R$ -módulos salvo la asociativa.

## 2. $R$ -casi Módulos.

Los  $R$ -casi módulos forman una categoría con los homomorfismos de  $R$ -casi módulos, esto es, aplicaciones lineales.

La categoría de  $R$ -casi módulos es aditiva, posee núcleos, conúcleos y productos tensoriales, y con una estructura análoga a la definida anteriormente para grupos abelianos es una  $EE'$ -categoría. Los objetos contráctiles son los  $R$ -módulos.

## 3. $R$ - Módulos a izquierda.

Sea  $f : R \rightarrow S$  un homomorfismo de anillos unitarios con  $f(1) = 1$ .  $S$  es un  $R$ -módulo a derecha con la operación  $sr = sf(r)$ , de donde para cualquier  $R$ -módulo  $M$  existen  $M \otimes S$  y  $M^S$  como  $R$ -módulos a izquierda.

De esta forma los  $R$ -módulos a izquierda con una estructura definida análogamente a las anteriores es una  $EE'$ -categoría con  $R$ -módulos contráctiles los que también admiten una estructura de  $S$ -casi módulo.

Si  $f : R \rightarrow S$  es epimorfismo, entonces los  $R$ -módulos contráctiles son los que admiten una estructura de  $S$ -módulo.

## 4. Complejos de Cadena de una Categoría Abeliana.

La adjunción existente entre los complejos de cadenas de la forma  $\{X_n \oplus X_{n-1}\}$  y  $\{X_n \oplus X_{n+1}\}$  da origen a una  $EE'$ -categoría bien conocida, que genera la homotopía de los complejos de cadenas [K3].

Dada una categoría abeliana  $\mathbf{A}$  se define la categoría de complejos de cadenas de  $\mathbf{A}$ ,  $\delta\mathbf{A}$ , como la que tiene por objetos pares  $(X, \delta)$ , donde  $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $X_n$  objetos de  $\mathbf{A}$  y  $\delta = \{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $\delta_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$  morfismos de  $\mathbf{A}$  tales que  $\delta_{n-1}\delta_n = 0$ , y por morfismos  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$  donde  $f = \{f_n : X_n \rightarrow Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  verificando  $\delta'f_n = f_{n-1}\delta_n$ .

Por simplificar notación, en  $\delta_n$  se suprimirá el índice cuando no lleve a error.

Kamps, en [K3], define una homotopía en  $\delta\mathbf{A}$  utilizando el siguiente cilindro:

$$I(X, \delta) = (IX, I\delta), \text{ con } (IX)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \text{ e } (I\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 1 \\ 0 & \delta & -1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}, \text{ y dado}$$

$$f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta'), If = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 \\ 0 & 0 & f_{n-1} \end{pmatrix}. \iota_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \iota_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si se define:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : I^2 \rightarrow I$$

entonces la categoría  $\delta\mathbf{A}$  tiene un cilindro con producto natural. Al ser  $\mathbf{A}$  categoría abeliana  $\delta\mathbf{A}$  también lo es. Por tanto posee objeto cero, push outs y pull backs, y consecuentemente tiene el siguiente cono:

$$C(X, \delta) = (CX, C\delta), \text{ con } (CX)_n = X_n \oplus X_{n-1} \text{ y } (C\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & -1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \text{ y dado } f :$$

$$: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta'), Cf = \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n-1} \end{pmatrix}. k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular  $\delta\mathbf{A}$  es aditiva y por la proposición V.1.3, al verificar  $k$  PEN ( $pCk = 1$ ) se tiene que  $k_n$  también verifica PEN.

La homotopía de Kamps en los complejos de cadenas también es posible obtenerla a través de un funtor cocilindro con producto natural.

$$I'(X, \delta) = (I'X, I'\delta), \text{ con } (I'X)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n+1} \text{ e } (I'\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 1 & -1 & -\delta \end{pmatrix}, \text{ y dado}$$

$$f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta'), I'f = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 \\ 0 & 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}. \iota'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \iota'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \psi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que las matrices que definen las transformaciones naturales no son otras que las traspuestas de las respectivas de cilindro, y por ser la traspuesta de un producto

de matrices el producto en orden inverso de las traspuestas se verifica (I'1).

