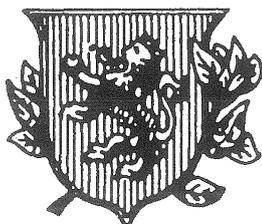


MONOGRAFIAS
DE LA
ACADEMIA
DE
CIENCIAS

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

**RESUMEN HISTÓRICO DEL DESARROLLO DE LA
MECÁNICA CELESTE A PARTIR DE NEWTON**

JAVIER RIBERA PASCUAL
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Zaragoza



N.º 12

1998

Depósito legal: Z. 913 – 1998

Imprime:

Sdad. Coop. de Artes Gráficas
LIBRERÍA GENERAL
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

A la memoria de mis padres.

**RESUMEN HISTORICO DEL DESARROLLO DE
LA MECANICA CELESTE A PARTIR DE NEWTON,**

INDICE

| | Páginas |
|---|---------|
| INTRODUCCION | 9 |
| I.- ALGUNOS PROBLEMAS DE LA MECANICA CELESTE. | 9 |
| I.1.- El objeto de la Mecánica Celeste. | 9 |
| I.2.- Fuerzas centrales. Potencial de atracción. | 11 |
| I.3.- El problema de los dos cuerpos. | 12 |
| I.4.- La determinación de órbitas. | 13 |
| I.5.- El problema de n cuerpos. | 14 |
| I.6.- El problema de tres cuerpos. | 15 |
| I.7.- Teoría de la Luna. | 18 |
| I.8.- El sistema solar. Teoría planetaria. | 20 |
| I.9.- Planetas menores. | 22 |
| I.10.- Estrellas dobles. La universalidad de la ley de Newton. | 24 |
| I.11.- El objeto de la dinámica estelar. | 25 |
| I.12.- Un breve resumen del desarrollo histórico de la dinámica estelar. | 26 |
| I.13.- Conclusión. | 28 |
| II. DESARROLLO DE LA ASTRONOMIA Y LA MECANICA CELESTE EN LOS SIGLOS XVII Y VIII. | 29 |
| II.1.- La mecánica celeste después de Newton. | 29 |
| II.2.- Flamsteed. Halley. | 30 |
| II.3.- Bradley. | 32 |
| II.4.- El problema de Newton. Difusión de sus teorías. | 34 |
| II.5.- Euler. | 36 |
| II.6.- Clairaut. | 38 |

| | |
|--|----|
| II.7.- D'Alembert. | 39 |
| II.8.- Las teorías lunares de Euler, Clairaut y D'Alembert. | 39 |
| II.9.- Las teorías planetarias de Euler, Clairaut y D'Alembert. | 41 |
| II.10.- Lagrange. | 42 |
| II.11.- Laplace. | 45 |
| II.12.- El estudio de las perturbaciones por Lagrange y Laplace. | 49 |
| II.13.- La hipótesis nebular de Laplace. | 52 |
| II.14.- Herschel. Los sistemas estelares. | 53 |
| II.15.- Herschel. Las nebulosas y los cúmulos estelares. Estrellas dobles y el movimiento del Sol. | 56 |
| III. ASTRONOMIA Y MECANICA CELESTE EN EL SIGLO XIX. | 58 |
| III.1.- Astronomía de observación. Legendre. Gauss. Asteroides. | 58 |
| III.2.- Bessel. Struve. | 60 |
| III.3.- El descubrimiento de Neptuno. Adams. Leverrier. | 63 |
| III.4.- Poincaré. | 65 |
| APENDICE | 67 |
| Resumen de los trabajos de Newton sobre la ley de gravitación universal. | |
| REFERENCIAS. | 75 |

RESUMEN HISTORICO DEL DESARROLLO DE LA MECANICA CELESTE A PARTIR DE NEWTON.

INTRODUCCION

En lo que sigue se reúnen y agrupan fragmentos de textos seleccionados que tratan de la mecánica celeste y su historia, desde la época inmediatamente posterior a Newton hasta el tiempo de Poincaré. Se exponen brevemente los principales problemas que estudia la mecánica celeste y se da una relación de los principales astrónomos y matemáticos que se dedicaron a ella, así como de sus trabajos más importantes. Los textos a los cuales nos referimos aparecen dispersos en varios libros y artículos que tratan de la historia de la astronomía y de las matemáticas. Dichos libros figuran en las referencias.

I.- ALGUNOS PROBLEMAS DE LA MECANICA CELESTE.

I.1.- El objeto de la Mecánica Celeste.

La mecánica celeste es una rama de la mecánica y de la astronomía que se ocupa de estudiar los movimientos y figuras de los cuerpos celestes. La fuerza principal que gobierna dichas cuestiones es la fuerza de gravitación. Algunos autores limitan el campo de estudio de la mecánica celeste a los movimientos orbitales del sistema solar, añadiendo que los movimientos del Sol, de las estrellas y de los sistemas estelares son estudiados por la dinámica estelar. En su sentido más amplio, el término *movimiento orbital* se usa para describir el movimiento de revolución de un planeta alrededor del Sol, el de un satélite alrededor de un planeta, el de una estrella alrededor de otra o el de una estrella alrededor del centro de la galaxia a la que pertenece.

Puede decirse que la mecánica celeste tuvo sus comienzos con la publicación de los "Principia" de Newton en el año 1687, donde se formularon las leyes del movimiento y la ley de gravitación universal, y se dedujeron algunas de las propiedades más significativas de los movimientos de planetas y satélites, aunque algunos autores fijan los orígenes de la mecánica celeste en la formulación de las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

En realidad, muchos resultados de la mecánica celeste se obtienen por medio de una simplificación, consistente en considerar a todos los cuerpos celestes como si se tratara de masas puntuales que se atraen entre sí en virtud de la fuerza gravitatoria. El concepto de masa puntual ha de entenderse como un *punto matemático* dotado de una cierta cantidad de masa. Tal

simplificación puede hacerse en muchos casos, como ocurre en el sistema solar, debido a que todos sus miembros están tan separados unos de otros, que sus dimensiones son despreciables frente a sus mutuas distancias ya que, en primera aproximación, puede suponerse que todos los cuerpos del sistema son esféricos. En efecto, para cuerpos esféricos, la atracción gravitatoria es, en consonancia con la ley de Newton, equivalente a la atracción de dos masas puntuales. Para los cometas esta aproximación puede parecer menos justificada, debido a que, en algunos casos, sus dimensiones son grandes. Sin embargo, incluso para dichos astros hay evidencia de una fuerte concentración de masa en su núcleo.

Existe otra circunstancia que simplifica considerablemente el estudio de los cuerpos del sistema solar, dado que las masas de los planetas son muy pequeñas comparadas con la del Sol. La masa mayor es la de Júpiter, aproximadamente $1/1047$ de la masa del Sol. La de Saturno es casi $1/3500$ de la masa solar. De ahí que, si se exceptúa el caso del movimiento de un cuerpo cercano a un planeta, la atracción solar es siempre muchísimo mayor que la atracción del planeta. Las masas de los planetas menores o asteroides son muy pequeñas, así como las de la mayoría de los cometas. Se ha estimado que la masa total del sistema formado por los asteroides es $1/500$ de la masa terrestre. De acuerdo con esto, una primera aproximación del movimiento de un planeta, asteroide o cometa, se puede obtener considerando solamente la atracción solar y resolviendo el problema como si de masas puntuales se tratase.

La Mecánica Celeste, que hace uso del Análisis Matemático y de otras Teorías Físicas, puede estudiarse desde un punto de vista puramente formal, o bien desde el punto de vista de sus aplicaciones. Además, se sabe que las observaciones de los movimientos de los cuerpos celestes han confirmado la validez de los principios básicos con un alto grado de precisión. Existe una excepción significativa: la introducción de la Teoría de la Relatividad que obligó a considerar de nuevo las bases newtonianas de la mecánica celeste; sin embargo, la dificultad de la formulación relativista y el alto grado de aproximación conseguido con las leyes de Newton, justifican la utilización de la teoría clásica.

Con el título de "*Mécanique céleste*", estableció Laplace en su obra, un programa para la astronomía gravitatoria o teórica. En el prefacio de su libro primero puede leerse lo siguiente: "Hacia finales del siglo XVII, Newton publicó su descubrimiento de la gravitación universal. A partir de esa época, los matemáticos han tenido éxito en referir a esta gran ley de la naturaleza todos los fenómenos conocidos del sistema del mundo. De esta manera han dado un inesperado grado de precisión a las teorías de los cuerpos celestes y a las tablas astronómicas. Mi objetivo consiste en presentar una visión unificada de esas teorías, ahora dispersas en un gran número de trabajos. La totalidad de los resultados de la gravitación, el equilibrio y movimientos de cuerpos fluidos y sólidos que componen el sistema solar y sistemas similares que existen en la

inmensidad del espacio, constituyen el objeto de la mecánica celeste o aplicación de los principios de la mecánica a los movimientos y figuras de los cuerpos celestes. La astronomía, en su forma más general, es un gran problema de mecánica. La solución de este problema depende, al mismo tiempo, de la exactitud de las observaciones y también de la perfección del análisis. Es muy importante rechazar todo proceso empírico y completar el citado análisis, de modo que no sea necesario deducir de las observaciones ningún dato indispensable..."

Según Hagihara, "la mecánica celeste fué fundada por Laplace ", y añade que "se trata de una ciencia típicamente deductiva, que se ocupa de las características de los cuerpos celestes, esto es, de los movimientos y figuras de éstos, y permite convencernos de la existencia de las leyes de la naturaleza, mostrando cuán exactas son éstas".

I.2.- Fuerzas centrales. Potencial de atracción.

Consideremos una masa puntual sometida a la influencia de una fuerza de atracción o repulsión, cuya línea de acción pasa siempre por un punto fijo. En estas condiciones, dicho punto se llama *centro* de fuerzas y ésta se denomina *fuerza central*. Las fuerzas centrales de atracción son las de más frecuente aparición en relación con fenómenos astronómicos. El estudio de las fuerzas centrales fué realizado, por primera vez, por Newton. En el libro primero de sus "Principia" efectuó un tratamiento geométrico del problema y obtuvo teoremas generales. Por otra parte, todos los casos más simples de fuerzas centrales fueron resueltos en el siglo XVIII por métodos analíticos. Unos cuantos ejemplos fueron expuestos con detalle en la obra de Legendre titulada "*Traité des fonctions elliptiques*".

Aunque la atracción de cuerpos materiales fué investigada por primera vez por Newton, el problema de la atracción que ejercen los elipsoides ha sido objeto de muchos estudios. El caso en que los elipsoides son homogéneos fué resuelto completamente en el siglo XIX. Entre los autores que se ocuparon del problema pueden citarse a los siguientes: Euler (1738), Lagrange (1773 y 1775), Laplace (1782), Legendre (1811), Gauss y Poisson (1829). Los primeros trabajos se dedicaron, en su mayor parte, a la atracción de elipsoides homogéneos de revolución sobre partículas situadas en diversas posiciones, como, por ejemplo, en uno de los ejes. Lagrange obtuvo la solución general en el caso de las atracciones de elipsoides homogéneos de revolución sobre partículas situadas en su interior. Este resultado fué ampliado por MacLaurin para el caso de partículas situadas en el exterior del elipsoide. Por otra parte, en una memoria sobre la teoría de las atracciones de los esferoides y la figura de los planetas, Laplace desarrolló el concepto de potencial. Este trabajo fué el punto de partida de muchas investigaciones efectuadas a finales del siglo XIX, especialmente en el caso en que los elipsoides no son homogéneos.

El estudio de las atracciones de esferoides y elipsoides ha sido fundamental en las discusiones acerca de las posibles figuras de equilibrio de fluidos sometidos a un movimiento de rotación. La razón de ello es que las condiciones requeridas para que exista equilibrio incluyen las componentes de la fuerza de atracción. En 1742 MacLaurin probó que para una velocidad de rotación lenta de un esferoide achatado por los polos, cuya excentricidad es función de la rotación y de la densidad del fluido, se obtiene una figura de equilibrio. Jacobi, Tisserand y Poincaré también estudiaron ese problema. Así, por ejemplo, Jacobi probó en 1834 que cuando la velocidad de rotación no es muy grande se obtiene un elipsoide con tres ejes distintos, que es una figura de equilibrio. En un trabajo muy importante, Poincaré probó que existen infinitas figuras de equilibrio que, para ciertas velocidades de rotación, coinciden con el correspondiente elipsoide de Jacobi, el cual, a su vez, para una cierta velocidad de rotación, coincide con el esferoide de MacLaurin.

I.3.- El problema de los dos cuerpos.

El planteamiento del problema de dos cuerpos es el siguiente: dados en un cierto instante la posición y la velocidad de dos masas puntuales, que se mueven en virtud de sus fuerzas gravitatorias mutuas, calcular sus posiciones y velocidades en cualquier instante de tiempo. La importancia del problema reside en dos hechos. De una parte es el único problema gravitatorio de la dinámica (aparte de otros casos algo especializados del denominado problema de tres cuerpos), del que se conoce una solución general y completa. De otra porque constituye una primera aproximación de otros muchos problemas de movimiento orbital, ya sea por tratarse de masas no puntuales o por la influencia de cuerpos que perturban el movimiento.

El problema tiene tres grados de libertad y es integrado en función de seis constantes de integración, de manera que la órbita relativa de un cuerpo alrededor del otro está contenida en un plano, y el movimiento es kepleriano, esto es, satisface las leyes de Kepler. Es usual tomar como constantes de integración las siguientes: la *inclinación* del plano orbital, la *longitud del nodo ascendente*, el *semieje mayor*, la *excentricidad*, la *longitud del pericentro* y la *época de paso por el pericentro*. Estas seis constantes se denominan *elementos orbitales keplerianos*.

En primera aproximación, el movimiento de los planetas puede considerarse determinado únicamente por la fuerza de atracción del Sol. Las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del planeta se obtienen en forma cerrada. Las constantes de integración son determinadas por las observaciones. El problema de dos cuerpos para esferas de tamaño finito fué resuelto por primera vez por Newton en el año 1685, utilizando métodos geométricos. Los métodos analíticos fueron cultivados en la Europa continental a

principios del siglo XVIII, mientras que el sistema de la mecánica newtoniana no encontró aceptación inmediata. Los franceses aceptaron la teoría de los vórtices de Descartes (1596-1650) hasta que Voltaire apoyó las teorías de Newton después de una visita a Londres en el año 1727. Estas circunstancias, junto con el hecho de que los ingleses continuaban utilizando los métodos geométricos que aparecían en los "Principia", retrasaron la solución analítica del problema. Probablemente tal solución fué obtenida por Daniel Bernoulli (1700-1782), alrededor de 1734. Finalmente, Euler, en su obra titulada "Theoria motuum planetarum et cometarum", resolvió el problema con detalle. Desde entonces, las modificaciones se han producido principalmente en la elección de las variables mediante las cuales se expresa el problema.

I.4.- La determinación de órbitas.

La determinación de órbitas keplerianas en base a datos de observación, ha sido resuelto por Laplace y Gauss. El primero ha diseñado un método que determina una órbita cuando se conocen los valores de las coordenadas y las componentes de la velocidad del satélite en un instante dado. En la solución de Gauss se suponen conocidas dos posiciones distintas del satélite. En ambos casos pueden determinarse los elementos orbitales ordinarios en forma de constantes o bien por un conjunto de variables (Delaunay, Hill, etc.). En consecuencia, es natural determinar la posición y la velocidad del cuerpo observado en una época dada. La dificultad reside en que las observaciones, que se hacen desde la Tierra en movimiento, proporcionan tan sólo la dirección del objeto tal como es visto por el observador, y no proporcionan ninguna información directa en lo que respecta a su distancia. Una observación de la posición aparente sólo determina el hecho de que el cuerpo está en algún punto de la recta que lo une con el observador, por lo que se hace necesario efectuar observaciones adicionales en otros instantes. En el intervalo de tiempo transcurrido entre dos observaciones, la Tierra se habrá movido y el cuerpo observado estará en otro punto de su órbita. La segunda observación facilita otra línea en que está localizado el cuerpo y otro instante de tiempo. Así pues, está claro que el problema de determinar la posición del cuerpo y los elementos de su órbita a partir de los datos anteriores presenta dificultades.

En primer lugar hay que establecer el número de observaciones que son necesarias, con el fin de que sea posible determinar los elementos de la órbita. Debido a que ésta queda definida por seis elementos, se deduce que las observaciones han de proporcionar seis parámetros independientes, con el fin de que puedan determinarse dichos elementos. Una única observación completa proporciona dos cantidades, que son las coordenadas angulares del cuerpo. Así pues, son suficientes tres observaciones completas.

El primer método que se usó para hallar la órbita de un cuerpo celeste (precisamente la de un cometa en órbita parabólica) fué ideado por Newton y expuesto en el libro tercero de sus "Principia". La solución se obtuvo por medio de una construcción gráfica, la cual, por medio de aproximaciones sucesivas, condujo a la obtención de los elementos que determinaban la órbita. Una de las primeras aplicaciones del método de Newton fué llevada a cabo por Halley para calcular la órbita del cometa que lleva su nombre.

La primera solución completa en el cálculo de órbitas que no depende de una construcción gráfica fué dada por Euler en el año 1774, y publicada en su obra "Theoria motuum planetarum et cometarum". En 1761 Lambert (1728-1777) hizo algunas contribuciones importantes al problema del cálculo de órbitas. También descubrió la relación entre el radio, la cuerda, el intervalo de tiempo y el eje mayor de la órbita. Lambert poseía una comprensión inusual de la física y la geometría del problema, por lo que anticipó muchas de las ideas que llevaron a cabo sus sucesores.

Lagrange escribió tres memorias, dos en 1778 y una en 1783, en las que aportaba generalidad y precisión. Por otra parte, Laplace, en 1780, publicó un método enteramente nuevo en las "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris". Dicho método constituyó la base de una gran cantidad de trabajos realizados posteriormente. Entre ellos puede mencionarse una memoria de Villarceau publicada en los "Annales de l'observatoire de Paris".

En 1801 fué descubierto el asteroide Ceres, observado durante muy poco tiempo hasta que se produjo su "desaparición", lo que atrajo la atención de Gauss, quien se enfrentó con el problema de determinar los elementos de la órbita de un cuerpo celeste partiendo de observaciones efectuadas desde la Tierra. El problema fue resuelto rápidamente y una aplicación del método elaborado por Gauss permitió el redescubrimiento de Ceres. Gauss perfeccionó su trabajo y en 1809 lo incluyó en su obra titulada "Theoria Motus Corporum Coelestium". Este libro, escrito por un hombre que era un maestro en las matemáticas, además de gran calculador, está lleno de valiosas ideas. Por otra parte, dicho trabajo es tan exhaustivo que se ha convertido en un clásico dentro del tema del cálculo de órbitas.

I.5.- El problema de n cuerpos.

El problema de n cuerpos consiste en estudiar el movimiento de n masas puntuales que se atraen entre sí en virtud de sus fuerzas gravitatorias mutuas. Las investigaciones sobre este problema son de dos tipos: primero, aquellas que conducen a teoremas generales que son válidos para todo sistema de n cuerpos y segundo, aquellas que proporcionan buenas aproximaciones en un cierto intervalo de tiempo para sistemas particulares, tal como el sistema

solar. Las investigaciones del segundo tipo se conocen con el nombre de teorías de perturbaciones.

Los primeros teoremas generales sobre el problema de n cuerpos hacían referencia al centro de masas y fueron expuestos por Newton en los "Principia". Las diez integrales del movimiento y los teoremas que conducían a ellas eran resultados conocidos por Euler. El siguiente resultado general fué la demostración de la existencia del denominado plano invariable y la discusión de sus propiedades. Este trabajo fué llevado a cabo por Laplace en el año 1784. En 1842, Jacobi presentó los resultados de algunas investigaciones muy importantes acerca de la integración de las ecuaciones diferenciales que aparecen en mecánica. En todos los casos en que las fuerzas dependen de las coordenadas y donde existe una función potencial (condiciones que se dan en el problema de n cuerpos), Jacobi demostró que si habían sido halladas todas las integrales excepto dos, estas últimas también podían obtenerse. Por otra parte, después de ampliar unos estudios de Hamilton, Jacobi demostró que el problema es reducible al de resolver una ecuación en derivadas parciales cuyo orden es la mitad del orden del sistema original.

Una cuestión de gran interés consiste en saber si los movimientos del sistema formado por el Sol y los planetas son puramente periódicos. Newcomb demostró en 1874 que las ecuaciones diferenciales que describen el problema pueden ser satisfechas formalmente por series puramente periódicas, pero no probó su convergencia. Poincaré en su libro "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", demostró que dichas series, en general, son divergentes.

I.6.- El problema de tres cuerpos.

El problema de tres cuerpos, uno de los más difíciles que se presentan en mecánica celeste, consiste en el estudio del movimiento de tres cuerpos celestes bajo la influencia de sus mútuas atracciones gravitatorias. En términos matemáticos el problema se reduce a tratar de resolver un sistema de nueve ecuaciones diferenciales de segundo orden. Newton fué el primero en estudiarlo, y sus resultados aparecieron en el Libro I de sus "Principia".

El problema de tres cuerpos ha hecho vanos todos los esfuerzos encaminados a obtener una solución expresable en términos finitos. Sin embargo, hay un cierto número de resultados que han sido establecidos con rigor cuando las coordenadas iniciales y las componentes de las velocidades iniciales satisfacen ciertas condiciones. En el caso de masas arbitrarias, Euler y Lagrange obtuvieron una solución de equilibrio rectilínea y una solución de tipo triangular equilátera. En el caso en que dos de las masas sean iguales, se obtuvo una solución triangular isósceles. Estos casos particulares o especiales no han sido encontrados en la naturaleza, pero

hay, no obstante, algunas aplicaciones de los resultados obtenidos y de los procedimientos empleados que condujeron a conclusiones interesantes.

Los propósitos que hacen referencia al problema de tres cuerpos son los siguientes: primero, deducir teoremas generales que puedan obtenerse sin el conocimiento efectivo de la solución del problema; en segundo lugar, conseguir que el problema pueda resolverse mediante alguna simplificación en su planteamiento. Tal es el caso del denominado problema restringido, en el cual dos cuerpos de masa finita se mueven alrededor de su centro de masas en órbitas elípticas, mientras que el tercero tiene una masa despreciable frente a las de aquellos. El tercer propósito consiste en obtener una aproximación numérica de la solución.

En 1772, Lagrange obtuvo unas soluciones particulares que están contenidas en su obra titulada "Essai sur le problème des trois corps". El método utilizado consistió en dividir el problema en dos partes: primero, la obtención de las distancias mutuas entre los cuerpos; segundo, la determinación del plano del triángulo en el espacio y la orientación de dicho triángulo en el plano. Lagrange probó que si se podía resolver la primera parte, también podía resolverse la segunda. Para la solución de la parte primera fué necesario deducir tres ecuaciones diferenciales que inclúan a las tres distancias mutuas como variables dependientes. Lagrange encontró tres ecuaciones diferenciales, una de las cuales era de tercer orden y las otras dos eran de segundo orden, con lo que el problema era de orden siete. También observó que podía integrar completamente las ecuaciones diferenciales suponiendo que los cocientes de las distancias mutuas eran constantes. La demostración fué repetida por Laplace en su "Mécanique Céleste". Más adelante se publicaron gran número de memorias en las que se seguían las líneas de trabajo de Lagrange. Entre ellas destacaron las de Lindstedt y Mathieu.

