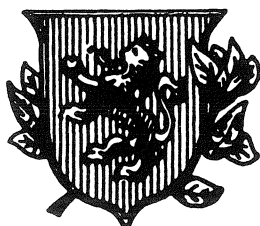


MONOGRAFIAS
DE LA
**ACADEMIA
DE
CIENCIAS**
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

VECTORES Y CAMPOS

Escuela Universitaria de
Ingeniería Técnica Industrial de Vigo.

E. Cid Palacios
Catedrático de Física



N.º 7

1995

Depósito legal: Z. 4.146 — 1995

Imprime:

Coop. de Artes Gráficas
LIBRERIA GENERAL
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

PROLOGO:

Esta Monografía, de nivel medio, pretende ayudar a numerosos alumnos de Escuelas Universitarias, Escuelas Técnicas Superiores, Matemáticas, Físicas, etc., reuniendo en un pequeño volumen los principales conceptos y operaciones que se manejan en las teorías de vectores y campos vectoriales.

Algunas de las materias tratadas en ella son bien conocidas, otras, en cambio, son nuevas o presentan un enfoque distinto. En todo caso la Monografía no está destinada únicamente a estudiantes de los primeros cursos de carrera, pues pensamos que una obra no debe contener solamente lo que se va a estudiar, sino que pueda ser útil en años sucesivos.

Aunque pueda parecer que se hace un abuso de las matemáticas, éstas se usan porque son una herramienta útil y precisa en los desarrollos, sin olvidar nunca el sentido físico de los problemas estudiados, ya que de lo contrario el alumno sólo tendrá una visión parcial de los mismos.. En cambio, para los matemáticos, acaso la obra carezca del rigor al que están acostumbrados, como sucede al estudiar los teoremas de Gauss, Stokes, etc., pero cuya interpretación física es fundamental. Las cuestiones y ejercicios que figuran al final de cada capítulo pretenden acostumbrar al lector a resolver problemas y formularse preguntas. Algunos ejercicios, pocos, no contienen datos numéricos, para evitar la costumbre de los alumnos a trabajar únicamente con números. Finalmente, creemos que es muy importante, al tratar de resolver ejercicios, que el estudiante se acostumbre a pensar que está tratando con cantidades y con fórmulas homogéneas.

Agradecimientos:

Queremos agradecer a los profesores, doctor Félix Pardo, profesor Benito Alonso, profesor Fernando Ribas y profesor Juan Vázquez, del Departamento de Física de la Universidad de Vigo, algunas sugerencias realizadas, la revisión parcial o total de las pruebas preliminares, así como la inclusión y comprobación de algunos de los resultados de los ejercicios que figuran al final de cada capítulo, sin cuya ayuda posiblemente el texto tendría más errores, y cuya notificación agradecemos de antemano. Finalmente, el autor reconoce la deuda contraída con su hermano y maestro, el doctor Rafael Cid Palacios, en la actualidad catedrático emérito de la universidad de Zaragoza, y con su mujer, Marina, por su paciencia durante la redacción de esta monografía.

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN. MEDIDA DE LAS CANTIDADES.

1.- Medida de las cantidades de las magnitudes físicas. 2.- Métodos de la física. Modelos. 3.- Interpretación de las formulas físicas. 4.- Unidades patrones. Sistema de unidades. Pag. 5-24

1.- CÁLCULO VECTORIAL.

1.1.- Vectores aplicados, libres y cursores. 1.2.- Igualdad y suma de vectores. 1.3.- Producto por un número real. Vector unitario. 1.4.- Descomposición de vectores. Componentes de un vector. 1.5.- Componentes de la suma y producto por un escalar. 1.6.- Producto escalar de dos vectores. 1.7.- Producto vectorial de dos vectores. 1.8.- Producto mixto de tres vectores. 1.9.- Doble producto vectorial. 1.10.- El elemento de área y ángulo como vector.- Aplicaciones del cálculo vectorial.- Cuestiones y ejercicios. Pag 24-44.

2.- VECTORES DESLIZANTES.

2.1.- Momento de un cursor con respecto a un punto. 2.2.- Momento con respecto a un eje. 2.3.- Sistemas de vectores deslizantes. 2.4.- Invariantes de un sistema de vectores. 2.5.- Eje central de un sistema de vectores. 2.6.- Momento de un sistema con respecto a un punto situado a una distancia dada al eje central. 2.7.- Sistema de cursores concurrentes. Teorema de Varignon. 2.8.- Sistema de cursores paralelos. Centro del sistema. 2.9.- Sistemas equivalentes. Reducción de un sistema.- Cuestiones y ejercicios. Pag 45-62.

3.- CÁLCULO VECTORIAL INFINITESIMAL.

3.1.- Derivada de un vector. 3.2.- Integración de vectores. 3.3.- Movimiento de un punto. Velocidad y aceleración. 3.4.- Derivada de un vector en el plano. 3.5.- Movimiento en el plano. 3.6.- Campos escalares estacionarios. 3.7.- Gradiente de un campo escalar estacionario. 3.8.- Empleo de (la) nabra.- Apéndice.- Cuestiones y ejercicios.- Pag 63-88.

4.- CAMPOS VECTORIALES.

4.1.- Campos vectoriales estacionarios. Flujo del campo. 4.2.- Divergencia. Teorema de Gauss. 4.3.- Circulación de un vector. Rotacional. 4.4.- Campos conservativos. 4.5.- Campo vectorial de flujo conservativo. 4.6.- Campos con simetría esférica. 4.7.- El campo en una distribución de centros activos.- Apéndice.- Cuestiones y ejercicios. Pag 89-116.

BIBLIOGRAFÍA: Pag 117-118.

INTRODUCCIÓN: MEDIDA DE LAS CANTIDADES.

1.- MEDIDA DE LAS CANTIDADES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS.

La palabra física procede del griego y significa naturaleza. Por esto, al menos en principio, la física puede definirse como la ciencia que estudia el mundo inanimado; es decir, los fenómenos físicos que tienen lugar en la naturaleza.

Esta definición tiene el inconveniente de apoyarse en el concepto de fenómeno físico, definido sin precisión como el cambio que tiene lugar en los objetos modificando el modo de estar, pero no el modo de ser de los mismos. Más adelante estableceremos una definición más precisa.

Si se considera un grupo de objetos se puede distinguir en ellos una serie de cualidades, atributos o características comunes, que sirven para caracterizar ya las propiedades especiales de los objetos, ya las particularidades de los fenómenos que observamos. Cada una de estas cualidades (longitud, tamaño o volumen, masa, dureza, tiempo, etc.), se presentan en cada uno de los objetos con distinta intensidad o cuantía. Por ejemplo, no todos los cuerpos tienen, como se dice, igual tamaño, ni tienen el mismo color, etc. Los estados particulares que pueden adoptar los atributos o cualidades de los objetos o fenómenos se llaman *cantidades*, y a las propiedades, características o cualidades abstractas de los cuerpos o fenómenos, capaces de variar cuantitativamente, les llamaremos *magnitudes*.

Todos los cuerpos, en conjunto, tienen longitud; pero no todos tienen la misma cantidad de longitud. El concepto de cantidad es más simple que el de magnitud y, por tanto, más fácil de comprender. Desde el punto de vista de lo simple a lo general, puede decirse que el conjunto de cantidades de una cualidad es una magnitud; cada uno de los elementos del conjunto (magnitud) es una cantidad. Las cantidades de una misma magnitud se dice que son homogéneas o cantidades de la misma especie de magnitud.

En realidad, para que una cualidad pueda llamarse magnitud es preciso que se puedan definir la igualdad y la suma (o cociente) de cantidades de esa magnitud. La igualdad debe satisfacer las propiedades: idéntica, recíproca y transitiva; la suma, las propiedades uniforme, asociativa, modular y, en ocasiones, la conmutativa. Se sobreentiende que solo puede establecerse la igualdad o la suma de cantidades si son homogéneas. Así, por ejemplo, podemos sumar dos cantidades de longitud, pero no una cantidad de longitud con otra de tiempo, etc.

Las cantidades las representaremos por un símbolo, generalmente con una letra latina o griega; así: a , m , t , U , α , β , etc.. Con esta representación tenemos:

Propiedades de la igualdad:

Idéntica: $a = a$

Recíproca: si $a = b$ también: $b = a$

Transitiva: si $a = b$ y $b = c$, $a = c$

Propiedades de la suma:

Uniforme: La suma de varias cantidades es única.

Conmutativa: $a + b = b + a$

Asociativa: $a + b + c = (a + b) + c$

Modular: $a + 0 = a$, hay una cantidad llamada nula que sumada a cualquier otra no altera la suma.

Las magnitudes físicas se pueden definir cualitativa y cuantitativamente. La definición cualitativa o epistémica, siempre que sea posible, no debe omitirse, y sirve para saber de que se habla. El espacio y el tiempo son ejemplos de magnitudes que no suelen definirse cualitativamente pues su significación es clara para todos. Definir cuantitativamente una magnitud es encontrar el método de medida de sus cantidades; es decir, encontrar un procedimiento que permita determinar cuantas veces una cantidad de la magnitud contiene a otra de la misma especie, que se toma como unidad de esta especie de magnitud.

Si a es una cantidad de una magnitud cualquiera A (puede ser una longitud, por ejemplo) y $[a]$ es la unidad elegida, la medida de la cantidad a es:

$$(a) = \frac{a}{[a]} \quad (1)$$

El resultado de la medida es un número real (En la práctica, solo se obtienen números racionales, enteros o fraccionarios, ya que no se puede llevar la apreciación de las medidas más allá de cierto límite, impuesto por la precisión del instrumento de medida). El número (a) , resultado de la medida, se llama valor numérico de la cantidad a , e indica cuantas veces la unidad $[a]$ está contenida en la cantidad de la magnitud. Por tanto, para toda cantidad, se cumple: Cantidad = Número por unidad

Ejemplo: La cantidad de longitud de un objeto se puede expresar de muchas maneras: $a = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m} = 0,0015 \text{ km} = 58,89 \text{ pulgada}$, etc.

El valor numérico de toda cantidad, según (1) es inversamente proporcional al tamaño de la unidad elegida; es decir, si toma una unidad pequeña (grande) el valor numérico es grande (pequeño). Esto se ve claramente en el ejemplo anterior con las unidades cm , m , etc.

Si (a) y (a') son los valores numéricos de la cantidad a medida con las unidades $[a]$ y $[a']$, tendremos:

$$a = (a)[a] = (a')[a'] \quad (2)$$

Una cantidad no depende de la unidad de medida, pero el valor numérico de una

cantidad, por el contrario, depende de la elección de la unidad adoptada. Por consiguiente:

$$\frac{(a)}{(a')} = \frac{[a']}{[a]} \quad (3)$$

que muestra que las medidas están en razón inversa de las respectivas unidades.

El criterio por el cual una magnitud física queda definida cuando se dan procedimientos para medir sus cantidades se llama punto de vista operacional, porque la definición es, en el fondo, una serie de operaciones de laboratorio que conducen, finalmente, a un número cuando se toma una unidad. Las operaciones pueden incluir cálculos aritméticos o algebraicos. Cuando en física se habla, por ejemplo, de longitud de un cuerpo se admite implícitamente el conjunto de operaciones de laboratorio que hay que realizar para establecer su concepto. Lo mismo puede decirse con respecto a cualquier otra magnitud física. El gran valor científico de esta aptitud operacional se puso de manifiesto al ver las contradicciones a que se llegaba con conceptos e ideas que, por su misma definición o formulación, no podían relacionarse con ninguna operación de laboratorio y las notables modificaciones que experimentaban otros, como los conceptos de tiempo y espacio, al relacionarlos con determinadas operaciones de laboratorio realizadas con metros, relojes, señales luminosas, etc.. Precisamente, es por esto que podemos decir que la física se ocupa de la medida de las cantidades de las magnitudes físicas y sus relaciones. Dice Poincare (1): lo que no se mide no puede ser objeto de la ciencia.

La ventaja de comprometernos a usar, para describir situaciones físicas, sólo aquellos conceptos que pueden adquirir significado en términos de operaciones físicas, reside en que, haciéndolo así, no debemos rectificarnos nunca. Claro que esto no quiere decir que no puedan usarse otra clase de conceptos; pero ellos exigen una justificación que no puede ser encontrada hasta que sea comprobada experimentalmente. Como dice Bridgman (2): *La convención de que los conceptos físicos deben ser definidos en términos de operaciones físicas es de una utilidad tan obvia que, en la actualidad, es exigida y aceptada implícitamente por casi todos los físicos*. Sin embargo, conviene aclarar en relación a la igualdad y suma de cantidades, que las operaciones implican que éstas se deben verificar:

- 1) Con respecto a un sistema o cuerpo de referencia.
- 2) Con independencia de toda referencia particular.

Vamos a referirnos, por ejemplo, al caso de la masa pesante, estática o gravitatoria. Podemos definir la igualdad de masas diciendo que dos masas son iguales cuando colocadas en el platillo derecho de una balanza determinada (sistema de referencia), equilibran una misma tara, colocada en el izquierdo. Se pueden así clasificar los cuerpos en clases, incluyendo en cada una de ellas aquellos cuerpos que pueden ser sustituidos unos por otros para equilibrar a una misma tara de la balanza. Así queda definida la igualdad con respecto a esa balanza particular. Solamente cuando comprobemos que si dos cuerpos tienen la misma masa gravitatoria con respecto a una balanza, la tienen respecto a cualquier otra balanza, podemos considerar la igualdad como una relación entre los cuerpos

comparados, con independencia de toda referencia a una balanza particular. Análogamente con respecto a la suma.

Al definir así la masa gravitatoria, seguimos sin saber qué es la masa gravitatoria, pero sabemos medirla. Al obrar de este modo, admitimos las limitaciones que impone esta postura, al prescindir de saber lo que las cosas son realmente.

Se suelen clasificar las magnitudes físicas en fundamentales y derivadas. Tal clasificación es arbitraria en el sentido de que una magnitud puede considerarse como fundamental en algún grupo de operaciones y como derivada en otros. Sin embargo, suelen incluirse en las primeras aquellas magnitudes, como el espacio y el tiempo, que corresponden a nociones primitivas, es decir, que no tienen necesidad de definición cualitativa, porque su significado es claro para todos, y su definición operacional se puede establecer de un modo intrínseco, sin recurrir a la medida de otras magnitudes. Las magnitudes fundamentales no se definen mediante relaciones, sino por definiciones previamente establecidas.

Las magnitudes derivadas son aquellas cuyas operaciones de definición se fundan en el uso de otras magnitudes físicas; necesitan, por tanto, de una definición particular. En general, su concepto deriva de una prescripción o fórmula con la que se especifican las operaciones que se han de realizar con las medidas de las cantidades de otras magnitudes para obtener la medida de la cantidad de la magnitud en cuestión. Por ejemplo, la densidad, la velocidad, la aceleración, etc., son magnitudes derivadas.

2.- MÉTODOS DE LA FÍSICA. MODELOS.

Para estudiar la naturaleza y las leyes por las que se rige, la física hace uso de la observación y la experimentación. La **observación** consiste en contemplar la naturaleza, pero sin intervenir en los fenómenos que en ella tienen lugar. En la observación, el hombre (el físico) es mero agente pasivo del espectáculo que contempla, como cuando ve una proyección cinematográfica. Así, por ejemplo, hacemos observación cuando contemplamos una tormenta, y los objetos que caen (piedras, hojas y frutos de los árboles). A pesar de las limitaciones que esto supone, mediante la observación, se puede llegar a precisar como se realizan fenómenos y en qué condiciones. Si preguntamos *cómo caen los objetos*, la observación responde que *hacia la superficie de la Tierra*, y si preguntamos *cuándo*, responde que *cuando están libres*; es decir, cuando no están sujetos o apoyados.

La **experimentación** consiste en llevar a cabo una observación provocando artificialmente el fenómeno en condiciones determinadas y repitiéndolo tantas veces como sea necesario. Variando las condiciones se pueden descubrir qué cosas influyen en él. Pero la experimentación lleva consigo la **abstracción** de hechos particulares; es decir, fijar la atención en algunos rasgos y características del fenómeno en estudio y prescindir de otros. De esta manera, simplificando los fenómenos, y también idealizándolos (cosa imprescindible si tenemos en cuenta la complejidad que presentan los fenómenos más simples), podemos formarnos una idea más clara del fenómeno que estamos estudiando. La observación y la experimentación constituyen la primera etapa del *método científico*.

A cualquier hombre que observó la caída de los objetos se le puede ocurrir preguntar: ¿todos los objetos abandonados libremente desde una misma altura, llegan al suelo al mismo tiempo?. Si no es así, ¿qué influye para que el tiempo no sea el mismo?. Para contestar a estas preguntas, nuestro hombre prepara su experimento: toma varios objetos distintos y los suelta desde lo alto de un muro, árbol o desde donde puede. Pronto llegará a unas conclusiones: la primera es la influencia del viento; la segunda, que hay características especiales de los cuerpos que influyen en el tiempo que tardan en caer, como son: forma de la superficie, tamaño, etc. Verá que el rozamiento es factor importante y, posiblemente, decidirá repetir el experimento en el interior de un edificio, para evitar la influencia del viento, y anular o hacer que el rozamiento sea el mismo para todos los cuerpos. El resultado es que el fenómeno original de la caída de los cuerpos en el aire quedó simplificado al estudio de la caída de los cuerpos en el vacío o presentando la misma superficie de rozamiento.

La idea de que todo puede ser comprendido si se reduce a sus partes constituyentes ha sido aceptado por todos los científicos durante varios siglos. Por eso, los fenómenos complejos se simplifican o reducen a otros más sencillos. Cada uno de estos fenómenos simples se analizan por separado. Después se relacionan unos con otros y, de esta manera, podemos formarnos una idea más clara del fenómeno completo.

Mediante la *observación* y la *experimentación* se pueden hacer medidas de las cantidades de las magnitudes físicas que intervienen en los fenómenos y establecer relaciones entre los valores numéricos de las cantidades de las magnitudes físicas observadas. De los muchos fenómenos que tienen lugar en la naturaleza, con ayuda de la *abstracción*, intentamos deducir características comunes a todos ellos y, si sometemos a examen un número suficiente de hechos análogos, podemos enunciar los principios generales o leyes en los que se basan. La abstracción, pues, es útil para generalizar resultados y enunciar *leyes*. Entendemos por ley cada una de las relaciones existentes entre los valores numéricos de las cantidades de las diversas magnitudes que intervienen en un fenómeno.

Estas leyes son leyes empíricas. De este tipo son las leyes Kepler y las leyes de Boyle-Mariotte y Gay Lussac. Una *ley empírica* es una expresión que resume un número grande de datos y contiene muchas observaciones experimentales, esquematizadas y acumuladas mediante un proceso de generalización. Pero como nunca podemos estar seguros de que hemos considerado todas las magnitudes que intervienen en un fenómeno ni de la exactitud de las medidas de las cantidades de las magnitudes que intervienen, el enunciado de una ley es forzosamente incompleto. Una ley empírica no contiene más rigor que las medidas de los experimentos sobre los que descansa. Siempre se debe esperar que medidas más precisas, o un análisis más profundo del fenómeno, nos obligue a incorporar nuevos términos a nuestras formulas. Esto, por ejemplo, es lo que ha ocurrido con las leyes de los gases.

La astronomía es quien nos ha enseñado que existen leyes. Estas reglas han sido enunciadas por Hiparco, Ptolomeo, Copérnico, Kepler y Newton, quien enunció la más precisa y general de todas las leyes naturales. Para nosotros, dice Poincare (3), *una ley es*

una relación constante entre un fenómeno de hoy y el de mañana; en una palabra, es una ecuación diferencial. Esta es la forma ideal de una ley física.