Razonando dualmente a lo hecho anteriormente se tiene el siguiente cocono

$$C'(X, \delta) = (C'X, C'\delta), \text{ con } (C'X)_n = X_n \oplus X_{n+1} \text{ y } (C'\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix}, \text{ y dado}$$

$$f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta') \quad C'f = \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}. \quad k' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

con  $k'_n$  verificando PLN.

$\gamma : Hom(C-, \sim) \rightarrow Hom(-, C' \sim)$  definido por  $\gamma \begin{pmatrix} f_n & g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$ , donde  $g_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  y  $f_n = -(\delta g_n + g_{n-1} \delta)$ , es un isomorfismo natural que hace de  $\delta A$  una  $EE'$ -categoría cuyos objetos contráctiles son los  $(X, \delta)$  que tienen asociados morfismos  $g_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  verificando  $\delta g_n + g_{n-1} \delta = -1$ .

## 5. Espacios Topológicos Punteados.

La homotopía ordinaria de los espacios topológicos punteados también puede expresarse a través de una  $EE'$ -estructura.

La relación de homotopía clásica de los espacios topológicos es obtenida a través de un cilindro con producto natural:

$IX = X \times I$ , donde  $I = [0, 1]$ , y dado  $f : X \rightarrow Y$  aplicación continua  $If = f \times 1$ .

$\iota_0(x) = (x, 0)$ ,  $\iota_1(x) = (x, 1)$ ,  $\rho(x, t) = x$  y  $\psi(x, t, s) = (x, ts)$ .

Al tener **Top** push outs, objeto final  $*$ , y transformar  $I$  push outs en push outs, se puede definir un cono en **Top**:

$CX = P\{\varepsilon_X, (\iota_0)_X\}$ , y dada  $f : X \rightarrow Y$  aplicación continua,  $Cf = 1 \cup If$ , esto es, si  $\text{dom } f \neq \phi$  entonces  $Cf([(x, t)]) = [(f(x), t)]$ , y si  $\text{dom } f = \phi$  entonces  $Cf(*) = [(x, 0)]$ . Nótese que si  $X \neq \phi$  entonces  $CX = X \times I/X \times \{0\}$ , y  $C\phi = *$ .

$k(x) = [(x, 1)]$  y  $p([([(x, t)]), s]) = [(x, ts)]$ .

En el caso  $X = \phi$ ,  $k$  y  $p$  son únicas, por ser  $\phi$  objeto inicial y  $C\phi = *$  objeto final.

Es evidente que el cilindro conserva push outs, y por el teorema V.1.6 el cono también los conserva. Los espacios topológicos con este cilindro forman una  $I$ -categoría con producto natural y con cofibraciones los morfismos que verifican la propiedad de extensión de homotopía (PEH), pues evidentemente los morfismos iniciales tienen PEH y se veri-

fica (I4) (ver [B2], pág. 29) donde la transformación de intercambio  $T$  viene definida por  $T(x, t, s) = (x, s, t)$ . Por el teorema V.1.6  $k_n$  verifican PEN. Luego **Top** es una  $E$ -categoría, y con estas mismas cofibraciones, por el teorema V.1.6 una  $C$ -categoría.

Por lo visto en el capítulo V anterior se tiene que, con estas cofibraciones,  $\mathbf{Top}^{COF*} = \mathbf{Top}^{COF\ C^\phi}$  es también una  $C$ -categoría y en particular una  $E$ -categoría:

$$C(X, x_0) = (X \times I) / (X \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I), \text{ y dada } f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), Cf([(x, t)]) = [(f(x), t)].$$

$$k(x) = [(x, 1)], p([([(x, t)], s)]) = [(x, ts)].$$

En general, si una categoría **C** posee push outs y  $C^\nabla$  es objeto final, se puede extender la estructura cónica de la subcategoría llena  $\mathbf{C}^{COF\ C^\nabla}$  a  $\mathbf{C}^{C^\nabla}$ , verificándose todos los axiomas salvo que  $k$  tenga que ser cofibración. En el caso de los espacios topológicos, por poseer **Top**<sup>\*</sup> una estructura de cilindro con producto natural derivada de la de **Top**, ver [B2], y coincidir el cono de  $\mathbf{Top}^{COF*}$  con el cono originado por el cilindro punteado, sí se puede asegurar que  $k$  es siempre cofibración en **Top**<sup>\*</sup>, dando así origen a una estructura de  $C$ -categoría y en particular  $E$ -categoría.