En el siglo XIX, Jacobi se dedicó también al estudio del problema de tres cuerpos sin tener conocimiento de los resultados obtenidos por Lagrange. Pese a esto, en 1843 redujo el problema general de tres cuerpos al orden siete. El problema jamás ha podido ser reducido a un orden menor. No se descubrieron nuevas soluciones periódicas del problema de tres cuerpos posteriores a las obtenidas por Lagrange en 1772, hasta que Hill (1838-1914) desarrolló su teoría de la Luna en 1878. Las soluciones dadas por Hill son de un valor práctico mayor que las soluciones de Lagrange.

Los trabajos de Hill no fueron bien acogidos hasta que Poincaré probó que el procedimiento de éste era convergente. Fué Poincaré, precisamente, el que demostró que cuando las masas de dos de los cuerpos son pequeñas en comparación con la masa del tercero, existen infinitos conjuntos de condiciones iniciales para las cuales el movimiento es periódico. Estas ideas fueron elaboradas y los resultados aparecieron en un trabajo titulado "Sur le

problème des trois corps et les equations de la dynamique". Poincaré inauguró un nuevo enfoque para la búsqueda de soluciones periódicas de las ecuaciones que gobiernan los movimientos planetarios. Como esas ecuaciones no son lineales, Poincaré tuvo que crear métodos completamente nuevos, porque, aunque es cierto que las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales habían aparecido mucho antes, no había sido propuesto ningún método general para resolverlas. Puesto que las ecuaciones del movimiento de tres cuerpos no pueden resolverse en términos de funciones conocidas y dado que el problema tiene incluso una infinidad de soluciones, Poincaré centró su atención en las relaciones que existen entre esas soluciones. Su "teoría cualitativa" fué presentada en cuatro memorias entre 1881 y 1886, las cuales trataban de las curvas definidas por una ecuación diferencial y proponían considerar las relaciones mútuas entre las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. El problema, planteado en el lenguaje de la astronomía, consiste en saber si las órbitas son estables o inestables, lo que puede traducirse al lenguaje matemático mediante preguntas como las que siguen : el punto móvil, ¿ describe una curva cerrada?, ¿permanece en el interior de una cierta región del plano? En una memoria del año 1889, Poincaré proseguía sus investigaciones y consideró una teoría aún más general aplicada al problema de tres cuerpos. Demostró que existían, en general, una infinidad de posiciones y velocidades iniciales tales que las distancias mútuas entre los tres cuerpos eran funciones periódicas del tiempo. Su gran tratado titulado "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", aparecido entre 1892 y 1899, extendía los resultados obtenidos anteriormente y desarrollaba, entre otras cosas , una nueva clase de soluciones denominadas "soluciones asintóticas", las cuales se aproximaban indefinidamente a soluciones periódicas para valores infinitamente grandes, positivos o negativos, del tiempo. Los métodos de Poincaré fueron incomparablemente más profundos y poderosos que cualquiera de los métodos usados con anterioridad en mecánica celeste y marcaron una época en el desarrollo de la ciencia.

La teoría de Poincaré acerca de las soluciones periódicas fué cultivada matemáticamente por Perron, Lefschetz, Siegel y otros, en unión con la teoría de ecuaciones diferenciales. Hill y otros efectuaron cálculos numéricos para las soluciones periódicas de sistemas idealizados y Henon hizo un estudio completo de las órbitas en el problema restringido de tres cuerpos.

En 1906 y 1909 se produjo un considerable avance en el estudio del problema, pues exceptuando tan sólo el caso en que los tres cuerpos chocan simultáneamente (es decir, cuando se produce una colisión total), Sundman, utilizando métodos analíticos debidos a Levi-Civita y Painlevé, con una modificación original, obtuvo una solución del problema. En todo caso, los desarrollos en serie dados por este autor resultaron inútiles para efectuar cálculos prácticos y tampoco proporcionaron mucha información sobre el movimiento de los tres cuerpos.

I.7.- Teoría de la Luna.

El problema de la mecánica celeste conocido con el nombre de Teoría de la Luna debería incluir todos los aspectos de la teoría analítica acerca del movimiento de nuestro satélite. Sin embargo, muy frecuentemente, se entiende por Teoría de la Luna el problema de hallar el movimiento de la Luna sometida sólo a las atracciones gravitatorias de la Tierra y del Sol, considerando a los tres cuerpos como si fuesen masas puntuales, que Brown denominó "problema principal de la teoría lunar". Un tratamiento completo del movimiento de la Luna requeriría la inclusión de los efectos debidos a la forma no esférica de la Tierra y de la propia Luna, y también debería incluir las atracciones de los planetas.

Debido a que la Luna es el cuerpo celeste más cercano, su posición ha sido observada con gran precisión. Por ello, es natural pensar que el problema de su movimiento debería ser resuelto con un perfeccionamiento que no puede esperarse en el caso de otros cuerpos celestes. Esto ha sido intentado en los dos últimos siglos por un gran número de matemáticos, cuyo trabajo ha hecho una importante contribución a la mecánica celeste, convirtiendo el problema del movimiento de la Luna en uno de los problemas clave de esta ciencia.

La revolución de la Luna alrededor de la Tierra está perturbada principalmente por el Sol, aunque otros cuerpos celestes también causan perturbaciones que son mucho más débiles. La forma achatada de la Tierra también tiene su influencia, si bien a causa de la distancia entre la Tierra y la Luna dicha influencia es muy pequeña. Se supone que el Sol es el único cuerpo perturbador y que la Tierra se mueve alrededor de éste describiendo una órbita kepleriana. El estudio del movimiento de la Luna bajo estas condiciones es conocido, como se ha dicho, con el nombre de "el problema principal de la teoría de la Luna". Las perturbaciones debidas a los planetas se denominan perturbaciones planetarias directas. Por otra parte, las denominadas perturbaciones planetarias indirectas son aquellas irregularidades que son causadas en el movimiento de la Luna por el hecho de que la órbita terrestre no es una elipse perfecta, debido a las perturbaciones que sobre la Tierra causan los planetas.

Euler fué el primero en dar una solución "calculable" del problema del movimiento lunar. Su método de cálculo aproximado fué lo suficientemente práctico como para poder confeccionar una tablas de la Luna que fueron utilizadas por el almirantazgo británico. Algunos problemas especiales de la teoría lunar fueron estudiados por Poisson (1781-1840), el cual hizo también aportaciones a la física matemática (una de sus obras principales es el "Traité de mécanique" en dos volúmenes publicados en 1811 y 1833).

Un gran avance en la teoría de la Luna fué realizado por Hansen (1795-1874), que publicó en 1838 un tratado con el título de "Fundamenta". Hansen compuso en 1857 unas tablas del movimiento de la Luna de tal exactitud que las discrepancias entre los valores de dichas tablas y los de la observación en el periodo 1750-1850 no fueron mayores de 2".

Hacia finales del siglo XIX, Hill inauguró una nueva rama de la mecánica celeste al presentar su teoría del movimiento de la Luna. Hill tomó como órbita intermedia una órbita periódica de un sistema ficticio Sol-Tierra-Luna muy aproximado a la realidad. La teoría de Hill fué completada por Brown para el cálculo efectivo de efemérides lunares. En la teoría de la Luna de Hill juegan papeles importantes una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos y el determinante de una matriz con un número infinito de filas y columnas. Las series que Hill obtuvo para la órbita periódica son uniformemente convergentes, pero las series que representan la desviación entre la órbita efectiva y la órbita intermedia no lo son. La idea de Hill fué generalizada por Poincaré en su teoría de las soluciones periódicas y fué aplicada al estudio del movimiento de aquellos asteroides con movimientos medios casi conmensurables con el movimiento medio de Júpiter, que es el principal cuerpo perturbador.

En su libro publicado en 1896 y titulado "An introductory treatise on the lunar theory", Brown dió cuenta de todos los principales métodos que se habían utilizado para el estudio del movimiento de la Luna. Unos trabajos de Brown, desarrollados entre los años 1897 y 1908, contenían una exposición completa de la teoría del movimiento de la Luna, de acuerdo con sus propios cálculos y además incluían los efectos producidos por los achatamientos de la Tierra y la Luna y los debidos a la acción de los planetas.

La teoría de la Luna elaborada por Delaunay (1816-1872) está presentada en dos trabajos de los años 1860 y 1867. Dicha teoría fue comparada, con gran acuerdo, con las de Hansen y Newcomb, lo cual hizo pensar que se había dado una respuesta inequívoca al problema de movimiento de la Luna. Sin embargo, la teoría presentaba algunos puntos débiles, pues el rápido avance de la longitud del perigeo seguía constituyendo una dificultad, aunque Delaunay al estudiar este problema pudo obtener un valor aproximado. Un segundo problema consistía en la inexplicable aceleración secular de la Luna, que fue estudiada por Hansen y Delaunay. Incluso Tisserand en el tercer volumen de su "Traité de Mécanique céleste" (1894) finaliza su exposición de las teorías de la Luna con las siguientes palabras: También en el tiempo de Clairaut, la teoría parecía ser incapaz de explicar el movimiento del perigeo..., pero está por hacerse un gran descubrimiento...". El descubrimiento tuvo lugar y el problema de la aceleración secular de la Luna fue resuelto, si bien de forma enteramente inesperada. Las causas no residían en defectos o carencias de la teoría, sino en las irregularidades del movimiento de

rotación de la Tierra, cuyo retraso secular, del orden de 60" por siglo, fue detectado entre otros por Spencer Jones en 1932.

1.8.- El sistema solar. Teoría planetaria.

El sistema solar está compuesto por cuerpos muy diversos. Algunos son grandes, otros de pequeño tamaño; unos son sólidos, otros están constituidos principalmente por gases. Dominando la totalidad del sistema se encuentra el Sol, que es una estrella enana normal, de tipo G2 de la clasificación espectral.

Acompañando al Sol se encuentra un conjunto de planetas, que por orden de proximidad al mismo, son: Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. Estos planetas pueden dividirse en dos grupos. El primer grupo comprende a Mercurio, Venus, la Tierra y Marte. La Tierra y Venus tienen casi el mismo tamaño, mientras que Marte posee un diámetro que es la mitad del de éstos. En el segundo grupo están los planetas gigantes, Júpiter, Urano y Neptuno. Plutón, el más alejado del Sol, tiene un tamaño comparable con el de Marte.

La mayor parte de los planetas tienen satélites. La Tierra tiene uno (la Luna), Marte tiene dos (Phobos y Deimos), Júpiter tiene catorce (Amaltea, Io, Europa, Ganimedes, Calixto, Himalia, Lysithea, Elara, Carme, Pasiphae, Sinope, Ananke, Leda y un último satélite descubierto en 1979), Saturno tiene nueve (Janus, Mimas, Encelado, Tetis, Dione, Rhea, Titan, Hiperion, Japet y Febe), Urano tiene cinco (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania y Oberon), Neptuno tiene dos (Triton y Nereo) y finalmente Plutón uno (Charon). Mercurio, Venus y Plutón parecen no tener ninguno. En algunos casos los satélites son muy pequeños, como Phobos y Deimos, en cambio hay satélites que tienen dimensiones planetarias: por ejemplo Titán, tiene un diámetro mayor que el de Mercurio.

En épocas muy antiguas se sabía que hay una diferencia básica entre un planeta y una estrella. Las denominadas estrellas fijas parecen mantener la misma posición relativa siglo tras siglo. Sin embargo, se mueven en el espacio a grandes velocidades y en distintas direcciones, pero están tan lejanas, que sus "movimientos propios" resultan muy pequeños. Por otra parte, los planetas cambian de posición de manera apreciable de noche a noche. Cinco de los planetas son visibles sin necesidad de usar telescopio. Venus, Júpiter y Marte son muy conspicuos. Mercurio no puede verse nunca sobre un fondo oscuro; parece acompañar al Sol, de modo que es visible sin ayuda óptica cuando está cerca del horizonte (al oeste), cuando se pone el Sol o está cerca del horizonte (al este) al amanecer.

Antiguamente se pensaba que no podían existir más de cinco planetas, que juntos con el Sol y la Luna, constituían un sistema de siete cuerpos en el sistema solar. El número siete tenía connotaciones mágicas, por lo que se creía que dicho sistema estaba completo. El descubrimiento de Urano por Herschel constituyó una sorpresa.

La mayoría de los autores que se dedicaron a la Teoría de la Luna también hicieron contribuciones a varias partes de la Teoría planetaria. Sin embargo, algunos de los avances más importantes en dicha teoría efectuados después de la muerte de Laplace fueron debidos a Leverrier (1811-1877), cuyos métodos para determinar la distancia del Sol a la Tierra fueron de gran importancia. Su primer trabajo importante, realizado en 1839, consistió en una discusión de la estabilidad del sistema formado por el Sol y los planetas Júpiter, Saturno y Urano. Más adelante trabajó de nuevo en la teoría del movimiento del Sol y de cada uno de los principales planetas, y construyó tablas para los mismos. En el caso de Mercurio, Leverrier no tuvo éxito al tratar de obtener una correspondencia entre la teoría y la observación. Las tablas lunares de Hansen y Newcomb, y las tablas planetarias de Leverrier, Newcomb y Hill, representaban los movimientos de esos cuerpos con mucha más exactitud que las correspondientes tablas basadas en los trabajos de Laplace, del mismo modo que estas últimas eran más precisas que las tablas confeccionadas por Euler, Clairaut y Halley. Por otra parte, Gylden (1841-1896) hizo investigaciones que tenían un carácter más abstracto, conectando la teoría planetaria con algunos de los más recientes avances de las matemáticas de su tiempo.

Un triunfo memorable de la mecánica celeste fué el descubrimiento de Neptuno. Un poco después del descubrimiento de Urano se comprobó que ya había sido observado, aunque no reconocido como planeta. Cuando se hicieron los primeros intentos para calcular su órbita se vió que era imposible conciliar las primeras observaciones con las últimas. Por otra parte, aparecieron discrepancias entre las posiciones observadas y las calculadas, que aumentaban de año en año. Se propusieron varias explicaciones y más de un astrónomo sugirió que las irregularidades podían ser debidas a la atracción de un planeta desconocido. Adams (1819-1892) efectuó el primer intento de deducir, a partir de las irregularidades en el movimiento de Urano, la posición de ese cuerpo hipotético. En octubre de 1845 había conseguido construir una órbita para el nuevo planeta, asignándole una posición que difería sólo dos grados de su posición real. Sin embargo, no se efectuó una búsqueda mediante el telescopio. Mientras tanto, Leverrier, independientemente, había conseguido determinar la órbita y la posición del cuerpo perturbador el día 31 de agosto de 1846. El día 23 de septiembre del mismo año, Galle, del observatorio de Berlín, recibió de Leverrier una petición de búsqueda del citado astro. Galle descubrió, muy cerca de la posición dada por Leverrier, lo que fué reconocido como un nuevo planeta, conocido ahora por el nombre de Neptuno.

I.9.- Planetas menores

El tema de la disposición y las distancias de los planetas con respecto al Sol había proporcionado una gran cantidad de material sobre el cual se debía reflexionar. En particular, el "hueco" entre Marte y Júpiter había llamado la atención de muchos observadores. Ya en 1596, Kepler había publicado en Tubinga una obra titulada "Misterium cosmographicum" en la cual está contenida la siguiente frase: "Inter Jovem et Martem interposui planetam". Kepler había llegado a la conclusión de que entre Marte y Júpiter se hallaba otro planeta.

Durante el siglo XVIII, un periodo en que el avance científico fué probablemente más rápido que en otros tiempos, se hicieron planes para estudiar la distribución de los planetas en el sistema solar. Este trabajo proporcionó apoyo a la idea de que debía existir un nuevo planeta. En el año 1751, Titius (1729-1796) presentó un detallado estudio de las relaciones entre las distancias de los planetas al Sol. Este autor consideraba que el espacio entre las órbitas de Marte y Júpiter estaba reservado a satélites, aún no descubiertos, de los citados planetas. Un contemporáneo de Titius, Bode (1747-1826), director del observatorio de Berlín, realizó en el mismo año una investigación similar. Bode no dudaba de que existían planetas no descubiertos entre Marte y Júpiter y también más allá de Saturno. En astronomía, las relaciones numéricas que proporcionan las distancias de los planetas al Sol se conocen con el nombre de ley de Titius-Bode o, más comúnmente, como ley de Bode. Esta ley no se aplica a los planetas más alejados, Neptuno y Plutón, este último descubierto en 1930 por Tombaugh en Estados Unidos.

Cualquiera que sea el significado real de la ley de Bode, es indudable que prestó un útil servicio a la astronomía. La publicación de la ley y las discusiones que tuvieron lugar dieron un impulso a la observación planetaria. El primer resultado lo obtuvo Herschel, que había emigrado de Hanover a Inglaterra. Su descubrimiento del planeta Urano le valió el título de astrónomo real y le proporcionó el suficiente dinero como para permitirle construir el mayor telescopio existente en su época. Con este telescopio gigante, Herschel hizo descubrimientos muy importantes. En particular hay que citar los descubrimientos de dos satélites de Urano y dos satélites de Saturno.

En el año 1796 tuvo lugar un congreso de astronomía en Gotha. En esta reunión el astrónomo Lalande (1732-1807) propuso a sus colegas que se dedicaran a localizar el planeta desconocido que debía de encontrarse entre Marte y Júpiter. En Sicilia existía un observatorio cuyo director era Piazzi. Durante la última década del siglo XVIII este astrónomo se dedicó a componer un catálogo de estrellas. Una anotación errónea en el catálogo de Wollaston hizo que Piazzi se pusiera a estudiar una cierta región de la bóveda celeste. En enero de 1801, Piazzi advirtió un diminuto punto luminoso en dicha región, que, a la noche siguiente, había

desaparecido. En cambio Piazzi observó una "estrella" similar cerca de donde había estado aquel punto luminoso. Al día siguiente, 3 de enero, Piazzi registró un nuevo cambio de posición. Claramente, aquel objeto no era una estrella. Piazzi estaba convencido de que se trataba de un cometa. Inmediatamente hizo saber su descubrimiento a un cierto número de colegas entre los que se encontraba Bode. Tan pronto como recibió la noticia, Bode estudió las posiciones en su mapa de estrellas, concluyendo que finalmente se había hallado el planeta situado entre Marte y Júpiter. Bode convenció a Piazzi de que lo que éste había descubierto era un "planeta menor" o asteroide, el cual recibió el nombre de Ceres. Varios astrónomos intentaron obtener la órbita de aquel astro a partir de las observaciones que Piazzi había efectuado a lo largo de seis meses. Sin embargo, no se disponía aún del método matemático para calcular la órbita hasta que Gauss pudo construirlo utilizando los escasos datos aportados por Piazzi. Utilizando los valores que había dado Gauss con su nuevo método, Olbers (1758-1840) redescubrió a Ceres con su propio telescopio a principios del año 1802. En marzo del mismo año, el propio Olbers descubrió un segundo asteroide al que le fué dado el nombre de Pallas. Este astrónomo de Bremen tenía la idea de que debían existir más asteroides entre Marte y Júpiter. No muy lejos de la mencionada ciudad había un importante observatorio privado perteneciente a Schöter (1745-1816), el cual, aparte del observatorio de Herschel en Inglaterra, era el mayor que existía por aquellas fechas. En septiembre de 1804, Harding, trabajando en el observatorio de Schöter, descubrió un tercer asteroide al que fué dado el nombre de Juno. Tres años más tarde, en marzo de 1807, Olbers detectó un cuarto planeta menor al que se le dió el nombre de Vesta. En una carta a Bode se demostraba que Olbers llevó a cabo su investigación de los asteroides de manera sistemática, aunque, pese a ello, no tuvo éxito. Más adelante se probó que era importante la teoría de Olbers acerca de la existencia de un gran número de asteroides.

En lo que se refiere a los problemas de la mecánica celeste en el campo de los planetas menores hay que mencionar algunas cuestiones especiales, entre las que se encuentran las perturbaciones a que están sujetas las órbitas de los asteroides. La evaluación estadística de los elementos orbitales señala categóricamente el hecho de que la principal influencia perturbadora es debida al planeta Júpiter, que es el de mayor masa del sistema solar. A partir de sus primeros cálculos, Gauss se había dado cuenta de que las órbitas de los planetoides estaban sujetas a interferencias considerables. Este fué el punto de partida de subsiguientes estudios teóricos sobre las perturbaciones de aquellos cuerpos celestes. Existe un pequeño grupo de asteroides cuya distancia media al Sol es la misma que la distancia a Júpiter. En consecuencia, este planeta da lugar a perturbaciones particularmente fuertes. A los planetas menores de este grupo se les conoce con el nombre de asteroides troyanos y el problema en conexión con su movimiento es de gran importancia.

I.10.- Estrellas dobles. La universalidad de la ley de Newton

Con respecto a la ley de gravitación de Newton se plantea la cuestión de si es realmente una ley universal. Las estrellas "fijas" son tan remotas que no es posible observar planetas que se muevan alrededor de ellas, en el supuesto de que tales planetas existan. Las únicas observaciones que arrojan algo de luz sobre este tema son las de los movimientos de las denominadas estrellas dobles o sistemas binarios de estrellas.

El estudio de las estrellas dobles se inició alrededor de 1780 con la investigación de estrellas próximas por parte de Herschel. Fueron suficientes unos pocos años para que quedara demostrado que en algunos casos las dos estrellas componentes del par giraban una alrededor de la otra y que, por tanto, estaban físicamente "conectadas". El estudio de los sistemas binarios fué proseguido con creciente interés por numerosos astrónomos.

El gran catálogo de estrellas dobles de Burnham contenía alrededor de 13.665 pares. Posteriormente el "New Catalogue of Double Stars within 120° of the North Pole", publicado en 1932 por Aitken contiene 17.180 pares. En la mayoría de los casos los movimientos son tan lentos que sólo en unos pocos pares se ha completado una revolución. En algunos pares los movimientos angulares observados han sido lo suficientemente grandes como para demostrar que sus estrellas se mueven en elipses cada una respecto de la otra, y de tal modo que se cumple la ley de las áreas de Kepler. Dado que las verdaderas órbitas de las estrellas no se observan directamente, sino que son observadas sus proyecciones sobre el plano tangente a la esfera celeste, queda determinado lo que se conoce como "órbita aparente". Por esto, la posición de la estrella primaria no suele ocupar el foco de la elipse aparente que describe la estrella secundaria. A partir de las observaciones se deduce que la resultante de las fuerzas que actúan sobre una estrella del par siempre está dirigida hacia la otra. La ley de variación de la intensidad de la fuerza depende de la posición que ocupa el centro de fuerza en la elipse.

Es natural buscar un cierto tipo de clasificación que divida el conjunto de los sistemas binarios de estrellas en subclases más homogéneas. Una primera clasificación puede venir dada por los métodos de observación utilizados. Muchos pares de estrellas pueden ser reconocidas visualmente como sistemas dobles y se denominan "sistemas binarios visuales". Otro tipo de sistemas dobles de estrellas son los que pueden descubrirse espectroscópicamente a partir de las variaciones de sus velocidades radiales. Tales sistemas se denominan "sistemas binarios espectroscópicos". Finalmente, los planos orbitales de algunos de estos pares están orientados de tal forma que cada una de las componentes eclipsa a la otra al ser vistas desde la Tierra, dando lugar a los llamados "sistemas eclipsantes".

El problema de hallar las expresiones generales de las posibles leyes de fuerza que rigen en los sistemas binarios de estrellas fue propuesto por Bertrand e inmediatamente resuelto por Darboux. El método propuesto por Halphen está contenido en la "Mécanique analytique" de Tisserand y también en el libro "Mécanique rationelle" de Apell.