Un estudio comparativo de leyes particulares conduce al descubrimiento de leyes más generales. El proceso de establecer una *ley general* a partir de casos particulares, obtenidos por observación o por un número necesariamente limitado de experimentos, se denomina *inducción*. La ley general se pondrá a prueba para comprobar su validez por el control de la experiencia. Por la inducción debemos esperar la repetición de un fenómeno, siempre que se produzcan las mismas condiciones que en casos anteriores. Este principio podría aplicarse sin temor, si todas las condiciones se dieran simultáneamente; pero esto no sucederá, pues siempre faltará alguna de estas condiciones. De aquí que las conclusiones no tengan certeza absoluta, sino sólo un alto grado de probabilidad. Se comprende así el importante papel que la noción de probabilidad desempeña en las ciencias físicas.

Propuestas las leyes, nacen las *hipótesis*, que intentan explicar el por qué de la ocurrencia de un fenómeno dado en condiciones determinadas. En la ciencia, la hipótesis es un supuesto provisional, porque se basa en argumentos probables y elementos insuficientes, que, si es posible, deben comprobarse experimentalmente. En la metodología científica moderna, la hipótesis se utiliza como norma orientadora de la observación y la experimentación. Por tanto, la hipótesis es condicional, pero no es arbitraria, pues, debe estar justificada en los hechos mismos y debe ser sugerida por la observación de los hechos que pretende explicar.

Posiblemente en física, la hipótesis fundamental es que todos los fenómenos naturales se realizan de acuerdo con un conjunto de principios generales o leyes físicas, que resumen un gran número de hechos experimentales, esquematizados y acumulados mediante generalización e inducción. Se admite que las leyes son inmutables. Las hipótesis que no pueden comprobarse experimentalmente, pero que se suponen válidas siempre, se les denominan *postulados* o *principios*. Las leyes de Galileo del movimiento de proyectiles, las leyes de Newton de la dinámica y la ley de Newton de la gravitación universal son postulados que no se ven directamente. Los principios deben ser breves y claros en su enunciado y capaces de extenderse a un gran número de hechos. Admitido un principio es posible deducir de él, de forma sencilla y rigurosa, numerosas consecuencias, que deben recibir confirmación experimental. De esta manera se han construido verdaderos cuerpos de doctrina, como, por ejemplo, la termodinámica, que parte de un número pequeño de postulados o principios generales, los llamados principios de la termodinámica.

Cuando una hipótesis racional o un conjunto de hipótesis ha alcanzado un estado bastante probable de certidumbre recibe el nombre de *teoría*, a partir de la cual se pueden deducir nuevas leyes. Leyes de este tipo son la ley de las proporciones múltiples, que se deduce a partir del modelo atómico de la materia, las leyes del péndulo y las de Kepler, que se deducen a partir de los principios de Newton de la dinámica. La predicción de nuevas leyes se llama *deducción*. Más exactamente, la deducción es el proceso mental por el cual partiendo de unas proposiciones (hipótesis), que son tomadas como premisas, y utilizando una serie de reglas lógicas, se llega a una proposición resultante (teoría), expresada por medio de unas ecuaciones generales (toda teoría tiene sus ecuaciones), a partir de la cual

es posible deducir leyes por las que se rigen fenómenos determinados. La deducción va de los general a lo particular.

Para los físicos una teoría es más que una simple conjetura, una idea elaborada o una intuición. Se admite que una teoría es más consistente y segura si tiene un esquema matemático riguroso, que puede ser utilizado para calcular y predecir multitud de efectos, y cuanto mayor es el número de fenómenos que explica; las leyes que rigen estos fenómenos adquieren mayor significado y utilidad si forman parte de una teoría. *El objeto de toda teoría*, según Einstein (4), por la cual las leyes físicas son interpretadas, *es guiar hacia nuevos hechos, sugerir experimentos nuevos y conducir al descubrimiento de fenómenos nuevos*. También se admite que una teoría es buena mientras sus resultados estén de acuerdo con la experiencia, porque la esencia de toda teoría científica es que sus hipótesis puedan ser comprobadas.

Pero por muchos experimentos que hagamos no podremos demostrar que una teoría sea correcta, ya que siempre será posible imaginar otras teorías que concuerden con los experimentos realizados, aunque puedan diferir en otros que todavía no se han llevado a cabo. Lo que sí puede suceder es que un experimento haga insostenibles las hipótesis admitidas en la teoría. Esto sin embargo, no supone el rechazo total de la teoría, pues, a pesar de ello, como dice Poincaré, optamos por ser conservadores y buscamos una solución a estas dificultades dentro del marco de las mismas ideas, mediante una simple generalización de ellas. A menudo, sin embargo, resulta imposible remendar una vieja teoría y las dificultades le llevan a su ocaso y al nacimiento de una teoría nueva, que explica los hechos en discrepancia. Las teorías, lo mismo que las leyes, no deben considerarse como inmutables, sino como una herramienta que empleamos mientras es útil. En ocasiones, la herramienta puede arreglarse, cuando presenta algún defecto, pero, en otras, no queda más remedio que sustituirla por otra más moderna. Por esto, no debemos hablar de teorías verdaderas o falsas, ya que la misión de una teoría no es la de ser verdadera o falsa, sino la de ser útil. Pues bien, a la condición empírica de que la teoría debe recibir su justificación experimental, hay que añadir otras tres condiciones teóricas:

- 1) Debe ser compatible con las teorías ya establecidas y confirmadas,
- 2) Debe ser más fundamental que los enunciados que pretende explicar y
- 3) Debe ser fecunda en sus aplicaciones y controlable por éstas.

A partir de una teoría también se pueden deducir leyes. Estas *leyes deducidas* de un conjunto de definiciones y postulados son las preferidas por los científicos que, en muchas ocasiones intentan convertir las leyes empíricas en deducidas, pues de esta manera las leyes empíricas parecen explicadas. De este tipo son las leyes de Kepler, que pueden deducirse de los postulados de la dinámica de Newton.

El **método** de las ciencias físicas descansa, pues, además de la observación y experimentación, en la abstracción, generalización, inducción y deducción. El método de generalización, como el de abstracción, desgraciadamente, no está determinado de forma unívoca; sin embargo, debe cumplir este requisito: siempre que se generalice un concepto o un fenómeno, éste debe contener el concepto original como caso particular; es decir, el concepto generalizado debe contener el concepto original, siempre que se cumplan las

condiciones precisas. En el razonamiento deductivo, como vimos, las conclusiones se deducen de premisas mediante reglas lógicas y seguras; pero en el razonamiento inductivo, donde se trata de justificar el paso de enunciados particulares a generales, no se dispone de reglas semejantes, que constituyan una base firme, porque, al contrario del método deductivo, el método inductivo no está bien fundamentado o justificado.

De lo dicho no debe concluirse que el papel principal de la física es explicar los fenómenos o preguntarnos el por qué de las cosas; esto realmente cae dentro del dominio de la metafísica y, propiamente hablando, no corresponde a la física, aunque tampoco se conforma la física con una simple descripción de los hechos o de los fenómenos que tienen lugar en la naturaleza. El objeto de la física es explicar la naturaleza; es decir, dar una interpretación y representación de los fenómenos que en ella ocurren y establecer relaciones entre los fenómenos observados. La economía de esfuerzo, junto con un sentido de armonía, belleza y simplicidad, nos obliga a admitir un esquema muy simple, capaz de explicarnos esa multitud de fenómenos, en apariencia, dispares y sin relación.

Del estudio de un gran número de fenómenos y del análisis efectuado por algunos físicos puede decirse que las funciones de la física quedan limitadas a:

- 1) Hacer un inventario y una clasificación de los fenómenos naturales para descubrir principios o leyes generales, con objeto de entender fenómenos diferentes.
- 2) Ser un instrumento de predicción de experimentos nuevos.
- 3) Ser útil y económica desde un punto de vista intelectual.

El proceso, mediante abstracción, de simplificación e idealización de los fenómenos, supone que el fenómeno físico estudiado por nosotros sea un fenómeno ideal más o menos parecido al fenómeno real, pero no exactamente igual a él. Precisamente, la versión abstracta de un fenómeno físico o problema se denomina un modelo. Un *modelo* es, pues, una representación aproximada, siempre más simple, de un fenómeno o fenómenos físicos. En el discurso científico, para que una teoría pueda conseguir una aceptación general debe desarrollarse de acuerdo con un modelo detallado. El modelo debe satisfacer a los hechos experimentales que sugiera y dar lugar a predicciones, que estén de acuerdo con la experiencia.

Puesto que la física hace uso de los modelos, parece lógico pensar que la física y el mundo físico (mundo que queda explicado por los modelos físicos), es una ficción; el mundo físico es parecido al mundo exterior que observamos a través de nuestros sentidos, pero no exactamente igual a él. El mundo físico no es la única imagen del mundo exterior, pero es una imagen simple, cómoda y útil. Las concepciones geocéntrica o heliocéntrica del sistema solar, los fluidos perfectos, la teoría cinética de los gases, el átomo de Bohr, la teoría de la relatividad, la teoría de los cuanta, etc., no son más que modelos; es decir, imágenes idealizadas y simplificadas de situaciones físicas mucho más complejas.

3.- INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS FÍSICAS.

Para enunciar las leyes y alcanzar conclusiones cuantitativas se necesita el lenguaje de las matemáticas. Pero además, las matemáticas son necesarias para el razonamiento y son indispensables si queremos obtener resultados que puedan contrastarse experimental-

mente. Las leyes se resumen matemáticamente por una fórmula, que expresa la relación o dependencia entre las medidas de las cantidades de las magnitudes físicas que intervienen en la ley.

Si (z_i) son los valores numéricos de ciertas cantidades z_i que adquiere una cierta magnitud Z , al tomar los valores (x_i) , (y_i) las cantidades x_i , y_i de otras magnitudes X , Y , cuando se eligen unas unidades determinadas, una ley física está expresada por una relación del tipo:

$$(z_i) = f[(x_i), (y_i)] \quad (4)$$

donde con f indicamos todas las operaciones analíticas que es necesario someter a las (x_i) e (y_i) para obtener el correspondiente valor de (z_i) .

Por comodidad, suprimamos los subíndices y supongamos que la (4) es del tipo

$$(z) = (x)^{(a)}(y)^{(b)} \quad (5)$$

donde (a) y (b) son números, lo mismo que (x) , (y) y (z) . Cuando se han elegido las unidades $[x]$, $[y]$, $[z]$, estos números son tales que cumplen:

$$x = (x)[x] \quad y = (y)[y] \quad z = (z)[z] \quad (6)$$

La fórmula (4) ó (5) se pudo obtener experimentalmente, puede ser una fórmula de definición o se pudo llegar a ella por medio de una teoría.

Según esto, las letras que entran en las leyes y en las ecuaciones de definición representan números y no cantidades, salvo que demos demos lo contrario; es decir, las ecuaciones físicas se refieren a los valores numéricos de las cantidades y no a las cantidades de las magnitudes. Si esto es así, es claro que podemos aplicar a las leyes físicas todos los conceptos y leyes matemáticas. De este modo la física adquiere una estructura netamente matemática. Sin embargo, debe advertirse que si bien las matemáticas son una valiosísima ayuda para la física, no debe olvidarse el carácter experimental de ésta. Por esta razón, las matemáticas deben utilizarse como instrumento, son un medio y no un fin.

Como el valor numérico de una cantidad depende de la unidad elegida, ¿la expresión de una ley cambia si elegimos otras unidades?. Para comprobarlo tomemos unas unidades nuevas, tales como $[x']$, $[y']$, $[z']$. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x &= (x)[x] = (x')[x'] \\ y &= (y)[y] = (y')[y'] \\ z &= (z)[z] = (z')[z'] \end{aligned} \quad (7)$$

puesto que cambian los valores numéricos de las cantidades, pero no éstas. Poniendo

$$(x_0) = \frac{[x']}{[x]} = \frac{(x)}{(x')} \quad (y_0) = \frac{[y']}{[y]} = \frac{(y)}{(y')} \quad (z_0) = \frac{[z']}{[z]} = \frac{(z)}{(z')}$$

resulta:

$$(x) = (x_0)(x') \quad (y) = (y_0)(y') \quad (z) = (z_0)(z')$$

que sustituidas en (5) y llamando para simplificar:

$$(k) = \frac{(x_0)^{(a)}(y_0)^{(b)}}{(z_0)} \quad (8)$$

dan:

$$(z') = (k)(x')^{(a)}(y')^{(b)} \quad (9)$$

completamente análoga a (5), salvo la constante (k). Como se ve, en las formulas físicas pueden figurar coeficientes, cuyos valores numéricos no dependen de la forma de la ley, pero sí de las unidades elegidas para medir las cantidades de las magnitudes que expresan esa ley. En general, pues, se debe escribir:

$$(z) = (k)(x)^{(a)}(y)^{(b)} \quad (10)$$

a menos que hagamos el coeficiente de proporcionalidad igual a la unidad, en cuyo caso podemos seguir utilizando la (5). Si suponemos que $(k) = 1$, según (8):

$$(z_0) = \frac{[z']}{[z]} = (x_0)^{(a)}(y_0)^{(b)} \quad (11)$$

que relaciona a la nueva unidad de Z con la antigua, y nos hace ver que $[z']$ no es arbitraria. Quiere esto decir que si deseamos conservar la forma de la ecuación (5), no podemos elegir arbitrariamente las tres unidades $[x']$, $[y']$, $[z']$, una al menos está dada por (11). Por consiguiente, *si imponemos al coeficiente de proporcionalidad un valor numérico escogido arbitrariamente, perdemos la posibilidad de elegir libremente las unidades de todas las magnitudes que entran en la formula; la elección sigue siendo libre para todas, menos para una de las magnitudes, aunque tenemos libertad de escoger la magnitud cuya unidad no es arbitraria.*

Teniendo en cuenta la significación de (x_0) e (y_0) , también podemos escribir la (11), en la forma:

$$\frac{[z']}{[z]} = \left(\frac{[x']}{[x]} \right)^{(a)} \left(\frac{[y']}{[y]} \right)^{(b)} \quad (12)$$

Si X e Y son magnitudes fundamentales, esta ecuación representa la ecuación dimensional de la magnitud Z y los números (a) y (b) son las dimensiones de Z con relación

a X e Y. Escribiremos

$$\{Z\} = X^{(a)} Y^{(b)} \quad (13)$$

donde X e Y son números, medida de las nuevas unidades tomando las antiguas como unidad. Si X e Y son a su vez magnitudes derivadas habrá que encontrar sus respectivas ecuaciones dimensionales, y escribiremos:

$$\{Z\} = \{X\}^{(a)} \{Y\}^{(b)}$$

Según esto, una ecuación dimensional de la magnitud derivada Z es una relación entre números y expresa que si aumentamos (x_0) veces la unidad de X e (y_0) veces, la unidad de Y, la unidad de Z aumenta

$$(x_0)^{(a)} (y_0)^{(b)} = X^{(a)} Y^{(b)}$$

veces. Cabe preguntarse si no será posible escribir

$$z = x^{(a)} y^{(b)} \quad (14)$$

en cuyo caso las formulas físicas también nos expresarían relaciones entre cantidades. De ser esto posible, salvadas las dificultades conceptuales que ello entraña, debemos recordar que, al no sufrir variación las cantidades con un cambio de unidades, la formula (14) seguirá siendo válida aunque tomemos otras unidades; por consiguiente, si queremos que las formulas físicas expresen tanto relaciones entre valores numéricos como entre cantidades, es necesario que: $(k) = 1$, pues, en el cambio de unidades, la (6) se convertiría en (10), que no coincide formalmente con la (14), a menos que $(k) = 1$. Entonces, según (8), se tiene nuevamente (11). Pero si, además de (14), se cumple

$$(z) = (x)^{(a)} (y)^{(b)}$$

sustituyendo x, y, z, dados por (7) en (14), tenemos:

$$(z) = (x)^{(a)} (y)^{(b)} \frac{[x]^{(a)} [y]^{(b)}}{[z]}$$

y cumpliéndose la segunda hace falta que

$$[z] = [x]^{(a)} [y]^{(b)} \quad (15)$$

así que las unidades $[x], [y], [z]$, no son independientes. Esta relación nos define $[z]$ en función de $[x]$ e $[y]$.

Si no imponemos la condición $(k) = 1$; es decir: si $(k) \neq 1$, tendríamos:

$$z = x^{(a)} y^{(b)} \quad (z) = (k) (x)^{(a)} (y)^{(b)}$$

luego:

$$(z) = (x)^{(a)}(y)^{(b)} \frac{[x]^{(a)}[y]^{(b)}}{[z]} = (k)(x)^{(a)}(y)^{(b)} \frac{[x]^{(a)}[y]^{(b)}}{(k)[z]}$$

y debe ser

$$[z] = \frac{1}{(k)} [x]^{(a)} [y]^{(b)}$$

y el coeficiente de proporcionalidad entre las unidades no sería la unidad, sino $1/(k)$.

Diremos que un *sistema de unidades es coherente o acorde* con las formulas de definición, si la relación entre cantidades y valores numéricos coincide; es decir, $(k) = 1$, el factor numérico entre unidades también es la unidad. Por tanto, se cumple (15).

Ejemplo 1: Consideremos la formula entre cantidades, válida para un movimiento rectilíneo y uniforme, sin espacio inicial:

$$e = v t \quad (16)$$

Si queremos que se cumpla la misma relación entre valores numéricos; es decir

$$(e) = (v)(t)$$

cuando se utilizan las unidades $[e]$, $[v]$, $[t]$, tales que $e = (e)[e]$, $t = (t)[t]$, $v = (v)[v]$, debe ser

$$(e) = (v)(t) \frac{[v][t]}{[e]}$$

luego:

$$[e] = [v][t]$$

y el sistema de unidades es coherente.

Si tomamos otro sistema de unidades coherente, $[e']$, $[v']$, $[t']$, tendremos:

$$[e'] = [v'][t']$$

y dividiendo por la anterior y llamando

$$L = \frac{[e']}{[e]} \quad T = \frac{[t']}{[t]} \quad (17)$$

tendremos

$$\{v\} = \frac{[v']}{[v]} = \frac{[e']}{[e]} \frac{[t]}{[t']} = LT^{-1} \quad (18)$$

que es la ecuación de dimensiones de la velocidad. Esta ecuación nos permite obtener la unidad de velocidad en el sistema "prima" cuando se conoce la unidad de velocidad $[v]$ y las relaciones (17).

Ejemplo 2: Consideremos la formula

$$e = \frac{1}{2}at^2$$

válida para un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado sin velocidad inicial ni espacio inicial. Si se cumple

$$(e) = \frac{1}{2}(a)(t)^2$$

debe ser

$$(e) = \frac{1}{2}(a)(t)^2[a][t]^2 \quad [e] = [a][t]^2$$

y las dimensiones de la aceleración, serán:

$$\{a\} = \frac{[a']}{[a]} = LT^{-2} \quad (19)$$

Ejemplo 3: Si consideramos la ecuación fundamental de la dinámica $f = ma$, para que se cumpla que $(f) = (m)(a)$, hace falta que $[f] = [m][a]$. La ecuación de dimensiones de la fuerza será:

$$\{f\} = LMT^{-2} \quad (20)$$

siendo

$$M = \frac{[m']}{[m]} \quad (21)$$

de modo que

$$\frac{N}{dyn} = \frac{m}{cm} \frac{kg}{g} \frac{s}{s} = 10^2 \cdot 10^3 = 10^5$$

Ejemplo 4: Obtener el valor de la capacidad específica de inducción relativa al vacío y sus dimensiones en el sistema internacional (SI), utilizando la formula de Coulomb:

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \quad (22)$$

y poniendo

$$(f) = \frac{1}{4\pi(\epsilon_0)} \frac{(q)(q')}{(r)^2}$$

puesto que

$$(f) = \frac{1}{4\pi(\epsilon_0)} \frac{(q)(q')}{(r)^2} \frac{[q]^2}{[f][\epsilon_0][r]^2}$$

se tiene:

$$[\epsilon_0] = \frac{[q]^2}{[f][r]^2}$$

y, por tanto, teniendo en cuenta (19) y que $\{r\} = L$, $\{q\} = Q$, resulta:

$$\{\epsilon_0\} = L^{-3}M^{-1}T^2Q^2 \quad (23)$$

En el sistema de unidades electrostático la formula de Coulomb se escribe

$$f_e = \frac{q_e q_e'}{r_e^2} \quad (f_e) = \frac{(q_e)(q_e')}{(r_e)^2}$$

donde hemos puesto el subíndice e para indicar que son expresiones en el sistema de unidades electrostático. Dividiendo la (f) por (f_e) , resulta:

$$\frac{(f)}{(f_e)} = \frac{1}{4\pi(\epsilon_0)} \frac{(q)(q')(r_e)^2}{(q_e)(q_e')(r)^2}$$

y recordando que

$$\frac{(f)}{(f_e)} = \frac{[f_e]}{[f]} = \frac{dyn}{N} = \frac{1}{10^5} \quad \frac{(r_e)}{(r)} = \frac{[r]}{[r_e]} = \frac{m}{cm} = 10^2$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{(q)}{(q_e)} = \frac{(q')}{(q_e')} = \frac{[q_e]}{[q]} = \frac{franklin}{C} = \frac{1}{2,99793 \cdot 10^9} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^9}$$

resulta:

$$\frac{1}{10^5} = \frac{1}{4\pi(\epsilon_0)} \frac{10^4}{8,987559 \cdot 10^{18}} \approx \frac{1}{4\pi(\epsilon_0)} \frac{10^4}{9 \cdot 10^{18}}$$

de donde

$$(\epsilon_0) = \frac{1}{4\pi \cdot 8,987559 \cdot 10^9} = 8,854188 \cdot 10^{-12} \approx 9 \cdot 10^{-12} \quad (24)$$

que es el valor numérico de la capacidad específica de inducción relativa al vacío en el SI.
Por tanto,

$$\epsilon_0 = 8,854188 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \approx 9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (25)$$

4.- UNIDADES PATRONES. SISTEMAS DE UNIDADES.