**Top**<sup>\*</sup> también tiene pull backs, y  $C'$  definido por  $C'(X, x_0) = (X, x_0)^{(I, 0)}$ ,  $C'f = f_*$  es un funtor adjunto a derecha de  $C$  mediante el isomorfismo natural  $\gamma : Hom(C-, \sim) \rightarrow Hom(-, C'\sim)$  definido por  $(\gamma(f))(x)(t) = f([(x, t)])$ , cuya inversa es  $\gamma^{-1}(f')([(x, t)]) = (f'(x))(t)$ .

Así, definiendo las transformaciones naturales  $k'(\alpha) = \alpha(1)$  y  $(p'(\alpha))(t)(s) = \alpha(ts)$ , **Top**<sup>\*</sup> es una  $EE'$ -categoría.

De esta forma surgen los grupos de homotopía clásica  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , como los denominados grupos de homotopía standard de la categoría punteada  $\mathbf{Top}^{C^\phi}$ , así como las correspondientes sucesiones exactas de homotopía asociadas a una tripleta.

$(X, x_0)$  es un espacio topológico punteado contráctil cuando  $\{x_0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ .

## V.2.2 C-categorías y C'-categorías.

Primeramente se verán dos ejemplos de  $C'_0$ -categoría y  $C_0$ -categoría en  $R$ -módulos que dan origen a la homotopía proyectiva e inyectiva, respectivamente, dadas por B. Eckmann

y P.J. Hilton [E] [Hi1] [Hi2], que no son  $C'$ -categoría ni  $C$ -categoría.

## 6. Homotopía proyectiva en $R$ -módulos.

Sea  $L : \mathbf{Set}^* \rightarrow {}_R\mathbf{M}$  el funtor libre y  $U : {}_R\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Set}^*$  el funtor olvido, entonces  $(L, U)$  es un par adjunto de funtores mediante el isomorfismo natural de adjunción  $\gamma : \text{Hom}(L-, \sim) \rightarrow \text{Hom}(-, U \sim)$  definido por  $\gamma(f) = fi$ , donde  $i$  es la aplicación inclusión en el libre.

Considerando el cocono trivial en  $\mathbf{Set}^*$  se obtiene un cocono en los  $R$ -módulos:

$C'M = LM$ , donde  $LM$  representa el  $R$ -módulo libre sobre el conjunto punteado  $(M, 0)$ ,  $C'f = Lf$  es el único  $R$ -homomorfismo inducido por el funtor libre, esto es, el único  $R$ -homomorfismo tal que  $i_{\text{codom } f} f = Lf i_{\text{dom } f}$ , donde  $i$  representa la aplicación inclusión en el libre.

$k'$  es el único  $R$ -homomorfismo verificando  $k'i = 1$  y  $p'$  es el único  $R$ -homomorfismo tal que  $p'i = i^2$ , esto es,  $p' = Li$ .

Al ser la categoría abeliana tiene pull backs, pero en general el funtor libre no transforma pull backs en pull backs, como se verá más adelante. En particular, al ser la categoría aditiva se tiene que los  $R$ -módulos, con este cocono, es una  $C'_0$ -categoría aditiva con fibraciones los morfismos que verifican PLN (proposición dual de V.1.4).

Un  $R$ -módulo  $M$  es contráctil cuando es proyectivo. Un  $R$ -homomorfismo  $f : M \rightarrow N$  es una fibración si y sólo si  $f$  es un epimorfismo.

Si se considera el anillo  $\mathbb{Z}$  de los enteros,  ${}_Z\mathbf{M} \cong \mathbf{Ab}$ . Sea  $f : \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido por  $f(a, b) = a + b$ .  $\text{Ker } f \cong \mathbb{Z}_4$ ,  $Lf : L(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, (0, 0)) \cong \bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z} \rightarrow L(\mathbb{Z}_2, 0) \cong \mathbb{Z}$  viene definida por  $Lf(x_1, \dots, x_7) = x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ , donde  $\mathbb{Z}_i \cong \mathbb{Z}$  están generados por los elementos de  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$  distintos de  $(0, 0)$  que van al neutro para  $1 \leq i \leq 3$  y por los restantes distintos de  $(0, 0)$  para  $4 \leq i \leq 7$ .

$$L(\text{Ker } f, 0) \cong L(\mathbb{Z}_4, 0) \cong \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z} \neq \text{Ker } Lf \cong \bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{Z}$$

Luego la homotopía proyectiva no puede ser obtenida mediante una  $C$ -estructura adjunta a la libre, al no conservar ésta límites finitos.