I.11.- El objeto de la dinámica estelar

La dinámica estelar es una rama de la mecánica celeste y de la astronomía estelar, que tiene por objeto estudiar la estructura, movimientos y evolución de los sistemas de estrellas. La astronomía estelar suele dividirse en tres partes relacionadas entre sí: la estadística estelar, la cinemática estelar y la dinámica estelar.

La estadística estelar trata del recuento de estrellas, deduciendo, a partir de este hecho, la estructura espacial de los sistemas estelares. Una característica de la estadística estelar es que no tiene en cuenta los movimientos estelares, sino que considera cada sistema de estrellas en un instante de tiempo particular. Así pues, proporciona imágenes instantáneas de tales sistemas. Por medio de tal estudio puede llevarse a cabo la clasificación de los distintos sistemas estelares.

Existen sistemas fundamentales que contienen un gran conjunto de estrellas y determinan lo que se conoce con el nombre de galaxias, que son sistemas parecidos a nuestra propia Galaxia o Vía Láctea, de la que el Sol es uno de sus innumerables miembros. De este modo, el estudio de la estructura y evolución de las galaxias es el problema fundamental de la astronomía estelar. Sin embargo, la astronomía estelar se ocupa también del análisis de sistemas más pequeños, tales como los cúmulos globulares y los cúmulos galácticos. Los cúmulos globulares son sistemas muy densos, que contienen cientos de miles de estrellas, y tienen una forma extremadamente regular, esférica o ligeramente elipsoidal. Los cúmulos galácticos, llamados también cúmulos abiertos, incluyen sólo de decenas a miles de estrellas, y se unen para dar lugar a las asociaciones de estrellas. Dichas asociaciones difieren de los cúmulos galácticos en que la densidad relativa o parcial de estrellas dentro de ellas es extremadamente pequeña.

La cinemática estelar estudia los movimientos que se producen dentro de los sistemas estelares, sin tener en cuenta las fuerzas que los originan. Los movimientos estudiados no son los de las estrellas individuales, sino los de grandes grupos de estrellas. La característica más destacable de tales movimientos en los sistemas estelares es la rotación.

La dinámica estelar describe los movimientos de las estrellas como consecuencia de las fuerzas que los causan. En algunos casos se consideran las leyes generales que hacen referencia

a los parámetros de las órbitas de estrellas individuales. Sin embargo, por regla general, la dinámica estelar trata los movimientos de grupos de estrellas en relación con la distribución de masas del sistema estelar, debido a que el cambio gravitatorio en un sistema estelar está determinado por las mismas estrellas cuyo movimiento se considera.

El problema fundamental de la dinámica estelar consiste en deducir las leyes de la evolución de los sistemas estelares. El desarrollo evolutivo de los sistemas de estrellas puede llevar consigo un cambio en la forma del sistema, generalmente producido por una redistribución de la masa. De ahí que todos los procesos evolutivos son una clase de movimiento no estable de los sistemas estelares. Sin embargo, aún no es posible resolver ni formular en términos específicos los problemas de movimiento no estable. Por tanto, los estudiosos que se dedican a la dinámica estelar se ven obligados a tratar de obtener la solución de problemas de movimiento estable. Este es un paso necesario hacia el estudio de movimientos no estables, debido a que es improbable que el desarrollo de los sistemas estelares consista totalmente en una sucesión de cambios violentos. En el denominado estado "casi estable", el sistema evoluciona tan lentamente que en cada instante toma una forma correspondiente a un estado de equilibrio dinámico. Los equilibrios "casi estables" son una especie de "estaciones" a lo largo de la línea de evolución de los sistemas estelares. El principal problema práctico de la astronomía estelar, que condujo al desarrollo de la dinámica estelar, consiste en definir un sistema de ejes fijo en el espacio, en el cual puedan determinarse las coordenadas de las estrellas y respecto al cual puedan referirse todos los movimientos observados. Sin embargo, este problema representa sólo la posición auxiliar que la astronomía estelar ocupa con respecto a la astronomía. La dinámica estelar, como otras ramas modernas de la astronomía, trata también de las propiedades de la materia en condiciones extremas, que son inaccesibles a los laboratorios terrestres. Desde este punto de vista, la dinámica estelar ocupa un lugar único y especial entre las ciencias de la naturaleza: es la mecánica del movimiento de partículas en medios altamente enrarecidos. Por ello, los métodos de la hidrodinámica se han extendido para estudiar tales medios.

I.12.- Un breve resumen del desarrollo histórico de la dinámica estelar

La dinámica estelar, tal como la totalidad de la astronomía estelar, es una rama relativamente reciente de la astronomía, originándose cuando surgió la necesidad de un estudio detallado de las estrellas. Hasta el siglo XVIII la astronomía consideraba las estrellas sólo como puntos de referencia fijos en el cielo y con fines astrométricos. A principios de dicho siglo se hicieron de trascendental importancia los problemas de determinación de longitudes y los de elaborar catálogos de estrellas que fueran suficientemente precisos. En 1718, Halley descubrió los movimientos propios de determinadas estrellas. Pronto quedó claro que las estrellas ya no

podían considerarse fijas en la esfera celeste. Para determinar los movimientos propios de más estrellas fue necesario definir un sistema fijo de coordenadas astronómicas, que estaba basado en las estrellas consideradas como un todo. Sin embargo, para hacer esto, había que investigar los movimientos de las estrellas, dando correcciones sistemáticas de sus posiciones, así como investigar también su distribución espacial. Surgió así el problema de estudiar la estructura de la Galaxia y los movimientos que tenían lugar en su interior.

En 1770, Herschel empezó a contar las estrellas de forma sistemática, con el fin de determinar la forma y el tamaño de la Galaxia. También hizo el primer estudio estadístico de los movimientos propios (basado sólo en trece estrellas) y como resultado determinó un movimiento sistemático de las estrellas que reflejaba el movimiento del Sol entre ellas. En 1839 fué fundado el observatorio de Pulkovo. Su fundador y primer director, Struve, cuidó de que el trabajo del observatorio se dedicara primordialmente a la astronomía estelar. Struve entendía por astronomía estelar, en primer término, hacer observaciones muy precisas, necesarias en geodesia y cartografía, y en segundo lugar, que tales observaciones fuesen básicas para estudiar la estructura y el movimiento de sistemas estelares. Recíprocamente, el exámen de las posiciones y movimientos de las estrellas eran necesarios para definir un sistema de coordenadas fijo en el espacio. Las constantes fundamentales de precesión, nutación, etc., y los sistemas de referencia de todos los catálogos astronómicos se determinan en relación a tal sistema de coordenadas.

La dinámica estelar propiamente dicha se originó en los primeros años del presente siglo. En 1904, Kapteyn descubrió las "corrientes de estrellas", y mostró que los vectores velocidad de las estrellas no están isotrópicamente distribuidos como previamente se pensaba. En 1907, Schwarzschild demostró que las corrientes de Kapteyn eran consecuencia de una determinada ley de distribución.

En 1917 se publicaron varios trabajos debidos a Charlier, Eddington y Jeans. Hacia 1920, el principal fenómeno que había de ser explicado por la dinámica estelar era la ley de velocidad residual de distribución de las estrellas, debida a Schwarzschild. Los intentos de Charlier, para dar una justificación por analogía con la ley de Maxwell en la teoría cinética de los gases, fuéron infructuosos.

Un suceso importante dentro del campo de la dinámica estelar se produjo cuando Strömberg descubrió en 1922 el fenómeno de las velocidades estelares asimétricas. Esto probaba que la población de estrellas en la Galaxia no es homogénea. En 1926, Lindblad y Oort descubrieron la rotación de la Galaxia. El primero de ellos era un pionero del estudio de la estructura espiral de las galaxias y desarrolló una teoría sobre la base de muchas observaciones.

Dicha teoría fué confirmada enteramente por las formas que se observaban en varios tipos de nebulosas espirales. En la década de los años veinte fue realizado el primer trabajo sobre el movimiento del Sol por Ferenkov, quién supervisó también el inicio de un conjunto de estudios para determinar la constante de precesión.

Más recientemente se han llevado a cabo investigaciones sobre la interacción entre estrellas y materia estelar. También se han investigado el número de integrales independientes del movimiento en diferentes clases de sistemas estelares, y también se ha realizado un trabajo sobre el potencial gravitatorio galáctico.

I.13.- Conclusión

La astronomía es la ciencia más antigua y, en cierto sentido, origen de todas las demás ciencias. Los relativamente simples y regularmente repetitivos fenómenos celestes enseñaron a los hombres de los tiempos de la Grecia clásica que la naturaleza es sistemática y ordenada. La importancia de esa lección puede inferirse del hecho de que es el fundamento en que se basan todas las ciencias.

Durante mucho tiempo el progreso fué extremadamente lento. Fueron necesarias muchas observaciones y esbozos de teorías que explicaran los fenómenos antes de que Kepler dedujese las leyes que son una primera aproximación de la descripción de la forma en que se mueven los planetas. El trabajo de Kepler cerró la época preliminar de más de dos mil años y los brillantes descubrimientos de Newton inauguraron otra. La invención del cálculo por parte de Newton y Leibniz dotó por primera vez a las matemáticas de las herramientas que eran del todo apropiadas para enfrentarse con problemas tales como los efectos perturbadores del Sol en el movimiento de la Luna o las perturbaciones mútuas de los planetas.

Sin el concurso del telescopio hubiera sido imposible efectuar precisas observaciones que proporcionaron los datos numéricos para las teorías matemáticas y mediante las cuales dichas teorías fueron puestas a prueba. La historia de la mecánica celeste durante el siglo XVIII es una continúa serie de triunfos. Los fundamentos analíticos puestos por Clairaut, D'Alembert y Euler, constituyeron la base de los espléndidos logros de Lagrange y Laplace. Sus sucesores en el siglo XIX se abrieron paso por medio de las teorías de los movimientos de la Luna y de los planetas con mayores órdenes de aproximación, y las compararon con más y mejores observaciones. En relación con esto pueden citarse los nombres de Leverrier, Delaunay, Hansen y Newcomb. A principios del siglo XIX se inauguró una nueva época. Dicho periodo se distinguió por la aparición de nuevos puntos de vista, nuevos métodos, potentes y matemáticamente rigurosos. Dichos métodos sobrepasaron todos los que habían sido usados

con anterioridad. Este nuevo periodo fué inaugurado por Hill con su obra "Researches on lunar theory", y las más brillantes contribuciones fueron debidas a Poincaré.

II. DESARROLLO DE LA ASTRONOMIA Y LA MECANICA CELESTE EN LOS SIGLOS XVII Y VIII.

II.1.- La mecánica celeste después de Newton

Newton había creado una nueva rama de la astronomía, la mecánica celeste, y legó a sus sucesores el problema de deducir completamente los movimientos de los cuerpos celestes a partir de sus mútuas atracciones gravitatorias. En la propia Inglaterra, el sistema newtoniano se difundió muy lentamente. El auditorio de Newton en Cambridge era muy poco numeroso debido a la gran dificultad de sus lecciones. La base de la enseñanza de la mecánica continuaba siendo el "Traité de physique" de Rohault, traducido al latín y luego al inglés.

Los matemáticos y astrónomos del siglo XVII no hicieron aportaciones esenciales que desarrollaran la teoría de la gravitación, por lo que ésta permaneció en el estado en que la dejó Newton. Una excepción la constituyó el trabajo de Colin MacLaurin (1698-1746), que amplió la teoría de la figura de la Tierra. Los verdaderos sucesores de Newton fueron un grupo de matemáticos continentales cuyo trabajo empezó unos cincuenta años después de la publicación de los "Principia". El fracaso de los matemáticos ingleses en desarrollar los descubrimientos de Newton fué debido en parte a la forma en que éste los presentó. Los "Principia" están escritos casi por completo en lenguaje geométrico; en tanto que casi todo el progreso subsiguiente en mecánica celeste se hizo por medio del análisis matemático, cuyas partes más importantes habían sido creación de Leibniz y del propio Newton. Este último, en algunas ocasiones, utilizaba el análisis para resolver un problema astronómico, pero su costumbre era traducir los resultados a un lenguaje geométrico antes de su publicación. Al hacerlo así, Newton debía estar influenciado probablemente por una marcada preferencia personal por la elegancia de las demostraciones geométricas y también porque era reacio a incrementar las numerosas dificultades contenidas en los "Principia", cosa que habría sucedido si hubiera utilizado métodos matemáticos menos familiares.

Después de la muerte de Newton se hicieron importantes progresos en ramas de la Astronomía, de manera que gran parte del trabajo de observación en el siglo XVIII se debió a astrónomos ingleses, en tanto que el observatorio de París hizo muy pocas aportaciones de importancia durante casi un siglo. Por el contrario, los principales avances en Mecánica Celeste fueron realizados por los franceses.

II.2.- Flamsteed. Halley

John Flamsteed (1646-1720), nacido en Denby y contemporáneo de Newton, fué el primero de un grupo de grandes astrónomos ingleses que se dedicaron a la observación. En 1675, Flamsteed fué designado miembro de un comité que debía informar al gobierno acerca de la utilidad de varios métodos, que habían sido diseñados con el fin de determinar longitudes en el mar. Los informes de ese comité fueron desfavorables, lo cual fue comunicado al rey Carlos II, al que se le hizo notar también la necesidad de fundar un observatorio nacional, para que con sus trabajos se pudieran obtener nuevos catálogos estelares y tablas lunares, que condujeran a la elaboración de un método satisfactorio para resolver el problema de las longitudes, que había adquirido gran importancia práctica debido al incremento de la flota inglesa. El rey dió su consentimiento y Flamsteed fué nombrado astrónomo real.

La autorización para la construcción del observatorio, dirigida por el arquitecto Christopher Wren (1632-1723), fue otorgada en junio de 1675, y en julio de 1676 Flamsteed instaló allí su residencia y empezó a trabajar, cinco años después de que Cassini (1625-1712) hubiera iniciado sus actividades en el observatorio de París. El nuevo observatorio contó inicialmente con instrumentos imperfectos, reunidos con la ayuda de mecenas y con la inversión del propio dinero de Flamsteed. Este permaneció durante treita y tres años en Greenwich, y en este intervalo de tiempo llevó a cabo un inmenso número de observaciones.

En 1675, Picard había sugerido que el uso del reloj podría ser de gran utilidad para determinar la ascensión recta, una de las dos coordenadas ecuatoriales necesarias para fijar la posición de los astros. Flamsteed fué el primero en utilizar este método sistemáticamente. No sólo efectuaba y registraba las observaciones, sino que llevaba a cabo el tedioso proceso de reducción de posiciones, por medio del cual los resultados de la observación se presentaban en forma apropiada para su uso por otros astrónomos.

En 1715, Flamsteed preparó la edición de su "Historia coelestis britannica", que contenía una inmensa serie de observaciones que habían sido efectuadas, antes de iniciar su trabajo en Greenwich, y durante el tiempo que dirigió este observatorio. La parte más importante de esta obra era un catálogo de 2935 estrellas. Dicho catálogo no sólo era unas tres veces más extenso que el de Tycho Brahe, sino que además era más preciso. Se ha estimado que los errores que cometió Flamsteed en la determinación de las posiciones de las estrellas era de unos 10", mientras que las observaciones de Tycho Brahe presentaban un error medio de 1'. La obra de Flamsteed contenía también observaciones de planetas, de manchas solares y de los satélites de Júpiter. Además incluía una nota histórica, en donde describía los instrumentos empleados por Tycho Brahe y por él mismo, así como los catálogos de estrellas fijas de Tolomeo. La "Historia

coelestis britannica" constaba de tres volúmenes, el último de los cuales fué editado en 1725, cinco años después de la muerte de Flamsteed.

Edmund Halley (1656-1742) sustituyó a Flamsteed en el puesto de astrónomo real. Era hijo de un rico comerciante de Londres y estudió matemáticas y astronomía desde temprana edad. Cuando contaba veinte años publicó su primer trabajo, que era un estudio sobre órbitas de los planetas.

En 1676, Halley tomó parte en una expedición a la isla de Santa Elena, con el fin de efectuar observaciones de estrellas cercanas al polo sur celeste. En 1678, después de su regreso a Inglaterra, publicó su "Catalogus stellarum australium", que contenía las posiciones de 341 estrellas del hemisferio austral. Halley hizo numerosas contribuciones a la astronomía. Sin embargo, su trabajo sobre los cometas es el más conocido y, probablemente, el más importante.

Halley observó los cometas que hicieron su aparición en 1680 y 1682, y más adelante se valió de los principios de Newton para calcular sus órbitas, así como las de otros cuyas apariciones habían sido registradas con anterioridad. En 1705 publicó un libro titulado "Synopsis astronomiae cometicae". En esta obra Halley exponía su teoría sobre el movimiento de estos cuerpos y presentaba los cálculos de 25 órbitas de estos astros.

En 1684, Halley entró en contacto con Newton y dedicó mucho tiempo a ayudar a éste en la composición de los "Principia", aportando gran parte del material de las correspondientes secciones de esta obra que trataban de los cometas.

Los cometas de 1531, 1607 y 1682 describían órbitas semejantes, a la vez que los intervalos de tiempo entre sus respectivas apariciones eran aproximadamente iguales. Estos hechos sorprendieron a Halley, quien pronto conjeturó que los tres astros eran en realidad diferentes apariciones de un mismo cometa. Halley aseguró que tal cuerpo se movía alrededor del Sol describiendo una elipse muy alargada, con un periodo comprendido entre los 75 y 76 años. También explicó que las perturbaciones del cometa, debidas a los planetas, eran la causa de la diferencia entre los 76 años que separaban las apariciones del mismo en 1531 y en 1607 y el periodo ligeramente más corto entre las apariciones de 1607 y 1682. Por último, Halley predijo que en 1758 se produciría una nueva aparición del cometa, al tiempo que anunció que esta fecha podría verse alterada por los efectos perturbadores debidos a los planetas cercanos a éste a lo largo de su órbita. La aparición del cometa se produjo en una fecha cercana a la prevista. Con esto se iniciaba una nueva época en el conocimiento de estos cuerpos.

Para los años 1761 y 1769 se esperaba que se produjeran tránsitos de Venus por delante del Sol. Halley manifestó que en estos fenómenos podía basarse un método adecuado para determinar la distancia de la Tierra al sol, hecho que ya había sido sugerido por Kepler. Halley concibió esta idea después de haber observado, en 1677, el tránsito de Mercurio por delante del disco solar. En tres memorias que presentó a la Royal Society expuso el método y explicó sus ventajas. Asimismo indicó con detalle los lugares y los medios adecuados para observar el tránsito de Venus que iba a producirse en 1761, señalando también que el resultado esperado podía deducirse al comparar las duraciones del tránsito, observado desde diferentes puntos de la Tierra.

En 1718, Halley anunció que para las estrellas Sirio, Procyon y Arturo habían variado las longitudes y latitudes eclípticas desde el tiempo de Tolomeo. Además, Sirio había cambiado su posición desde la época de Tycho Brahe. Estos cambios no pudieron ser atribuidos satisfactoriamente a algún movimiento de la eclíptica, y Halley concluyó que las estrellas en cuestión habían cambiado realmente su posición con respecto a las restantes. Por fin dedujo que esas estrellas poseían movimientos propios y supuso que era posible que pudieran detectarse movimientos similares de las restantes estrellas.

Halley se dedicó también al problema de perfeccionar las tablas de la Luna y las de los planetas. Las primeras fueron mejoradas a partir de las numerosas observaciones que había efectuado desde 1683.

En 1676, Halley detectó errores en las tablas existentes de Júpiter y Saturno, observando ciertas irregularidades en el movimiento de estos dos astros, perturbaciones que fueron atribuidas a la acción de otro planeta. A partir de la observación, Halley logró estimar con bastante precisión aquellas irregularidades, y al tenerlas en cuenta consiguió mejorar las tablas. Sin embargo, ni las tablas de la Luna, ni las de los planetas, quedaron completadas a gusto de Halley. Fueron impresas en 1719, un año antes de su designación como astrónomo real, sustituyendo a Flamsteed, pero no se publicaron hasta el año 1752.

II.3.- Bradley

El tercer astrónomo real, James Bradley (1693-1762), es conocido por sus dos grandes descubrimientos: la aberración de la luz y la nutación del eje de la Tierra. En el año 1718 Bradley era lo suficientemente conocido en el mundo científico, como para recibir el honor de ser elegido miembro de la Royal Society. Habían transcurrido tres años desde que registrara su primera observación. En 1721 fué nombrado profesor de astronomía en Oxford.

El trabajo del observatorio había sido descuidado durante los últimos años de la vida de Halley. La primera ocupación de Bradley consistió en efectuar las reparaciones necesarias en los instrumentos. Aunque el equipamiento del observatorio con instrumentos eficientes era un trabajo de años, Bradley consiguió que los instrumentos más importantes estuvieran en buen uso, pocos meses después de su designación, de forma que en lo sucesivo se hicieron observaciones sistemáticamente.

El descubrimiento de la aberración resultó como consecuencia de un intento de detectar el desplazamiento paraláctico debido al movimiento anual de la Tierra. Desde el tiempo de Copérnico se había prestado atención a la importancia del problema, de modo que éste había ejercido una fascinación sobre los astrónomos que se dedicaban a la observación, la mayoría de los cuales habían tratado de detectar el movimiento en cuestión. Todos los intentos previos habían fracasado, y Bradley, por su parte, no tuvo más éxito que sus predecesores, aunque pudo deducir de sus observaciones dos resultados de gran interés y de carácter totalmente inesperado.

El problema que Bradley se había planteado consistía en examinar si para una estrella, en el curso de un año, podía determinarse un ligero movimiento relativo a otras estrellas o relativo a puntos fijos de la esfera celeste. Si tal movimiento existía, debía ser muy pequeño. Bradley situó el telescopio de tal manera que una estrella particular en la constelación del Dragón fuese visible con el aparato en el momento en que cruzara el meridiano. Si la estrella en cuestión iba a experimentar algún movimiento que alterara su distancia al polo, debería existir una alteración correspondiente en la posición en que debería ser observada en el campo visual del telescopio. Las primeras observaciones tuvieron lugar en Kew, en diciembre de 1725. Bradley notó un ligero desplazamiento de la posición de la estrella hacia el sur. Este movimiento fué comprobado en enero de 1726, y en marzo de dicho año alcanzó su máximo desplazamiento. A partir de ahí empezó a moverse hacia el norte y en septiembre, una vez más, alteró su dirección del movimiento. A finales de 1726 había completado un ciclo para volver a la posición original. Quedaba claro que la estrella observada presentaba un movimiento anual. Sin embargo, para Bradley era evidente que dicho movimiento no era el paraláctico. Más adelante, en 1728, Bradley dió una explicación del fenómeno, introduciendo el concepto de aberración de la luz, el cual era consecuencia del movimiento anual de la Tierra sobre su órbita. Después de haber efectuado una serie de comprobaciones, el resultado fué publicado en 1729 por la Royal Society.

Algunas observaciones de Bradley pusieron de manifiesto ciertas alteraciones en las posiciones de distintas estrellas, que podían explicarse suponiendo dos cosas: primero, que la distancia angular del polo celeste a la eclíptica fluctuaba; segundo, que el movimiento del polo

debido a la precesión no era uniforme, sino que variaba su velocidad. Bradley demostró que el movimiento del polo resultaba ser doble como consecuencia de la combinación de la precesión y la nutación. Así, el polo celeste describe alrededor del polo de la eclíptica un "anillo ondulado".