Se definió la unidad de una magnitud como una cantidad arbitraria que permite medir cantidades de la misma especie de magnitud; es decir, que permite comparar con ella otras cantidades y averiguar empíricamente el número de veces que la cantidad contiene a la unidad.

La elección de la unidad es necesaria, pero no siempre resulta suficiente, puesto que, en algunos casos, resulta imprescindible la elección de un cero relativo a la cantidad a medir. Así ocurre con las alturas, temperaturas, energías, etc.

Si bien la elección de la unidad para cada especie de magnitud es totalmente arbitraria, se ha convenido en escoger las unidades en un conjunto bien ordenado que se llama sistema de unidades.

Las unidades arbitrarias independientes se llaman *unidades fundamentales*. El número de unidades consideradas como fundamentales es el mínimo número de ellas que se necesita para dar una descripción coherente y sin ambigüedades de todas las demás unidades de la física, mediante ecuaciones que permitan establecer relaciones entre las mismas, por lo que las restantes unidades se llaman *unidades derivadas*. Por tanto, todas las unidades derivadas deben quedar definidas mediante una fórmula.

Podemos definir un *sistema de unidades* como el conjunto de unidades fundamentales que permiten obtener todas las demás unidades derivadas. La definición operacional de las unidades fundamentales implica dos pasos:

- 1) Escoger un patrón.
- 2) Establecer métodos para obtener múltiplos y submúltiplos.

Por esto, se ha intentado materializar la mayor parte de las unidades fundamentales en objetos físicos llamados *patrones*. Estos patrones se conservan en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres (París), aunque casi todos los países guardan copias en condiciones adecuadas. Como sobre ellos actúan levemente ciertos factores de perturbación, entre los que se pueden citar la presión, la temperatura y la humedad

atmosférica, cuando se opera con ellos se conviene en considerar una presión normal de 101325 Pa (pascal) = 760 mm de mercurio a 0°C , con una densidad de $13,5951 \text{ g/cm}^3$.

Un patrón ideal tiene cuatro características principales: debe ser accesible, simple, preciso e invariable. Sin embargo, a menudo, estos requisitos son incompatibles y debe adoptarse el que más convenga. Anteriormente se dio más importancia a la accesibilidad, simplicidad y precisión, pero, conforme se mejoran las técnicas de medida se prefiere la precisión y la invariabilidad.

Los sistemas de unidades se pueden dividir en:

A) Sistemas métricos.

B) Sistemas británicos.

A) SISTEMAS MÉTRICOS:

Los sistemas métricos de unidades se basan en el *m* (*metro*) y el *g* (*gramo*) con sus múltiplos y submúltiplos (son potencias de 10). Utilizan ciertos prefijos, que se han normalizado internacionalmente. Son los siguientes:

Múltiplos			Submúltiplos		
Prefijo	Símbolo	Potencia de 10	Prefijo	Símbolo	Potencia de 10
exa	E	18	deci	d	-1
peta	P	15	centi	c	-2
tera	T	12	mili	m	-3
giga	G	9	micro	μ	-6
mega	M	6	nano	n	-9
kilo	k	3	pico	p	-12
hecto	h	2	femto	f	-15
deca	da	1	atto	a	-18

El establecimiento del sistema métrico decimal data del año 1791, en el que la Asamblea Nacional francesa encargó a doce destacados científicos la revisión de las unidades entonces en uso. Esta revisión afectó a las unidades de longitud y masa, pero no a la de tiempo, definido con anterioridad como la 86.400 parte del día solar medio.

El patrón de longitud, el *metro*, se definió como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y el patrón de masa, el *gramo*, como la (cantidad de) masa de un *centímetro cúbico* de agua en el mayor estado de densidad (4°C) y se construyó un cilindro de platino e iridio destinado a hacer las veces de patrón de masa con un valor de 1 kg .

El sistema métrico fue adoptado oficialmente por la mayor parte de los países occidentales a finales del siglo pasado. En 1975 dieciséis países firmaron un tratado por el que se creaba la Oficina Internacional de Pesas y medidas, organismo encargado de la unificación internacional del sistema métrico, así como de su perfeccionamiento. En la

actualidad, el sistema métrico es de uso obligatorio en la mayoría de los países.

En 1889 fue construido un nuevo metro patrón de platino e iridio en el que se trazaron, próximo a los extremos, dos muescas; la distancia entre ambas se tomó arbitrariamente igual a 1 *metro*. Análogamente el *kilogramo patrón* fue sustituido por un nuevo cilindro de platino (90 partes) e iridio (10 partes).

En 1960 (XI Conferencia General de la Oficina Internacional), se adoptó una redefinición del *metro*, así: el metro es la (cantidad de) longitud equivalente a 1.650.763,73 veces la longitud de onda en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p^{10}$ y $5d^5$ del átomo de criptón 86. Desde 1983 la definición es:

El **metro** es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $1/299\,792\,458$ de segundo (17ª CGPM, 1983).

En 1967 (XIII Conferencia) se definió el segundo:

El **segundo** es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

La definición de *kilogramo* no ha sufrido variación y, en la actualidad, es la única unidad fundamental definida a través de un artefacto patrón.

Dentro de los sistemas métricos hay que distinguir, principalmente, los siguientes:

1) **SISTEMA CEGESIMAL** (cgs):

Así llamado por elegir como unidades fundamentales: el *centímetro* (cm), el *gramo* (g) y el *segundo* (s). Este sistema data de 1881, es un sistema coherente muy utilizado en física teórica, pero presenta algunos inconvenientes de orden práctico.

2) **SISTEMA GIORGI** o mksA:

Es también coherente y toma como unidades fundamentales el *metro* (m), el *kilogramo* (kg), el *segundo* (s) y el *amperio* (A).

3) **SISTEMA TÉCNICO**:

Utiliza como unidades fundamentales el *metro* (m), el *kilopond* o *kilopondio* (kp), que es unidad de fuerza, y el *segundo* (s). La unidad de masa, que es derivada, se llama *unidad técnica de masa* (utm) y equivale a 9,80665 kg. El gran inconveniente de este sistema es que el *kilopondio* debiera definirse sin necesidad de recurrir a la medida de otras unidades y, sin embargo, se define con ayuda del *kilogramo*. La definición de *kilopond* es la siguiente:

El **kilopond** o **kilogramo fuerza** es la (cantidad de) fuerza que ejerce el kilogramo patrón sobre un dinamómetro en un lugar donde la aceleración de la gravedad sea la normal, que, por convenio, es: $g_N = 9,80665 \text{ m/s}^2$.

Aproximadamente, la gravedad normal es la que reina (por término medio) al nivel del mar y a 45° de latitud.

4) SISTEMA INTERNACIONAL (SI):

Este sistema, de uso legal en España desde 8-11-1967, recomendado en 1960 por la Conferencia General de Pesas y Medidas, representa una ampliación del sistema Giorgi. Las *unidades fundamentales* son:

Tabla 1. Unidades SI básicas o fundamentales

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	<i>metro</i>	<i>m</i>
Masa	<i>kilogramo</i>	<i>kg</i>
Tiempo	<i>segundo</i>	<i>s</i>
Intensidad de corriente eléctrica	<i>amperio</i>	<i>A</i>
Temperatura termodinámica (*)	<i>kelvin</i>	<i>K</i>
Cantidad de sustancia	<i>mol</i>	<i>mol</i>
Intensidad luminosa	<i>candela</i>	<i>cd</i>

*) La temperatura Celsius se expresa en grados Celsius (símbolo °C).

Las definiciones de estas unidades son las siguientes:

El **amperio** es la intensidad de una corriente constante que, mantenida en dos conductores rectilíneos y paralelos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocadas a una distancia de 1 metro el uno del otro, en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud (9ª CGPM, 1948).

El **mol** es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades como átomos hay en 0,012 kilogramo de carbono 12 (14ª CGPM, 1967).

Cuando se emplea el mol, las entidades elementales deber ser especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, y otras partículas o agrupaciones específicas de tales partículas.

El **kelvin**, unidad de temperatura termodinámica, es la fracción $1/273,16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua (13ª CGPM, 1967).

Además de la temperatura termodinámica (símbolo T), expresada en Kelvin, se utiliza también la temperatura Celsius (símbolo t) definida por la ecuación: $t = T - T_0$, donde T_0

= 273,15 K por definición. La temperatura Celsius se expresa en grados Celsius. Un intervalo o una diferencia de temperatura puede expresarse tanto en grados Celsius como en kelvin.

La **candela** es la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ hertz y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1/683 watt por estereorradián (16ª CGPM, 1979).

Unidades suplementarias: Esta clase no contiene más que dos unidades puramente geométricas: el radián y el estereorradián, para las que la Conferencia General todavía no ha decidido si se trata de unidades básicas o derivadas, pudiendo utilizarse como unidades básicas o derivadas.

Tabla 2. Unidades SI suplementarias

Magnitud	Nombre	Símbolo
Angulo plano	<i>Radián</i>	<i>rad</i>
Angulo sólido	<i>estereorradián</i>	<i>sr</i>

Las definiciones de estas unidades son las siguientes:

El **radián** es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre la circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual a la del radio.

El **estereorradián** es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, intercepta sobre la superficie de dicha esfera un área igual a la de un cuadrado que tenga por lado el radio de la esfera.

Unidades derivadas: Las unidades SI derivadas se definen de forma que sean coherentes con las unidades básicas y suplementarias, es decir, se definen por expresiones algebraicas bajo la forma de productos de potencias de las unidades SI básicas y/o suplementarias con un factor numérico igual a 1. Existen unidades derivadas que se expresan a partir de las unidades básicas y suplementarias (Tabla 3) y unidades derivadas para las que se utilizan nombres especiales y un símbolo particular (Tabla 4).

Tabla 3. Ejemplos de unidades SI derivadas, expresadas a partir de las unidades básicas.

Magnitud	Nombre	Símbolo
Superficie	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
Número de ondas	1 onda por metro	$1/m$
Masa volumétrica (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Caudal en volumen	metro cúbico por segundo	m^3/s
Caudal másico	kilogramo por segundo	kg/s
Densidad de corriente	amperio por metro cuadrado	A/m^2
Campo magnético (intensidad)	amperio por metro	A/m
Concentración (de cantidad de sustancia)	mol por metro cúbico	mol/m^3
Actividad (radiactiva)	1 desintegración por segundo	$1/s$
Volumen másico (volumen específico)	metro cúbico por kilogramo	m^3/kg
Luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2

Tabla 4. Ejemplos de unidades SI derivadas que tienen nombres especiales

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresiones en unidades	
			SI	básicas
Frecuencia	<i>hertz</i>	<i>Hz</i>	-	$1/s$
Fuerza	<i>newton</i>	<i>N</i>	-	$m.kg/s^2$
Presión	<i>pascal</i>	<i>Pa</i>	N/m^2	$kg/m.s^2$
Energía, trabajo	<i>julio</i>	<i>J</i>	$N.m$	$m^2.kg/s^2$
Potencia, flujo	<i>vatio</i>	<i>W</i>	J/s	$m^2.kg/s$
Carga eléctrica	<i>coulombio</i>	<i>C</i>	-	$s.A$
Potencial eléctrico	<i>voltio</i>	<i>V</i>	W/A	$m^2.kg/s.A$
Capacidad eléctrica	<i>faradio</i>	<i>F</i>	C/V	$s.A /m^2.kg$
Resistencia eléctrica	<i>ohm</i>	Ω	V/A	$m^2.kg/s .A^2$
Conductancia	<i>siemens</i>	<i>S</i>	A/V	$s.A^2/m^2.kg$
Flujo de inducción magnética	<i>weber</i>	<i>Wb</i>	$V.s$	$m^2.kg/s^2.A$
Inducción magnética	<i>tesla</i>	<i>T</i>	Wb/m^2	$kg/s^2.A$
Inductancia	<i>henrio</i>	<i>H</i>	Wb/A	$m^2.kg/s^2.A^2$
Flujo luminoso	<i>lumen</i>	<i>lm</i>	-	$cd.sr$
Iluminancia	<i>lux</i>	<i>lx</i>	lm/m^2	$cd.sr/m^2$

1 CÁLCULO VECTORIAL.

1.1.- VECTORES APLICADOS, LIBRES Y CURSORES.

La necesidad de fijar normas de cálculo aplicables a todas las magnitudes ligadas a una dirección obliga a establecer un ente geométrico, que recibe el nombre de vector.

Cuando hablamos de espacio entenderemos que nos referimos al espacio afín tridimensional ordinario, compuesto de puntos. Si en este espacio elegimos un punto fijo O como origen, en base a su isomorfismo, podemos identificarlo con el espacio vectorial euclídeo tridimensional. Con E_3 designaremos, indistintamente, el espacio vectorial euclídeo o el espacio afín con un punto fijo, en tres dimensiones.

Dos puntos A, B del espacio E_3 dados en un cierto orden, determinan un segmento orientado, que recibe el nombre de *vector aplicado o fijo*. El punto A es el origen o punto de aplicación y B es el extremo del vector. La distancia AB es el *módulo del vector* y la recta determinada por ambos puntos es la *recta de acción o recta soporte*. El *sentido del vector* viene dado por la ordenación $A \rightarrow B$.

Para representar el vector aplicado de origen A y extremo B escribiremos AB , o bien, con una letra cualquiera, $v = AB$, cuando no interese especificar el origen ni el extremo del vector. En ocasiones se puede representar el mismo vector en la forma (A, v) , o $v(A)$, cuando interesa especificar su origen.

Si consideramos el conjunto de todos los vectores aplicados del espacio, se puede definir en él una relación binaria de equivalencia $\mathfrak{R}$, de la siguiente manera: Diremos que dos vectores aplicados AB y $A'B'$ son equipolentes, si $ABA'B'$ es un paralelogramo; es decir:

$$AB \mathfrak{R} A'B' \iff ABA'B' \text{ es un paralelogramo}$$

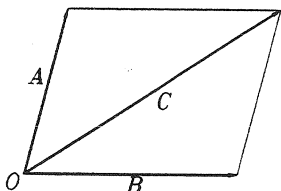
Esta relación de equivalencia clasifica el conjunto de vectores aplicados del espacio en clases disjuntas, cada una de las cuales recibe el nombre de *vector libre*. Por tanto, un vector libre del espacio E_3 no es más que una clase de vectores aplicados equipolentes (o también, un elemento del conjunto cociente: conjunto de vectores aplicados del espacio/ $\mathfrak{R}$). Los vectores libres representantes de las clases disjuntas se pueden suponer aplicados en un punto fijo O ; en otras palabras, un vector libre puede tener su origen en cualquier punto del espacio. Por último, los vectores equipolentes que tienen la misma recta soporte pertenecen a una misma clase de equivalencia, que denominaremos *vector deslizante o cursor*. Según esto, el origen de un vector deslizante puede ser cualquier punto de la recta soporte.

Para representar un vector de origen A y extremo B , una notación menos usada, pero muy útil, es: $AB = B - A$. Entonces, escribir: $B = A + AB$ nos indica que B es el extremo del vector AB , cuando se aplica en A . En tal sentido, también se puede decir que un vector es un operador que transforma un punto del espacio en otro.

Con BA denotamos un vector de origen B y extremo A . Los vectores AB y BA tienen el mismo módulo y dirección; pero su origen y sentido son distintos. A los vectores BA y AB se les llama *vectores opuestos*.

1.2.- IGUALDAD Y SUMA DE VECTORES.

Dos vectores libres A y B se dice que son iguales cuando son equipolentes; es decir, cuando tienen el mismo módulo, rectas soporte paralelas y el mismo sentido. Escribiremos:



$$A = B$$

La igualdad de vectores debe satisfacer las propiedades:

Idéntica: $A = A$

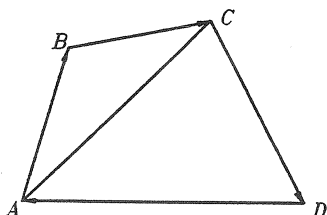
Recíproca: Si $A = B$, $B = A$

Transitiva: Si $A = B$ y $B = C$, $A = C$

1.1.

La suma de vectores, por definición, satisface la regla del paralelogramo (ley de composición). La suma de A y B , con un origen común O , es el vector C , diagonal del paralelogramo que tiene por lados A y B (fig 1.1). La suma vectorial es una suma geométrica, de modo que los módulos cumplen, $C = A \pm B$, solo cuando los vectores A y B son paralelos.

Para sumar varios vectores se puede usar, sucesivamente, la regla del paralelogramo; pero es más breve utilizar el método del polígono. Para ello basta hacer coincidir el extremo de un vector con el origen del siguiente, formando una línea poligonal. El origen del primer vector con el extremo del último determinan el vector suma o resultante. La figura formada por los vectores y su suma se llama *polígono vectorial*. Si A , B , C y D son los sucesivos vértice de un polígono vectorial (fig 1.2), se tiene:



$$AB + BC + CD = AD$$

Si en la construcción del vector suma coinciden el punto final y el inicial, la suma de los vectores es el vector nulo. Así, si $D = A$:

$$AB + BC + CD + DA = 0$$

1.2.

En particular, para dos vectores: $AB + BA = 0$, y se tiene: $AB = -BA$. Los vectores son *opuestos*.

De la misma definición de suma se comprende que la suma de vectores satisface las propiedades siguientes:

Uniforme: La suma es única

Conmutativa: $A + B = B + A$

Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Modular: $A + 0 = A$

Dados dos vectores A y B , se llama diferencia de estos vectores a un vector D , que sumado con el vector B nos da el vector A . Es decir, se escribirá, $A - B = D$, si se cumple: $B + D = A$.

1.3.- PRODUCTO POR UN NÚMERO REAL. VECTOR UNITARIO.

El producto de un vector A por un número real m es otro vector mA , de la misma dirección que A , de módulo m veces el de A y del mismo u opuesto sentido, según que m sea positivo o negativo.

Si A y B son dos vectores paralelos, siempre existe un número real k , tal que: $A = kB$, donde k es la medida de A , cuando se toma B como unidad y puede ser mayor o menor que la unidad, según sea: $A > B$ ó $B > A$, y positivo o negativo, según que los dos vectores tengan el mismo sentido u opuesto sentido. En particular, si $k = A$, entonces $B = 1$, y diremos que B es un *vector unitario o versor*. Un vector unitario es, pues, un vector que tiene por módulo la unidad.