## 7. Homotopía inyectiva en $R$ -módulos.

Sea  $Q_1$  el grupo aditivo de los racionales módulo los enteros. Entonces  $\text{Hom}(-, Q_1) :$

$: (\mathbf{R}\mathbf{M})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{R}}$  es un funtor adjunto a derecha de  $\text{Hom}(-, Q_1) : \mathbf{M}_{\mathbf{R}} \rightarrow (\mathbf{R}\mathbf{M})^{\text{op}}$ , con isomorfismo natural de adjunción

$$\gamma : \text{Hom}_{(\mathbf{R}\mathbf{M})^{\text{op}}}(\text{Hom}(-, Q_1), \sim) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathbf{R}}}(-, \text{Hom}(\sim, Q_1))$$

definido por  $\gamma(f(m)(n)) = f(n)(m)$ .

Por lo visto en el párrafo V.1, este par adjunto de funtores induce un cono en  $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ :

$C(M) = \text{Hom}(L(\text{Hom}(M, Q_1)), Q_1)$ , y dado  $f : M \rightarrow N$  homomorfismo de  $R$ -módulos,  $Cf(h)(s_1g_1\hat{+}\dots\hat{+}s_ng_n) = h(s_1(g_1f)\hat{+}\dots\hat{+}s_n(g_nf))$ ,  $s_1g_1\hat{+}\dots\hat{+}s_ng_n \in L(\text{Hom}(N, Q_1))$ ,  $h \in \text{Hom}(L(\text{Hom}(M, Q_1)), Q_1)$ .

$k : M \rightarrow \text{Hom}(L(\text{Hom}(M, Q_1)), Q_1)$  con  $k(m)(s_1\alpha_1\hat{+}\dots\hat{+}s_n\alpha_n) = s_1\alpha_1(m) + \dots + s_n\alpha_n(m)$ .

$p : \text{Hom}(L(\text{Hom}((\text{Hom}(L(\text{Hom}(M, Q_1)), Q_1)), Q_1), Q_1) \rightarrow \text{Hom}(L(\text{Hom}(M, Q_1)), Q_1)$  con  $p(\alpha)(s_1\alpha_1\hat{+}s_2\alpha_2\hat{+}\dots\hat{+}s_n\alpha_n) = \alpha(s_1\alpha_1 + 's_2\alpha_2 + ' \dots + 's_n\alpha_n)$ , usando que todo  $m \in M$  se puede interpretar como un elemento de  $\text{Hom}(\text{Hom}(M, Q_1), Q_1)$  definido por  $m(\alpha) = \alpha(m)$ .

Haciendo un razonamiento dual al hecho en la homotopía proyectiva se tiene que los  $R$ -módulos, con este cono, es una  $C_0$ -categoría aditiva con cofibraciones los morfismos que verifican PEN. Como consecuencia de ser el cono un  $R$ -módulo inyectivo resulta que los  $R$ -módulos contráctiles son los inyectivos.

Un  $R$ -homomorfismo  $f : M \rightarrow N$  es una cofibración si y sólo si es un monomorfismo.

Nótese que usando los funtores  $\text{Hom}(-, Q_1)$  anteriormente definidos y el cocono trivial  $(1, 1, 1)$  en  $\mathbf{R}\mathbf{M}$ , se puede definir el siguiente cono en  $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ :

$$CM = \text{Hom}(\text{Hom}(M, Q_1), Q_1) \text{ y } Cf(h)(g) = h(gf)$$

$$k(m)(\alpha) = \alpha(m), p(\alpha)(\beta) = \alpha(\beta).$$

Por la misma razón expresada anteriormente el cono de todo módulo  $M$  es un módulo inyectivo y  $k_M$  es un monomorfismo, de donde se deduce que los módulos contráctiles son también aquí los inyectivos, y por el teorema V.1.5 se obtiene una estructura de  $C_0$ -categoría aditiva equivalente a la anterior.

Tanto la homotopía proyectiva como la inyectiva se pueden definir independientemente de la lateralidad de los módulos.