Aunque Bradley era consciente de que la nutación podía producirse por acción de la Luna, dejó la investigación teórica en manos de matemáticos más capacitados. En el año 1749, D'Alembert publicó un tratado, cuyo título era "Recherches sur la precession des equinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre". Mediante un riguroso procedimiento analítico, en dicha obra se demostraba que, no sólo la precesión, sino también el movimiento de nutación eran debidos a la atracción de la Luna sobre la protuberancia ecuatorial de la Tierra. D'Alembert confirmaba así la explicación que había dado Newton de la precesión .

Aunque la aberración y la nutación fueron dos descubrimientos que hizo Bradley, éste llevó a cabo otras investigaciones. Uno de los trabajos importantes está dedicado a los satélites de Júpiter. Bradley observó durante algunos años los eclipses de dichos satélites, encontrando discrepancias entre las observaciones y las tablas, detectando varias peculiaridades en sus movimientos. Como consecuencia de esto construyó unas tablas perfeccionadas que fueron incorporadas a las tablas lunares y planetarias, publicadas por Halley en 1719.

El principal trabajo efectuado por Bradley en el observatorio de Greenwich consistió en efectuar observaciones de las estrellas fijas, en el instante de su paso por el meridiano. Las observaciones más importantes efectuadas entre los años 1750 y 1762, que ascendían a 60.000, fueron publicadas después de la muerte de Bradley en dos grandes volúmenes que aparecieron en 1798 y 1805. Una selección de dichas observaciones fué utilizada como base de un pequeño catálogo de estrellas publicado en el Nautical Almanac de 1773.

II.4.- El problema de Newton . Difusión de sus teorías.

El sistema solar, tal como era conocido a principios del siglo XVIII, contenía dieciocho miembros sin contar la Tierra: el Sol, seis planetas, diez satélites (uno perteneciente a la Tierra, cuatro pertenecientes a Júpiter y cinco pertenecientes a Saturno) y el anillo de Saturno. En cuanto a los cometas, había razones para creer que al menos uno de ellos cruzaba con regularidad la región del espacio ocupada por dicho sistema. Los restantes cometas apenas eran considerados miembros del mismo. Por otra parte, se habían observado miles de estrellas y se habían determinado sus posiciones en la esfera celeste. Además se sabía que estaban a grandes distancias del sistema solar y se consideraba que su influencia sobre éste era insensible.

Las distancias mútuas entre los miembros del sistema solar habían sido estimadas de forma aproximada, al tiempo que se conocían medianamente bien los movimientos de dichos cuerpos. Además, exceptuando la anomalía que representaba el anillo de Saturno, la observación había permitido saber que los cuerpos del sistema tenían forma casi esférica.

Uno de los hechos que había probado Newton era que esos cuerpos se atraían mutuamente de acuerdo con la ley de gravitación, y que no había razón para que ejercieran entre sí otra influencia que afectara a su movimiento. El problema planteado por Newton era el siguiente: dados esos dieciocho cuerpos y sus posiciones y velocidades en cualquier instante dado, deducir a partir de su mútua atracción, y mediante un proceso de cálculo matemático, sus posiciones y velocidades en cualquier otro instante, y mostrar que los resultados obtenidos concordaban con los que resultaban de la observación. Este problema, caso particular del problema de n cuerpos, podía reducirse a otros más simples. Newton había demostrado que un cuerpo esférico atrae a otros cuerpos como si toda la masa de aquél estuviera concentrada en su centro, comportándose así como una masa puntual. Los planetas podían considerarse como tales masas puntuales, pero los efectos debidos a su desviación de la forma esférica debían tratarse separadamente, por ejemplo al estudiar la acción de un planeta no esférico sobre sus satélites. Por otra parte, Newton supuso en primera aproximación que el sistema solar estaba constituido de tal manera que el movimiento de cada uno de sus cuerpos podía estudiarse como si estuviera determinado por otro único cuerpo. Así, por ejemplo, resultaba que un planeta se movía como si no existieran más cuerpos que el Sol, y el movimiento de la Luna relativo a la Tierra era considerado el mismo que el que resultaría al suponer que no existían los restantes miembros del sistema solar. El problema de dos masas puntuales que se atraen entre sí según la ley de gravitación (problema de los dos cuerpos), fue resuelto completamente por Newton, quién, además, demostró que la solución de dicho problema conducía a las dos primeras leyes de Kepler. Por tanto se podía considerar que cada astro del sistema solar se movía describiendo una elipse alrededor de algún otro cuerpo. Sin embargo, esa órbita estaba ligeramente perturbada por la acción de los restantes miembros del sistema. Utilizando otra aproximación, resultaba que el efecto de un cierto número de causas perturbadoras actuando conjuntamente era casi el mismo que el que resulta de sumar sus efectos por separado. De ahí que pudiera pensarse, sin incurrir en un gran error, que cada cuerpo en órbita alrededor de otro fuera perturbado por un único cuerpo. De este modo, el núcleo del problema de Newton podía considerarse como un caso especial del llamado problema de tres cuerpos.

En su forma general, el problema de tres cuerpos trasciende enteramente no sólo la potencia de los métodos matemáticos del siglo XVIII, sino también la de los métodos ideados desde entonces, a pesar de que se han resuelto casos especiales que no se dan en la naturaleza. En el caso del sistema solar el problema de tres cuerpos se simplifica. Esto es debido al hecho

de que uno de los tres cuerpos puede ser siempre considerado como ejerciendo una pequeña influencia en el movimiento relativo de los otros dos, y también, que las órbitas de los planetas y los satélites difieren poco de la forma circular y que los planos de sus órbitas no presentan inclinaciones relativas muy grandes. El problema así simplificado admite soluciones de considerable exactitud, obtenidas por métodos de aproximación. En el caso del sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna, el hecho característico es la gran distancia del Sol a los otros dos astros, siendo aquél el cuerpo perturbador. En el caso en que el sistema de tres cuerpos esté formado por el Sol y dos planetas, el factor de simplificación más importante es la enorme masa del Sol comparada con la del planeta perturbador. De ahí que los métodos de resolución difieren para los dos casos citados, apareciendo así dos ramas de un mismo problema: la teoría de la Luna y la teoría planetaria.

Newton hizo un cierto número de aportaciones encaminadas a la resolución del problema que había planteado. Sin embargo, no ocurrió lo mismo con sus sucesores ingleses. Al principio, en el Continente, el progreso fue muy lento. Los "Principia" fueron estudiados y admirados por los principales matemáticos de aquel tiempo, especialmente franceses, pero los principios contenidos en dicha obra no fueron aceptados mientras imperó el cartesianismo. Se produjo un progreso en la aceptación de las ideas newtonianas cuando se publicó en 1720 una memoria de la Academie des Sciences de Paris, escrita por el caballero de Louville (1671-1732), basada en las ideas de Newton, si bien, en 1730, la Academia adjudicó un premio a Johann Bernoulli (1667-1748) por un ensayo sobre los movimientos planetarios, todavía escrito siguiendo los principios cartesianos. En 1732, Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) publicó un tratado sobre la figura de la Tierra basado en la teoría newtoniana, y en 1738 apareció una obra de Voltaire titulada "Elements de la Philosophie de Newton". Se trataba de una obra que tuvo gran importancia para la popularización de las ideas de Newton en forma legible. El desarrollo de la mecánica celeste se produjo a partir de 1740 (fecha en que la Academia ofreció un premio al último ensayo cartesiano). Durante el siglo XIX los avances fueron debidos, por completo, a cinco matemáticos continentales: Euler, Clairaut, D'Alembert, Lagrange y Laplace. En 1842, el astrónomo Arago hacía notar que estos matemáticos "se distribuyeron entre ellos el mundo que había descubierto Newton", interpretándolo en todas las direcciones, internándose en terrenos considerados como impenetrables, llamando la atención sobre innumerables aspectos de dominios no revelados por la observación y poniéndolos de modo definitivo (¡y en esto reside su inmortal gloria!) bajo el dominio de un único principio.

II.5.- Euler

Leonhard Euler (1707-1783) nació en Basilea, Suiza. En el año 1720 ingresó en la universidad de esa ciudad donde cursó los estudios correspondientes a la Facultad de teología.

De manera simultánea siguió los cursos de matemáticas impartidos por Johann Bernoulli. En 1727 partió hacia San Petersburgo. En la Academia Imperial de dicha ciudad obtuvo un puesto de adjunto de la Sección de Matemáticas y en 1731 fue nombrado profesor de física, pasando a ser miembro de la Academia. En 1783 ocupó la plaza de profesor de matemáticas sucediendo a Daniel Bernoulli (1777-1782).

Euler ha sido el matemático más prolífico y versátil de todos los tiempos. Cuando inició su carrera matemática en 1727, la geometría analítica, hecha pública en 1637, llevaba en uso noventa años, el cálculo alrededor de cincuenta y la ley de gravitación universal había sido presentada cuarenta años antes, en 1687. Difícilmente puede hallarse una rama del análisis a la que Euler no hubiera contribuido enormemente. Por otra parte, su extraordinario poder para inventar y aplicar métodos de cálculo fue empleado con gran éxito en diversas ramas de las matemáticas aplicadas, resolviendo problemas de dinámica, óptica, movimiento de fluidos y astronomía.

En el año 1736, Euler publicó en dos volúmenes la obra "*Mechanica sive Motus scientia Analytice exposita*" ("*Mecánica o ciencia del movimiento expuesta analíticamente*"), que constituye el primer tratado en que la mecánica del punto material se concibe como una ciencia racional, conteniendo una exposición sistemática de los descubrimientos realizados por otros autores y por él mismo, y aplicando por primera vez a esta ciencia el cálculo infinitesimal de Leibniz y Newton. Puede decirse que es entonces cuando comienza la era moderna para la mecánica.

La primera contribución de Euler a la mecánica celeste fue un ensayo sobre las mareas. Con este trabajo obtuvo una parte del premio ofrecido por la Academia de San Petersburgo en 1740. Los otros autores premiados fueron Daniel Bernoulli y MacLaurin (1698-1746), ambos newtonianos.

En el año 1741, Euler se trasladó a Berlín a instancias de Federico II el Grande. La Academia de Ciencias de esa ciudad había sido creada en 1700 bajo los auspicios de Leibniz. En 1746, Euler fue nombrado director de la Sección de Matemáticas al mismo tiempo que Maupertuis lo era de la propia Academia. Euler permaneció en Berlín hasta 1766. A esos años de estancia en dicha ciudad pertenecen una memoria titulada "*Reflections sur l'espace et le temps*" y las "*Lettres a une princesse d'Alemagne sur divers sujets de la physique et de la philosophie*", dirigidas a la sobrina del rey de Prusia. Estas cartas fueron redactadas entre 1760-1762, y publicadas por la Academia de Ciencias de San Petersburgo, ciudad a la que Euler regresó en 1766. En estas cartas se advierte la intención de poner a la joven en disposición de participar en cualquier discusión sobre los principales temas debatidos en aquel momento, tanto

de ciencia como de filosofía. De ahí la variedad de cuestiones que aborda, con un tono sencillo e introductorio. Junto a la exposición de las cuestiones más elementales, Euler aborda y da su personal punto de vista sobre los problemas que suscitan los nuevos planteamientos físicos o filosóficos. Las cartas se refieren a temas de acústica, óptica, mecánica, electricidad, geodesia, astronomía y mecánica celeste. En esa época, Euler publicó otro libro titulado "Theoria motuum planetarum et cometarum", que hasta entrado el siglo XIX fué considerado como una obra decisiva en la que se basaron muchos cálculos astronómicos. En 1765, Euler publicó su "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum" ("Teoría del movimiento de los cuerpos sólidos o rígidos"), donde introdujo el concepto de momento de inercia y desarrolló las ecuaciones diferenciales clásicas que rigen el movimiento de un sólido alrededor de un punto fijo. Sin duda también fué el primero en proporcionar una solución "calculable" para el problema del movimiento de la Luna, pues aunque no resolvió este problema, proporcionó un método práctico de cálculo aproximado suficiente para confeccionar unas tablas de la Luna.

II.6.- Clairaut.

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) era natural de París. Cuando contaba dieciocho años de edad fué elegido miembro de la Academie des Sciences de dicha ciudad. En 1736, la Academia otorgó a Maupertuis la dirección de una expedición a Laponia en la cual Clairaut participó. Las mediciones efectuadas confirmaron que la Tierra estaba achatada por los polos. De este modo la teoría de Newton había triunfado y quedó zanjado el debate entre cassinianos y newtonianos.

Después de su regreso a París, Clairaut publicó en 1743 un libro titulado "Teoría de la figura de la Tierra en la que se trata del equilibrio de los fluidos", que se convertiría en un clásico. En esta obra se discutía la forma que adquiere un cuerpo rotante sometido al influjo de la mutua acción gravitatoria entre sus partes. Clairaut formuló hipótesis sobre la variación de la densidad en el interior del cuerpo en rotación, deduciendo expresiones matemáticas que daban cuenta de los cambios de la aceleración debida a la gravedad en distintas latitudes. El estudio realizado por Clairaut fué más completo que el que habían realizado Newton y MacLaurin. Otros autores posteriores a Clairaut trataron el tema de forma más general, pero no añadieron resultados importantes a los obtenidos por él. Más adelante, Clairaut centró su atención en el problema de tres cuerpos y la teoría planetaria, publicando en 1756 un libro titulado "Teoría de la Luna".

En 1759 se esperaba una nueva aparición del cometa de Halley. Clairaut emprendió el trabajo de calcular las perturbaciones que dicho cuerpo había experimentado desde su última aparición, debidas, principalmente, a las influencias de Júpiter y Saturno. Un cálculo extrema-

damente laborioso demostró que el cometa se había retrasado 100 días debido a la acción perturbadora de Saturno y 518 días a la de Júpiter. De acuerdo con esto, a finales de 1758 Clairaut anunció a la Academia que el cometa pasaría por el perihelio alrededor del día 13 de abril de 1759. Debido a varios defectos de cálculo, el cometa pasó por el perihelio justamente un mes y un día antes de la fecha anunciada por Clairaut. De este modo, la brillante conjetura de Halley había quedado confirmada. El sistema solar contaba con un miembro más.

II.7.- D'Alembert.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) nació en París. Después de sus estudios de derecho se dedicó por completo a las matemáticas. En 1738 publicó un trabajo que despertó gran atención y en 1740 fué admitido en la Academie des Sciences de París.

En 1743 D'Alembert publicó su "Traité de Dynamique", que contenía, entre otras aportaciones al tema, la primera formulación del principio que lleva su nombre. Dicho principio se reveló de gran utilidad en muchos problemas pertenecientes a la mecánica celeste y a otros campos de la dinámica. En años posteriores D'Alembert realizó varios trabajos sobre el problema de tres cuerpos, y en 1749 publicó el libro "Investigaciones sobre los equinoccios" en que estudió el problema de la precesión y la nutación.

Desde 1751 a 1772 D'Alembert colaboró con Diderot (1713-1784) en la "Encyclopédie" ("Diccionario razonado de las ciencias, las artes y los oficios"), que empezó a aparecer en 1751. D'Alembert fue el autor del discurso preliminar y, además, escribió casi completamente la parte matemática y filosófica de la misma.

II.8.- Las teorías lunares de Euler Clairaut y D'Alembert

Euler, Clairaut y D'Alembert obtuvieron, independientemente y casi al mismo tiempo, soluciones particulares del problema de tres cuerpos en formas adecuadas para la Teoría de la Luna. En 1746, Euler mostró que debía haber obtenido una solución del problema al publicar unas tablas de la Luna. Por otra parte, en 1747, tanto Clairaut como D'Alembert presentaron a la Academie des sciences de París unas memorias que contenían soluciones particulares con aplicaciones a la Luna, así como a ciertos problemas planetarios. En cada una de esas memorias aparecía la misma dificultad que Newton había encontrado: el movimiento calculado del apogeo de la Luna era casi la mitad del resultado observado. Clairaut obtuvo un resultado que le pareció satisfactorio al suponer que la fuerza gravitatoria variaba parcialmente con el inverso del cuadrado y en parte como el inverso del cubo de la distancia. Euler también abrigó dudas acerca de la ley del inverso del cuadrado. Sin embargo, en 1749, al revisar su cálculo original, Clairaut

descubrió la importancia de ciertos términos que habían sido omitidos. Por eso, cuando se tuvieron en cuenta dichos términos, el movimiento del apogeo, tal como era deducido de la teoría, coincidía aproximadamente con el movimiento observado. Este fue el primer caso en el que una seria discrepancia entre la teoría y la observación parecía desacreditar la ley de gravitación de Newton. Sin embargo, su explicación subsiguiente había proporcionado una nueva verificación de dicha ley. Cuando Clairaut anunció su descubrimiento, Euler, por recientes cálculos, llegó en lo esencial al mismo resultado. Por otra parte, D'Alembert consiguió llevar sus aproximaciones a un mayor grado de precisión, con lo que se obtenían mejores resultados.

Un nuevo cálculo del movimiento de la Luna le valió a Clairaut el premio ofrecido por la Academia de San Petersburgo y fue publicado en 1752 con el título "Theorie de la Lune". En 1754 Clairaut publicó unas tablas lunares.

D'Alembert completó su trabajo en 1747 con una teoría de la Luna acompañada de unas tablas. Estos resultados fueron publicados en 1754, formando el primer volumen de su obra titulada "Recherche sur differents points importants du systeme du monde". En 1756 publicó unas tablas perfeccionadas y un tercer volumen de las "Recherches", que contenía algunos nuevos desarrollos de la teoría lunar.

La primera teoría de la Luna de Euler, "Theoria motuum Lunae", fue publicada en 1753. En un apéndice aparecía por primera vez la exposición del método de variación de los parámetros o método de variación de las constantes. Años después, Euler ideó una forma nueva de atacar el problema y desarrolló la teoría de la Luna con gran detalle. Este trabajo, junto con las correspondientes tablas lunares, fue publicado en 1772.

Por lo regular, en el tratamiento de cualquier problema astronómico algunos datos han de ser obtenidos por medio de la observación. De los tres matemáticos mencionados, Clairaut fué el más hábil en utilizar las observaciones, muchas de las cuales habían sido obtenidas por Lacaille (1713-1762). Por esto, las tablas de Clairaut representaban los movimientos reales de la Luna con mayor precisión que las tablas de D'Alembert, aunque sólo en ciertos puntos eran superiores a las tablas de Euler. Estos tres matemáticos dieron a la Teoría de la Luna una forma completamente nueva al usar métodos analíticos que sustituían a los métodos geométricos utilizados por Newton, con la ventaja de que la necesaria labor de cálculo podía realizarse con mayor precisión, de tal manera que los resultados sobre las irregularidades conocidas se explicaron con mayor precisión.

II.9.- Las teorías planetarias de Euler, Clairaut y D'Alembert

Newton había demostrado de forma general que los efectos perturbadores de un planeta causaban desplazamientos en los ápsides de la órbita de otro planeta cualquiera y provocaban una alteración de las posiciones relativas de los planetas en que se movían dichos cuerpos. Algunos efectos de esta naturaleza, así como otros ya conocidos fueron incluidos como resultados de la observación en varias tablas planetarias que se publicaron entre la fecha de aparición de los "Principia" y la mitad del siglo XVIII.

Unas irregularidades planetarias muy interesantes e importantes eran las que se producían en el movimiento de la Tierra, que eran percibidas por el observador como irregularidades en el movimiento del Sol y en los movimientos de Júpiter y Saturno. En repetidas ocasiones la Academie des Sciences de París ofreció premios a trabajos y ensayos que versaran sobre estos problemas. En 1747, Clairaut intentó aplicar su propia resolución particular del problema de tres cuerpos al sistema formado por el Sol, la Tierra y Saturno, teniendo en cuenta que la gran distancia Sol-Saturno es aproximadamente diez veces mayor que la distancia Sol-Tierra. En 1757, Clairaut estudió las perturbaciones que sobre el movimiento de la Tierra ejercían la Luna y Venus. En su trabajo efectuaba también el primer intento de calcular las masas de dos cuerpos celestes por medio de la observación de sus perturbaciones mutuas. Clairaut obtuvo que las masas de la Luna y Venus resultaban ser $1/67$ y $2/3$ de la masa de la Tierra. Por su parte, en el segundo volumen de sus "Recherches", D'Alembert consiguió hacer algún progreso en el estudio general de las perturbaciones planetarias, y aplicó sus métodos al estudio de los movimientos de Júpiter y Saturno.

Euler inició en 1747 una serie de trabajos que habrían de perfeccionar la teoría general de perturbaciones. También intentó en reiteradas ocasiones explicar las irregularidades en los movimientos de Júpiter y Saturno, aunque no pudo conseguir un acuerdo entre los cálculos y los resultados de las observaciones. Sin embargo, al estudiar las perturbaciones que sobre la Tierra ejercían otros planetas, pudo demostrar que la línea de los ápsides de la órbita de ésta avanzaba $13''$ anualmente y que la oblicuidad de la eclíptica disminuía $48''$ en el mismo intervalo de tiempo. En esta ocasión, los resultados de los cálculos realizados y los de otros efectuados posteriormente, concordaban con las observaciones.

En 1771, Euler publicó un ensayo donde se desarrollaba completamente un método para estudiar el problema de las perturbaciones. Se trataba del método de variación de las constantes o parámetros, que ya había sido dado a conocer en la "Theoria motuum Lunae" de 1753, de manera que si se ignoran las perturbaciones, puede considerarse que cada planeta se mueve sobre una elipse, uno de cuyos focos está ocupado por el Sol. El tamaño y la forma de esa

elipse pueden especificarse por medio de la longitud del semieje mayor y la excentricidad. El plano que contiene a la elipse está determinado por la posición de la línea de los nodos, recta según la cual dicho plano corta a un plano fijo, generalmente el de la eclíptica, y por la inclinación respecto a éste. Fijados esos cuatro parámetros, la elipse puede girar sobre su propio plano alrededor del foco ocupado por el Sol, pero si la línea de los ápsides está fija la elipse está completamente determinada. Si además se conoce en cualquier instante la posición del planeta en la elipse, el movimiento está determinado por completo. Así pues, hay seis cantidades, conocidas con el nombre de "elementos orbitales", que permiten determinar completamente el movimiento de un planeta no sometido a perturbaciones. Cuando éstas se tienen en cuenta, la órbita del planeta ya no es una elipse, aunque su aspecto difiera poco de la forma elíptica. Comparando los movimientos de un planeta en épocas separadas por grandes intervalos de tiempo, resulta que las órbitas casi elípticas difieren en algunos aspectos. Por ejemplo, entre la época de Tolomeo y la de Euler la dirección de la línea de los ápsides se alteró alrededor de 5 grados, así como también variaron los restantes elementos. De ahí que, al estudiar el movimiento de un planeta durante un amplio intervalo de tiempo, es conveniente introducir el concepto de órbita elíptica que cambia gradualmente su posición y también, posiblemente, su tamaño y su forma. La órbita real descrita en el transcurso de un número considerable de revoluciones es una curva que no se asemeja a una elipse. Euler usó esta idea para representar cualquier perturbación del movimiento de un planeta por medio de cambios en la órbita elíptica. Dondequiera que se encuentre un planeta y cualquiera que sea su velocidad o dirección de movimiento, siempre puede encontrarse una elipse (con el Sol en uno de sus focos), sobre la que puede considerarse que se mueve el planeta. Así, cuando el planeta describe una órbita perturbada puede considerarse que en cualquier instante de tiempo se mueve sobre una elipse, que está variando continuamente, es decir, que están variando sus elementos orbitales. De este modo, el problema de discutir el movimiento de un planeta se convierte en el de determinar, en cualquier instante, los elementos de la elipse sobre la que se mueve el planeta.