En general, si U es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector A escribiremos:

$$A = AU \quad (1-1)$$

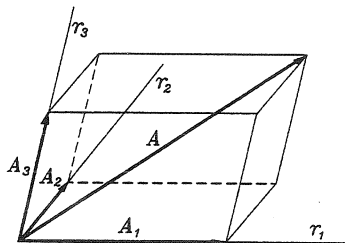
siendo A el módulo del vector.

El producto de un escalar (número real) por un vector satisface las propiedades siguientes:

- 1) Conmutativa: $mA = Am$
- 2) Asociativa: $m(nA) = (mn)A$
- 3) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(m+n)A = mA + nA$
- 4) Distributiva respecto a la suma de vectores: $m(A + B) = mA + mB$

1.4.- DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES. COMPONENTES DE UN VECTOR.

Dadas tres rectas concurrentes, r_1, r_2, r_3 (fig 1.3), que no están en un mismo plano (no coplanarias), siempre es posible descomponer un vector libre A en otros tres vectores A_1, A_2, A_3 , que tengan las direcciones de las rectas r_1, r_2 y r_3 . Esto se consigue construyendo, a partir de un punto cualquiera O del espacio, un paralelepípedo de aristas paralelas a las rectas dadas y cuya diagonal sea el vector A que descomponemos. Los vectores A_1, A_2, A_3 , que tienen las direcciones pedidas, cumplen



1.3.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \quad (1-2)$$

Se puede demostrar que la solución es única.

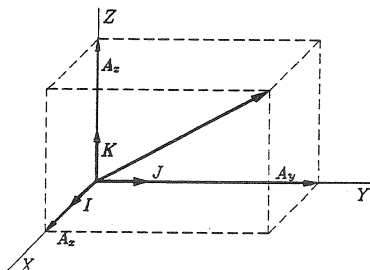
Para demostrarlo, supongamos que hubiera otros tres vectores: $\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2', \mathbf{A}_3'$, cuyas direcciones fueran las de las rectas, r_1, r_2, r_3 , y que cumplieran la condición: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_2' + \mathbf{A}_3'$. Podemos escribir: $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{A}_1$ $= \mathbf{B}' + \mathbf{A}_1'$, siendo $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$ los vectores: $\mathbf{B} = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$ y $\mathbf{B}' = \mathbf{A}_2' + \mathbf{A}_3'$. Se tiene: $\mathbf{B} - \mathbf{B}' = \mathbf{A}_1' - \mathbf{A}_1$; pero $\mathbf{B} - \mathbf{B}'$ es paralelo al plano determinado por r_2 y r_3 , puesto que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$ son paralelos a este plano y $\mathbf{A}_1' - \mathbf{A}_1$ es paralelo a r_1 . Esto no es posible, a no ser que ambos vectores sean nulos; es decir: $\mathbf{A}_1' - \mathbf{A}_1 = 0$. Un razonamiento análogo nos haría ver que $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2'$ y que $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_3'$.

Si $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$, son tres vectores unitarios que tienen la dirección de las rectas r_1, r_2, r_3 , según (1-1) y (1-2), será:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{U}_1 + A_2 \mathbf{U}_2 + A_3 \mathbf{U}_3 = \sum A_i \mathbf{U}_i \quad (1-3)$$

donde A_i es un escalar positivo o negativo, según que $\mathbf{A}_i$ sea del mismo sentido o de sentido contrario a $\mathbf{U}_i$.

Los números (A_1, A_2, A_3) se llaman las componentes del vector $\mathbf{A}$, según las rectas que definen $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$, los cuales constituyen una base. Una base muy importante es el sistema formado por los vectores unitarios, que supondremos ordenados, situados sobre rectas soportes normales entre si y formando un triedro a derechas o positivo (dextrógiro), así llamado porque un tornillo de rosca normal o un sacacorchos, que gira de uno de ellos



1.4.

al siguiente, en el orden establecido, avanza en el sentido del otro vector (fig 1.4). Estos vectores unitarios, que denotaremos por $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ tienen en esta base las componentes siguientes: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Normalmente, consideraremos siempre sistemas ortonormales, que denotaremos por $OXYZ$. Escribiremos entonces:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{I} + A_y \mathbf{J} + A_z \mathbf{K} \quad (1-4)$$

siendo A_x, A_y, A_z , las componentes cartesianas del vector $\mathbf{A}$, según los ejes X, Y, Z , respectivamente.

En general, a todo punto P de E_3 le asignaremos como coordenadas las componentes del vector OP , respecto de la base $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$.

Por definición, llamaremos sistema de referencia en el espacio E_3 a todo conjunto $(O, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3)$, formado por un punto O , que será el origen del sistema de referencia (y al

que se le asignan coordenadas nulas) y una base (U_1, U_2, U_3).

Según la (1-3) ó (1-4) todo vector del espacio puede ser expresado mediante una combinación lineal de tres vectores dados unitarios no coplanarios.

En ocasiones, con la notación de Einstein, la igualdad (1-3) se escribe más brevemente suprimiendo el signo de sumación. Esto es:

$$A = A_i U_i \quad (1-5)$$

entendiendo que el índice i repetido indica la suma para los valores 1, 2 y 3.

Si α, β, γ , son los ángulos que el vector A forma con los ejes X, Y, Z , las expresiones:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad (1-6)$$

son los cosenos directores del vector. El teorema de Pitágoras da:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-7)$$

así que basta conocer las componentes del vector para obtener su módulo. Si se elevan al cuadrado las igualdades (1-6) y se suman resulta:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

que es la conocida relación trigonométrica entre los cuadrados de los cosenos directores de una recta.

Si U es el versor que tiene la dirección y sentido del vector A , es:

$$U = \frac{A}{A} = \cos \alpha I + \cos \beta J + \cos \gamma K \quad (1-8)$$

de forma que, los cosenos directores de un vector son precisamente las componentes del versor que tiene la misma dirección y sentido.

Ejemplo 1.1: Dado el vector $A = 2I + J - 2K$, ¿qué información podemos obtener?.

Solución:

- 1) Las componentes de este vector son $A_x = 2, A_y = 1, A_z = -2$.
- 2) Según (1-7), el módulo de este vector es 3. *El módulo es siempre positivo.*
- 3) Los cosenos directores del vector A son: $\cos \alpha = 2/3, \cos \beta = 1/3, \cos \gamma = -2/3$.
- 4) Por tanto, este vector unitario es: $U = (2I + J - 2K)/3$.

Hemos de señalar que *las propiedades de los vectores son independientes del sistema de referencia elegido*. Esto es importante, pues si todos los fenómenos que estudiamos se expresan de forma clara y concisa mediante el empleo de vectores, la

formulación de una ley física, en forma vectorial, no depende de los ejes elegidos. Sin embargo, al realizar cálculos numéricos debemos trabajar con las componentes de los vectores y calcular los módulos de los mismos y, para eso, hay que referirlos a unos ejes determinados. Las componentes (y cosenos directores) de un vector dependen de los ejes elegidos, pero el módulo, la dirección y el sentido son independientes de ellos. Las cantidades que, como el módulo, no dependen de los ejes se llaman escalares. Estrictamente hablando, las componentes de un vector no son escalares porque dependen del sistema de coordenadas elegido. Todo escalar es un número, pero no todos los números son escalares. Las componentes son pseudo-escalares (números positivos o negativos). El único vector cuyas componentes son escalares es el vector nulo.

Ahora ya podemos decir con mayor precisión que una magnitud física es un vector si satisface las siguientes condiciones:

- 1) Debe tener módulo, dirección y sentido, independiente del sistema de referencia elegido.
- 2) Debe poder establecerse la igualdad y la suma de vectores cumpliendo ésta la ley del paralelogramo.

1.5.- COMPONENTES DE LA SUMA Y PRODUCTO POR UN ESCALAR.

La suma de dos vectores A y B , teniendo en cuenta la propiedad conmutativa y asociativa, es:

$$A + B = (A_x + B_x)I + (A_y + B_y)J + (A_z + B_z)K \quad (1-9)$$

de manera que las componentes cartesianas de la suma de dos vectores son la suma de las componentes, según cada uno de los ejes. Análogamente sucede con la diferencia. Si D es el vector diferencia de $A - B$, será:

$$D_x = A_x - B_x \quad D_y = A_y - B_y \quad D_z = A_z - B_z$$

y el módulo de este vector, será:

$$D = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \quad (1-10)$$

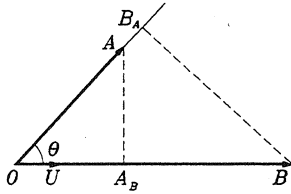
El producto de un escalar por un vector, teniendo en cuenta la propiedad distributiva, nos da:

$$mA = m(A_x I + A_y J + A_z K) = mA_x I + mA_y J + mA_z K \quad (1-11)$$

así que las componentes del producto son: mA_x , mA_y , mA_z .

1.6.- PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Dados dos vectores libres A y B , cuyas direcciones forman un ángulo θ , se llama producto escalar o interno de estos vectores al escalar:



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1-12)$$

Si $\mathbf{A}_B$ es el vector proyección de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}_A$ el vector proyección de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$ (fig 1.5), puesto que $A_B = A \cos \theta$ y $B_A = B \cos \theta$, tendremos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_B B = B_A A \quad (1-13)$$

1.5.

En particular, si $\mathbf{U}_B$ es el versor que tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{B}$, el producto escalar de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{U}_B$ es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_B = A \cos \theta = A_{U_B} \quad (1-14)$$

es decir, *multiplicar escalarmente un vector por un vector unitario es proyectar el vector sobre la recta soporte del vector unitario.*

Si $\mathbf{U}_A = \mathbf{A}/A$ y $\mathbf{U}_B = \mathbf{B}/B$ son los vectores unitarios de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, el coseno del ángulo que forman es:

$$\cos \theta = \mathbf{U}_A \cdot \mathbf{U}_B = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \quad (1-15)$$

así que el coseno del ángulo que forman dos vectores es igual al producto escalar de sus vectores unitarios.

De la definición de producto escalar se deduce:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad (1-16)$$

o sea, el producto escalar de un vector por si mismo es igual al cuadrado del módulo (norma).

El producto escalar es nulo si lo es alguno de los vectores. Pero, aunque ninguno de los vectores sea nulo, el producto escalar puede serlo, si son perpendiculares. Es decir:

$$\theta = 90^\circ \quad \cos \theta = 0 \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-17)$$

En cambio, si

$$\theta = 0^\circ \quad \cos \theta = 1 \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \quad (1-18)$$

Las propiedades del producto escalar son:

- 1) Conmutativa: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- 2) Distributiva respecto a la suma: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- 3) Asociativa respecto a los escalares: $m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B})$

De las expresiones (1-16) y (1-17) se obtiene fácilmente:

$$I.I = J.J = K.K = 1 \quad I.J = J.K = I.K = 0 \quad (1-19)$$

Si α, β, γ son los ángulos que A forma con los ejes, las componentes son: $A_x = I.A = A \cos \alpha$, $A_y = J.A = A \cos \beta$, $A_z = K.A = A \cos \gamma$. La expresión del producto escalar en función de las componentes es:

$$A.B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-20)$$

y también:

$$A.A = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-21)$$

La condición de perpendicularidad de dos vectores A y B , es:

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad (1-22)$$

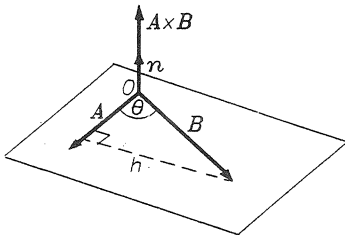
Ejemplo 1.2: Dados los vectores $A = 2I - J + 2K$, $B = I + 2J + 2K$, el producto escalar es: $A.B = 2.1 + (-1).2 + 2.2 = 4$. El coseno del ángulo que forman estos vectores es: $\cos \theta = A.B/AB$. Como los módulos son: $A = 3$ y $B = 3$, entonces $\cos \theta = 4/9$.

1.7.- PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

El producto vectorial o externo de dos vectores libres A y B , cuyas direcciones forman un ángulo θ es, por definición, otro vector libre dado por

$$A \times B = AB n \sin \theta \quad (1-23)$$

donde n es un vector unitario normal a A y B , y cuyo sentido viene dado por la regla del sacacorchos: el sentido de n es el de avance de un sacacorchos que gira de A a B (fig 1.6)



por el menor ángulo posible. Se debe advertir que aunque es costumbre dibujar el vector $A \times B$ con el origen en O , su origen es arbitrario, puesto que los vectores A , B y $A \times B$ son vectores libres.

El módulo del producto externo es:

$$|A \times B| = AB \sin \theta \quad (1-24)$$

1.6.

y como $\sin \theta = h/B$, donde h es la altura señalada (distancia de la perpendicular del extremo de B a A), también se verifica:

$$|A \times B| = Ah = \text{Área del paralelogramo } AB$$

Si ninguno de los vectores es nulo, pero $\theta = 0^\circ$ ó 180° , $\sin \theta = 0$ y

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1-25)$$

que es la *condición de paralelismo* de dos vectores. Si $\theta = 90^\circ$: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A\mathbf{B}\mathbf{n}$.

Propiedades del producto vectorial:

- 1) No goza de la propiedad conmutativa: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
- 2) Distributiva respecto a la suma: $\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}$
- 3) Asociativa respecto a los escalares:

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$$

De la definición:

$$\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{J} \times \mathbf{J} = \mathbf{K} \times \mathbf{K} = 0 \quad \mathbf{I} \times \mathbf{J} = \mathbf{K} \quad \mathbf{J} \times \mathbf{K} = \mathbf{I} \quad \mathbf{K} \times \mathbf{I} = \mathbf{J}$$

mientras que

$$\mathbf{J} \times \mathbf{I} = -\mathbf{K} \quad \mathbf{K} \times \mathbf{J} = -\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \times \mathbf{K} = -\mathbf{J}$$

teniéndose

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-26)$$

y la *condición de paralelismo* de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es:

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \quad (1-27)$$

así que cuando *dos vectores son paralelos sus componentes cartesianas son proporcionales*. Entonces el determinante (1-26) es nulo y se cumple la (1-25).

Ejemplo 1.3: Producto vectorial de los dos vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{I} + 5\mathbf{J} - 3\mathbf{K}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}$.

Solución: Haciendo uso de (1-26), es: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 8\mathbf{I} - 11\mathbf{J} - 13\mathbf{K}$. Como este vector es perpendicular a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, se puede comprobar que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0$.

1.8.- PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

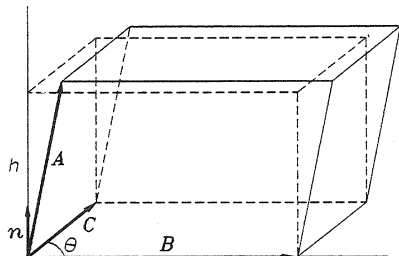
Multipliquemos escalarmente un vector $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Si θ es el ángulo que forman $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, y h es la proyección de $\mathbf{A}$ sobre la recta perpendicular al plano formado por $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ (fig 1.7), tendremos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = BC \sin \theta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) = BC h \sin \theta$$

y como $BC \sin \theta = \text{Área del paralelogramo } BC$, resulta:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = V$$

así que el producto mixto es un escalar igual al volumen V del paralelepípedo que tiene por lados los tres vectores. En función de las componentes de los vectores



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1-28)$$

1.7.

Como la base del paralelepípedo también la pueden formar los pares de vectores $\mathbf{C}, \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, teniendo en cuenta que un determinante no

varia cuando se efectúa un número par de permutaciones en sus filas, resulta:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = V \quad (1-29)$$

Por otro lado, es evidente que, según la propiedad 1) del producto vectorial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -V$$

y por ser conmutativo el producto escalar:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = -V$$

luego:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = V$$

que comparada con (1-29) nos hace ver que se pueden intercambiar los signos del producto mixto (no alterando el orden de los vectores) sin que cambie el producto mixto, además de cambiar el orden de los vectores, siempre que se mantenga la permutación circular y no se cambie el orden de los productos. Por esta razón, se suele escribir el producto mixto así:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1-30)$$

El producto mixto puede ser nulo, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ son perpendiculares, lo que supone que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ están en un mismo plano (coplanarios) ó es nulo el producto $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, para lo cual deben ser $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ vectores paralelos.

Ejemplo 1.4: Hallar la ecuación del plano formado por los tres puntos: $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ y $C(2,1,-1)$.

Solución: Si $P(X,Y,Z)$ es un punto cualquiera del plano, los vectores: AP , AB y AC están en ese plano, luego su producto mixto es nulo. Como las componentes de estos vectores, respectivamente, son: $AP(X-1,Y-1,Z-1)$, $AB(0,1,2)$ y $AC(1,0,-2)$, será:

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad -2X + 2Y - Z + 1 = 0$$

que es la ecuación del plano.

1.9.- DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.

Llamaremos doble producto vectorial de tres vectores A , B y C , al vector definido por: $A \times (B \times C)$ que, evidentemente, está en el plano determinado por B y C . Es fácil demostrar que

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \quad (1-31)$$

mientras que

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A \quad (1-32)$$

para lo que basta sustituir cada uno de los vectores por sus componentes y realizar las operaciones indicadas.

La demostración puede simplificarse un poco si se toman dos vectores, por ejemplo B y C , en el plano X,Y , y uno de ellos, por ejemplo C , coincidiendo con el eje X ; escribamos, pues, $C = C_x I$, $B = B_x I + B_y J$ y $A = A_x I + A_y J + A_z K$. Entonces:

$$A \times (B \times C) = -A_y B_y C_x I + A_x B_y C_x J$$

y sumando y restando $A_x B_x C_x I$, resulta:

$$A \times (B \times C) = A_x C_x (B_x I + B_y J) - (A_x B_x + A_y B_y) C_x I$$

que es la (1-31).

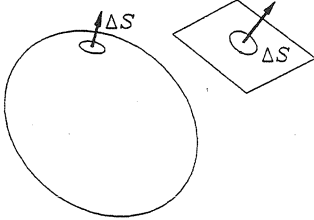
1.10.- EL ELEMENTO DE ÁREA Y ÁNGULO COMO VECTOR.

Hemos visto que toda superficie en forma de paralelogramo puede venir representada por un vector, que es el dado por el producto vectorial de dos vectores que tienen por módulos las longitudes de los lados del paralelogramo.

Podemos generalizar esto a una superficie cualquiera. De la misma forma que un segmento de recta orientado representa un vector, también podemos considerar en una superficie plana su área y su orientación en el espacio. De aquí que si adoptamos ciertos convenios, una superficie se puede representar por un vector. Para ello, supondremos que

el módulo del vector tiene una longitud numéricamente igual al área de la superficie que se quiere representar y cuya dirección es la de la normal a la misma. El sentido del vector puede ser cualquiera; pero se suelen adoptar los siguientes convenios: Dando un sentido al contorno de la superficie, el sentido de este vector es tal que se cumple la regla del tornillo (fig 1.8). Pero, además, es necesario admitir que la suma de dos áreas planas orientadas y señaladas con sentido de circulación, se obtiene aplicando la regla del paralelogramo de la suma de vectores.

En el caso de una superficie de área dS , también se puede adoptar el convenio anterior, pero se suele elegir el sentido del vector de tal modo que, si la superficie de la que forma parte es cerrada, el vector $d\mathbf{S}$ está dirigido hacia fuera, lo que equivale a elegir sobre el contorno sentido antihorario. Si $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie dS , se puede escribir:



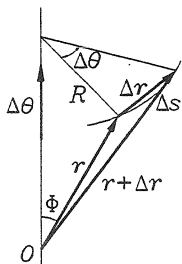
$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = dS_x \mathbf{i} + dS_y \mathbf{j} + dS_z \mathbf{k} \quad (1-33)$$

1.8.

Los vectores tales como el vector superficie o el definido por un producto vectorial, como el momento, que están ligados a un giro o circulación, se llaman

vectores axiales, para distinguirlos de los demás, que se denominan *vectores polares*.