## 8. $C$ y $C'$ -categorías aditivas.

Todos los ejemplos de  $EE'$ -categorías aditivas vistos anteriormente, grupos abelianos,  $R$ -casi módulos,  $R$ -módulos y complejos de cadenas, son también ejemplos, por la proposición V.1.3 y su dual, de  $C$  y  $C'$ -categorías.

En las homotopías tensoriales anteriormente definidas las cofibraciones o fibraciones dependerán del anillo unitario elegido.

En los complejos de cadenas,  $i : (B, \delta) \rightarrow (A, \delta')$  es cofibración si y sólo si para todo  $n \in \mathbb{Z}$  existe  $r_n : A_n \rightarrow B_n$  tal que  $r_n i_n = 1$ . Las fibraciones son los morfismos que tienen secciones en cada nivel.

En este caso las cofibraciones y fibraciones coinciden con las definidas por Kamps en [K3], es decir, las cofibraciones PEN y las fibraciones PLN coinciden con las cofibraciones PEH y las fibraciones PLH, respectivamente.

Por último, se verán ejemplos originados por cilindros o cocilindros con productos naturales.

## 9. Espacios Topológicos.

En el ejemplo 5 ya se vio que los espacios topológicos, con las cofibraciones PEH, forman una  $C$ -categoría.

Strøm prueba en [St2] que  $i : B \rightarrow A$  es cofibración si y sólo si  $P\{\iota_0, i\}$  es un retracto de  $IA$ . Por otro lado, en [St1] prueba que si  $i$  es cofibración entonces  $i : B \rightarrow i(B)$  es un homeomorfismo, por lo que se puede siempre suponer, identificando  $B$  con  $i(B)$ , que  $B$  es un subconjunto de  $A$ , de donde  $i : B \hookrightarrow A$  cofibración es cerrada si y sólo si  $i(B)$  es cerrado en  $A$ .

Existen cofibraciones no necesariamente cerradas: Considérese  $B = \{x\}$  y  $A = \{y, z\}$  con la topología indiscreta, cualquier aplicación  $i : B \rightarrow A$  es una cofibración no cerrada. Luego las cofibraciones cerradas forman un subconjunto propio de las cofibraciones PEH.

Los espacios topológicos con su cilindro con producto natural y las cofibraciones cerradas son también una  $I$ -categoría con producto natural, pues si  $i : B \hookrightarrow A$  es cofibración cerrada entonces  $\bar{i}$  también es cofibración, y cerrada pues  $\bar{i}^{-1}(\bar{i}(X)) = X$  cerrado y  $\bar{f}(\bar{i}(X)) = \bar{i}(B)$  también cerrado. Evidentemente la composición de aplicaciones cerradas

es cerrada. Por último  $\{Ii, \iota_0, \iota_1\}(T^i) = (i \times 1)(B \times I) \cup A \times \{0\} \cup A \times \{1\}$  cerrado en  $A \times I$ , de donde  $\{Ii, \iota_0, \iota_1\}$  además de cofibración es cerrada.

Por el teorema V.1.6 **Top**, con las cofibraciones cerradas, tiene estructura de  $C$ -categoría.

Al ser **Top** una  $E$ -categoría, es una  $C$ -categoría con las cofibraciones generadas. Por poseer **Top** push outs, las cofibraciones generadas se reducen a las aplicaciones continuas  $i : B \rightarrow A$  tales que  $i_n$  verifica PEN, para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . En particular, por el teorema V.1.6 toda cofibración PEH es una cofibración generada, sin embargo un morfismo puede verificar PEN y no PEH: sea  $i : \{0\} \rightarrow A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$ , entonces  $i$  verifica PEN pero no verifica PEH, pues  $(\{0\} \times I) \cup \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$  no es un retracto de  $A \times I$ , condición equivalente a PEH (ver [St1]). No obstante este morfismo  $i$  no es una cofibración generada, pues  $i_1$  no verifica PEN.

La relación de homotopía clásica de los espacios topológicos puede obtenerse también a través de un funtor cocilindro con producto natural:

$I'X = X^I = \text{Hom}_{\text{Top}}(I, X)$  con la topología compacto abierta, donde  $I = [0, 1]$ , y dado  $f : X \rightarrow Y$  aplicación continua  $I'f = f_*$ .

$\iota'_0(\alpha) = \alpha(0)$ ,  $\iota'_1(\alpha) = \alpha(1)$ ,  $\rho'(x) = C_x$  donde  $C_x(t) = x$ , y  $\psi'(\alpha)(t)(s) = \alpha(ts)$ , donde  $\alpha \in X^I$ ,  $x \in X$ ,  $t, s \in I$ .