Euler se encontró con grandes dificultades matemáticas al tratar de aplicar el método de variación de los parámetros, aunque pudo obtener importantes resultados en el estudio de los movimientos planetarios. La siguiente generación de matemáticos pudo mostrar que el método ideado por Euler era de gran valor.

II.10.- Lagrange

Joseph Louis Lagrange (1736-1813), de ascendencia francesa, nació en Turín, en el Piamonte italiano. Una vez que hubo terminado los primeros estudios se orientó hacia las matemáticas, influido por la lectura de un libro de Halley sobre álgebra. Esto se avenía con los deseos de su familia, pues se esperaba que Lagrange consiguiera un puesto docente en la

Escuela de Artillería de Turín. Lagrange leyó las obras de Johann y Jakob Bernoulli que le resultaron accesibles y también estudió las obras de Newton, Leibniz y Euler, lo que le permitió estar muy pronto en condiciones de iniciar sus propias investigaciones.

En el año 1755, cuando contaba diecinueve años de edad, inició su carrera al ser nombrado profesor de matemáticas en la Escuela de Artillería de su ciudad natal. A partir de entonces empezó a escribir sus primeras memorias. En 1756, por mediación de Euler, fue admitido como miembro extranjero de la Academia de Berlín. Lo que impulsó esta mediación de Euler fue la admiración que le produjo una carta de Lagrange, en donde estaba contenida la primera exposición del cálculo de variaciones.

En 1758, Lagrange colaboró, con científicos de Turín y alumnos suyos, en la fundación de una sociedad que más adelante se convertiría en la Academia de Ciencias de esa ciudad. En el año 1764, Lagrange obtuvo un premio ofrecido por la Academie des Sciences de París con un trabajo en que estudiaba las libraciones de la Luna. En este ensayo, aunque de forma incompleta, Lagrange presentó la primera discusión satisfactoria de las libraciones lunares, y dió a conocer un método muy general para tratar problemas dinámicos, que sirvió de base en todas las ramas de la dinámica que se desarrollaron posteriormente.

En Turín, Lagrange no tenía ningún colega con quien realizar intercambios científicos. Esto hizo que le surgieran deseos de entrar en contacto con otros matemáticos. La ocasión se presentó en 1766, cuando Euler decidió abandonar Berlín para regresar a San Petersburgo. Por sugerencia de D'Alembert, Federico II de Prusia comunicó a Lagrange su deseo de que se ocupara de la dirección de la Sección de Matemáticas de la Academia de Berlín. Lagrange aceptó ese ofrecimiento y permaneció en Berlín durante veintiun años. Durante este largo periodo realizó una extraordinaria serie de trabajos sobre astronomía, mecánica y matemáticas, algunos de los cuales fueron premiados por la Academia de París. A la muerte de Federico II, acaecida en 1787, Lagrange se trasladó a París. Allí aceptó la invitación de Luis XVI para ingresar en la Academia.

Durante su estancia en Berlín, Lagrange escribió un gran tratado titulado "Mecanique analytique", en el que se desarrollaban completamente sus ideas sobre Dinámica, contenidas en el trabajo que sobre las libraciones de la Luna había realizado años antes. Lagrange formulaba como sigue el programa de su obra: ".Reducir la teoría de la mecánica y el arte de resolver los problemas que en ella se plantean por fórmulas generales cuyo simple desarrollo proporcione todas las ecuaciones necesarias para la solución de cada problema. Resumir y presentar, desde un mismo punto de vista, los diferentes principios hallados hasta ahora para facilitar la solución de cuestiones de mecánica, mostrar su dependencia recíproca y poner en disposición de juzgar

de su exactitud y de su extensión". Lagrange añadía: "... no se hallarán figuras en esta obra. Los métodos que expongo no requieren construcciones, ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino sólo operaciones algebraicas sujetas a un proceso regular y uniforme. Los aficionados al análisis verán con placer como la mecánica se convierte en una nueva rama del mismo y me agradecerán el haber ampliado así su dominio".

En la "Mecanique analytique" Lagrange tomó como punto de partida las nociones físicas de Newton y utilizó el análisis matemático para estudiar la dinámica de puntos materiales y cuerpos rígidos. En esta obra quedaban asimilados y se desarrollaban los resultados que sobre el tema habían obtenido Euler, D'Alembert y otros matemáticos del siglo XVIII. Lagrange se valió del cálculo de variaciones para unificar los diferentes principios de la dinámica. Esto le condujo a una generalización del concepto de coordenada y a las ecuaciones del movimiento que actualmente llevan su nombre. Tal como había hecho constar, Lagrange no utilizó figuras en su libro, a diferencia de lo que habían hecho Newton y sus más inmediatos sucesores, y con concisión y elegancia no superadas mostró que se alcanzaba una mayor fuerza y flexibilidad en la resolución de problemas dinámicos cuando se empleaban métodos analíticos generales. Lagrange tuvo grandes dificultades para encontrar un editor para su obra maestra. Finalmente pudo publicarla en París en el año 1788 gracias a la intervención de Legendre.

Lagrange evitó siempre la política y resultó indemne durante la Revolución. Hasta su muerte estuvo muy bien considerado por los gobiernos que se sucedieron en Francia. En 1790 fué nombrado presidente de una comisión encargada de estudiar un nuevo sistema de pesas y medidas. De las deliberaciones de dicha comisión surgió el sistema métrico decimal. En 1795, Lagrange fué nombrado profesor de matemáticas en la École Normale y más tarde, en 1797, lo fué de la École Polytechnique.

Durante el último periodo de su vida Lagrange publicó un gran número de trabajos sobre astronomía y matemáticas. Casi la mitad de sus trabajos científicos estuvieron dedicados al estudio de los movimientos de los cuerpos del sistema solar. Así, por ejemplo, en el año 1766 había sido galardonado por segunda vez por la Academie des Sciences por un trabajo sobre los movimientos de los cuatro satélites de Júpiter. También estudió el problema de las órbitas de la Luna y de Júpiter. Además analizó los problemas de la paralaje solar, los tránsitos de Venus por delante del Sol y el problema de las perturbaciones planetarias, cuyo cálculo era muy importante para la determinación de órbitas.

Entre los trabajos realizados por Lagrange para la resolución del problema de los tres cuerpos, destaca el realizado bajo el título "Essai sur le probleme des trois corps", que fue sometido a la Academie en 1772. En dicho trabajo llega a plantear dicho problema de forma

general, por medio de un sistema diferencial de séptimo orden en función de las distancias mutuas, que no pudo integrar de forma general, aunque llega a la solución del problema en dos casos particulares. El primero cuando los tres cuerpos están en línea recta (que ya había dado Euler) y el segundo cuando los cuerpos forman un triángulo equilátero.

II.11.- Laplace

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) nació en Beaumont-en-Auge, Normandía. Realizó sus primeros estudios en una escuela dirigida por benedictinos y a los dieciséis años ingresó en la universidad de Caen, donde dos profesores despertaron en él un gran interés por las matemáticas. Su primer trabajo fue realizado durante su estancia en Caen y fue publicado en 1766 por la Academia de Turín.

En 1767, Laplace se trasladó a París, donde presentó a D'Alembert un trabajo relativo a los principios de la mecánica. D'Alembert reconoció de inmediato el talento de Laplace y consiguió que éste ocupara un puesto de profesor de matemáticas en la Escuela Real Militar. A partir de entonces vivió siempre en París, de cuya Academia pasó a ser miembro en 1773.

En 1794, Laplace fue trasladado a una cátedra de matemáticas en la École Polytechnique, que había sido fundada ese mismo año. En ese año era miembro de la Comisión de Pesas y Medidas, y participó activamente en la implantación del sistema decimal, lo cual constituyó un gran impulso para el desarrollo de la ciencia y la técnica. Con esta actividad Laplace había tomado partido a favor de la Revolución. Sin embargo, más adelante cambió su opinión política y se puso a disposición de Napoleón Bonaparte, quien en 1799 le ofreció un cargo político. Laplace permaneció en él durante seis semanas. Al subir al poder Luis XVIII, Laplace le ofreció sus servicios y fue recompensado con la concesión del título de marqués.

En 1773, Laplace había empezado el estudio de problemas particulares de la mecánica celeste. Todo el trabajo que efectuó sobre esta materia a lo largo de casi tres décadas fue recogido en su monumental obra titulada "Mécanique céleste", cuyos cinco volúmenes fueron publicados entre 1798 y 1825. Además de incluir sus aportaciones personales a dicha materia, el gran tratado de Laplace constituía un sumario de todo lo que se había hecho para desarrollar la mecánica celeste desde los tiempos de Newton. Así, la "Mécanique céleste" acumulaba trabajos de Newton, Euler, Clairaut, D'Alembert y Lagrange sobre problemas tales como el de la figura de la Tierra, el problema de tres cuerpos, la teoría de la Luna, las perturbaciones de los planetas, etc. En el prefacio de su obra, Laplace escribía: "Hacia finales del siglo XVII, Newton publicó su descubrimiento de la gravitación universal. Desde aquella época los matemáticos han tenido éxito en someter a esta gran ley de la naturaleza todos los fenómenos

conocidos del sistema del mundo, y así han dado un inesperado grado de precisión a las teorías sobre los cuerpos celestes y a las tablas astronómicas. Mi objetivo es presentar una visión coherente de esas teorías, que ahora están dispersas en un gran número de trabajos. La totalidad de los resultados de la gravitación, sobre el equilibrio y movimientos de los cuerpos fluidos y sólidos que componen el sistema solar y sistemas similares existentes en la inmensidad del espacio, es lo que constituye el objeto de la Mecánica celeste, o aplicación de los principios de la mecánica a los movimientos y figuras de los cuerpos celestes. La astronomía, considerada en la forma más general, es un gran problema de mecánica. La solución de este problema depende, al mismo tiempo, de la precisión de las observaciones y de la perfección en el análisis. Es muy importante rechazar todo proceso empírico y completar el análisis, de modo que no sea necesario obtener de las observaciones más que los datos indispensables. La intención de este trabajo es obtener, tanto como yo pueda, este interesante resultado. Teniendo en consideración la dificultad y la importancia de la materia, espero que los matemáticos y astrónomos lo acogerán con indulgencia, y que encontrarán los resultados lo suficientemente simples como para usarlos en sus investigaciones. Estará dividido en dos partes. En la primera parte daré los métodos y las fórmulas para determinar los movimientos de los centros de gravedad de los cuerpos celestes, las figuras de dichos cuerpos, las oscilaciones de los fluidos que los cubren, y los movimientos alrededor de sus centros de gravedad. En la segunda parte aplicaré las fórmulas halladas en la primera a los planetas, los satélites y los cometas, y concluiré el trabajo con un exámen de varias cuestiones relativas al sistema del mundo y con una relación histórica de la labor de los matemáticos sobre este tema...".Laplace terminaba su prefacio diciendo que adoptaría la división decimal del ángulo recto y del día y que en las medidas de longitudes utilizaría el metro.

En el prefacio a la segunda parte de la "Mécánique céleste", Laplace resumía el contenido de la primera: "En la primera parte de este trabajo hemos expuesto los principios generales del equilibrio y movimiento de los cuerpos. La aplicación de estos principios a los movimientos de los cuerpos celestes nos ha conducido, mediante razonamiento geométrico, sin ninguna hipótesis, a la ley de gravitación universal, siendo la acción de la gravedad y los movimientos de los proyectiles sobre la superficie de la Tierra casos particulares de esa ley. Entonces hemos considerado un sistema de cuerpos sujetos a esta gran ley de la naturaleza, y hemos obtenido, por medio de un singular análisis, las expresiones de sus movimientos, las de sus figuras, y las de las oscilaciones de los fluidos que los cubren. A partir de esas expresiones hemos deducido todos los conocidos fenómenos del flujo y reflujo de la marea; las variaciones de la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra; la precesión de los equinoccios; la libración de la Luna; y la figura y rotación de los anillos de Saturno. También hemos indicado la causa por la cual esos anillos están contenidos permanentemente en el plano del ecuador de Saturno. Además, hemos deducido a partir de la misma teoría de la gravitación las principales ecuaciones del movimiento

de los planetas; particularmente las de Júpiter y Saturno, cuyas grandes singularidades tienen un periodo de más de novecientos años. Las irregularidades en los movimientos de Júpiter y Saturno presentaron a los astrónomos en un principio nada más que anomalías, cuyas leyes y causas eran desconocidas; y, durante largo tiempo, esas irregularidades parecieron ser incompatibles con la teoría de la gravedad; pero un exámen más completo ha demostrado que pueden deducirse de ésta; y ahora, estos movimientos constituyen una de las más sorprendentes pruebas de la verdad de esta teoría. Hemos desarrollado las variaciones seculares de los elementos del sistema planetario, las cuales no vuelven al mismo estado hasta después de un lapso de muchos siglos. En medio de todos estos cambios hemos descubierto la invariabilidad de los movimientos medios y la de las distancias medias de los cuerpos de este sistema; cuya naturaleza parece haber sido dispuesta, en su origen, tan admirablemente, sobre la tierra, para la preservación de los individuos, y para la perpetuación de las especies. De una única circunstancia, el que todos los movimientos tienen lugar en la misma dirección, se deduce que las órbitas de los planetas y satélites deben ser siempre casi circulares, y algo inclinadas unas respecto de otras. Así, las variaciones de la oblicuidad de la eclíptica, que siempre están comprendidas entre estrechos límites, nunca producirán una primavera eterna sobre la Tierra. Hemos demostrado que la atracción del esferoide terrestre, que incesantemente atrae hacia su centro el hemisferio de la Luna que está dirigido hacia la Tierra, transfiere al movimiento rotatorio de este satélite las grandes variaciones seculares de su movimiento de revolución; y, por estos medios, mantiene siempre oculta a nuestra vista el otro hemisferio. Por último, hemos demostrado, en los movimientos de los tres primeros satélites de Júpiter, la siguiente extraordinaria ley, a saber, que como consecuencia de sus atracciones mútuas, la longitud media del primer satélite, visto desde el centro de Júpiter, menos tres veces la del segundo satélite, más dos veces la del tercer satélite, es siempre igual a dos ángulos rectos, de modo que no pueden ser eclipsados al mismo tiempo".

La segunda parte de la "Mécánica céleste" se iniciaba con la siguiente dedicatoria a Napoleón Bonaparte: "Ciudadano Primer Cónsul, Vos me habeis permitido dedicaros este trabajo. Es una satisfacción y un honor para mí el presentarlo al Héroe, el Pacificador de Europa, a quien Francia debe su prosperidad, su grandeza y la más brillante época de su gloria; al ilustrado Protector de las Ciencias, quien, distinguiéndose el mismo en ellas, percibe, en su cultivo, la fuente del más noble goce, y, en su progreso, la perfección de todas las artes e instituciones sociales provechosas. Sea este trabajo, consagrado a la más sublime de las ciencias naturales, un monumento duradero de la gratitud inspirada en aquellos que las cultivan, por vuestra generosidad, y por las recompensas del gobierno. De todas las verdades que contiene este trabajo, la expresión de este sentimiento será siempre el más preciado para mí. Salutación y Respeto. Laplace".

Al principio de la segunda parte, que se iniciaba en el tercer volumen de su obra, Laplace escribió: "Queda ahora por considerar particularmente las perturbaciones de los movimientos de los planetas y de los cometas alrededor del Sol; de la Luna alrededor de la Tierra, y de los satélites alrededor de sus planetas primarios. Este es el objetivo de la segunda parte de este trabajo, que está dedicado al perfeccionamiento de las tablas astronómicas". Y más adelante decía: "Es principalmente en la aplicación del análisis al sistema del mundo donde percibimos el poder de este maravilloso instrumento, sin el cual hubiera sido imposible haber descubierto un mecanismo que es muy complicado en sus efectos pero muy simple en su causa. El matemático incluye ahora en sus fórmulas la totalidad del sistema planetario y sus sucesivas variaciones; él, con la imaginación, vuelve la vista atrás hacia los diferentes estados por los cuales ha pasado el sistema en épocas más remotas, y predice el futuro que será conocido por los observadores".

Laplace dedicó gran atención a la teoría de la Luna. Uno de sus más notables logros en ese campo fue la explicación del fenómeno de la aceleración secular del movimiento medio de la Luna. Después de utilizar métodos ordinarios sin ningún éxito, Laplace intentó explicarlo con la suposición de que la gravitación era un efecto que no se transmitía instantáneamente, sino que, como la luz, precisaba cierto tiempo para "desplazarse" desde el cuerpo que ejercía la atracción hasta el cuerpo que era atraído. Esta suposición tampoco proporcionó una explicación del fenómeno, pero, finalmente, Laplace descubrió que éste se debía a una acción indirecta de los planetas, pues ciertas perturbaciones que sufre la Luna dependen, entre otras cosas, de la excentricidad de la órbita terrestre, que es uno de los elementos que está sometido a la perturbación planetaria y que durante siglos ha ido decreciendo muy lentamente. La perturbación en cuestión se modifica muy ligeramente, y, en consecuencia, la velocidad de la Luna aumenta muy lentamente, con lo que la duración del mes decrece. El efecto total es sumamente pequeño y sólo se hace perceptible en el transcurso de un gran intervalo de tiempo. Los cálculos de Laplace mostraron que en el transcurso de un siglo la posición de la Luna en la esfera celeste difería 10" respecto de la que ocuparía si no existiera la causa perturbadora. Como consecuencia, la duración del mes disminuye alrededor de 1/30 de segundo en el transcurso de un siglo. Laplace también demostró que la excentricidad de la órbita terrestre no disminuiría indefinidamente, sino que después de un inmenso periodo de miles de años empezaría a aumentar, y, por tanto, el movimiento de la Luna se haría de nuevo más lento. Los resultados de Laplace concordaron casi exactamente con lo que indicaban las observaciones. De este modo, quedó completamente explicada la última discrepancia conocida entre teoría y observación relativa al problema de los movimientos en el sistema solar. Habían transcurrido cien años desde la publicación de los "Principia".

El libro séptimo del tercer volumen de la "Mécanique céleste" contiene un tratamiento general de la teoría de la Luna, diferente a todos los utilizados con anterioridad a la aparición de

esa obra. Al inicio de dicho libro, Laplace escribió: "El objetivo de este libro es demostrar, en primer lugar, que la ley de gravitación universal es la única fuente de todas las irregularidades de los movimientos lunares; y entonces usar dicha ley como método de descubrimiento, perfeccionar la teoría de esas irregularidades, y deducir de ellas varios elementos importantes del sistema del mundo". Más adelante decía: "... la ley de la gravitación universal es la única causa de las irregularidades lunares".

Laplace no calculó ninguna tabla lunar. Sin embargo, el astrónomo vienés Búrg (1766-1834) usó las fórmulas de Laplace y un gran número de observaciones efectuadas en Greenwich para construir unas tablas de la Luna. Estas fueron enviadas al Instituto de Francia en 1801, antes de la publicación de la teoría de la Luna de Laplace. En 1812, el alemán Burckhardt (1773-1825), que había trabajado con Laplace y Lalande (1732-1807), confeccionó unas nuevas tablas basadas directamente en las fórmulas de la "Mécanique céleste".

II.12.- El estudio de las perturbaciones por Lagrange y Laplace

La observación había permitido demostrar que la Luna y los planetas presentaban dos tipos de irregularidades en sus movimientos. Las primeras de ellas, tales como la mayor parte de las de la Luna, completaban su ciclo de cambios al cabo de una revolución o de unas pocas revoluciones del cuerpo perturbador. En segundo lugar se presentaban irregularidades en que se observaba una alteración continua que no mostraba signos de ir a producirse de forma periódica. Ejemplos de estas irregularidades eran la aceleración secular del movimiento medio de la Luna y la del movimiento de la línea de los ápsides de la órbita terrestre. Los dos tipos de perturbaciones fueron denominadas, respectivamente, periódicas y seculares. Muy pronto se vio que para investigarlas se precisaban métodos matemáticos diferentes. En el trabajo de Euler se puso de manifiesto el papel que jugó esa distinción entre ambos tipos de perturbaciones, pero fue Lagrange el primero que reconoció su importancia - particularmente en la teoría planetaria - y él fue también el primero en estudiar especialmente las perturbaciones seculares.

Cuando se estudian las perturbaciones que un planeta produce sobre otro se hace necesario obtener la expresión matemática de la fuerza perturbadora que ejerce el primero. En general, esta expresión depende tanto de los elementos de las dos órbitas como de las posiciones de los planetas en el instante que se considera. Sin embargo, la expresión de la fuerza perturbadora puede dividirse en dos componentes, una que depende de las posiciones de los dos planetas y otra que depende sólo de los elementos de las dos órbitas y es independiente de las posiciones que ocupan los planetas en el instante considerado. Debido a que las posiciones de los planetas en sus respectivas órbitas cambian rápidamente, la primera parte de la fuerza perturbadora varía también rápidamente, y produce, en pequeños intervalos de tiempo,

efectos en direcciones opuestas, por ejemplo, acelerando primero y retardando después el movimiento del planeta perturbado. De este modo, las correspondientes irregularidades del movimiento son las perturbaciones periódicas, que en su mayor parte, completan un ciclo de cambios en el curso de unas pocas revoluciones de los planetas, o incluso más rápidamente; la otra parte de la fuerza perturbadora permanece inalterada durante un tiempo considerable, y da lugar a variaciones de los elementos, los cuales permanecen durante largo tiempo sin alteración sensible. Esta alteración se va acumulando continuamente, haciéndose considerable con el paso del tiempo: éstas son las denominadas perturbaciones seculares. Hablando en forma general, puede decirse que las perturbaciones periódicas son temporales, mientras que las perturbaciones seculares son permanentes en sus efectos.

Algunas perturbaciones periódicas, como las que se producen en el caso del movimiento de la Luna, tienen periodos de sólo unos pocos días, y la mayoría de las que tienen importancia producen efectos que se prolongan sólo durante unos pocos años. Pero se conocen algunas perturbaciones cuyos efectos perduran cientos o, incluso, miles de años, y, a menudo, pueden ser tratadas como seculares cuando sólo se requiere considerar un intervalo de unos pocos años. Por otra parte, la mayoría de las perturbaciones seculares conocidas no son realmente permanentes, sino que fluctúan como las perturbaciones periódicas, aunque sólo en el transcurso de grandes periodos de tiempo que han de considerarse como de decenas de miles de años. El descubrimiento de que las perturbaciones observadas en las órbitas de Júpiter y Saturno no eran seculares, puede considerarse como el inicio de una serie de investigaciones sobre las perturbaciones seculares que fueron llevadas a cabo por Lagrange y Laplace entre los años 1773 y 1784. Estos trabajos condujeron a algunos de los resultados más generales e interesantes en todo el dominio de la mecánica celeste. Aunque vivían, respectivamente, en Berlín y París, ambos matemáticos estuvieron en constante comunicación, y apenas uno de ellos efectuaba un avance importante, el otro lo utilizaba y desarrollaba.

El problema principal era el de las alteraciones seculares de los elementos de la órbita de un planeta, considerada como una elipse variable. Tres de esos elementos, el semieje mayor de la elipse, su excentricidad y la inclinación de su plano respecto de la eclíptica son de mucha más importancia que los tres elementos restantes. El tamaño y la forma de la órbita dependen de los dos primeros elementos citados. El semieje de la órbita determina, en virtud de la tercera ley de Kepler, el periodo de revolución. El tercer elemento, la inclinación, tiene una influencia importante sobre las relaciones mútuas entre el planeta perturbador y el perturbado. Los tres elementos restantes son de importancia en cuanto a las perturbaciones periódicas se refiere.