También mediante ciertos convenios, podemos representar por un vector un elemento de ángulo. Si dos semirrectas concurrentes forman un ángulo infinitesimal $d\theta$ (fig 1.9), definiremos el vector $d\theta$, de módulo igual al valor absoluto del ángulo formado por las dos semirrectas, medido normalmente en radianes, de dirección normal al plano definido por las dos semirrectas y sentido el dado por la regla del tornillo que gira en el sentido del ángulo considerado.



Tomando el punto O como origen del sistema de referencia, la relación entre el desplazamiento Δr y el ángulo $\Delta\theta$ se obtiene teniendo en cuenta que, $\Delta s = R\Delta\theta$ y como en el límite se cumple que $ds = dr$, se verifican las igualdades:

$$dr = R d\theta \quad R = r \sin\phi$$

luego substituyendo la segunda en la primera, se tiene:

1.9.

$$dr = r \sin\phi d\theta$$

pero como dr es perpendicular al plano que pasa por r y $d\theta$ y se cumple la regla del tornillo, está claro que

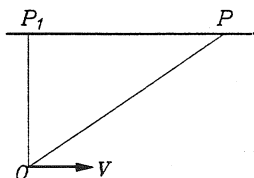
$$dr = d\theta \times r \quad (1-34)$$

donde, por tratarse de un producto vectorial, el orden de los factores no puede cambiarse, a menos que se cambie el signo.

APLICACIONES DEL CÁLCULO VECTORIAL.

ECUACIÓN DE LA RECTA:

La recta del espacio que pasa por el punto $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ es el lugar geométrico de los puntos $P(X, Y, Z)$ tales que el vector $P - P_1$ es paralelo a un vector $V = aI + bJ + cK$ (fig 1). Si k es la medida de $P - P_1$ tomando V como unidad, se tiene:



$$P - P_1 = kV \quad (1)$$

y multiplicando por I, J, K y eliminando k :

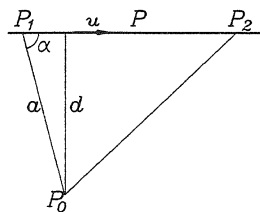
$$\frac{X - X_1}{a} = \frac{Y - Y_1}{b} = \frac{Z - Z_1}{c}$$

1.

que es la ecuación de la recta en coordenadas cartesianas rectangulares. Y como los cosenos directores de la recta son: $\cos\alpha = a/V$, $\cos\beta = b/V$, $\cos\gamma = c/V$, se pueden sustituir las componentes por los cosenos directores.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS:

Sean $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ y $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ los dos puntos y $P(X, Y, Z)$ un punto genérico de la recta e que pasa por ellos (fig 2). Como $P_2 - P_1$ y $P - P_1$ son colineales, se tendrá



$$P_2 - P_1 = k(P - P_1) \quad (2)$$

y multiplicando escalarmente por I, J, K y eliminando k , resulta:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1}$$

2.

que es la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

DISTANCIA MÍNIMA DE UN PUNTO A UNA RECTA:

Para calcular la mínima distancia d de un punto $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ a la recta e que pasa por los puntos $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ y $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$, basta calcular la altura del triángulo que forman los tres puntos (fig 2), tomando como base el segmento P_1P_2 . Si $u = P_1P_2 / |P_1P_2|$ es el unitario de esta recta y el vector $a = P_1P_0$, se tiene:

$$d = a \operatorname{sen}\alpha = |au|$$

DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS NO PARALELAS:

Para hallar la distancia mínima entre dos rectas AB y CD , no paralelas procedemos como sigue (fig 3): Sea $d = PQ$ la distancia mínima entre estas rectas; entonces la recta PQ es perpendicular a los vectores AB y CD . Si n es el vector unitario de $AB \times CD$, también lo es del vector PQ . Llamando a al vector que une un punto de la recta que pasa por A y B con otro de la recta que pasa por C y D , $a = AC$ (podría ser $AD, \dots$) la distancia

$$d = |a \cdot n|$$

3.

Para determinar los puntos P y Q basta escribir $AP = \alpha AB$, $CQ = \beta CD$, y usar la condición de paralelismo entre los vectores $PQ = PA + AC + CQ$ y n .

ECUACIÓN DEL PLANO:

El plano del espacio que pasa por el punto $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ es el lugar geométrico de las rectas P_1P , donde $P(X, Y, Z)$ es un punto genérico del plano, que son perpendiculares a una dirección dada por la ecuación: $N = AI + BJ + CK$ (fig 4). Se tiene:

$$(P - P_1) \cdot N = 0 \quad (3)$$

es decir

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

4.

que es la ecuación del plano que pasa por el punto P_1 y es perpendicular al vector N , siendo: $D = -(AX_1 + BY_1 + CZ_1)$. Por tanto, también se puede escribir:

$$A(X - X_1) + B(Y - Y_1) + C(Z - Z_1) = 0$$

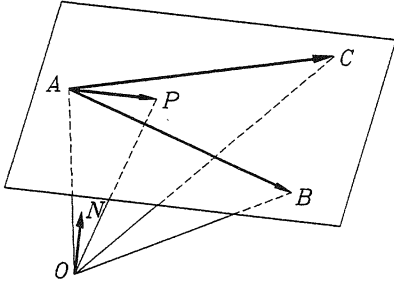
para la ecuación del plano que pasa por P_1 y es normal a N .

ECUACIÓN DEL PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS:

Sean $A(X_1, Y_1, Z_1)$, $B(X_2, Y_2, Z_2)$ y $C(X_3, Y_3, Z_3)$ los puntos dados y P un punto genérico del plano. Puesto que los vectores $C - A$ y $B - A$ están en ese plano, el vector normal al plano $N = (B - A) \times (C - A)$ es perpendicular al plano y, también, al vector $P - A$ (fig 5). Se tiene:

$$(P - A) \cdot N = (P - A) \cdot (B - A) \times (C - A) = 0 \quad (4)$$

que es la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. El producto mixto, si las coordenadas de P son (X, Y, Z) , se puede escribir en la forma



$$\begin{vmatrix} X - X_1 & Y - Y_1 & Z - Z_1 \\ X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - Y_1 & Z_3 - Z_1 \end{vmatrix} = 0$$

De la ecuación (4), se tiene:

$$P \cdot N = A \cdot N;$$

5.

y puesto que el segundo miembro de esta ecuación es: $A \cdot N = A \cdot (B - A) \times (C - A) = A \cdot B \times C$, la ecuación (4) también se puede escribir en la forma:

$$P \cdot N = A \cdot B \times C$$

Los cosenos directores de N son:

$$\cos \alpha = \frac{A}{N} \quad \cos \beta = \frac{B}{N} \quad \cos \gamma = \frac{C}{N}$$

donde N es el módulo de N . Se tiene:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = \frac{AX + BY + CZ}{N}$$

El primer miembro es el producto escalar de $R = OP$ por el unitario de N ; es decir: $R \cdot u_N = d$, donde d es la distancia del origen al plano. El segundo miembro es $-D/N$. Entonces, se tiene:

$$d = -\frac{D}{N} = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5)$$

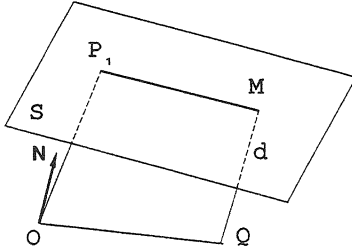
y la ecuación del plano se puede escribir en la forma:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma - d = 0$$

que es la llamada ecuación normal del plano.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO QUE PASA POR UN PUNTO:

Un plano S queda determinado por un punto $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ y por el vector $N(A, B, C)$ perpendicular a él (fig 6). Si Q es el punto dado, por el que trazamos el vector d perpendicular al plano, y M es el punto de intersección de la recta soporte del vector N con el plano, por ser d y N paralelos, se cumplen las igualdades:



6.

$$d = kN \quad (6)$$

$$Q + d + MP_1 - P_1 = 0$$

ecuación que multiplicada escalarmente por N , da:

$$(Q - P_1) \cdot N + d \cdot N = 0$$

sin más que tener en cuenta que los vectores MP_1 y N son perpendiculares. Sustituyendo d , dado por la ecuación (6) y despejando k , resulta:

$$d = kN = \frac{(P_1 - Q) \cdot N}{N^2} N \quad (7)$$

El módulo de este vector nos da la distancia del punto Q al plano $Q(X_2, Y_2, Z_2)$, resulta:

$$d = \frac{|AX_2 + BY_2 + CZ_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (8)$$

donde $D = -(AX_1 + BY_1 + CZ_1)$, que es la conocida expresión que nos da la distancia de un punto a un plano que pasa por un punto dado. En particular, si el punto Q es el origen, $P_1 - Q = P_1$, la expresión anterior se simplifica, resultando igual que (5):

$$d = \frac{|AX_1 + BY_1 + CZ_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9)$$

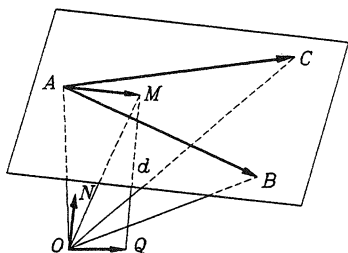
DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS:

Sean A, B, C los puntos y Q el punto dado. Es claro que el vector $N = AB \times AC$, es paralelo a $d = QM$, donde M es el punto de intersección de la recta soporte del vector con el plano (fig. 7). Podemos, por tanto, escribir:

$$d = kN \quad (10)$$

y

$$Q + d + MA - A = 0$$



7.

expresiones análogas a las del problema anterior. Por tanto, la (7) sigue siendo válida. Es evidente que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = V$$

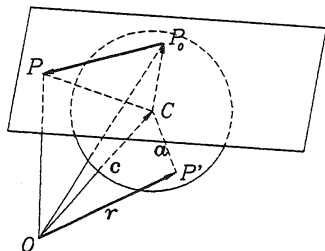
donde V es el volumen del paralelepípedo. Se puede escribir:

$$d = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}}{N^2} \quad (11)$$

ECUACIÓN DE LA ESFERA Y DEL PLANO TANGENTE EN UN PUNTO P_0 :

Sea C el centro de la esfera y P' un punto cualquiera de la misma (fig 8). Con las notaciones de la indicadas, se tiene: $\mathbf{CP}' \cdot \mathbf{CP}' = |\mathbf{CP}'|^2 = a^2$ y como $\mathbf{CP}' = \mathbf{r} - \mathbf{c}$, resulta:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}) = a^2 \quad (12)$$



8.

Sea $P(X, Y, Z)$ un punto genérico del plano tangente. Si P_0 es el punto tangente a la esfera, se verifica

$$\mathbf{CP}_0 + P_0P = \mathbf{CP}$$

y si multiplicamos escalarmente por $\mathbf{CP}_0$:

$$|\mathbf{CP}_0|^2 + \mathbf{CP}_0 \cdot P_0P = \mathbf{CP}_0 \cdot \mathbf{CP}$$

y como $\mathbf{CP}_0 \cdot P_0P = 0$, por ser perpendiculares, resulta finalmente:

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}) = a^2 \quad (13)$$

que es la ecuación del plano tangente a la esfera de centro C y de radio a , en el punto $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$.

1.- CUESTIONES Y EJERCICIOS.

- 1) ¿Qué entendemos por vector?.
- 2) ¿Como definiría cuantitativamente un vector?.
- 3) ¿Como se clasifican los vectores?.
- 4) ¿Cuales son las propiedades de la suma de vectores?.
- 5) Si los vectores A y B satisfacen a la ecuación $A = kB$, donde k es un número real, ¿qué información puede darse acerca de los vectores A y B ?.
- 6) ¿Qué propiedades satisface el producto de escalares por vectores?.
- 7) ¿Qué llamamos componentes de un vector?.
- 8) Dado el vector: $A = 2I - 3J + 6K$, calcular: a) su módulo; b) los cosenos directores.
R: $A = 7$, $\cos\alpha = 2/7$, $\cos\beta = -3/7$, $\cos\gamma = 6/7$.
- 9) Sumar los vectores $A(2,-3,1)$ y $B(1,2,-3)$. R: $A + B = 3I - J - 2K$.
- 10) ¿Cuál es el vector que tiene por origen el punto $A(1,2,-1)$ y por extremo el punto $B(4,3,1)$? R: El vector $B - A = (3,1,2)$.
- 11) El vector $A(5,4,-7)$ tiene por extremo el punto $B(3,2,3)$, ¿cuál es su origen?.
R: $M(-2,-2,10)$.
- 12) Determinar el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector $A = (2,1,2)$? R: $U = A/A = (2I + J + 2K)/3$.
- 13) Dados los vectores $A(2,1,2)$ y $B(3,4,0)$, calcular el coseno del ángulo que forman.
R: $\cos\theta = A \cdot B / AB = 2/3$.
- 14) Calcular el producto escalar de $A(2,5,-5)$ y $B(3,1,1)$. R: $A \cdot B = 6$.
- 15) ¿Cuál es la proyección de $A(3,-1,2)$ sobre $B(2,1,2)$? R: $A_B = A \cdot U_B = 3$.
- 16) ¿Puede ser negativa la proyección de un vector sobre otro y qué sentido físico tiene el signo menos?.
- 17) Calcular el producto vectorial de $A(2,-3,1)$ y $B(1,2,-3)$ y multiplicar el resultado escalarmente por $A + B$. Estos productos deben ser nulos.
R: $A \times B = 7(I + J + K)$. $A \times B \cdot A = 7(I + J + K) \cdot (2I - 3J + K) = 0$.
- 18) Si $A \cdot B = A \cdot C$, siendo A un vector no nulo, ¿es necesariamente $B = C$? R: No.
- 19) Demostrar que $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
- 20) Si $A(3,2,3)$ y $B(-6,m,n)$ ¿qué valores deben tener m y n para que estos vectores sean paralelos? R: $m = -4$, $n = -6$.
- 21) ¿Pueden ser perpendiculares los vectores anteriores? ¿Hace falta alguna condición más? Suponer $m+n = 8$. ¿Son perpendiculares? R: Si, si $m = 6$, $n = 2$.
- 22) Si $A \times B(4,2,-5)$ y $A(1,3,2)$, ¿cuál es B ? R: Indeterminado.
- 23) Hallar el coseno del ángulo que forman la diagonal del cubo de lado a y una de sus aristas. R: $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$
- 24) Coseno del ángulo que forma la diagonal del cubo de 23) con una de las diagonales de sus caras. R: $\cos\beta = 2/\sqrt{6}$
- 25) Determinar los versores normales al plano que determinan los tres puntos $A(1,1,-1)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,1)$. R: $\pm(2I - K)/\sqrt{5}$.
- 26) Calcular el área del triángulo que forman los puntos del 25). R: $\sqrt{5}$.
- 27) Dados los vectores: $A(2,0,1)$ y $B(1,1,6)$, calcular el área del triángulo que forman.
R: $(3\sqrt{14})/2$.

- 28) ¿Los vectores $A(3,0,1)$, $B(2,1,-1)$ y $C(1,3,2)$ son coplanarios? R: No.
- 29) Dados los vectores $A(3,0,1)$, $B(1,2,-3)$ y $C(m,1,-1)$, ¿que valor debe tomar m para que sean coplanarios? R: $m = 2$.
- 30) Demostrar que $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$.
- 31) Demostrar que $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$
- 32) Hallar los versores paralelos al plano XZ y normales al vector: $A = 2I - J + 2K$.
R: $\pm(I - K)/\sqrt{2}$.
- 33) Demostrar que el área de un triángulo de lados A y B es $|A \times B|/2$.
- 34) Calcular el área del triángulo formado por los extremos de los vectores: $A = 2I + K$, $B = I + J + 6K$ y la suma de ambos. R: $(3\sqrt{14})/2$.
- 35) Hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde el punto $P(6,-4,4)$ a la recta que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(3,-1,4)$. R: $(4,-3,6)$.
- 36) Si $A(6,3,9)$ y su producto vectorial por otro B es $A \times B = -I + 2J$, calcular B con la condición de que sea unitario. R: $B = (2I + J + 2K)/3$ o $B = (8I + 4J + 19K)/21$.
- 37) Demostrar la ecuación $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$.
- 38) ¿Qué convenios debemos establecer para que una superficie pueda representarse por un vector?.
- 39) Si U_1 y U_2 son dos versores del plano XY , que forman los ángulos α y β con el semieje positivo OX , obtener las expresiones trigonométricas:
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
Sugerencia: Utilizar el producto escalar $U_1 \cdot U_2$.
- 40) Deducir las ecuaciones trigonométricas
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
- 41) Hallar los vectores paralelos a la recta $2X = Y + 1$, $Y = Z - 4$, que tienen de módulo 3. R: $\pm(I + 2J + 2K)$.
- 42) Deducir la ley de los senos de un triángulo: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$, donde a , b , c son los lados y A , B , C los ángulos opuestos. Sugerencia: $a \times b = b \times c$, etc.
- 43) Descomponer un vector B en dos: uno en la dirección de otro A y otro normal a A ,
R: $B_1 = (A \cdot B)A/A^2$ en la dirección de A y $B_2 = B - (A \cdot B)A/A^2$ normal a A .
- 44) La proyección de un vector A sobre la recta que pasa por los puntos $P(2, 3,-1)$ y $Q(-2,-4,3)$ y la proyección sobre el eje OZ es 1. Sabiendo que $A \cdot B = 13$, siendo $B(2,-1,2)$, determinar el vector A . R: $A = 4I - 3J + K$.
- 45) Calcular $(A \times B) \cdot [(B \times C) \times (C \times A)]$. R: 0.
- 46) Dados los vectores: $A = A - O = I + J$, $B = B - O = I + J + K$, calcular la distancia del punto $P(1,2,3)$ a sus rectas de acción. R: $d(A) = \sqrt{(19/2)}$, $d(B) = \sqrt{2}$.
- 47) Calcular el vector $D = XI + YJ + ZK$, sabiendo que es coplanario con $A = I + J$ y $B = I + J + K$ y que su módulo es 5, y que $D \cdot A = 6$. R: $X = Y = 3$, $Z = \sqrt{7}$.
- 48) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,1,-2)$ y es perpendicular a los planos: $2X + Y - 2Z + 3 = 0$, $X - 3Y + Z + 4 = 0$. R: $5X + 4Y + 7Z + 5 = 0$.
- 49) Hallar los vectores paralelos a la recta $X = Y + 2$; $2Y = Z + 1$, que tienen de módulo 2. R: $\pm 2(I + J + 2K)/\sqrt{6}$.
- 50) Dados los vectores: $A(-4,-6,15)$, $B(3,-2,4)$, $C(3,1,-1)$, $D(-1,1,4)$, hallar la relación que existe entre ellos. R: $A = 2B - 3C + D$.

2. VECTORES DESLIZANTES.

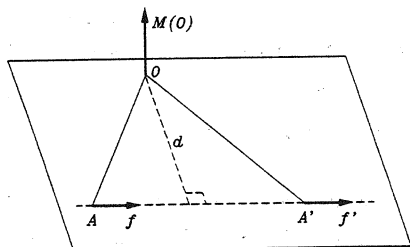
2.1.- MOMENTO DE UN CURSOR RESPECTO A UN PUNTO.

Por definición, se llama momento de un vector (A, f) , respecto a un punto O , que de ordinario se hace coincidir con el origen de coordenadas, al vector:

$$M(O) = (A - O) \times f = A \times f \quad (2-1)$$

El momento es otro vector perpendicular a A y f , cuyo sentido viene dado por la regla del sacacorchos. El momento con respecto a O es nulo si A es paralelo a f ; es decir, si O está en la recta soporte de f .