Al tener **Top** pull backs, transformar  $I'$  pull backs en pull backs, conservar el objeto final y poseer una transformación de intercambio  $T'$  definida por  $T'(\alpha)(t)(s) = \alpha(s)(t)$ , se tiene que los espacios topológicos con este funtor cocilindro es una  $I'$ -categoría con producto natural y fibraciones los morfismos que verifican PLN, pues evidentemente los morfismos finales tienen la PLH y se verifica ( $I'4$ ) (ver [B1], pág. 133).

**Observación V.2.1** Por el dual del teorema V.1.6, **Top** con estas fibraciones es una  $C'$ -categoría trivial, en el sentido de que  $C'X = P < \phi_X, (\iota'_0)_X > = \phi$  para todo espacio  $X$ , y no existen aplicaciones continuas con codominio  $\phi$ , necesarias para poder definir homotopía.

## 10. Espacios Topológicos Punteados.

Ya se vio en el ejemplo 5 que **Top**\* con:

$$C(X, x_0) = (X \times I) / (X \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I), \quad Cf([(x, t)]) = [(f(x), t)].$$

$$k(x) = [(x, 1)], p([([(x, t)], s)]) = [(x, ts)].$$

y las cofibraciones punteadas es una  $C$ -categoría.

**Top\*** con el cocono definido en el ejemplo 5:

$$C'(X, x_0) = (X, x_0)^{(I, 0)}, C'f = f_*.$$

$$k'(\alpha) = \alpha(1), (p'(\alpha))(t)(s) = \alpha(ts),$$

y con las fibraciones de Hurewicz es una  $C'$ -categoría.

## 11. Espacios Exteriores.

La categoría **P** formada por los espacios topológicos con las aplicaciones propias no posee, en general, límites y colímites. En particular no siempre existen push outs, y es necesario extender esta categoría a una más amplia que la contenga como subcategoría llena y que sí los posea para poder así definir, a través de un cilindro con producto natural, una estructura de cono natural cuya homotopía restringida a la subcategoría llena **P** coincida con la homotopía propia de los espacios topológicos (Ver [G-]).

Dado un conjunto  $X$  con una topología  $\tau$ , una externología  $\varepsilon$  sobre  $X$  es cualquier subconjunto de  $\tau$  verificando:

E1: Si  $E_1, E_2 \in \varepsilon$  entonces  $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$ .

E2: Si  $A \in \tau$  y existe  $E \in \varepsilon$  con  $E \subset A$  entonces  $A \in \varepsilon$ .

$(X, \varepsilon, \tau)$  se denomina espacio exterior. Una aplicación  $f : (X, \varepsilon, \tau) \rightarrow (X', \varepsilon', \tau')$  se dirá exterior cuando es continua y para todo  $E' \in \varepsilon'$ ,  $f^{-1}(E') \in \varepsilon$ .

Los espacios exteriores con sus aplicaciones forman la categoría **E**.

Definiendo  $I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  por  $I(X, \varepsilon, \tau) = (X \times I, \varepsilon_{X \times I}, \tau_{X \times I})$ , donde  $I$  es el intervalo unidad con la externología  $\{I\}$ ,  $\tau_{X \times I}$  es la topología producto y  $\varepsilon_{X \times I}$  es la externología producto:  $\varepsilon_{X \times I} = \{A \in \tau_{X \times I} / \text{existen } E \in \varepsilon \text{ y } E' \in \varepsilon_I \text{ con } E \times E' \subset A\} = \{A \in \tau_{X \times I} / \text{existe } E \in \varepsilon \text{ con } E \times I \subset A\}$  e  $I f = f \times 1_I$ , con una estructura análoga a la de los espacios topológicos se obtiene una estructura de  $I$ -categoría con producto natural para los espacios exteriores, y de forma análoga a lo hecho en espacios topológicos se dota a la categoría **E** de una estructura de cono natural.

Obsérvese que  $\varepsilon_{CX} = \{O \in \tau_{CX} / \text{existe } E \in \varepsilon_X \text{ con } CE \subset O\}$ .

# Bibliografía

[B1] BAUES, H.J.

*Obstruction Theory*. Lecture Notes in Math **628**, Springer-Verlag, Berlin -Heidelberg-New York (1977).