La base de la totalidad de las investigaciones fué un artículo que Lagrange publicó en 1766, en el que explicaba el método de variación de las constantes, y donde se daban también

las fórmulas que relacionaban las variaciones de los elementos con las fuerzas perturbadoras. En el año 1774, Lagrange obtuvo una expresión que proporcionaba el cambio secular de la inclinación, válida para todo instante de tiempo. Cuando se aplicó este resultado al caso de los planetas Júpiter y Saturno resultó que los cambios de la inclinación debían ser siempre de naturaleza periódica. El mismo resultado se obtenía para el caso del sistema formado por el Sol, Venus, la Tierra y Marte. En 1775, Laplace, asombrado por el método que había usado Lagrange, lo aplicó al estudio de las variaciones de la excentricidad, y descubrió que éstas eran también de naturaleza periódica. Así pues, la excentricidad tampoco podía aumentar o disminuir indefinidamente. En el año 1776, Lagrange demostró que las variaciones del eje mayor de una órbita planetaria eran necesariamente periódicas, de modo que, con el tiempo, sólo podía variar entre límites definidos. Sin embargo, este resultado estaba basado en la suposición de que las fuerzas perturbadoras eran pequeñas.

Entre 1781 y 1784, Lagrange escribió una serie de trabajos en los que recapituló sus investigaciones anteriores, revisó y perfeccionó sus métodos, y los aplicó al estudio de las perturbaciones periódicas. En 1784, Laplace estableció por medio de un método propio dos relaciones importantes entre las excentricidades y las inclinaciones de las órbitas de los planetas. La primera relación es la siguiente: "Si se multiplica la masa de cada planeta por la raíz cuadrada del eje mayor de su órbita y por el cuadrado de la excentricidad de ésta, resulta que la suma de estos productos es invariante". La segunda relación se obtiene como la primera sustituyendo la excentricidad por la inclinación. La primera de estas proposiciones establece la existencia de lo que puede llamarse un "acopio" ó "caudal" de excentricidad compartido por los planetas del sistema solar. Si la excentricidad de una órbita cualquiera aumenta, la de alguna otra órbita experimenta una correspondiente disminución. Además, las observaciones muestran que las excentricidades de todas las órbitas planetarias son pequeñas, y, en consecuencia, el "acopio" total de excentricidad es pequeño. Por tanto, la excentricidad de la órbita de un planeta no puede aumentar mucho. Una conclusión similar se tiene para la inclinación de las distintas órbitas.

Expresado brevemente, los resultados obtenidos por Lagrange y Laplace consistían en que los cambios en el semieje mayor, en la excentricidad y en la inclinación de cualquier órbita planetaria estaban permanentemente restringidos a ciertos límites. Las perturbaciones causadas por los planetas hacen que todas las cantidades citadas experimenten fluctuaciones de magnitud limitada, algunas de las cuales, originadas por las fuerzas perturbadoras periódicas, experimentan sus cambios en cortos periodos de tiempo, mientras que otras fluctuaciones, debidas a fuerzas seculares, requieren grandes intervalos de tiempo para que se completen. De este modo, puede decirse que fué demostrada la estabilidad del sistema solar, al menos hasta donde concernía a las causas astronómicas particulares que se tuvieron en cuenta. Los resultados obtenidos por Lagrange y Laplace eran consecuencias matemáticas, no completamente

rigurosas, de ciertas hipótesis respecto de las cuales las condiciones reales del sistema solar presentaban un estrecho parecido. Aparte de causas imprevistas, era razonable pensar que para un intervalo de tiempo muy considerable los movimientos de los cuerpos que constituyen el sistema solar debían estar de acuerdo con los resultados obtenidos por Lagrange y Laplace. Para la tarea de predecir las posiciones de los planetas en instantes poco separados entre sí eran de gran importancia las perturbaciones periódicas. Estas fueron estudiadas de manera muy completa por ambos matemáticos, pero fué Laplace el que las expresó en forma adecuada para su cálculo numérico. A partir de las fórmulas dadas por Laplace en su "Mécanique céleste" pudieron elaborarse varias tablas planetarias que representaban muy aproximadamente los movimientos observados.

Además de desarrollar la teoría de la Luna y la teoría planetaria, Laplace estudió casi todos los "problemas menores" de la mecánica celeste, utilizando en muchos casos métodos debidos a Lagrange. Laplace se ocupó de la teoría de los satélites de Júpiter, que con éste constituyen una especie de sistema solar en miniatura, pero con varias peculiaridades características. También consiguió realizar un cierto progreso en la teoría del anillo de Saturno, al demostrar que no podía ser un cuerpo sólido uniforme. Por otra parte, Laplace estudió el problema de la precesión y el de la nutación mucho más completamente que D'Alembert y trató el problema de la forma de la Tierra mediante un método más general que el de Clairaut. Además reconstruyó enteramente la teoría de las mareas, mejorándola en muchos aspectos. También modificó la teoría de perturbaciones con el fin de que pudiera ser aplicada a los cometas.

II.13.- La hipótesis nebular de Laplace

Fuera del círculo de astrónomos y matemáticos, Laplace es más conocido como inventor de la hipótesis nebular que como autor de la "Mécanique céleste". Sus especulaciones fueron publicadas en 1796 en un libro titulado "Exposition du systeme du monde". Independientemente, Immanuel Kant había expuesto una teoría similar pero menos detallada. El sistema solar presentaba ciertas características que llamaron la atención de Laplace. Los siete planetas conocidos giraban alrededor del Sol en el mismo sentido. Los satélites hasta entonces observados también giraban alrededor de los cuerpos primarios en el mismo sentido. Además, las rotaciones del Sol, de los planetas y de los satélites alrededor de sus ejes seguían la misma ley. Por otra parte, los movimientos de rotación y de revolución tenían lugar en planos muy poco inclinados respecto del plano de la eclíptica y las excentricidades de todas las órbitas eran muy pequeñas, de modo que éstas eran casi circulares. Los cometas, sin embargo, no presentaban ninguna de las peculiaridades anteriores: sus órbitas tenían grandes excentricidades y los planos de dichas órbitas estaban muy inclinados respecto del plano de la eclíptica. A partir de las coincidencias mencionadas Laplace infirió que los distintos cuerpos del sistema solar

debían haber tenido un origen común. La hipótesis que sugirió fue que en épocas muy remotas el Sol era el núcleo central de una inmensa nebulosa que llenaba todo el espacio ocupado por el sistema solar. La nebulosa estaba dotada de un movimiento de rotación. Al enfriarse fue condensándose gradualmente y girando con creciente rapidez. Durante la condensación, las partículas situadas en la región ecuatorial tuvieron que separarse del resto de la materia atmosférica y formar un anillo ecuatorial que giraba por separado con su velocidad primitiva. Laplace concebía que separaciones análogas tuvieron lugar en diferentes épocas, a diferentes distancias del núcleo, en las capas superiores de la nebulosa, originando una sucesión de anillos distintos, contenidos aproximadamente en el mismo plano y dotados de distintas velocidades. Cada uno de estos anillos se rompió a su vez en varias masas que se condensaron para formar los planetas y los satélites y que fueron dotadas de un movimiento de rotación dirigido en el mismo sentido que el del resto del sistema y que adquirieron, a causa de su fluidez, formas esferoidales.

II.14.- Herschel. Los sistemas estelares

Friedrich Wilhelm Herschel (1738-1822) nació en Hanover, en el seno de una familia de músicos. A los diecinueve años se trasladó a Inglaterra, estableciéndose finalmente en Bath en 1766. Muy pronto empezó a estudiar astronomía, surgiendo en él un gran interés por la construcción y uso de telescopios.

Después de un gran número de fracasos logró construir un telescopio reflector que pronto sería acompañado por otros de mayor tamaño y perfección. Con uno de éstos efectuó su primera observación registrada: la nebulosa de Orión, en 1774. Puede considerarse que esta observación marcó el inicio de su carrera astronómica, aunque no abandonó su actividad como músico de profesión hasta más adelante.

A partir de 1775, y en cuatro ocasiones separadas, Herschel llevó a cabo una revisión de la totalidad del cielo visible, utilizando cada vez un telescopio de mayor poder. En cada una de estas revisiones registró todos los hechos que parecían extraordinarios. En el transcurso de la segunda de esas inspecciones del cielo efectuó el descubrimiento que le proporcionó gran reputación en toda Europa, y que le permitió abandonar la música como profesión y dedicar todas sus energías a la astronomía. Al examinar las pequeñas estrellas cercanas a H Geminorum, Herschel se dió cuenta de que una de ellas era más fácilmente visible que el resto, lo que le hizo sospechar que se trataba de un cometa. Cuando el nuevo astro fué observado en más ocasiones y se hubieron hecho tentativas para calcular su órbita, resultó que su trayectoria no se correspondía con ninguna órbita de cometa. Después de tres o cuatro meses del descubrimiento se reconoció que tal cuerpo celeste era un nuevo planeta, que se movía

describiendo una órbita casi circular a una distancia del Sol que era unas diecinueve veces mayor que la distancia Sol-Tierra. En los tiempos históricos no se había descubierto ningún planeta nuevo, de modo que el descubrimiento de Herschel fué extraordinario. El planeta, al que en principio quiso poner el nombre de George, en honor al rey, fue llamado Urano. Como consecuencia de este descubrimiento acudieron a Bath distinguidos visitantes, contándose entre ellos el astrónomo real Maskelyne (1732-1811). A finales del año 1775, Herschel fué nombrado miembro de la Royal Society.

En 1783, Herschel había acabado de construir un telescopio de 6 metros de longitud con un gran espejo de unos 45 centímetros de diámetro. En 1785, empezó la labor de construcción de un telescopio de 12 metros con un espejo de 1,22 metros de diámetro. Los gastos fueron sufragados mediante una subvención efectuada por el rey.

Después de algunos contratiempos fué terminado un telescopio de 9 metros. En la primera noche en que fué utilizado (28 de agosto de 1789) fue detectado un sexto satélite de Saturno, denominado Enceladus. En septiembre del mismo año fué descubierto el séptimo satélite, que se conocería con el nombre de Mimas. En 1839 dejó de usarse el telescopio por haber sufrido deterioros en el espejo.

Herschel se estableció en Slough, donde prosiguió su labor de investigación. Era costumbre suya el dedicar todas las noches propicias a la observación. Durante parte del día se dedicaba a interpretar sus observaciones y escribir los artículos que contenían los resultados obtenidos. Además de este trabajo, Herschel tenía que recibir a un gran número de visitantes que acudían a Slough movidos por la curiosidad y a científicos que sentían interés por conocerle y por ver sus telescopios.

Durante muchos siglos los astrónomos se habían interesado casi completamente por las posiciones de los diversos cuerpos situados en la esfera celeste. Copérnico (1473-1543) y sus sucesores se habían dado cuenta de que los movimientos aparentes de la esfera celeste sólo podían explicarse satisfactoriamente teniendo en cuenta sus movimientos reales en el espacio. De este modo, el sistema solar pasó a ser considerado como un conjunto consistente en cuerpos situados a diferentes distancias de la Tierra y separados entre sí por grandes distancias. Sin embargo, el caso de las estrellas fijas era distinto. Con la excepción de los movimientos propios de unas pocas estrellas, todos los movimientos aparentes fueron explicados como consecuencia del movimiento de la Tierra. La concepción geométrica que representaba las estrellas como puntos sobre la esfera celeste era suficiente para los propósitos astronómicos ordinarios. La atención de grandes astrónomos como Flamsteed, Bradley y Lacaille se dirigió casi por completo hacia la determinación de esos puntos con la mayor precisión. Por otra parte, el grupo

de problemas que habían quedado planteados después del trabajo de Newton, hizo que los astrónomos del siglo XVIII se concentraran en el estudio del sistema solar. A pesar de ello, la elaboración de catálogos de estrellas tenía un valor considerable al proporcionar puntos de referencia que podían utilizarse para fijar la posición de los miembros del sistema solar. Casi la única excepción a la tendencia general apuntada fue la labor de hallar las paralajes, y, como consecuencia, las distancias de algunas de las estrellas fijas.

Herschel abrió un camino completamente nuevo cuando empezó a estudiar los sistemas sidéreos en sí mismos y la mutua relación entre sus miembros. Desde este punto de vista, el Sol y sus acompañantes se convirtieron en un sistema que formaba parte de una innumerable multitud de estrellas. El conocimiento completo de las posiciones de las estrellas se habría deducido a partir de la medida de la paralaje de cada una de ellas. Sin embargo, el fracaso en determinar la paralaje que tuvieron astrónomos como Bradley, fue suficiente para demostrar la imposibilidad de llevar a cabo esa empresa. Por su parte, Herschel atacó el problema de la paralaje, pero se dió cuenta de que la cuestión de la distribución de las estrellas requería un método más seguro y capaz de ser aplicado a gran escala. De acuerdo con esto, Herschel desarrolló en 1784 su método de "recuento de estrellas". La más superficial visión del cielo muestra que las estrellas que son visibles sin necesidad de utilizar telescopio están distribuidas de forma muy desigual sobre la esfera celeste. Lo mismo sucede cuando se tienen en cuenta las estrellas más tenues al ser vistas a través de un telescopio. Si se comparan dos regiones del cielo de la misma magnitud aparente, puede resultar que la primera de ellas contenga muchas más estrellas que la segunda. Si se tiene en cuenta que las estrellas no se hallan situadas en una esfera sino que están dispersas en el espacio a diferentes distancias de la Tierra, se puede explicar la desigualdad de distribución en el cielo como debida a una desigualdad real de distribución en el espacio o bien debida a una diferencia en la distancia con que se distribuye el sistema sidéreo en las dos direcciones que ocupan los dos conjuntos de estrellas. La primera región celeste puede corresponder a una región del espacio en la cual se agrupan realmente las estrellas o puede representar una dirección según la cual el sistema sidéreo se extiende, de modo que la acumulación de capa tras capa de estrellas procede de la aparente densidad de distribución.

En ausencia de un movimiento a priori de la agrupación real de las estrellas en el espacio, Herschel eligió la primera de las dos anteriores hipótesis, esto es, consideró la densidad aparente de las estrellas en una porción particular del cielo como una medida de la profundidad en que los sistemas sidéreos se extendían en tal dirección. Herschel utilizó un telescopio de 6 metros mediante el cual podía ver una región circular del cielo de 15' de diámetro. Lo enfocó a distintas partes del firmamento y contó las estrellas visibles en cada caso. En 1785 publicó los resultados de los recuentos efectuados en 683 regiones. El resultado general fue que las

estrellas son más abundantes dentro y cerca de la Vía Láctea, y son escasas en las regiones del cielo más alejadas de ésta. La banda constituida por la Vía Láctea no se desvía mucho de un círculo máximo denominado a veces círculo galáctico. Según la hipótesis de Herschel, el espacio ocupado por las estrellas de la Vía Láctea tiene la forma de un disco que se ensancha hacia su parte central y cuyo diámetro es aproximadamente cinco veces mayor que su espesor.

Un posterior estudio de la disposición de las estrellas, en particular de las estrellas de la Vía Láctea, condujeron gradualmente a Herschel a la creencia de que su suposición inicial se apartaba de la realidad. Así, en 1811, treinta años después de haber empezado el recuento de estrellas, admitió un cambio de opinión. El método del recuento de estrellas fue proyectado para que proporcionara información sobre los límites del sistema estelar o de las porciones visibles del mismo. Junto con este método, Herschel utilizó constantemente el brillo de las estrellas como medio de prueba de su cercanía. Si dos estrellas proporcionan la misma cantidad de luz, se tiene que la más cercana al observador es la más brillante, y en el supuesto de que la luz no es absorbida en su trayectoria a través del espacio resulta que el brillo aparente de las dos estrellas es inversamente proporcional al cuadrado de sus respectivas distancias a la Tierra. El hecho de que la totalidad de las estrellas dan lugar a la misma cantidad de luz, de modo que la diferencia entre sus brillos aparentes es debido solamente a la distancia, es una suposición que tiene el mismo carácter general que la suposición de igual distribución. Debe haber necesariamente muchas excepciones, pero, a falta de un conocimiento más exacto, el uso del brillo proporciona un método para estimar con cierto grado de probabilidad las distancias relativas de las estrellas. Para aplicar este método era necesario tener medios para comparar la cantidad de luz recibida desde diferentes estrellas. Esto fué llevado a cabo por Herschel utilizando telescopios de diferentes tamaños. Si se observa una estrella con dos telescopios reflectores de diferentes tamaños resulta que la luz transmitida al ojo por el telescopio es proporcional al área del espejo que recibe la luz, y, por lo tanto, es proporcional al cuadrado del diámetro del espejo. De ahí que el brillo aparente de una estrella visto a través de un telescopio es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, y, por otra parte, es proporcional al cuadrado del diámetro del espejo del telescopio.

II.15.- Herschel. Las nebulosas y los cúmulos estelares. Estrellas dobles y el movimiento del Sol

Intimamente conectada con la estructura del sistema solar estaba la cuestión de la distribución y naturaleza de las nebulosas y los cúmulos estelares. Cuando Herschel inició su labor en este campo se conocía poco más de un centenar de tales objetos celestes, la mayoría de los cuales habían sido descubiertos por Lacaille y Messier (1730-1817). En el año 1786, Herschel presentó a la Royal Society un catálogo de mil nuevas nebulosas y cúmulos estelares.

Tres años más tarde presentó un segundo catálogo, y en 1802 un tercer catálogo conteniendo 500 de aquellos objetos estelares. Cada nebulosa era observada cuidadosamente y se describía su aspecto y su posición. Además, con el fin de proporcionar una idea general de la distribución de las nebulosas, se señalaban en un mapa de estrellas. Hacia 1789, Herschel había lanzado la idea de que las diferentes clases de nebulosas y cúmulos estelares eran objetos del mismo tipo en diferentes etapas de desarrollo, existiendo una cierta causa que hacía que una nebulosa se convirtiera en un cuerpo más brillante y más condensado, de modo que la condensación podía considerarse como un signo de la "edad". En 1791, el cambio de opinión de Herschel sobre la naturaleza de las nebulosas condujo a una modificación correspondiente de sus puntos de vista sobre ese proceso de condensación. Por otra parte, hacia el final de su vida, Herschel cambió de opinión acerca de otro tema. Cuando usó por primera vez el telescopio de seis metros para explorar la Vía Láctea, pensó que había tenido éxito en convertir su luz tenue y "nubosa" en las estrellas que la componen. Sin embargo, más tarde se convenció de que quedaban partes "nubosas" tales que sus telescopios eran incapaces de separar en sus estrellas correspondientes.

Uno de los descubrimientos más notables de Herschel fue obtenido como consecuencia de una investigación enteramente diferente. Del mismo modo que Bradley descubrió la aberración y la nutación al tratar de determinar la paralaje estelar, el mismo problema condujo a Herschel al descubrimiento de los sistemas dobles de estrellas. En 1782 fue publicado un primer catálogo de 269 pares de estrellas. Un segundo catálogo de 434 pares fue presentado a la Royal Society a finales de 1784. Otro trabajo, presentado también a la Royal Society en 1821, contenía una lista de 154 pares más. Además de la posición, Herschel hacía constar la distancia angular entre los dos miembros y también el brillo de ambos. Herschel había partido de la idea de que un sistema doble de estrellas era consecuencia de una coincidencia meramente accidental de las direcciones de dos estrellas que no tenían relación entre sí, y tales que una de ellas debía estar muy alejada de la otra. Una serie de observaciones del sistema doble Castor, constituido por dos estrellas separadas 5" entre sí, presentadas en dos trabajos publicados en 1803 y 1804, habían demostrado una progresiva alteración en la dirección de la línea que unía sus componentes. El carácter de dicho desplazamiento era tal que no dejaba lugar a dudas de que las dos estrellas se movían una alrededor de la otra. Además se tenían otros cinco casos en que se había observado un movimiento similar. En estos seis casos se demostró que el sistema binario estaba formado realmente por dos estrellas que estaban lo suficientemente cercanas como para influir en sus respectivos movimientos. Un sistema binario de este tipo se denomina estrella doble, para distinguirla de los sistemas binarios meramente ópticos, cuyos miembros no tienen conexión entre sí. En tres casos, incluido el de Castor, las observaciones fueron suficientes para calcular el periodo de revolución de una estrella alrededor de la otra. Para Castor, Herschel obtuvo el valor de 342 años y para las otras dos se obtuvieron los valores de 375 y 1200 años. Herschel dedujo que el movimiento de revolución observado de una estrella doble era debido a

la mútua atracción gravitatoria de sus miembros. Después de su muerte se comprobó que la suposición de Herschel era cierta, constituyendo así la primera evidencia de la extensión de la ley de gravitación a regiones fuera del sistema solar.

Desde los tiempos de Halley se sabía que ciertas estrellas poseían movimientos propios. La convicción, que generalmente se había ido consolidando entre los astrónomos, de que el Sol era sólo una estrella más entre las otras estrellas sugería la posibilidad de que éste también podía moverse en el espacio. Herschel utilizó los movimientos propios de 14 estrellas publicados por Maskelyne y Lalande (1732-1807), y esto le permitió determinar el movimiento del Sol y la dirección según la cual tenía lugar. Herschel denominó "apex" al punto de la esfera celeste hacia el que se dirige el sistema solar. Dicho punto está situado en la constelación de Hércules.

III. ASTRONOMIA Y MECANICA CELESTE EN EL SIGLO XIX

III.1.- Astronomía de observación. Legendre. Gauss. Asteroides

El progreso en la observación durante el siglo XIX se basó en gran medida en los avances instrumentales. Se hicieron enormes perfeccionamientos en el delicado trabajo de construir grandes lentes y también se descubrieron nuevos métodos para montar los telescopios y para efectuar y registrar las observaciones. Tycho Brahe ya había reconocido la necesidad de tener en cuenta las fuentes de error conocidas y de disminuir, tanto como fuera posible, el efecto de errores debidos a causas desconocidas. Estas consideraciones habían jugado un importante papel en el trabajo de Flamsteed y Bradley. El método de mínimos cuadrados, introducido independientemente por Legendre y Gauss, fue un método sistemático para combinar observaciones que proporcionaban resultados ligeramente diferentes, obteniéndose un resultado más próximo a la realidad.

Adrien Marie Legendre (1752-1833) nació en Toulouse. Desde 1775 a 1780 ocupó un puesto en la Escuela Militar de París. En 1783 ingresó en la Academie des Sciences. Más adelante, en 1787, formó parte de la comisión encargada de las operaciones geodésicas que debían unir el observatorio de París al de Greenwich. Las restantes contribuciones de Legendre en la ciencia lo fueron en el campo de las matemáticas.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) nació en Gotinga. En 1799 obtuvo el doctorado por la universidad de Helmsted bajo la dirección de Pfaff. Las dos primeras contribuciones de Gauss en el campo de la ciencia le valieron el ser nombrado en 1807 profesor de Astronomía y director del observatorio de Gotinga. Esta dirección la ejerció durante casi cincuenta años. Además de sus importantes contribuciones en el campo de las matemáticas, así como en magnetismo y

otras ramas de la física, también hizo aportaciones de importancia en astronomía. Una de ellas consiste en un método de cálculo de la órbita de un planeta a partir de tres observaciones completas de su posición, publicado en el año 1809.