Si (A', f') es otro vector, situado en la misma recta soporte que f y de igual módulo (fig 2.1), el momento de f' con respecto al mismo punto O , será:



$$M'(O) = (A' - O) \times f' = A' \times f'$$

y siendo $f' = f$, se tiene:

$$M'(O) - M(O) = (A' - A) \times f' = 0$$

por ser $A' - A$ y f paralelos. Se ve así que f puede deslizarse sobre su recta de acción sin que varíe su momento con respecto al mismo punto; por esto, no tiene sentido hablar de momento de un vector libre (todos los vectores equipolentes no

2.1.

tienen el mismo momento con respecto a un punto dado) y sí de los vectores deslizantes o cursores. Son cursores las fuerzas y las velocidades angulares instantáneas ω en la composición de rotaciones de un sólido rígido. Cuando f es la velocidad angular de un punto O alrededor del eje AA' , $f = \omega$, M es su velocidad lineal: $V = A \times \omega = \omega \times R$, donde $R = AO = -A$ es el vector de posición del punto O .

La ecuación (2-1) nos determina las componentes del vector $M(O)$, ya que si X, Y, Z , son las componentes de A , se tiene:

$$M_x I + M_y J + M_z K = \begin{vmatrix} I & J & K \\ X & Y & Z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

de manera que las componentes del vector momento son:

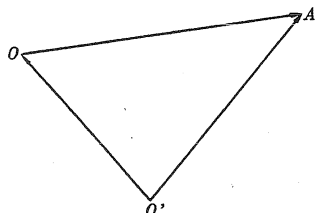
$$M_x = Yf_z - Zf_y \quad M_y = Zf_x - Xf_z \quad M_z = Xf_y - Yf_x \quad (2-2)$$

pero también nos determina los cosenos directores de la recta de acción de $M(O)$, pues, basta dividir las (2-2) por el módulo. Todos los vectores equipolentes tienen las mismas componentes (2-2); de aquí que, aunque es costumbre dibujar el momento de un cursor como un vector de origen O , el momento es un vector libre (vector axial o pseudovector). Téngase esto presente, aunque se siga dibujando en O (hay que dibujarlo en algún lugar).

Multiplicando la ecuación (2-1) escalarmente por f , se tiene:

$$f_x M_x + f_y M_y + f_z M_z = 0 \quad (2-3)$$

Por consiguiente, conocidas las componentes de f y $M(O)$ el cursor queda perfectamente definido, pues f_x, f_y, f_z , determinan el módulo, los cosenos directores y sentido del cursor, en tanto que dos de las ecuaciones (2-2) determinan la recta soporte. Por esto las componentes: $f_x, f_y, f_z, M_x, M_y, M_z$, que han de cumplir la formula (2-3), se denominan coordenadas del cursor.



Como producto vectorial que es, el módulo de $M(O)$ representa el área del paralelogramo de lados A y f , también, es el producto de f por d , siendo d la distancia mínima de O a la recta de acción de f :

$$M(O) = f A \sin \theta = f d$$

2.2.

El momento de un cursor depende del punto O elegido, llamado centro de momentos. Si tomamos otro punto O' (fig 2.2) como centro de momentos, $M(O') \neq M(O)$. En efecto, el momento con respecto a O' es:

$$M(O') = (A - O') \times f = (A - O + O - O') \times f = (A - O) \times f + (O - O') \times f$$

y como el primer sumando es el momento con respecto a O :

$$M(O') = M(O) + (O - O') \times f \quad (2-4)$$

que nos dice que el momento de un cursor con respecto a un punto O' es igual al momento del mismo cursor con respecto a otro punto cualquiera O , más el momento del cursor con respecto a O' , supuesto aplicado en O .

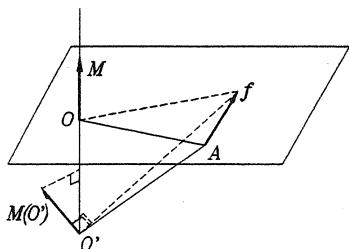
Ejemplo 2.1.- Dado el cursor $f(3, -1, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 0)$, demostrar la formula (2-4), si $O'(1, 1, 1)$ y $O(0, 0, 0)$.

Solución: Desarrollando los determinantes correspondientes se tiene: $M(O) = (A - O) \times f = (4, -2, -7)$, $(O - O') \times f = (-1, -1, 4)$, $M(O') = (A - O') \times f = (3, -3, -3)$, luego se cumple.

2.2.-MOMENTO DE UN CURSOR CON RESPECTO A UN EJE.

Llamaremos momento del cursor (A, f) con respecto a un eje, definido por un punto del eje y el vector unitario U , al escalar definido por el producto escalar

$$U \cdot M(O) = U \cdot A \times f \quad (2-5)$$



si O es el punto del eje. Se trata, pues de la proyección sobre el eje del momento del cursor con respecto a un punto cualquiera del eje.

Para que la definición del momento de un vector con respecto a un eje sea correcta hay que demostrar que el momento es independiente del punto del eje elegido. En efecto, tomando otro punto cualquiera O' , también perteneciente al eje (fig 2.3), puesto que entre los momentos del vector con respecto a estos puntos existe la relación (2-4), multiplicando escalarmente por el vector unitario U resulta:

$$U \cdot M(O') = U \cdot M(O) + U \cdot (O - O') \times f = U \cdot M(O)$$

puesto que el producto mixto con dos vectores paralelos, es nulo. Por tanto, *el momento de un cursor con respecto a un eje es independiente del punto del eje elegido.*

2.3.- SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES.

Dado un sistema de cursores f_i , se llama *resultante general* del sistema al vector

$$R = \sum f_i \quad (2-6)$$

que se obtiene sumándolos como si fuesen libres en un punto cualquiera O . El vector R así obtenido es un vector libre; pero veremos que en algunos casos (cursores concurrentes en un punto y cursores paralelos) la resultante pasa por un punto determinado, por lo que conocemos también su recta de acción. En este caso R es un vector deslizable o cursor.

Llamaremos *momento resultante* del sistema, respecto al punto O (centro de momentos), al vector libre:

$$M(O) = \sum M_i(O) = \sum (A_i - O) \times f_i \quad (2-7)$$

donde A_i es el origen de f_i . Este vector depende del centro, pues si tomamos otro nuevo centro O' , de acuerdo con (2-4), es:

$$M_i(O') = M_i(O) + (O - O') \times f_i$$

para cada f_i . Sumando todos estos momentos:

$$\sum M_i(O') = \sum M_i(O) + \sum (O-O') \times f_i$$

y teniendo en cuenta que: $\sum (O-O') \times f_i = (O-O') \times \sum f_i = (O-O') \times R$; se tiene:

$$M(O') = M(O) + (O-O') \times R \quad (2-8)$$

que nos dice que el momento resultante del sistema con respecto al centro O' es igual al momento resultante con respecto a O , más el momento respecto a O' de la resultante R , supuesta aplicada en O .

Para que el momento resultante sea independiente del centro, se debe cumplir:

- 1) La resultante del sistema es nula. Ejemplo de $R = 0$ es el caso de dos cursores iguales en módulo, de rectas soporte paralelas y sentidos contrarios (par), por eso el momento de un par es independiente del centro y constituye un vector libre.
- 2) Siendo $R \neq 0$, que sea R paralelo a $O-O'$; o sea, todos los puntos O' , situados sobre una recta paralela a la resultante pasando por O .

2.4.- INVARIANTES DE UN SISTEMA DE CURSORES.

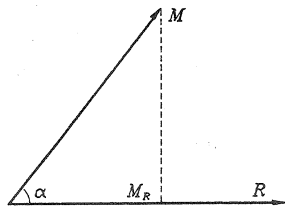
Se llama automomento a del sistema de vectores deslizantes (también trinomio invariante) al producto escalar:

$$a = R \cdot M = RM \cos \alpha = M_R R \quad (2-9)$$

y puede ser positivo, negativo o nulo. El automomento del sistema de cursores no depende del centro de momentos, ya que según (2-8):

$$M(O') \cdot R = M(O) \cdot R \quad (2-10)$$

y, por tanto, es el mismo para todos los puntos del espacio.



2.4.

Como R y a no dependen del centro de momentos, se llaman *invariantes del sistema de cursores*. El valor absoluto de la proyección del momento sobre la resultante es:

$$|M_R| = M |\cos \alpha| = \frac{|a|}{R} = cte$$

así que la proyección del momento resultante sobre la resultante es constante; es decir, es la misma para todos los puntos del espacio. Como el módulo del momento resultante es: $M = |M_R| / |\cos \alpha|$, será mínimo en los puntos en los que $\cos \alpha$ tenga valor absoluto máximo. Esto sucede para $|\cos \alpha| = 1$ ($\alpha = 0$ ó 180°); es decir, *El momento del sistema de cursores coincide con el momento mínimo cuando los vectores M y R tienen la misma dirección*. El valor mínimo del momento resultante es:

$$|M_R| = M_{\min} = \frac{|a|}{R}$$

Podemos definir un vector, que llamaremos momento mínimo, en la forma:

$$M_R = \frac{a}{R} U_R = \frac{a}{R^2} R = kR \quad (2-11)$$

siendo $k = a/R^2$. El momento mínimo es otro invariante del sistema. Cuando $a = 0$, $M_R = 0$; es decir, *el vector momento mínimo, que tiene la dirección de la resultante, es nulo cuando el automomento es nulo.*

2.5.- EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE CURSORES.

¿Cuales son los puntos del espacio que dan momento mínimo?. Evidentemente los que tomados como centro de momentos hacen que el momento resultante y la resultante del sistema sean paralelos. Si designamos por Q tales puntos, se debe cumplir:

$$M(Q) = M_R = kR$$

que es la condición de paralelismo entre el momento resultante y la resultante del sistema; entonces el momento es el vector momento mínimo. Si

$$M(Q) = M_x(Q)I + M_y(Q)J + M_z(Q)K \quad R = R_xI + R_yJ + R_zK$$

se tiene:

$$\frac{M_x(Q)}{R_x} = \frac{M_y(Q)}{R_y} = \frac{M_z(Q)}{R_z} \quad (2-12)$$

Suponiendo que $Q-O$ tiene por componentes X, Y, Z ; puesto que

$$M(Q) = M(O) + (O-Q) \times R = M(O) + R \times (Q-O) = kR \quad (2-13)$$

tendremos:

$$M(Q) = M(O) + \begin{vmatrix} I & J & K \\ R_x & R_y & R_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = kR$$

así que las componentes del momento resultante con respecto al punto Q , son:

$$\begin{aligned} M_x(Q) &= M_x(O) + ZR_y - YR_z = kR_x \\ M_y(Q) &= M_y(O) + XR_z - ZR_x = kR_y \\ M_z(Q) &= M_z(O) + YR_x - XR_y = kR_z \end{aligned}$$

y eliminando k , ó sustituyendo en (2-12), resulta:

$$\frac{M_x(O) + ZR_y - YR_z}{R_x} = \frac{M_y(O) + XR_z - ZR_x}{R_y} = \frac{M_z(O) + YR_x - XR_y}{R_z} \quad (2-14)$$

que es la ecuación de una recta paralela a R , que se denomina eje central del sistema de cursores. Según esto, el *eje central de un sistema de cursores es el lugar geométrico de los puntos del espacio que tomados como centro de momentos dan momento mínimo*. Este lugar geométrico es una recta paralela a la resultante.

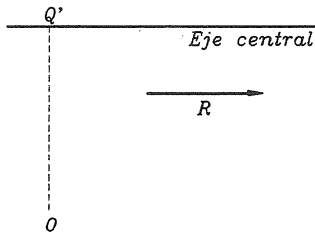
También podemos obtener la ecuación del eje central teniendo en cuenta que los vectores R y $M(Q)$, por ser paralelos, cumplen: $R \times M(Q) = 0$; luego, de (2-13):

$$R \times M(O) + R \times [R \times (Q - O)] = 0$$

y como el doble producto: $R \times [(Q - O) \times R] = R^2(Q - O) - [R \cdot (Q - O)]R$, se obtiene:

$$R \times M(O) + R^2(Q - O) - [R \cdot (Q - O)]R = 0 \quad (2-15)$$

Sea Q' un punto del eje central, intersección de la perpendicular desde O al eje central (fig 2.5). Entonces: $R \cdot (Q - Q') = 0$, y la (2-15) queda reducida a:



$$R \times M(O) + R^2(Q - Q') = 0$$

El punto Q' del eje central existe siempre que se cumpla la condición $R \neq 0$, y vendrá definido por

$$Q' - O = \frac{R \times M(O)}{R^2} \quad (2-16)$$

2.5.

Una vez hallado este punto Q' , los demás puntos del eje central estarán sobre la recta paralela a R que pasa por Q' y vendrán dados por la relación $Q = Q' + cR$, ya que $Q - Q' = cR$, donde c es una constante arbitraria.

La ecuación del eje central se puede también escribir en la forma:

$$\frac{X - X'}{R_x} = \frac{Y - Y'}{R_y} = \frac{Z - Z'}{R_z} \quad (2-18)$$

donde X', Y', Z' , son las componentes de $Q' - O$, dadas por (2-16).

Si la ecuación (2-15) se divide por R^2 , se utiliza (2-16), y se multiplica escalarmente por $1/R_x, 1/R_y, 1/R_z$, resulta nuevamente la (2-18).

El momento resultante del sistema, respecto a un punto cualquiera P , según (2-8), cuando se conoce el momento resultante con respecto a un punto Q del eje central, es:

$$M(P) = M(Q) + (Q - P) \times R \quad (2-19)$$

En particular, si $R = 0$ no hay eje central, ya que el momento es el mismo en cualquier punto (no depende del centro).

Si para $R \neq 0$ es $a = R \cdot M = 0$, M es siempre normal a R y ya no serán R y M paralelos ni para los puntos de la recta (2-18). Sin embargo, ésta sigue llamándose eje central del sistema porque para sus puntos Q el momento del sistema (momento mínimo) es nulo; es decir, $M(Q) = 0$. En este caso, el momento resultante del sistema con respecto a un punto P cualquiera, será:

$$M(P) = (Q - P) \times R$$

Ejemplo 2.2: Estudiar el sistema de vectores f_i , pasando por los puntos A_i que se indican:

$$\begin{array}{ll} f_1 = 3I - K & A_1(1,0,1) \\ f_2 = I + J & A_2(0,3,-1) \\ f_3 = 2I + J - 3K & A_3(2,-1,0) \end{array}$$

Solución: La resultante del sistema es: $R = 6I + 2J - 4K$, y $R^2 = 4 \times 14$. Los momentos de estos vectores, con respecto al origen son:

$$M_1(O) = 4J \quad M_2(O) = I - J - 3K \quad M_3(O) = 3I + 6J + 4K$$

y el momento resultante:

$$M(O) = 4I + 9J + K$$

El automomento $a = R \cdot M(O) = 38$; el momento mínimo $M_R = a/R = 19/\sqrt{14}$. El vector momento mínimo es:

$$M_R = \frac{a}{R^2} R = \frac{19}{14} (3I + J - 2K)$$

Los puntos Q del eje central cumplen (2-13). Haciendo operaciones, puesto que $R \times (Q - O) = (2Z + 4Y)I - (4X + 6Z)J + (6Y - 2X)K$, sumándole $M(O)$, se tiene $M(Q)$, que es igual a kR . Por tanto, la ecuación del eje central es:

$$\frac{4 + 2Z + 4Y}{3} = \frac{9 - 4X - 6Y}{1} = \frac{1 + 6Y - 2X}{-2}$$

Otra forma de calcular el eje central es, como sabemos, encontrar el punto Q' , intersección de la perpendicular desde O al eje central. Estos puntos vienen dados por (2-16), por lo que si calcula: $R \times M(O) = 38I - 22J + 46K$, y se divide por $R^2 = 56$, resulta las coordenadas de del punto Q' son: $Q'(19/28, -11/28, 23/28)$. Los demás puntos Q vienen dados por $Q = Q' + cR$, donde c es una constante arbitraria. La ecuación del eje central en forma

clásica, por tanto, es:

$$\frac{X - \frac{19}{28}}{3} = \frac{Y + \frac{11}{28}}{1} = \frac{Z - \frac{23}{28}}{-2}$$

Tomemos el punto Q' y calculemos el momento del sistema con respecto a él. Tendremos:

$$M(Q') = M(O) + R \times (Q' - O) = \frac{19}{14} (3I + J + 2K)$$

que coincide con el vector momento mínimo.

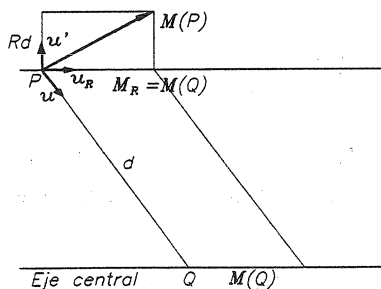
2.6.- MOMENTO DE UN SISTEMA CON RESPECTO A UN PUNTO QUE DISTA UNA DISTANCIA d DEL EJE CENTRAL.

Supuesto conocido el eje central de un sistema de cursores, calculemos el momento resultante del sistema con respecto a un cierto punto P , situado a una distancia d del eje central, en función del momento mínimo M_R y de la resultante general. Si Q es el pie de la perpendicular al eje central pasando por P , se tiene:

$$M(P) = M(Q) + (Q - P) \times R = M(Q) + d \times R \quad (2-20)$$

donde (fig 2.6.) $d = Q - P$. Su módulo es la distancia al eje central.

Busquemos las componentes de $M(P)$, según tres direcciones ortogonales definidas por los versores u , u_R , u' , los cuales determinan las direcciones de PQ , $M(Q)$ y $u' = u \times u_R$.



Multiplicando escalarmente la (2-20) por estos versores, se tiene:

$$M(P) \cdot u = M(Q) \cdot u + d \times R \cdot u = 0$$

que nos hace ver que $M(P)$ está contenido en un plano perpendicular a $d = du$. Análogamente, multiplicando escalarmente por el unitario u_R :

$$M(P) \cdot u_R = M(Q) \cdot u_R + d \times R \cdot u_R = M_R$$

2.6.

dato que la componente del momento en la dirección de u_R es siempre el momento mínimo. Por último:

$$M(P) \cdot u' = M(Q) \cdot u' + d \times R \cdot u' = Rd$$

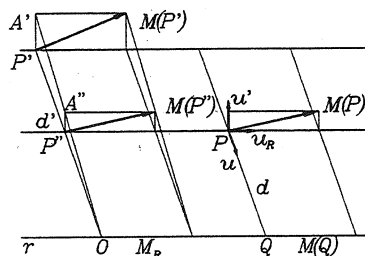
Según esto, el momento del sistema con respecto a un punto P , situado a una distancia d del eje central, se puede descomponer en dos componentes: una en la dirección del eje central, de módulo M_R (momento mínimo del sistema), y la otra en la dirección

perpendicular al plano que contiene a P y al eje central (es decir, en la dirección u'), siendo su módulo Rd . Por tanto:

$$M(P) = \sqrt{M_R^2 + R^2 d^2} \quad (2-21)$$

Para un sistema de cursores dado, M_R y R son constantes; por tanto, $M(P)$ solo depende de d . La ecuación (2-21) nos permite conocer la forma de la función $M(P) = f(d)$. Para $d = \text{cte}$, $M(P) = \text{cte}$, por tanto, el lugar geométrico de los puntos del espacio en los cuales el módulo del momento es constante es un cilindro de eje el eje central. Naturalmente que, si conocemos $M(P)$ y R la (2-21) nos permite determinar también la distancia d del punto P al eje central. En particular, si $R = 0$, el momento es independiente del centro y el campo de momentos es uniforme.

Vamos a ver que si conocemos el eje central y el momento del sistema con respecto a un punto podemos obtener, gráficamente, el momento con respecto a cualquier otro punto. En efecto, sea la recta r el eje central (fig 2.7) y, supuesto conocido $M(P)$, tratemos de determinar $M(P')$, momento del sistema con respecto al punto P' , situado en el plano



que forman P y r . Sea d' la distancia de P' a r y P'' el punto de intersección de la paralela a r pasando por P y la perpendicular a r pasando por P' . Las componentes de $M(P')$ según u_R y u' serán:

$$M(P') \cdot u_R = M_R$$

pues siempre es el momento mínimo, y

$$M(P') \cdot u' = Rd'$$

2.7.

como resulta evidente, por otro lado multiplicando por u_R y u' la $M(P) = M(Q) + d' \times R$. Entonces:

$$\frac{M(P') \cdot u_R}{M(P) \cdot u_R} = \frac{M_R}{M_R} = 1 \quad \frac{M(P') \cdot u'}{M(P) \cdot u'} = \frac{d'}{d}$$

Por tanto, para hallar $M(P') \cdot u'$ basta prolongar OA'' hasta A' pues los triángulos semejantes $OP''A''$ y $OP'A'$ nos dan la relación anterior. Componiendo M_R con $[M(P) \cdot u'] u'$ obtenemos $M(P')$, momento del sistema con respecto a P' .