[B2] BAUES, H.J.

*Algebraic homotopy*. Cambridge University Press (1989).

[Bo] BORCEUX, F,

*Handbook of Categorical Algebra 1, 2, 3*. Encyclopedia of Mathematics and its applications, **50, 51, 52**. Cambridge University Press (1994).

[Br] BROWN, K.S.

*Abstract homotopy theory and generalizated sheaf cohomology*. T Am Math Soc, **186** (1973), 419-458.

[C] CURTIS, E.B.

*Simplicial Homotopy theory*. Adv Math, **6** (1971), 107-209.

[D-1] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.

*Homotopía algebraica: Descripción e interrelación de las principales teorías*. Monografías Acad Cienc Zaragoza **5** (1994).

[D-2] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.

*Grupos en categorías de homotopía*. Monografías Acad Cienc Zaragoza **6** (1995).

[D-3] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.

*Un estudio en Homotopía Aditiva*. Simposium Internacional de la Matemática Actual, Secr Publ Univ La Laguna. ISBN:84-7756-444. 255 -265 (1996).

- [D-4] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.  
*Homotopía Axiomática*. Simposium Internacional de la Matemática Actual, Secr Publ Univ La Laguna. ISBN:84-7756-444. 237-244 (1996).
- [D-5] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.  
*Homotopía Semisimplicial*. Simposium Internacional de la Matemática Actual, Secr Publ Univ La Laguna. ISBN:84-7756-444. 245-254 (1996).
- [Di-] DIECK, T., KAMPS, K.H. AND PUPPE, D.  
*Homotopietheorie*. Lecture Notes in Math **157**, Springer-Verlag (1970)
- [Dw-] DWYER, W.G. AND KAN, D.M.  
*Homotopy theory and simplicial groupoids*. Proc Konink Neder Akad, **87** (1984), 379-389.
- [E] ECKMANN, B.  
*Homotopie et dualité*. Colloque de Topologie algebraique Louvain, (1956).
- [E-1] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.  
*Groupes d'homotopie et dualité*. B Soc Math Fr, **86** (1958), 271-281.
- [E-2] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.  
*Groups like structures in general categories, I multiplications*. Ann Math, **145** (1962), 227-255.
- [E-3] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.  
*Unions and intersections in Homotopy Theory*. Comment Math Helv, **38** (1964), 239-307.
- [Ed-] EDWARDS, D.A. AND HASTING, H.M.  
*Čech and Steenrod Homotopy Theories*. Lecture notes in Math **542**, Springer-Verlag (1976).
- [Ei-] EILENBERG, S. AND STEENROD, N.  
*Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press (1952).
- [F] FREYD, P.  
*Abelian Categories*. Harper International (1966).

- [G-] GARCIA-CALCINES, J.; GARCIA-PINILLOS, M.; HERNANDEZ-PARICIO, L.J.  
*A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories.* B Aust Math Soc, **57** (1998), 221-242.
- [Go] GODEMENT, R.  
*Théorie des faisceaux.* Paris: Hermann (1958).
- [Gol-] GOLASINSKI, M. AND GROMADZKI, G.  
*The homotopy category of chain complex is a homotopy category.* Colloq Math, **47**, 2 (1982), 173-178.
- [Gr] GRAY, B.  
*Homotopy theory.* Academic Press (1975).
- [H-] HALPERIN, S. AND WATKISS, C.  
*Relative Homotopical Algebra.* Lille Publ, IRMA.
- [He1] HELLER, A.  
*Homotopical Algebra in abelian categories.* Ann Math, **68** (1958), 484-525.
- [He2] HELLER, A.  
*Stable Homotopy Categories.* B Am Math Soc, **74** (1968), 28-36.
- [He3] HELLER, A.  
*Abstract homotopy in categories of cofibrations and the spectral sequence of Eilenberg-Moore.* J Math, **16** (1972).
- [Her] HERNANDEZ, L.J.  
*Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos.* Dpto. de Geometría y Topología. Universidad de Zaragoza (1980).
- [Hi1] HILTON, P.J.  
*Homotopy theory of Modules and duality.* International Symposium on Algebraic Topology. Univ Nacional Autónoma de Mexico (1958), 273 -281.
- [Hi2] HILTON, P.J.  
*Homotopy theory and duality.* Nelson Gordon and Breach (1965).