La determinación de la órbita de un planeta depende de seis elementos independientes. Cualquier observación completa de la posición del planeta en la esfera celeste proporciona dos cantidades, por ejemplo, la ascensión recta y la declinación. De ahí que tres observaciones completas proporcionan seis ecuaciones que teóricamente son adecuadas para determinar los elementos de la órbita. Las órbitas de todos los planetas, salvo la de Urano, se habían obtenido por medio de la utilización de observaciones efectuadas durante siglos y era factible utilizar observaciones hechas en instantes particulares, elegidos de tal manera que ciertos elementos pudieran ser determinados sin ningún conocimiento de los otros. En el caso de los cometas, no sólo había un conjunto considerable de observaciones, sino que el problema se simplificaba por el hecho de que la órbita podía ser parabólica.

El día 1 de enero de 1801, Piazzi descubrió un planetóide, que sólo pudo ser observado durante unas semanas. Quedaba planteado otro problema de cálculo de una órbita. Gauss pensó aplicar la solución ideada por él al nuevo astro, considerando tres observaciones lo más distanciadas posibles en el tiempo. De esta manera, el problema se trataba de un modo general, como jamás se había hecho antes, y permitía deducir la órbita elíptica recorrida por el planeta con una precisión que se podía aumentar notablemente, utilizando, además de las tres observaciones fundamentales, otras pertenecientes al periodo de visibilidad del pequeño planeta. A tal efecto Gauss ideó el método de mínimos cuadrados. Este método y los sucesivos estudios de Gauss sobre la distribución normal de los errores encontraron una larga aplicación en astronomía y en otras ciencias. Los resultados fueron publicados por Gauss en 1821 en un trabajo titulado "Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae".

Una vez que Gauss hubo hecho el cálculo de la órbita y el cálculo de las efemérides, el barón de Zach volvió a encontrar el 7 de diciembre de 1801 el planeta perdido, casi exactamente en la posición prevista por Gauss. El "pequeño planeta", primero entre los muchos de esta clase de astros que se encuentran entre Marte y Júpiter, fué bautizado por Piazzi con el nombre de Ceres. Dada la probabilidad de que existieran otros pequeños planetas de la misma naturaleza, los astrónomos comenzaron a buscarlos. Olbers (1758-1840), en 1802, descubrió un segundo planetóide, al que impuso el nombre de Pallas, y, sucesivamente, se encontraron otros dos: Juno y Vesta.

Gauss continuó aplicando y generalizando sus métodos, de manera que en 1809 pudo publicar su clásica obra "Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem

ambientium". En el prefacio de este libro Gauss escribía: "... los métodos usados en un principio sufrieron tantos y tan grandes cambios, que entre el modo como fue calculada la órbita de Ceres y el método expuesto en esta obra apenas quedan rastros de una lejana semejanza". Era ya evidente que muchos pequeños planetas giraban alrededor del Sol entre las órbitas de Marte y Júpiter, y que eran restos, tal vez, de un planeta mayor que estalló por fuerzas internas.

Herschel se interesó mucho por el descubrimiento de Piazzi, y en 1802 le envió un resumen de sus observaciones sobre Ceres y Pallas. De los cálculos de Gauss dedujo Herschel que esos nuevos astros debían ser extremadamente pequeños en comparación con los otros planetas del sistema solar. Por estas razones y por estar fuera del zodíaco no creía que pudiera llamárseles planetas, pero como tampoco eran cometas, debía tratarse de una nueva especie de astros. Estos, dispersos entre las estrellas fijas, se parecen tanto a éstas que no pueden distinguirse unos de otras ni siquiera con un buen telescopio. Fundándose en esto, Herschel propuso el nombre de "asteroides". Los asteroides se caracterizaban por el hecho de tener, además de una pequeña masa, órbitas de pequeña o gran excentricidad, girando alrededor del Sol en planos inclinados con todos los ángulos posibles respecto al plano de la eclíptica. Su movimiento podía ser directo o retrógrado. Piazzi dijo que estos astros podían llamarse "planetoides" o "cometoides", pero nunca asteroides. A su juicio, el único carácter distintivo entre los cometas y los planetas era la excentricidad e inclinación de sus órbitas. Por lo tanto, Ceres sería planeta y Pallas cometa. Las investigaciones posteriores le han dado la razón a Piazzi, y el nombre impropio de asteroide, a pesar de que se usa a veces, se va olvidando en favor de la denominación de "pequeños planetas". Entre los muchos que se han descubierto desde la época de Piazzi, no se ha encontrado ni uno sólo que tenga movimiento retrógrado como suponía Herschel.

III.2.- Bessel. Struve

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) puede llamarse el "príncipe de los observadores". Encauzado por su padre al comercio, siguió luego su inclinación hacia la astronomía, comenzando a observar los satélites de Saturno para deducir la masa de éste a partir de sus perturbaciones. En 1810, el rey de Prusia, queriendo establecer en Königsberg un nuevo observatorio, llamó al joven Bessel para que se encargara de su dirección. Enseguida comprendió él la necesidad de instrumentos de gran precisión para llegar a establecer con la mayor exactitud posible las constantes astronómicas, tales como la de precesión, la de aberración y de refracción, así como también la verdadera posición de las estrellas en una época determinada. En espera de elaborar su programa de observaciones, Bessel estudió las famosas observaciones efectuadas por Bradley en Greenwich de 1750 a 1762, con las que éste descubrió la aberración de la luz. De esta manera, Bessel pudo publicar en 1818 su obra

"Fundamenta astronomiae pro anno MDCCLV deducta ex observationibus viri incomparabilis, James Bradley in specula astronomica grenovicensi per annos 1750-1762 institutis". Los métodos de reducción que usó fueron corregidos en sus "Tabulae regiomontanae", utilísimas en la práctica de los cálculos astronómicos.

Habiendo obtenido para el observatorio de Königsberg un nuevo círculo meridiano, Bessel pudo comenzar el ingente trabajo de determinar las posiciones de todas las estrellas hasta la novena magnitud, en la zona del cielo comprendida entre los 15 grados de declinación austral y los 45 grados de declinación boreal. Para este fin, en el curso de doce años efectuó 75.000 observaciones, con la ayuda de Argelander, director del observatorio de Bonn.

Con un heliómetro (micrómetro adaptado a la medida de pequeños ángulos) Bessel, en el transcurso de un año, midió la distancia angular del sistema binario 61 Cygni a dos débiles estrellas cercanas, que no están dotadas de un movimiento propio tan notable como el de aquel sistema, y que debían encontrarse mucho más lejanas con respecto al sistema solar. A finales de 1838, Bessel pudo anunciar que los elementos del sistema 61 Cygni describían en el cielo, en el curso de un año, una pequeña elipse aparente, imagen del recorrido que hace la Tierra en torno al Sol. En otras palabras, había logrado determinar la primera "paralaje anual" de una estrella, que resultó tener un valor de 0".30, lo que equivalía a una distancia de 11 años luz. De esta forma, Bessel consiguió resolver un antiguo problema que tanto había fatigado a sus predecesores. La notable precisión que obtuvo Bessel en las medidas llevadas a cabo con el heliómetro lo indujeron a determinar las distancias de Saturno y Júpiter a sus satélites, con el fin de conocer la masa de estos planetas.

No menos importante fué la obra de Friedrich Wilhelm Struve (1793-1864), el primero de una familia de astrónomos. Nacido en Altona, Alemania, emigró muy joven a Rusia, donde fijó su residencia. Se dedicó primero a los estudios clásicos, pero muy pronto los dejó por la astronomía, llegando a ser director del observatorio de Dorpat (Livonia) y profesor en esa universidad. Allí adquirió un círculo meridiano y un telescopio reflector de nueve pulgadas de abertura, con los que pudo competir con Bessel en la nueva era de observaciones astronómicas de posición.

A partir de 1819, Struve inició en Dorpat observaciones regulares de las estrellas dobles, midiendo los ángulos de posición y la distancia de las componentes más luminosas con respecto a las que lo eran menos, y publicando un año después su primer catálogo de estrellas dobles. Este no fué más que el principio de un enorme trabajo que comenzó a interesar a un gran número de astrónomos, que consistía en multiplicar las medidas, y en determinar las verdaderas órbitas de las estrellas dobles por su movimiento en torno a su centro de gravedad. Utilizando el

nuevo reflector, Struve, después de dos años de observaciones, publicó su "Catalogus novus generalis stellarum duplicium et multiplicium", que abrió una nueva época en la historia de la astronomía. De este trabajo se concluía de manera cierta que la duplicidad o multiplicidad de una estrella no es una excepción, probando así la existencia de verdaderos y propios sistemas de estrellas gobernados por la misma ley de gravitación universal.

Siguiendo con su programa y examinando alrededor de 120.000 estrellas, Struve determinó los ángulos de posición, las distancias, las magnitudes y los colores de un gran número de estrellas dobles, en observaciones que publicó en 1837 en su clásica obra "Stellarum compositarum mensurae micrometricae", seguida quince años después por otra obra titulada "Stellarum fixarum imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae", en la que también se dan los movimientos propios calculados, teniendo en cuenta las más antiguas observaciones.

En el estudio de la estructura de la Galaxia, Struve aportó notables contribuciones, agregadas a las obtenidas por Herschel para ambos hemisferios, acerca de la distribución de las estrellas con respecto al ecuador galáctico.

El año 1833 fué decisivo en la vida de Struve, pues fue llamado por el emperador Nicolás para que construyera y dirigiera el gran observatorio central del Imperio Ruso, cercano al pueblo de Pulkova, no lejos de San Petersburgo. El observatorio fue verdaderamente grandioso, tanto por lo que se refiere a su concepción como a su dotación de nuevos y precisos instrumentos. Construido sobre la base de la experiencia adquirida en París y en Greenwich, se dedicó mas bien al estudio de las estrellas fijas que al del sistema solar. Siguiendo las ideas de Bessel, se dotó al observatorio de Pulkova, entre otras cosas, de un gran instrumento cenital especialmente adaptado para las observaciones en el primer vertical, las cuales, como demostró Bessel, son especialmente buenas para obtener las paralajes y las constantes de aberración y nutación.

A Struve se deben nuevas y cuidadosas determinaciones de las constantes de aberración, precesión y nutación y también la determinación de las primeras paralajes estelares. La perfección de los instrumentos que mandó construir para Pulkova, por famosos artífices de su tiempo, le permitieron realizar notables progresos, de manera que otros observatorios europeos siguieron su ejemplo.

La hipótesis avanzada por Herschel y Struve respecto a que las estrellas dobles forman sistemas físicos y que para éstos debe valer la ley de gravitación, fué demostrada por Felix Savary (1797-1841), profesor de astronomía y geodesia en la Ecole polytechnique de París. En su memoria publicada en 1827, que lleva por título "Sur la détermination des orbites que

décrivent autour de leur centre de gravité deux étoiles très rapprochées l'une de l'autre", probaba por vez primera la validez de esa hipótesis, calculando la órbita de una estrella de Ursae majoris, que cumple su revolución en un periodo de aproximadamente 60 años. Así quedaba probado que los componentes de una estrella doble física describen una elipse alrededor de su centro de gravedad común, siguiendo las leyes de Kepler y por tanto, éstas y las leyes de Newton, se podían extender a todo el universo.

III.3.- El descubrimiento de Neptuno. Adams. Leverrier

El descubrimiento más sensacional del siglo XIX, que vino a demostrar los grandes progresos hechos en el campo de la mecánica celeste, fue el de un nuevo miembro del sistema solar. Hacia 1820, el movimiento anómalo de Urano había suscitado dificultades imprevistas para poner de acuerdo las antiguas observaciones del planeta con las más modernas, de manera que ya Bessel expresaba a Humboldt la opinión de que llegaría el momento en que el misterio de Urano se resolvería con el descubrimiento de un nuevo planeta, cuyos elementos se podrían calcular por su acción sobre Urano, y eventualmente verificar, por su acción sobre Saturno.

En 1841, John Couch Adams (1819-1892) concentró su atención sobre este problema y dos años después, trabajando en su tesis doctoral, intentó una primera resolución aproximada del problema, calculando una órbita de radio igual al doble de la distancia media de Urano al Sol. Después de obtener del astrónomo real Airy (1801-1892) las observaciones de Urano realizadas en Greenwich, Adams pudo llegar a otra solución más aproximada para la masa, la longitud heliocéntrica y los elementos de la órbita del hipotético planeta y comunicó sus resultados al observatorio de Greenwich en octubre de 1845.

De manera completamente independiente, Urbain Jean Leverrier (1811-1877), sucesor de Arago en la dirección del observatorio de París, presentó en junio de 1846 a la Académie des Sciences una memoria en la que, habiendo recogido las observaciones más seguras sobre Urano, las comparaba con la teoría expuesta en una memoria anterior, y llegaba a la conclusión de que era imposible representar el movimiento observado de Urano sin admitir la presencia de alguna acción extraña. La hipótesis de que la ley de gravitación universal ya no era totalmente válida a la distancia de Urano se debía descartar, porque demasiadas pruebas se habían recogido sobre su validez aún más allá del sistema solar. No quedaba más que admitir la presencia de otro planeta desconocido, situado sobre el plano de la eclíptica y a una distancia al Sol doble de la de Urano. Por tanto, el problema era el mismo que Adams había ya resuelto, y, en efecto, Leverrier encontró que sólo en una región del plano de la eclíptica podía existir un cuerpo perturbador cuya presencia explicara las irregularidades observadas en el movimiento de Urano, concluyendo, el 1 de enero de 1847, que la longitud heliocéntrica del astro perturbador debía

ser de casi 325 grados, pero sin dar los elementos de la órbita o la masa del planeta. El lugar que Leverrier le asignó difería solo en 1 grado del que le dió Adams en las memorias presentadas al observatorio de Greenwich siete meses antes. En agosto de 1847, Leverrier presentó a la Académie des Sciences su tercera memoria en la cual se encontraban los elementos de la órbita del nuevo planeta.

En Inglaterra, en el observatorio de Cambridge, se inició la búsqueda del planeta a fines de julio de 1846; las observaciones continuaron durante dos meses en la zona zodiacal que tenía su centro en la eclíptica a 325 grados de longitud y de 5 grados de latitud norte a 5 grados de latitud sur. Como en Inglaterra no había un mapa de la zona, la investigación fué muy penosa; sin embargo, el planeta fué efectivamente observado en agosto, pero sin que se notara su desplazamiento, y, por lo tanto, sin descubrirlo. El 3 de septiembre Adams comunicó al astrónomo real una nueva solución del problema que disminuía ligeramente la distancia del planeta, pero las investigaciones del cielo, confiadas al director del observatorio de Cambridge proseguían lentamente. Mientras tanto, Leverrier comunicó sus conclusiones a Johann G. Galle (1812-1910), asistente de Encke (1791-1865) en el observatorio de Berlín. Habiendo recibido la carta el 23 de septiembre de 1846, Galle habló con su director Encke, que no se mostró muy entusiasta de la proposición de Leverrier. Sin embargo, Galle, habiendo podido consultar esa misma noche un nuevo mapa celeste de Bremiker, descubrió rápidamente el planeta comparando las estrellas señaladas en el mapa con las que observaba en el cielo. Esa noche siguió el astro durante el mayor tiempo posible, pero ni por su disco, ni por su movimiento se aseguraba aún que se trataba del nuevo planeta. A la noche siguiente, después de comprobar su movimiento, Galle escribió a Leverrier: "El planeta del que usted ha señalado la posición existe realmente". Poco después el descubrimiento fué comunicado a la Académie des Sciences de París. Así le fueron dados nombre y signo al planeta a la semana de haberlo descubierto. Galle había sugerido el nombre de Janus, que mitológicamente es el predecesor de Saturno. La noticia del descubrimiento del planeta llegó a Inglaterra el 30 de septiembre; hasta aquel día el análogo trabajo de Adams sólo era conocido por unas pocas personas y nada se había llegado a saber en el extranjero. En consecuencia, cuando los astrónomos oficiales, a los cuales Adams había comunicado sus resultados casi idénticos a los de Leverrier, dieron a conocer sus vanas y tardías investigaciones, surgieron animadas polémicas que cesaron sin embargo muy pronto, quedando el respeto y la admiración debidos a los dos astrónomos, que, sin conocerse y de manera independiente, habían resuelto un problema cuya solución había parecido imposible.

La primera determinación de la órbita de Neptuno fué hecha por Adams utilizando las observaciones de los días 4 y 12 de agosto anteriores al descubrimiento oficial. En noviembre de 1846, Leverrier publicó sus "Recherches sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)", donde expuso los procedimientos analíticos y numéricos de que se había servido

para descubrir el cuerpo perturbador. En los años siguientes, en el observatorio de París, Leverrier emprendió el inmenso trabajo de revisar completamente las teorías de Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, calculando tablas de sus movimientos, mientras que Adams elaboró un importante análisis de las investigaciones más complicadas y laboriosas de esta obra, publicada en los anales del observatorio de París.

III.4.- Poincaré

Henri Poincaré (1854-1912) fué reconocido universalmente a principios del siglo XX como el mejor matemático de su generación. Fué el último hombre que conoció toda la matemática, tanto pura como aplicada. Escribió más de treinta libros técnicos, libros de divulgación y casi quinientos artículos sobre matemáticas. Pocos matemáticos han tenido una visión filosófica tan amplia como Poincaré, y parece ser que ninguno le ha superado en el don de exponer con claridad.

Poincaré había nacido en Nancy. Después de los estudios primarios ingresó en la Escuela Politécnica a la edad de diecinueve años. En 1875 accedió a la Escuela de Minas y dos años más tarde era ingeniero de minas en Vesoul. En 1878 presentó su primer trabajo a la Academie des Sciences de París. Al año siguiente renunció a la carrera de ingeniero. El ministro de Obras Públicas lo puso a disposición de la enseñanza superior. Así, fué destinado a la Facultad de Ciencias de Caen como encargado de curso de Análisis Matemático. En el año 1881 fué llamado a la Sorbona y después, en 1885, fué nombrado encargado de curso de Mecánica física y experimental en la Facultad de Ciencias de París. En 1886 ocupó la cátedra de Física matemática y Cálculo de probabilidades y en 1886 ocupó la de Astronomía matemática y Mecánica celeste. En 1887 había sido elegido miembro de la Academia de Ciencias y más tarde, en 1908, lo fue de la Academia Francesa.

Desde los tiempos de Newton la astronomía había proporcionado a los matemáticos más problemas que los que podían resolver. Hasta finales del siglo XIX las herramientas usadas por aquéllos en su estudio de la astronomía fueron, prácticamente, simples perfeccionamientos de las inventadas por Newton, Euler, Lagrange y Laplace. Pero a través del siglo XIX, después de que Cauchy (1789-1857) desarrollara la teoría de las funciones de variable compleja y de las investigaciones de dicho autor y otros sobre la convergencia de las series infinitas, la labor de los matemáticos fue acumulando un conjunto de métodos todavía no utilizados que le parecieron a Poincaré muy adecuados para ser aplicados a los problemas de mecánica celeste. Eligió los útiles que le parecieron mejores, los perfeccionó, inventó otros nuevos y se enfrentó con los problemas de la astronomía teórica en forma muy amplia.

En el año 1889 Poincaré ganó un gran premio internacional establecido en 1887 por Oscar II, rey de Suecia. La memoria premiada llevaba por título "Sur le problème de trois corps et les equations de la dynamique". Desde los tiempos de Euler, el problema de tres cuerpos ha sido considerado como uno de los problemas matemáticos más difíciles. Una vez planteado, el problema se reduce a resolver un sistema de nueve ecuaciones diferenciales ordinarias, todas lineales y de segundo orden. En este célebre problema pueden plantearse las cuestiones de si uno de los cuerpos permanecerá siempre en una cierta región del espacio o podrá alejarse indefinidamente, y de si la distancia entre dos cuerpos aumentará o permanecerá comprendida entre ciertos límites. Se trata del problema de la estabilidad del sistema solar, es decir, de saber si en el curso de los siglos las dimensiones de las órbitas del sistema planetario variarán poco o si, por el contrario, los cuerpos se perderán en el infinito o se precipitarán sobre el Sol.

El problema de las órbitas planetarias reveló la importancia de las soluciones periódicas en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Lagrange había encontrado en 1772 soluciones periódicas particulares del problema de tres cuerpos en su memoria titulada "Essai sur le problème des trois corps". La determinación de soluciones periódicas sería proseguida eficazmente por Hill (1838-1914) en sus trabajos sobre el movimiento de la Luna, que fundaron la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes periódicos. Poincaré demostró que el procedimiento de Hill era convergente y elaboró la teoría de determinantes infinitos y de sistemas de infinitas ecuaciones diferenciales.

Poincaré inauguró un nuevo enfoque para la búsqueda de soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los movimientos planetarios. Puesto que las ecuaciones del movimiento de tres cuerpos celestes no pueden ser resueltas en términos de funciones conocidas, y dado que el problema tiene incluso una infinidad de soluciones, Poincaré centró su atención en las relaciones que existen entre éstas. Su teoría "cualitativa" de las ecuaciones diferenciales se presentó en cuatro memorias fundamentales publicadas entre 1881 y 1886, que tratan todas sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial. El problema planteado en lenguaje astronómico consiste en saber si las órbitas son estables o inestables, lo que puede traducirse en lenguaje matemático mediante preguntas como las siguientes: el punto móvil, ¿describe una órbita cerrada?, ¿permanece en el interior de una cierta porción del plano? En su memoria premiada en el concurso de 1889, Poincaré consideró una teoría aún más general, aplicada al problema de tres cuerpos. Demostró que existen, en general, una infinidad de posiciones iniciales y velocidades iniciales tales que las distancias mutuas entre los tres cuerpos son funciones periódicas del tiempo.

La obra más original de Poincaré quedó resumida en su tratado titulado "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", publicada en tres volúmenes que aparecieron en 1892, 1893

y 1899. Dicho tratado fué seguido por otra obra en tres volúmenes aparecida entre 1908 y 1910, titulada "Leçons de mécanique céleste". Más tarde apareció publicado un curso de conferencias titulado "Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide" y un libro de crítica histórica titulado "Sur les hypothèses cosmogoniques". De la primera de estas obras Darboux dijo que iniciaba una nueva era en la mecánica celeste, y añadió que es comparable a la "Mécanique celeste" de Laplace y a la primera obra de D'Alembert sobre la precesión de los equinoccios. En el curso de "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" Poincaré elaboró su teoría de los desarrollos asintóticos, estudió la estabilidad de las órbitas e inició la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales no lineales. Sus investigaciones sobre la evolución de los cuerpos celestes le condujeron al estudio de las formas de equilibrio de una masa fluida en rotación, sometida a la atracción gravitatoria, descubriendo las figuras piriformes (en forma de pera), que desempeñaron un importante papel en los trabajos posteriores de G. H. Darwin (1854-1912), hijo de Charles Darwin.

APENDICE.

Resumen de los trabajos de Newton sobre la ley de gravitación universal

Isaac Newton (1642-1747) nació en Woolsthorpe, en el condado de Lincolnshire, Inglaterra. En el año 1661 ingresó en el Trinity College de Cambridge, donde imperaban la filosofía de Descartes y el empirismo de Bacon. Newton empezó a estudiar física y matemáticas, aprendiendo en poco tiempo la geometría de Euclides y la geometría cartesiana. Isaac Barrow (1630-1677), que en 1659 había obtenido la cátedra de griego y matemáticas en Cambridge, sugirió a Newton que estudiara la "Optica" de Kepler, la obra de Vieta (1540-1603) y la "Arithmetica infinitorum" de Wallis (1616-1703).