Ejemplo 2.3: Dado el sistema de vectores: $A = 2I$ y $B = 3J$, y sabiendo que el momento del sistema respecto a P es $M(P) = 20J$, hallar la distancia de P al eje central.

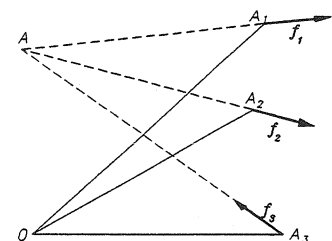
Solución: La resultante del sistema es $R = 2I + 3J$ y $R = \sqrt{13}$. El automomento es: $a = R \cdot M(P) = 60$, de manera que el momento mínimo es: $M_R = a/R = 60/\sqrt{13}$. Como

$M(P) = 20$, la ecuación (2-21) nos da:

$$d = \frac{1}{R} \sqrt{M^2(P) - M_R^2} = \frac{400}{13} = 30,77$$

2.7.- SISTEMA DE CURSORES CONCURRENTES. TEOREMA DE VARIGNON.

Cuando se considera un sistema de cursores cuyas rectas soporte pasen por un punto $A(X_0, Y_0, Z_0)$, lo que constituye un sistema de cursores concurrentes (fig 2.8.), el momento resultante del sistema, es:



2.8.

$$M(O) = \sum A \times f_i = A \times R \quad (2-22)$$

y como $A \times R$ es el momento de la resultante con respecto a O , se tiene el *teorema de Varignon*, que dice: *El momento resultante de un sistema de cursores concurrentes con respecto a un punto O cualquiera es igual al momento de su resultante con respecto al mismo punto.*

Como $M(O)$ es perpendicular a R , a $O = 0$, cualquiera que sea el centro de momentos, también es $M(O) = 0$, luego M y R no son paralelos ni para los puntos de la recta (2-14) ó (2-18), aunque ésta siga llamándose el eje central del sistema, que vendrá dado por

$$\frac{X - X_0}{R_x} = \frac{Y - Y_0}{R_y} = \frac{Z - Z_0}{R_z}$$

pues es claro que el eje central pasa por el punto A , ya que también $M(A) = 0$, por ser el momento independiente del centro de momentos. Por tanto, siendo A y R distintos de cero, según (2-22), al ser $M(O) = 0$, por A también debe pasar la resultante. Entonces la resultante del sistema queda perfectamente determinada, ya que al pasar la recta soporte de la resultante por A , se conoce completamente ésta. En este caso la resultante es un vector deslizante.

Para la obtención gráfica de la resultante se utiliza el polígono de vectores. Para determinar analíticamente módulo y dirección de la resultante se utiliza el método de las proyecciones, eligiendo un sistema de ejes perpendiculares de origen en el punto A de concurrencia. Entonces las componentes de la resultante son:

$$R_x = \sum f_x \quad R_y = \sum f_y \quad R_z = \sum f_z$$

y los cosenos directores se obtienen dividiendo por R estas expresiones.

Ejemplo 2.4: ¿Cuál es la ecuación del eje central del sistema de vectores: $f_1 = 3I + J + K$, $f_2 = -I + J$ y $f_3 = -J + K$, pasando por el punto $A(1,2,3)$.

Solución: La resultante del sistema es: $R = 2I + J + 2K$ y $R = 3$. Los momentos de cada uno de los vectores, son: $M_1(O) = -I + 8J - 5K$, $M_2(O) = -3(I + J - K)$, $M_3(O) = 5I - J - K$, y, por tanto, el momento resultante con respecto al origen: $M(O) = \Sigma M_i(O) = I + 4J - 3K$.

Para calcular el momento resultante basta tener en cuenta el teorema de Varignon: $M(O) = AxR$. El resultado es el mismo. El automomento es: $a = R.M(O) = 0$, luego R y M son perpendiculares. Como $A(1,2,3)$ es un punto del eje central, la ecuación del eje central (2-18) es

$$\frac{X-1}{2} = \frac{Y-2}{1} = \frac{Z-3}{2}$$

También se puede encontrar la ecuación del eje central mediante (2-16). Como $R \times M(O) = -11I + 8J + 7K$, se tiene $Q'-O = (-11I + 8J + 7K)/9$, de manera que $Q'(-11/9, 8/9, 7/9)$. La ecuación del eje central se puede escribir:

$$\frac{X+11/9}{2} = \frac{Y-8/9}{1} = \frac{Z-7/9}{2}$$

¿Son distintas estas ecuaciones?. No. Sucede que A y Q' son puntos del eje central. Los restantes puntos del eje central vendrán dados por la relación: $Q = Q' + cR$. Se puede comprobar que haciendo $c = 10/9$ en (2-17), se obtiene $Q = A$.

2.8.- SISTEMA DE VECTORES PARALELOS. CENTRO DEL SISTEMA.

Consideremos un sistema de cursores f_i , paralelos entre si y sea U el versor en la dirección común. La resultante general del sistema de cursores es:

$$R = \Sigma f_i = U \Sigma f_i \quad (2-23)$$

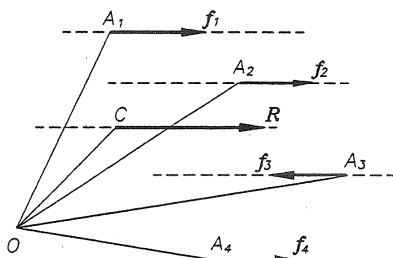
siendo Σf_i una suma algebraica, si todos los cursores no tienen el mismo sentido.

Un sistema de cursores paralelos se puede considerar como un sistema de cursores concurrentes en el infinito. Como vimos, cuando $R \neq 0$, el momento resultante del sistema con respecto a un punto C del eje central $M(C) = M_R$ (momento mínimo) está relacionado con el momento del sistema con respecto al origen $M(O)$ por la ecuación (2-13); es decir:

$$M(C) = M(O) + R \times (C - O)$$

Ahora bien, el momento del sistema con respecto a cualquier punto es perpendicular a U ; es decir a los vectores f_i y también a R . En consecuencia, el momento mínimo del

sistema es nulo: $M(C) = 0$, y como $M(O) = \sum A_i \times f_i = \sum A_i \times f_i U = \sum f_i A_i \times U$, la anterior nos da



$$[\sum f_i A_i - (C - O) \sum f_i] \times U = 0$$

válida cualquiera que sea la orientación de U con respecto a los ejes. Entonces la posición del centro del sistema de cursores paralelos C es:

$$C - O = \frac{\sum f_i A_i}{\sum f_i} \quad (2-24)$$

2.9.

Las coordenadas del punto C no dependen de la dirección de los cursores f_i ; es decir, no dependen de su orientación con respecto al sistema de referencia, solo dependen de la distribución del sistema de cursores. Entonces, podemos definir C diciendo que *es el punto por donde pasa la resultante del sistema, cualquiera que sea la orientación del sistema de cursores f_i con respecto al sistema de referencia y, por tanto, podemos suponer que dicha resultante está aplicada en dicho punto.*

Ejemplo 2.5: Estudiar el sistema de cursores paralelos, $f_1 = 2I + 2J + K$, $f_2 = (4I + 4J + 2K)/3$ y $f_3 = -(8I + 8J + 4K)/3$, pasando por los puntos $A_1(1,1,1)$, $A_2(1,0,0)$ y $A_3(0,0,1)$.

Solución: Pongamos ($f_i = f_i \cdot u$, donde $u = (2I + 2J + K)/3$ es el unitarios de los f_i):

$f_1 = 2I + 2J + K$	$A_1(1,1,1)$	$f_1 = 3$	$A_1 f_1 = (3,3,3)$
$f_2 = 2(2I + 2J + K)/3$	$A_2(1,0,0)$	$f_2 = 2$	$A_2 f_2 = (2,0,0)$
$f_3 = -4(2I + 2J + K)/3$	$A_3(0,0,1)$	$f_3 = -4$	$A_3 f_3 = (0,0,-4)$
$R = (2I + 2J + K)/3$		$R = 1$	$\sum A_i f_i = (5,3,-1)$

Los momentos de estos vectores con respecto al origen, son:

$$M_1(O) = -I + J \quad M_2(O) = 2(-J + 2K)/3 \quad M_3(O) = 8(J - K)/3$$

siendo

$$C - O = \frac{\sum f_i A_i}{\sum f_i} = 5I + 3J - K$$

así que el centro del sistema de vectores paralelos es el punto $C(5,3,-1)$. El automomento del sistema de vectores paralelos es:

$$a = R \cdot M(O) = 0$$

El momento del sistema con respecto a C debe ser nulo. Comprobar que: $M(C) = 0$. Los puntos del eje central son los de la recta que pasa por C : $(X-5)/2 = (Y-3)/2 = Z+1$.

El punto Q' se obtiene por: $Q'-O = R \times M(O)/R^2 = (5I - J - 8K)/3$; es decir: $Q'(5/3, -1/3, -8/3)$. Los restantes puntos Q del eje central los obtenemos por: $Q = Q' + cR = (5+2c, -1+2c, -8+c)/3$, y si hacemos $c = 5$ se obtiene C .

Un caso particular es considerar dos cursores f y f' paralelos. Entonces $R = f + f'$. Consideremos los casos siguientes:

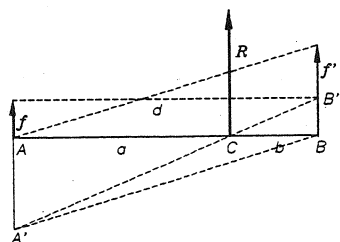
1) Los cursores tienen el mismo sentido (fig 2.10), el módulo de la resultante es la suma de los módulos de las componentes: $R = f + f'$, y la ecuación (2-24), da:

$$\text{Si } O = A: \quad AC = a = f'd/R$$

$$\text{Si } O = B: \quad CB = b = fd/R$$

Puesto que $d = a + b$ y $R = f + f'$, una cualquiera de las igualdades anteriores nos da:

$$fa = f'b \quad (2-25)$$

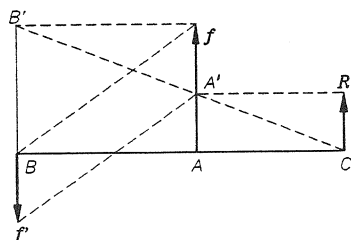


2.10.

que nos dice que el momento de cada vector con respecto a un punto de la recta de acción de la resultante es constante (ley de oro de la mecánica, cuando los cursores son fuerzas). La semejanza de los triángulos $AA'C$ y $BB'C$ nos hace ver que se cumple la (2-25). Esto permite

obtener gráficamente el punto C de la forma siguiente: en A se dibuja un vector opuesto a f' y en B un vector equipolente con f . Uniendo A' con B' obtenemos C .

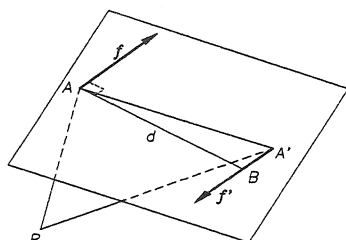
2) Las formulas siguen siendo válidas en el caso de que los cursores tengan sentidos contrarios, si bien ahora la resultante es: $R = f - f'$. También aquí la semejanza de los triángulos $AA'C$ y $BB'C$ (fig 2.11), permite obtener gráficamente la recta soporte de la resultante, uniendo los puntos A' y B' .



2.11.

A medida que la diferencia entre los cursores disminuye, el punto C se aleja indefinidamente de B . En el límite, cuando los módulos de los cursores son iguales: $f = f'$, es imposible determinar R , ya que se trataría de un vector nulo en el infinito, lo que carece de significado físico. En este caso, estamos ante un sistema denominado par de cursores.

PAR DE CURSORES: Sistema formado por dos cursores paralelos iguales y de sentidos contrarios. La resultante del sistema es nula. El momento de un par es un vector independiente del centro de momentos (como vimos en 2.3) y no está vinculado a ninguna determinada recta de acción; por tanto, es un vector libre y puede suponerse aplicado en cualquier punto del espacio. El momento del par (f, f') con respecto al punto P , de acuerdo con la definición de momento (fig 2.12), es:



2.12.

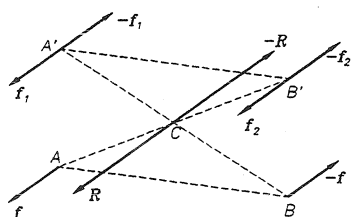
$$M(P) = A \times f + A' \times f'$$

pero como $f' = -f$, se tiene:

$$M(P) = (A - A') \times f = (A - A') \times f$$

siendo $A - A'$ un vector cualquiera que une dos puntos de las rectas de acción de los cursores dados. Si el punto B es el pie de la perpendicular a f' por A , $M(B) = nfd$, donde n es el versor dado por la regla del sacacorchos. La distancia d se llama brazo del par.

Todos los pares que tienen el mismo momento son equivalentes (tienen resultante nula y el mismo momento). Un par queda caracterizado por su momento. Los pares pueden trasladarse en su mismo plano o a planos paralelos. También se puede modificar el brazo,



2.13.

siempre que no se varíe su momento. La demostración elemental que se realiza para ver que los pares se pueden trasladar (fig 2.13), está basada en sumarle al par, situado en un plano, un sistema equilibrado formado por cuatro cursores, que tienen la misma dirección y el mismo módulo que los cursores del par, situados sobre un plano paralelo. La composición de f con f_2 da R , pasando por C (punto medio del segmento AB), y $-f$ con $-f_1$ da $-R$, que pasa también por C . Como la suma $R + (-R) = 0$, queda el par $(f_1, -f_1)$, que es idéntico al primitivo $(f, -f)$, pero situado en un plano paralelo.

2.9.- SISTEMAS EQUIVALENTES. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA.

Dos sistemas de vectores deslizantes se llaman equivalentes, cuando tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, respecto a un centro O . Por tanto, para los sistemas equivalentes se cumple:

$$R = R' \quad M(O) = M'(O) \quad (2-26)$$

Vamos a demostrar que: si dos sistemas de cursores son equivalentes tienen el mismo momento con respecto a cualquier punto. En efecto, si tenemos dos sistemas S y

S' equivalentes que cumplan (2-26) y calculamos el momento del sistema S' con respecto a otro punto O' , según (2-8), tendremos:

$$M'(O') = M'(O) + (O - O') \times R$$

y según (2-26):

$$M'(O) + (O - O') \times R = M(O) + (O - O') \times R = M(O')$$

y por tanto,

$$M'(O) = M(O) \quad (2-27)$$

como queríamos demostrar.

Sistemas equilibrados o nulos: Son sistemas que cumplen las condiciones

$$R = 0 \quad M = 0 \quad (2-28)$$

y son equivalentes a cero, con respecto a cualquier punto. El caso más sencillo de sistema equilibrado es el formado por dos cursores que tienen la misma recta soporte y sentidos contrarios.

Se llaman *operaciones elementales* las siguientes:

- 1) Añadir o suprimir dos vectores opuestos.
- 2) Deslizar un cursor sobre su recta de acción.
- 3) Sustituir varios cursores concurrentes en un punto por su resultante pasando por el mismo punto.
- 4) Descomponer un cursor en un sistema de cursores concurrentes, cuya resultante coincida con él.

Ninguna de estas operaciones altera la resultante o el momento resultante de un sistema. En efecto, para demostrar esto para la primera vamos a ver que si a un sistema S se le suma (o resta) un sistema S' equilibrado, el sistema $S + S'$ es equivalente a S . Esto es evidente, ya que por ser S' equilibrado, según (2-28) se cumplirá que $R' = 0$ y $M' = 0$ y la resultante y el momento resultante del sistema $S + S'$, con respecto a cualquier punto, serán: $R + R' = R$ y $M + M' = M$. La segunda de las operaciones fue demostrada al estudiar el momento de un cursor respecto a un punto. Para la tercera y cuarta basta recordar el teorema de Varignon. Por tanto, podemos afirmar que las operaciones elementales transforman un sistema en otro equivalente.

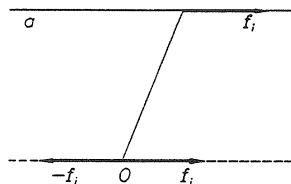
Reducir un sistema de vectores es aplicarle operaciones elementales hasta obtener otro sistema equivalente más sencillo.

Vamos a demostrar el siguiente

TEOREMA FUNDAMENTAL:

Un sistema de cursores se puede reducir de infinitas formas a un vector único, su resultante R , pasando por un punto cualquiera O del espacio, y a un par, de momento M , igual al momento resultante del sistema con respecto al mismo punto O .

En efecto, consideremos un cursor f_i cualquiera del sistema, situado sobre una recta a , y tomemos un punto O arbitrario, (fig 2.14). Hagamos la operación elemental 1), añadiendo dos cursores opuestos f_i y $-f_i$, de igual módulo. El cursor f_i , pasando por a , es equivalente al sistema que forman f_i , pasando por O , y al par de vectores f_i , situado en la recta a , y $-f_i$, pasando también por O .



Repitiendo la operación para todos los cursores f_i , habremos reducido el sistema a un vector único $R = \sum f_i$, pasando por O , y a un par único, de momento dado por

$$M(O) = \sum M_i = \sum A_i \times f_i$$

2.14.

que es también el momento resultante del sistema. Como el punto O (llamado centro de reducción) puede ser cualquiera del espacio, la reducción se puede hacer de infinitas formas. Al conjunto de los vectores $\{R, M(O)\}$ se le llama *torsor del sistema* en el punto O .

Una vez reducido el sistema a la forma anterior, si queremos conocer la distancia del punto O al eje central, basta tener en cuenta lo dicho en 2.6. El vector $M(O)$ se descompone en los dos vectores $M_R = M_R u_R$ y $M'(O) = Rdu'$. La distancia d del punto O al eje central viene dada por:

$$d = \frac{\sqrt{M^2(O) - M_R^2}}{R}$$

No hay que olvidarse que el eje central es una recta paralela a la resultante.

En el caso de un sistema de cursores planos, R también está en el mismo plano, mientras que $M(O)$ es perpendicular a este plano. Ahora $M_R = 0$ y $M(O) = M'(O) = Rd$.

Naturalmente que hay otras muchas maneras de reducir un sistema de cursores; pero nosotros no vamos a tratarlas aquí.

Al hacer la reducción de un sistema de cursores puede suceder lo siguiente:

$R \neq 0, a \neq 0$. Caso general, el sistema puede reducirse a un vector R y a un par de momento $M(O)$, donde O es un punto cualquiera.

$a = 0$ Los vectores R y $M(O)$ son perpendiculares. $M_R = 0$.

Si $M(O) \neq 0$, el sistema se reduce a un cursor único R , cuya recta soporte es el eje central.

Si $M(O) = 0$ (para todos los puntos del espacio) el sistema se reduce a un vector libre R , único.

$R = 0$. Entonces $a = 0$ y no existe eje central. $M_R = 0$.

Si $M(O) \neq 0$, el sistema es equivalente a un par.

Si $M(O) = 0$, sistema nulo.

2.- CUESTIONES Y EJERCICIOS.