[Hi-] HILTON, P.J. AND STAMMBACH, U.

*A course in Homological Algebra.* Springer-Verlag GTM 4, New York (1971).

[Hu] HU, S.T.

*Homotopy theory.* Academic Press (1959).

[Hub1] HUBER, P.J.

*Homotopy theory in general categories.* Math Ann, **144** (1961), 361 -385.

[Hub2] HUBER, P.J.

*Standard constructions in Abelian Categories.* Math Ann, **146** (1962), 321-325.

[K1] KAMPS, K.H.

*Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopietheorie.* Math Zeitschrift, **124** (1972), 215-236.

[K2] KAMPS, K.H.

*Fundamentelgruppoid and Homotopien.* Arch Math, **24** (1973), 456-460.

[K3] KAMPS, K.H.

*Note on normal sequences of chain complexes.* Colloq Math, **39**, 2 (1978), 225-227.

[Ka] KAN, D.M.

*Abstract homotopy I,II.* Proc Nat Acad Sci USA, **41** (1955), 1092 -1096.

[Kl1] KLEISLI, H.

*Homotopy theory in Abelian Categories.* Can J Math, **14** (1962), 139 -169.

[Kl2] KLEISLI, H.

*Every Standard construction is induced by a pair of Adjoint Functors.* P Am Math Soc, **16**, 3 (1965) 544-546.

[M] Mac LANE, S.

*Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics **5**. Springer-Verlag (1971).

[Ma] MARDEŠIĆ, S. AND SEGAL, J.

*Shape Theory.* North-Holland (1982).

- [May] MAY, J.P.  
*Simplicial objects in Algebraic Topology*. Van Nostrand (1967).
- [P-] PADRON, E. AND RODRIGUEZ-MACHIN, S.  
*Model additive categories*. Suppl Rendiconti Circolo Mat Palermo. Serie II. **24** (1990), 465-474.
- [Po] POPESCU, N.  
*Abelian Categories with applications to Rings and Modules*. Academic Press (1973).
- [Pu] PUPPE, V.  
*A remark on homotopy fibrations*. Manuscripta Math, **12** (1974), 113-120.
- [Q1] QUILLEN, D.G.  
*Homotopical algebra*. Lecture notes en Math **43**, Springer-Verlag (1967).
- [Q2] QUILLEN, D.G.  
*Rational homotopy theory*. Ann Math, **90** (1969), 205-295.
- [R] RODRIGUEZ-MACHIN, S.  
*Homotopy theories in additive categories are homotopies of  $\Delta$ -groups*. Suppl Rendiconti Circolo Mat Palermo, **39** (1990), 47-57.
- [S] SANZ, M.  
*Homotopía en R-casi módulos*. Dpto Geometría y Topología Univ de Zaragoza (1980).
- [Se] SEEBACH, J.A. JR.  
*Injectives and homotopy*. I V J Math **16** (1972) 446-453.
- [St1] STRØM, A.  
*Note on cofibrations*. Math Scand, **19** (1966), 11-14.
- [St2] STRØM, A.  
*Note on cofibrations II*. Math Scand, **22** (1968), 130-142.
- [St3] STRØM, A.  
*The homotopy category is a homotopy category*. Arch Math, **23** (1972), 435-441.
- [W1] WHITEHEAD, J.H.C.  
*Combinatorial Homotopy II*. B Am Math Soc, **55** (1949), 213-245.

[W2] WHITEHEAD, J.H.C.

*Algebraic homotopy theory.* Proc Int Congress of Mathematicians, Harvard, **2** (1950), 354-357.

[W3] WHITEHEAD, J.H.C.

*A certain exact sequence.* Ann Math, **52** (1950), 51-110.

[W4] WHITEHEAD, J.H.C.

*Simple homotopy types.* Am J Math, **72** (1950), 1-57.

F.J. Díaz.  
Dpto. de Matemática Fundamental.  
Facultad de Matemáticas.  
Universidad de La Laguna.  
C/ Astrofísico Fco. Sánchez s/n.  
38071 - La Laguna.  
S/C de Tenerife. España.

fradiaz@ull.es

S. Rodríguez-Machín  
Dpto. de Matemática Fundamental.  
Facultad de Matemáticas.  
Universidad de La Laguna.  
C/ Astrofísico Fco. Sánchez s/n.  
38071 - La Laguna.  
S/C de Tenerife. España.

seroma@ull.es