En 1665, año en que Newton se graduó en filosofía, se desencadenó una gran peste en Londres, alcanzando en poco tiempo las ciudades de Oxford y Cambridge, obligando a que se cerraran las universidades. Newton se retiró a Woolsthorpe donde realizó estudios que iban a ser decisivos puesto que en ellos se encuentra el fundamento de lo que sería su obra científica. Primeramente formuló de un modo provisional lo que iba a ser el principio fundamental de su teoría de la gravitación universal, aunque parece ser que dicho fundamento fué solamente una hipótesis para su trabajo. En segundo lugar redactó un esbozo del cálculo de fluxiones. Por último se dedicó a pulir lentes e inició los estudios sobre la luz blanca solar.

En 1667, cuando la virulencia de la epidemia de peste había remitido, Newton volvió a Cambridge para proseguir su carrera académica. En 1669 fué nombrado profesor Lucasiano de matemáticas, reemplazando a Barrow, y ocupando este puesto hasta 1701, año en que

renunció. Siendo titular de esa cátedra pronunció las "Lectures", en las que exponía casi todo el material de sus descubrimientos. En 1672 fué elegido miembro de la Royal Society, que había sido fundada recientemente.

Algunos astrónomos ya habían hecho especulaciones acerca de la causa de los movimientos de los planetas y de los satélites. Kepler había llamado la atención sobre el hecho de que los movimientos en cuestión habían de ser considerados como debidos a la influencia de otros cuerpos. El propio Kepler había efectuado algún intento de explicar el movimiento de los planetas como si fuera debido a un cierto influjo que emanara del Sol. Sin embargo, se equivocó al buscar una fuerza que "empujara" a mantener los planetas en movimiento. Los descubrimientos de Galileo sobre el movimiento permitieron considerar aspectos nuevos de los problemas mecánicos, pero no fueron desarrollados para aplicarlos al caso particular de los movimientos planetarios. Borelli (1608-1679), en un libro sobre los satélites de Júpiter, señaló que un cuerpo que se mueve describiendo una circunferencia u otra curva similar mostraba una tendencia a alejarse del centro, y afirmaba que en el caso de los planetas este hecho podía contrarrestarse con algún tipo de atracción hacia el Sol. De este modo surgió la idea de que el movimiento de un planeta tenía que explicarse como originado por una fuerza dirigida al Sol y no por una fuerza que actuaba según la dirección del movimiento. Huygens (1629-1695) llevó esa idea más lejos, aunque sin hacer referencia especial a la astronomía. Obtuvo una medida numérica de la tendencia de un cuerpo que se mueve en una circunferencia a alejarse del centro, tendencia que, en cierta forma, tiene que contrarrestarse para que el cuerpo no escape de su órbita. Estas ideas están contenidas en algunos pasajes de sus obras "De vis centrifuga" y "Horologium oscillatorium". Para expresar numéricamente las tendencias mencionadas se hacía preciso introducir el concepto de aceleración, idea que introdujo Galileo al examinar la ley del movimiento de los graves. Otra investigación del movimiento circular mostró que éste quedaba completamente explicado si el cuerpo móvil presentaba, además de su velocidad original, una aceleración dirigida hacia el centro. Este resultado apareció en el libro "Horologium oscillatorium" y fué descubierto independientemente por Newton en 1666.

Un planeta cualquiera gira alrededor del Sol en una órbita cuya forma no difiere mucho de la circular. Si se supone que tal órbita es una circunferencia, el planeta ha de experimentar una aceleración dirigida hacia el centro de aquélla. Este hecho sólo puede atribuirse a la influencia del cuerpo central. De esta forma surgió la idea de atribuir al Sol el poder de influir en cierto modo sobre un planeta que gira a su alrededor, para conferirle una aceleración dirigida hacia él. Inmediatamente se planteó la cuestión de cómo esa "influencia" variaba con las distancias. Para dar una respuesta a dicha pregunta, Newton hizo uso de la tercera ley de Kepler. De acuerdo con ella, el cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita, y la constante de proporcionalidad es la misma para todos los

planetas del sistema solar. En el supuesto de que los planetas se movían en circunferencias, satisfaciendo la tercera ley de Kepler, Newton descubrió que esos movimientos podían explicarse como debidos a la acción solar si se suponía que el Sol atraía hacia sí a cualquier planeta con una aceleración que "era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia" entre los dos astros. A continuación, Newton se planteó el problema de averiguar si el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra podía explicarse de forma parecida a la dada para los planetas. En efecto, Newton logró demostrar que la Luna experimentaba una aceleración dirigida hacia la Tierra.

El problema de los movimientos planetarios era uno de los numerosos temas objeto de discusión por parte de los miembros de la Royal Society. Robert Hooke (1635-1703) sugirió antes de 1674 que los movimientos de los planetas podían explicarse por la atracción que existía entre ellos y el Sol. También se refirió a la posibilidad de que la atracción de la Tierra variara de acuerdo con la "ley del inverso del cuadrado". En esta línea de investigación figuraba Christopher Wren (1632-1723), más conocido como arquitecto que como hombre de ciencia y en 1677 discutió con Newton algunas de las cuestiones anteriores. A finales de 1679, Newton recibió una carta de Hooke en la que se trataba del tipo de curva que debería describir un cuerpo que cae, teniendo en cuenta la rotación de la tierra. Esto estimuló a Newton e hizo que aumentara su inclinación hacia el estudio del movimiento de los cuerpos celestes.

En el año 1679, Newton hizo otro descubrimiento de importancia. Demostró que si un cuerpo se movía alrededor de un cuerpo central de tal manera que la línea que los unía barría áreas iguales en tiempos iguales, tal como sucede en la segunda ley de Kepler, entonces resultaba que el cuerpo móvil estaba afectado por una atracción dirigida exactamente hacia el cuerpo central. Además, si la trayectoria del cuerpo móvil era una elipse y el cuerpo central estaba situado en un foco, tal como sucede en la primera ley de Kepler, resultaba entonces que la fuerza de atracción debía variar en los distintos puntos de la curva siguiendo la ley del inverso del cuadrado de la distancia entre los dos cuerpos. Quedó probado que las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas conducían necesariamente a las conclusiones siguientes: la aceleración que el Sol imprime a cada planeta está dirigida hacia aquél según la línea que los une y cuya magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Además, tal aceleración proporciona una suficiente explicación del movimiento planetario.

Edmund Halley, desconocedor del trabajo llevado a cabo por Newton en 1666, redescubrió en 1684 la ley del inverso del cuadrado como consecuencia de la tercera ley de Kepler, y discutió con Wren y Hooke cuál debía ser la curva que habría de describir un cuerpo sobre el que actuara una atracción que variara de acuerdo con dicha ley. En el mismo año 1684 Halley visitó a Newton en Cambridge y le preguntó cuál sería la curva descrita por los planetas,

suponiendo que la atracción hacia el Sol fuera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Newton respondió que tal curva sería una elipse, pues así había resultado de sus cálculos. No pudiendo hallarlos Newton prometió a Halley rehacerlos y enviárselos. Al cabo de un cierto tiempo Newton envió a la Royal Society un libro titulado "Propositiones de Motu", que contenía los resultados mencionados y algunos otros relativos a los cuerpos que eran atraídos por un cuerpo central. Las once proposiciones que contenía el libro estaban presentadas de manera abstracta, pero se señalaba que algunas de ellas podían aplicarse al caso del movimiento planetario. A instancias de Halley, Newton amplió el número de resultados, de manera que el tratado que resultó contenía una gran cantidad de material que no figuraba en el "De Motu". A mediados de 1686 estuvo terminado el texto y listo para la imprenta. De nuevo intervino Halley, quién, además de supervisar la impresión, ayudó a Newton en la labor de reunir los datos astronómicos que fueron necesarios. Finalmente el tratado apareció en 1687 con el título de "Philosophiae naturalis principia mathematica".

Los "Principia" constan de una introducción y tres libros. El primer libro trata de manera general sobre problemas relativos al movimiento de los cuerpos, que están resueltos, en su mayor parte, de forma abstracta y sin hacer ninguna referencia especial a la astronomía. El segundo libro trata del movimiento de cuerpos a través de medios resistentes, tales como pueden ser los fluidos ordinarios. Este libro tiene una importancia astronómica pequeña. Sin embargo, en él se señalan algunas inconsistencias notorias de la teoría cartesiana de los vórtices. En el tercer libro se aplican al sistema solar los resultados obtenidos anteriormente. Este libro es una explicación de los movimientos de los cuerpos celestes.

La parte introductoria de los "Principia" contiene las "Definiciones" y los "Axiomas ó leyes del movimiento" y constituye una gran contribución a la dinámica, siendo la primera exposición coherente de las leyes fundamentales, de acuerdo con las cuales se producen o varían los movimientos de los cuerpos. Parece que el propio Newton no dió gran importancia a esta parte de los "Principia". De hecho, los principales resultados contenidos en dicha Introducción atrajeron menor atención al ser eclipsados por otros descubrimientos más sorprendentes contenidos en las restantes partes del tratado. Galileo fué el primero en enunciar la ley según la cual un cuerpo en movimiento continúa moviéndose en la misma dirección y con la misma velocidad a menos que alguna causa modifique su estado. Este postulado fué presentado por Newton como la primera de sus tres leyes fundamentales, siendo conocida con el nombre de primera ley del movimiento. Galileo también descubrió que un cuerpo que cae libremente se mueve con una velocidad que cambia continuamente debido a una aceleración uniforme, siendo esta aceleración la misma para todos los cuerpos. Por otra parte, era generalmente reconocido que la tendencia de un cuerpo a caer era debida a la acción de la Tierra. Newton amplió esa idea y demostró que la Tierra también producía una aceleración en el

movimiento de la Luna y que el Sol la producía en el movimiento de los planetas. Más adelante Newton se vió conducido a la idea general de aceleración que podía ser debida, en una variedad de formas, a la acción de otros cuerpos. A las ideas anteriores Newton añadió el difícil e importante concepto de masa, siendo un paso importante el reconocimiento de que ésta era una propiedad de los cuerpos, susceptible de medirse y de importancia fundamental en cuestiones relativas a la dinámica. Desarrollando las ideas de Galileo, Newton dió como medida de la acción ejercida por un cuerpo sobre otro el producto de la masa por la aceleración producida. Esta cantidad recibió nombres diversos hasta que, finalmente, se la conoció con el nombre de fuerza. El peso de un cuerpo se identificó con la fuerza que la Tierra ejercía sobre él. Debido a que la Tierra imprime la misma aceleración en todos los cuerpos situados en un mismo lugar, resultó que las masas de los cuerpos son proporcionales a sus pesos.

Newton expuso otro principio de gran importancia, conocido con el nombre de tercera ley del movimiento: a toda acción le corresponde siempre una reacción igual en sentido contrario. Los conceptos de acción y reacción han de considerarse en el sentido de que son fuerzas. Con las ideas de masa y fuerza, Newton llegó a establecer que la Tierra atrae a cualquier cuerpo con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de aquél al centro de la Tierra y proporcional a la masa del cuerpo. De la misma forma Newton había establecido que el movimiento de un planeta cualquiera podía explicarse por medio de la existencia de una atracción dirigida hacia el Sol, la cual producía una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del planeta al centro del Sol. Esto no sólo era válido para un mismo planeta en diferentes puntos de su órbita, sino que también era cierto para los diferentes planetas. Como consecuencia de esto, Newton dedujo que el Sol atrae a cualquier planeta con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del planeta, fuerza que también es proporcional a la masa del planeta. Por otra parte, la fuerza no sólo es proporcional a la masa del cuerpo atraído sino que también lo es a la masa del cuerpo que ejerce la atracción. De este modo, la atracción no sólo aparece como una propiedad del Sol como cuerpo central del sistema solar, sino que también aparece como una propiedad de cada planeta. Análogamente, en el sistema formado por la Tierra y la Luna, la atracción también aparece como una propiedad de esta última. Los cuerpos situados sobre la superficie terrestre son atraídos por la propia Tierra, y aquéllos, a su vez, atraen a ésta. Este hecho sugiere que tal poder de atracción no pertenece a cada cuerpo celeste considerado como un todo, sino que ese poder pertenece a las diferentes partículas que componen a dicho cuerpo. Así, finalmente, queda expresada en la forma más general la ley de gravitación: "toda partícula de materia atrae a otra partícula con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y directamente proporcional al producto de las masas de ambas partículas".

En los casos estudiados en astronomía, a que se ha hecho referencia, se consideraba que las atracciones entre los diversos cuerpos celestes estaban dirigidas hacia sus centros, al igual que la distancia se medía entre los dos centros respectivos. Newton logró demostrar que un cuerpo esférico con densidad uniforme atrae a cualquier partícula externa exactamente igual a como lo haría en el caso en que toda la masa de dicho cuerpo estuviera concentrada en su centro. Más adelante probó que lo anterior también era cierto para el caso de una esfera formada por capas esféricas de diferente densidad y con centro común.

Una vez que Newton hubo establecido la ley de gravitación universal, le quedaba el gran trabajo de deducir los movimientos de los diversos miembros del sistema solar a partir de las leyes del movimiento. A esta tarea dedicó gran parte del libro primero y tercero de los "Principia". Por otra parte, debía demostrar, si era posible, que los movimientos calculados coincidían con los obtenidos por medio de la observación. A esta trabajo dedicó una parte de los libros primero y segundo de los "Principia". Si la labor mencionada fuera realizada con éxito, proporcionaría una comprobación del riguroso carácter de los principios de Newton.

La concepción del sistema solar como un mecanismo daba lugar a grandes dificultades cuando se trataba de calcular los diversos movimientos de los diferentes planetas, satélites y cometas. Si al estudiar el movimiento de un planeta, tal como Marte, fuera posible considerar a éste como sometido sólo a la atracción del Sol, ignorando los efectos de los restantes miembros del sistema solar, entonces el problema quedaría resuelto completamente utilizando las proposiciones establecidas por Newton, pudiendo calcularse en cualquier instante la posición de Marte con el grado de precisión deseado. Sin embargo, Marte está afectado además por las fuerzas de atracción de los restantes planetas y satélites, que causan perturbaciones en su órbita. El problema de obtener el movimiento real de Marte estaba muy lejos de las posibilidades de los métodos matemáticos existentes en aquella época. Sin embargo, afortunadamente, la masa del mayor de los planetas es mucho más pequeña que la del Sol, y así el movimiento de cualquier planeta está afectado sólo ligeramente por la atracción de los otros planetas, aunque produciendo perturbaciones en su órbita. Newton señaló ciertos efectos generales que resultaban de la acción mutua de los planetas, siendo el más interesante el movimiento de la línea de los ápsides de la órbita de la Tierra, que ya había sido notado por otros astrónomos.

El estudio del movimiento de la Luna presentaba dificultades. Newton, muy interesado por los problemas de la teoría lunar, superó aquéllas de un modo más completo que las conectadas con el movimiento planetario. El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es debido, en primer lugar, a la atracción de ésta, siendo insignificantes las perturbaciones originadas por los restantes planetas. No sucede lo mismo con el Sol, el cual produce un efecto perturbador muy sensible sobre la órbita lunar. Newton demostró que la acción de aquél

producía, necesariamente, perturbaciones de tipo general y además dió un resultado numérico muy aproximado para el caso del movimiento de los nodos de la Luna y el de su apogeo.

A partir de la teoría de gravitación, Newton obtuvo un conjunto de resultados que eran completamente nuevos. Por primera vez fué posible estimar las masas de algunos cuerpos celestes, comparando las atracciones que ejercían sobre otros cuerpos con la atracción debida a la Tierra. Por otra parte, al utilizar el principio de acción y reacción, Newton dedujo que el Sol está en movimiento respecto de los planetas, aunque en pequeña medida. También dedujo de esto que la tercera ley de Kepler no era estrictamente exacta y que las desviaciones respecto de ella son sensibles en el caso de grandes planetas como Júpiter y Saturno. Newton demostró también que para un sistema de cuerpos, tal como el sistema solar, moviéndose en virtud de sus atracciones mútuas, existe un punto particular, el centro de gravedad, que puede considerarse siempre en reposo. Para el caso del sistema solar, el Sol se mueve muy poco respecto de ese punto, de tal modo que la distancia entre dicho punto y el centro del Sol es menor que su diámetro.

Otra consecuencia que se dedujo de la ley de gravitación de Newton fué la siguiente: la variación del tiempo de oscilación de un péndulo en diferentes partes de la Tierra indicaba que ésta, probablemente, no era una esfera. Newton señaló que esta desviación respecto de la forma esférica era consecuencia de la propia atracción terrestre y de la mutua atracción de las partículas que componen la Tierra. El descubrimiento de la forma de nuestro planeta permitió a Newton dar una explicación de la precesión de los equinoccios, un fenómeno que se había descubierto mil ochocientos años antes, pero que desde entonces había constituido un misterio.

Al estudiar las mareas, Newton las atribuyó a la atracción de la Luna y el Sol, siendo más marcada la primera en razón de su cercanía a la Tierra. A causa de la atracción de la Luna los dos influjos se producían, según Newton, con un retraso medio de casi cincuenta minutos, resultado que estaba de acuerdo con las observaciones.

Newton también se ocupó de los cometas, que comunmente se habían considerado como productos de las regiones más altas de la atmósfera terrestre. Incluso astrónomos como Tycho Brahe, Galileo y Kepler, que reconocían la pertenencia de los cometas al conjunto de cuerpos celestes, fueron incapaces de ofrecer una explicación de sus movimientos y de sus irregulares apariciones y desapariciones. Newton se preguntó si el movimiento de los cometas podía explicarse, tal como el de los planetas, por medio de su gravitación hacia el Sol. Si ocurría así, la órbita debía ser una elipse, una parábola o una rama de hipérbola. Si un cometa se movía describiendo una elipse que difería muy poco de la forma circular, nunca se alejaría a gran distancia del Sol, y, por tanto, sería visible con regularidad, resultado que era contrario al

obtenido por observación. Sin embargo, en el caso en que la elipse fuera muy alargada resultaba que el periodo de revolución del cometa era muy grande. Durante gran parte de ese tiempo el cometa estaría muy alejado del Sol, y, por tanto, de la Tierra, con lo cual resultaría invisible. Si la trayectoria del cometa fuera una parábola, éste no regresaría, siendo visible solamente en aquella parte de su trayectoria cercana al Sol. La aparición de un cometa a finales de 1680 atrajo la atención de Newton, quien le asignó una órbita parabólica. Las posiciones del cometa que Newton obtuvo a partir de sus cálculos eran casi coincidentes con las posiciones obtenidas por observación. En las últimas ediciones de los "Principia" aparecieron las investigaciones de los movimientos de un cierto número de cometas, obteniéndose resultados similares al citado más arriba, resultando también que en muchos casos la trayectoria de un cometa era parabólica o era una elipse alargada, con un gran semeje mayor.

Los "Principia" se publicaron en 1687, y parece ser que sólo se imprimió una edición pequeña que se agotó en tres o cuatro años. Los primeros descubrimientos de Newton y la presentación a la Royal Society del tratado "De motu" habían preparado a los científicos, que esperaban nuevos e importantes resultados en los "Principia". Parece ser que esta obra fue leída por los principales astrónomos y matemáticos continentales, aunque fue recibida muy friamente en Inglaterra. La ley de gravitación de Newton, en la que intervenía la noción de una acción entre dos cuerpos separados por una región vacía, parecía ser difícil de aceptar por parte de pensadores que no habían comprendido totalmente el hecho de juzgar una teoría científica cuyas consecuencias concordasen con los hechos observados. Incluso un hombre como Huygens consideraba absurda la idea de la gravitación y expresó su sorpresa al ver que Newton se tomaba la molestia de efectuar gran número de laboriosos cálculos sin más fundamento que su ley de gravitación. Esto mostraba que Huygens no había comprendido que el acuerdo entre los resultados de esos cálculos y los hechos observados en la realidad, eran una demostración de la solidez del principio newtoniano. Las razones personales también contribuyeron a que en la Europa continental fuera preterido el trabajo de Newton. Entre otras razones estaba la disputa entre Newton y Leibniz acerca de la prioridad de la invención de lo que más adelante se llamaría cálculo. De hecho, transcurrió medio siglo antes de que las ideas y puntos de vista de Newton progresaran sustancialmente en el continente. En Inglaterra fué distinto: a pesar de la fría recepción inicial, los "Principia" fueron leídos con admiración por los que fueron capaces de entender el libro. Incluso filósofos como Locke, estudiantes, eruditos y cortesanos hicieron intentos de comprender las ideas generales de Newton, aunque los detalles matemáticos estuvieran fuera de su alcance.

Al explicar la diferencia entre los logros de Newton y los de sus predecesores se dice que éstos describían los movimientos celestes, mientras que Newton los explicaba. Así, por ejemplo, Kepler había descrito los movimientos planetarios por medio de sus tres leyes, pero

no podía responder a la pregunta de por qué los movimientos de los planetas satisfacían sus leyes. La pregunta fué contestada por Newton, quien demostrando que las características de los movimientos de los planetas son consecuencia de sus tres leyes del movimiento y de la ley de gravitación. A partir de esas mismas leyes se dedujeron como consecuencias necesarias el movimiento de la Luna y otros muchos fenómenos astronómicos y terrestres. Como consecuencia resultó que un gran número de hechos observados, hasta entonces disociados, pudieron relacionarse entre sí, convirtiéndose en consecuencias necesarias de las leyes fundamentales de Newton.

A Newton se le preguntó por qué los cuerpos se atraen entre sí de forma tan particular, y éste, que consideraba legítima dicha pregunta, no pudo contestarla, al igual que tampoco pudo responder a la pregunta de por qué los planetas tienen ciertos tamaños o por qué están a unas determinadas distancias del Sol. Las preguntas que no tuvieron respuesta por parte de Tolomeo, Copérnico y Kepler fueron, en parte o totalmente, contestadas por sus sucesores. Sus leyes resultaron ser consecuencias necesarias de otras leyes generales más simples. Sin embargo, resulta que hasta ahora nadie ha sido capaz de responder satisfactoriamente a las cuestiones que Newton dejó sin contestación.

El método seguido por Newton no difería esencialmente del empleado por Galileo. Los hechos se obtenían por medio de la observación o por medio de experimentos. A continuación se formulaba una hipótesis o una teoría provisional con el fin de dar cuenta de aquellos hechos. Por medio de un riguroso proceso deductivo se deducían a partir de esa teoría ciertas consecuencias capaces de compararse con la realidad. En el trabajo de Newton, la parte convincente de la demostración de sus resultados se apoyó en los dos últimos procesos mencionados. Newton afirmó que no había podido deducir a partir de los fenómenos reales la razón de las propiedades de la gravitación, añadiendo que él no inventaba hipótesis, nombre que debía darse a cualquier cosa que no pudiera deducirse de los propios fenómenos.

REFERENCIAS

1. Arago, F.: "Grandes astrónomos. (De Newton a Laplace)". Colección Austral. Espasa Calpe. Madrid 1968.
2. Berry, A.: "A short history of astronomy. From earliest times through the nineteenth century". Dover publications Inc. New York. 1961.
3. Collette, J. P.: "Historia de las matemáticas". Siglo veintiuno de editores de España S. A. Madrid 1985.

4. Laplace, P. S.: "Celestial mechanics". Chelsea Publishing Company Inc. New York. 1966.
5. Moulton, F. R.: "An introduction to celestial mechanics". Dover publications Inc. New York. 1960.
6. Pannekoek, A.: "A history of astronomy". George Allen and Unwin LTD. London. 1961.
7. Rouse Ball, W.W.: "A short account of the history of mathematics". Dover publications Inc. New York. 1960.
8. Smith, D.E.: "History of mathematics". Dover publications Inc. New York. 1958.

Agradecimientos.

Deseo manifestar mi agradecimiento al Dr. D. Rafael Cid Palacios por su trabajo de revisión y edición de esta Monografía.