- 1) ¿Cómo se define el momento de un cursor con respecto a un punto?
- 2) ¿Depende el momento de un cursor del punto con respecto al cual se calcula el momento?
- 3) Calcular el momento del vector: $f = I + 4J - 2K$, pasando por el punto $A(2, -3, -1)$, con respecto al origen de coordenadas. R: $10I + 3J + 11K$.
- 4) Calcular el momento del vector: $f = I + 4J - 2K$, pasando por el punto $A(2, -3, -1)$, con respecto al punto $B(1, 1, 1)$. R: $16I + 8K$.
- 5) ¿Qué relación existe entre los momentos de un cursor con respecto a dos puntos?
- 6) Realizados los ejerc. 3) y 4) se habrá visto que el momento $M(O)$ es distinto de $M(B)$. Comprobar que entre ellos existe la relación $M(B) = M(O) + f \times (B - O)$.
- 7) Defina correctamente el momento de un cursor con respecto a un eje.
- 8) ¿Cuál es el momento del cursor $f = (3, 2, -1)$ respecto a un eje, definido $O(1, 1, 2)$ y el unitario $U = (2, 2, -1)$, suponiendo que f pasa por el punto $A(2, 3, 4)$? R: 6.
- 9) Calcular el momento del cursor $f = (3, 2, 1)$ pasando por $A(3, 3, 3)$ con respecto a la recta que pasa por $B(1, 1, 0)$ y $C(3, -1, 2)$. R: $-13\sqrt{3}$.
- 10) ¿Cuándo el momento resultante de un sistema de cursores es independiente del centro de momentos?
- 11) Dados los 4 cursores $a(3, 2, 1)$, $b(-1, 3, -1)$, $c(2, -2, 4)$ y $d(-2, 0, -2)$ pasando por los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(0, 0, 1)$, respectivamente, calcular su resultante y el momento resultante con respecto al origen de coordenadas. R: $M(4, -5, 2)$.
- 12) Calcular el momento del sistema 11) con respecto a O' , si $O'(1, 0, 0)$? R: $(4, -3, 5)$.
- 13) ¿Qué son los invariantes de un sistema de cursores?
- 14) Defina el automomento de un sistema.
- 15) ¿Cuál es el automomento del sistema de cursores del ejercicio 11)? R: $a = -11$.
- 16) Comprobar que el automomento del ejercicio 11) con respecto al origen es el mismo que con respecto al punto de coordenadas $(1, 1, 1)$.
- 17) ¿Qué es el momento mínimo de un sistema de cursores?
- 18) ¿Es invariante el momento mínimo de un sistema?
- 19) Cuatro cursores tienen la dirección de los lados de un cuadrado $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 3)$, $C(0, 3)$. El vector sobre OC es $A = 5J$, sobre CB , $B = 3I$, sobre BA , $C = -5J$ y sobre AO , $D = -3I$. Calcular: 1) R . 2) $M(A)$. R: 1) $R = 0$; 2) $M(A) = -24K$.
- 20) ¿Qué es el eje central de un sistema de cursores?
- 21) En un sistema de cursores $R = (3, 2, 0)$ y $M(O) = (2, 0, 2)$ (O es el origen). Comprobar que el eje central del sistema es la recta $2X - 3Y = 2$, que está contenida en el plano de ecuación $Z = -4/13$.
- 22) Comprobar que si, en el ejercicio 21), tomamos un punto cualquiera Q del eje central el momento resultante del sistema con respecto a este punto y la resultante son paralelos. R: $M(Q) = 6R/13$.
- 23) Comprobar que el punto Q' , intersección del eje central del ejercicio 21) y la recta perpendicular a él, pasando por origen, es $Q'(4/13, -6/13, -4/13)$.
- 24) Utilizando la condición de paralelismo: $Q - Q' = kR$, obtener nuevamente la ecuación del eje central del 21), donde Q' fue determinado en 23).

- 25) El vector momento mínimo de un sistema de cursores es: $M_R = 10(I + 2J + 2K)/9$. Si $R = 3$, ¿cuál es la resultante del sistema?. R: $R = (1, 2, 2)$.
- 26) Si en un sistema de cursores $M(O) = (4, 2, 1)$, siendo la resultante del sistema $R = (1, 2, 2)$. Hallar el vector momento mínimo del sistema. R: $M_R = 10(I + 2J + 2K)/9$.
- 27) La recta de acción de un cursor de módulo 3 pasa por el punto $(3, 2, 1)$ y tiene cosenos directores iguales y positivos. ¿Cuál es su momento con respecto al eje OZ ?. R: $\sqrt{3}$.
- 28) Dado el cursor de módulo 3 y cosenos directores positivos, que desliza sobre la recta que pasa por los puntos $A(3, 1, 1)$ y $B(4, 3, 2)$, hallar su momento con respecto a la recta $X = 0, Y = 0$. R: $15/\sqrt{6}$.
- 29) Hallar el momento de un vector de módulo 3, de componentes positivas y cuya línea de acción es la recta $X - 3 = 2Z; Y + 1 = 4Z$, con respecto al eje Y . R: $M_o = -9\sqrt{21}$.
- 30) Un cubo, de lado 3, tiene sus aristas coincidiendo con los ejes coordenados. Tres cursores A, B y C , actúan según las aristas no contiguas, paralelas a los ejes, A pasando por O y B y C no pasan por O , en los sentidos positivos del triedro de referencia. Si $A = B = C = 3$, determinar el momento mínimo y el eje central del sistema. R: $M_R = 9(I + J + K)$, el eje central es: $3 + Z - Y = 3 + X - Z = 3 + Y - X$.
- 31) Un sistema de cursores está formado por los siguientes: $F_1 = I + J$, aplicado en $(0, 0, 0)$; $F_2 = 2F_1 - I$, aplicado en el extremo de F_1 , y $F_3 = F_1 \times F_2$, aplicado en el extremo de F_2 , encontrar M_R y la ecuación cartesiana de su eje central.
R: $M_R = (2I + 3J + K)/14$. $(3Z - Y + 3)/2 = (X - 2Z - 2)/3 = 2Y - 3X + 1$.
- 32) Un sistema de cursores tiene por resultante: $R = \sqrt{3}(I + J + K)/2$ y por momento mínimo: $M(O) = 3(I + J + K)/\sqrt{3}$, donde $O(3, 3, 3)$. ¿Cuál es el punto del eje OZ para el cual el momento resultante está en el plano XOZ ?. R: $Z = 2$.
- 33) ¿Qué dice el teorema de Varignon?. Dados los cursores: $F_1 = (3, 2, 0)$, $F_2 = (1, 1, -3)$ y $F_3 = (0, -2, 2)$, cuyas rectas soportes pasan por el punto $A(0, 2, 1)$, comprobar que se cumple el teorema de Varignon.
- 34) ¿Qué entendemos por operaciones elementales?.
- 35) Enuncie y demuestre el teorema fundamental de la reducción de sistemas de cursores.
- 36) Tres vectores paralelos y del mismo sentido tienen módulos: 9, 4 y 2, El segundo dista del primero 3 unidades y el tercero dista del primero 9 unidades. ¿Cuál es la resultante del sistema y a que distancia del primero está su recta de acción?.
R: $R = 15, d = 2$.
- 37) Una barra de 2 m de longitud, colocada horizontalmente, tiene densidad que varía proporcionalmente con la distancia a un extremo y vale 6 kg/m en el extremo opuesto. Reducir el sistema de vectores fuerza, de módulos $df = gdm = pgdX$, debido a la acción del campo gravitatorio (hallar el sistema equivalente) en el centro geométrico. R: $R = 6g$, pasando por $X = 1$ m y par perpendicular al plano de momento $M = 2g$.
- 38) Sobre una barra de 3 m de longitud actúan fuerzas, contenidas en un plano, perpendiculares a la barra. Las fuerzas por unidad de longitud son proporcionales a la distancia a un extremo de la barra, siendo la constante de proporcionalidad $k = 2$ N/m. Hallar R de dichas fuerzas y el eje central. R: $R = 9$ N, pasando por $X = 2$ m; el eje central (propia mente no hay) pasa por el mismo punto.

3 CÁLCULO VECTORIAL INFINITESIMAL.

3.1.- DERIVADA DE UN VECTOR.

Supongamos que a cada uno de los valores de un escalar q (ángulo, tiempo, masa, densidad, etc.), comprendidos en un intervalo (a,b) corresponde unívocamente un vector X ; diremos entonces que este vector es función de q , y escribiremos:

$$X = X(q) \quad (3-1)$$

El intervalo (a,b) es el campo de existencia de $X(q)$.

Sea $X = P-O$, para un valor del escalar q (fig 3.1). Supongamos que la función $X(q)$ es continua (Conviene recordar que la continuidad es condición necesaria para que una función sea derivable. Toda función derivable es continua; pero la recíproca no es cierta). Si q aumenta en Δq , el nuevo valor del escalar es: $q' = q + \Delta q$. El vector que corresponde

a este valor es: $X(q') = X(q + \Delta q)$, representado por el vector $Q-O$. El cambio experimentado por el vector X al variar q viene dado por:

$$\Delta X = X(q + \Delta q) - X(q)$$

y este vector es el $Q-P$, de origen el punto P y extremo el punto Q .

3.1.

Por definición, se llama derivada del vector X con respecto al escalar q , al límite al que tiende el cociente incremental $\Delta X / \Delta q$, cuando $\Delta q \rightarrow 0$; es decir, al límite:

$$\frac{dX}{dq} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta q} \quad (3-2)$$

bien entendido que ΔX es una diferencia de vectores. razón por la cual la derivada es otro vector. En general, la derivada (3-2) es una función de q . Volviendo a derivar esta expresión con respecto a q , se tiene la derivada segunda del vector X con respecto a q :

$$\frac{d^2 X}{dq^2} = \frac{d}{dq} \left(\frac{dX}{dq} \right) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta(dx/dq)}{\Delta q} \quad (3-3)$$

Es fácil ver que se cumplen para los vectores las reglas de derivación conocidas.

La diferencial de un vector $X(q)$ se puede definir en la forma

$$dX = \left(\frac{dX}{dq} \right) dq$$

Las formulas de diferenciación son análogas a las del cálculo diferencial ordinario.

Si $A(q)$ es de la forma: $A = A_x I + A_y J + A_z K$, su derivada con respecto a la variable escalar q es:

$$\frac{dA}{dq} = \frac{dA_x}{dq} I + \frac{dA_y}{dq} J + \frac{dA_z}{dq} K + A_x \frac{dI}{dq} + A_y \frac{dJ}{dq} + A_z \frac{dK}{dq} \quad (3-4)$$

y si los vectores I, J, K son independientes de q :

$$\frac{dA}{dq} = \frac{dA_x}{dq} I + \frac{dA_y}{dq} J + \frac{dA_z}{dq} K \quad (3-5)$$

que nos dice que la derivada de un vector cualquiera, cuyas componentes son funciones de un parámetro q , es otro vector, que tiene por componentes las derivadas de las componentes del primer vector con respecto del parámetro q . Los vectores I, J, K , son constantes si son versores de ejes fijos. Por tanto, la (3-5) es válida para ejes fijos.

Si U es el versor en la dirección de A ; es decir, si $A = AU$, tendremos:

$$\frac{dA}{dq} = \frac{dA}{dq} U + A \frac{dU}{dq} \quad (3-6)$$

El vector dU/dq es un vector perpendicular a U , ya que siendo $U \cdot U = 1$, resulta:

$$\frac{d}{dq}(U \cdot U) = U \cdot \frac{dU}{dq} + \frac{dU}{dq} \cdot U = 2U \cdot \frac{dU}{dq} = 0 \quad (3-7)$$

que nos hace ver que *un versor y su derivada son siempre perpendiculares*. Esto no sucede, en general, para un vector cualquiera.

La ecuación (3-6) nos dice que la derivada de un vector es la suma de dos vectores:

$$\frac{dA}{dq} U$$

que tiene la dirección del vector que se deriva y debe su existencia a la variación de su módulo.

$$A \frac{dU}{dq}$$

que es perpendicular al vector que se deriva y debe su existencia a la variación de su dirección.

Es claro que si un vector tiene módulo constante su derivada es perpendicular al vector que se deriva, toda vez que el primer vector del segundo miembro de (3-6) es nulo.

Ejemplo 3.1.- Dado el vector $X = 2qI - (1-q^2)J + 2qK$, hallar dX/dq .

Solución: El vector derivada del X con respecto a q es: $dX/dq = 2(I + qJ + K)$, que es un vector función de q .

3.2.- INTEGRACIÓN DE VECTORES.

Si $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(q)$ es una función vectorial de la variable q , tal que

$$\mathbf{X}'(q) = \frac{d\mathbf{X}(q)}{dq} \quad (3-8)$$

entonces diremos que $\mathbf{X}(q)$ es la integral de $\mathbf{X}'(q)$ con respecto a q y escribiremos:

$$\mathbf{X}(q) = \int \mathbf{X}'(q) dq \quad (3-9)$$

La ecuación (3-8) es una ecuación diferencial. La función $\mathbf{X}$ se dice que es la solución de la ecuación diferencial o que $\mathbf{X}$ es una integral de $\mathbf{X}'$. Es evidente que si $\mathbf{X}(q)$ es una función que satisface (3-8), entonces $\mathbf{X}(q) + \mathbf{C}$, en la que $\mathbf{C}$ es un vector arbitrario constante, también la satisface. La integral (3-9) se dice que es una integral indefinida. Multiplicando la (3-8) por dq

$$d\mathbf{X}(q) = \mathbf{X}'(q) dq \quad (3-10)$$

Si diferenciamos la (3-9) y tenemos en cuenta (3-10):

$$d\mathbf{X}(q) = d \int \mathbf{X}'(q) dq = \mathbf{X}'(q) dq$$

así que se puede interpretar el signo de integración como inverso del de diferenciación. Análogamente, derivando (3-9) con respecto a q , resulta:

$$\int \dots dq \quad \text{inverso de} \quad d/dq$$

Según esto, hallar la integral de la función vectorial $\mathbf{X}'(q)$ consiste en encontrar un vector $\mathbf{X}(q)$, conociendo su vector derivado.

Además de este concepto de integral hay que considerar la acepción de la integral como suma de vectores. Para ello, supongamos que tenemos el vector $\mathbf{X}'(q)$, con q definido en el intervalo (a, b) , llamado campo de variabilidad. Si este intervalo se divide en N partes, por medio de los $N+1$ puntos $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{N+1}$, se tienen N intervalos $\Delta q_i = q_i - q_{i-1}$.

Consideremos los vectores $\mathbf{X}'(q_i) \Delta q_i$ y calculemos su suma:

$$\sum \mathbf{X}'(q_i) \Delta q_i$$

Si hacemos $N \rightarrow \infty$; $\Delta q_i \rightarrow 0$. Entonces si esta suma tiene un valor límite determinado, independiente del modo de división del intervalo (a, b) , la expresión:

$$\int_a^b \mathbf{X}'(q) dq = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{X}'(q_i) \Delta q_i \quad (3-11)$$

se llama integral definida de $\mathbf{X}'(q)$ en (a, b) , teniéndose:

$$\int_a^b \mathbf{X}'(q) dq = \int_a^b d\mathbf{X}(q) = \mathbf{X}(b) - \mathbf{X}(a) \quad (3-12)$$

Si el límite superior es la variable de integración,

$$\int_a^q \mathbf{X}'(q) dq = \int_a^q d\mathbf{X}(q) = \mathbf{X}(q) - \mathbf{X}(a)$$

y derivando:

$$\frac{d}{dq} \int_a^q \mathbf{X}'(q) dq = \frac{d\mathbf{X}(q)}{dq} = \mathbf{X}'(q)$$

Si $\mathbf{X}'(q)$ se expresa en función de sus componentes:

$$\mathbf{X}'(q) = X'_x(q)\mathbf{I} + X'_y(q)\mathbf{J} + X'_z(q)\mathbf{K}$$

donde se supone que las funciones $X'_x(q)$, $X'_y(q)$, $X'_z(q)$ son continuas en un intervalo dado, entonces:

$$\int_a^b \mathbf{X}'(q) dq = \mathbf{I} \int_a^b X'_x(q) dq + \mathbf{J} \int_a^b X'_y(q) dq + \mathbf{K} \int_a^b X'_z(q) dq \quad (3-13)$$

De esta forma las integrales definidas de funciones vectoriales pueden ser reducidas a integrales definidas escalares. Teniendo esto en cuenta muchas de las propiedades de las integrales definidas escalares pueden ser extendidas fácilmente a las integrales vectoriales.

Como aplicación de la derivada e integración de vectores vamos a recordar los conceptos de velocidad, aceleración, etc.

3.3.- MOVIMIENTO DE UN PUNTO. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN.

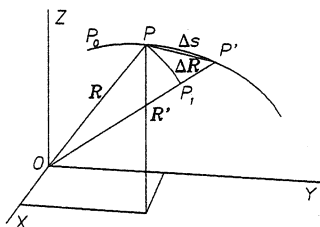
La posición de un punto P con respecto a un sistema de referencia determinado, que supondremos cartesiano rectangular $OXYZ$, estará determinada, en todo instante, cuando conocemos el vector de posición $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$; es decir:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K} \quad \begin{cases} X = X(t) \\ Y = Y(t) \\ Z = Z(t) \end{cases} \quad (3-14)$$

Las funciones (13-4), que supondremos continuas en general, son las ecuaciones paramétricas de una curva alabeada, que es la *trayectoria del punto*. Eliminando el tiempo entre ellas, obtendremos dos ecuaciones de la forma

$$f(X, Y, Z) = 0 \quad g(X, Y, Z) = 0 \quad (3-15)$$

que también representan la trayectoria (como intersección de dos superficies). Las (3-15) no son suficientes para que el movimiento del punto móvil esté determinado, en cada instante.



3.2.

Para ello, es necesario conocer, además, la longitud s del arco de curva P_0P (fig 3.2), que separa, en cada instante, al punto P de un origen fijo P_0 , tomado sobre la trayectoria y elegido un sentido positivo sobre la curva. Por consiguiente, además de la ecuación de la trayectoria, debe conocerse la ecuación

$$s = s(t) \quad (3-16)$$

llamada *ecuación o ley horaria*, que da el camino recorrido (distancia de P_0 a P , medida sobre la trayectoria) por el punto, en todo instante. Las ecuaciones (3-14), o las (3-15) con (3-16), son las ecuaciones del movimiento del punto P en el espacio.

Atendiendo a la trayectoria se clasifican los movimientos en rectilíneos y curvilíneos, según que la trayectoria sea una recta o una curva cualquiera. En particular, en los movimientos curvilíneos, la trayectoria puede ser plana o no.

Si el punto móvil está en P en el instante t , su posición está dada por el vector $R = R(t)$. Si en el instante $t' = t + \Delta t$ está en P' , su vector de posición es $R' = R(t + \Delta t)$. El vector $\Delta R = R' - R$, se llama *vector desplazamiento* y el vector

$$V = \dot{R} = \frac{dR}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} \quad (3-17)$$

se llama *velocidad instantánea*, o simplemente, *velocidad* del punto P en el instante t . En lo sucesivo, las derivadas con respecto al tiempo las representaremos por un punto encima, sean vectores o escalares. A medida que $\Delta t \rightarrow 0$, el punto P' se aproxima a P , y R cambia constantemente de dirección y módulo. En el límite, la dirección de ΔR es la de la tangente. Por tanto, el vector *velocidad es tangente a la trayectoria y tiene el sentido del movimiento*. Denotando por T el *vector unitario tangente*, se tiene:

$$V = |V| T \quad (3-18)$$

y su módulo es:

$$V = |V| = \frac{|dR|}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (3-19)$$

y se denomina *rapidez instantánea* o, simplemente, *rapidez*.

Nótese que aunque $|\Delta R| \neq \Delta s$, $|dR| = ds$. También debe tenerse cuidado en no confundir $|\Delta R|$ con ΔR , ya que, en general, son desiguales. El primero representa la longitud de la cuerda PP' , ΔR representa la distancia P_1P' , siendo $OP_1 = OP$.

Puesto que el vector V será de la forma

$$V = V_x I + V_y J + V_z K \quad V = \dot{R} = \dot{X}I + \dot{Y}J + \dot{Z}K$$

suponiendo que el sistema de referencia es fijo, es claro que siendo, funciones del tiempo,

$$V_x = \dot{X} \quad V_y = \dot{Y} \quad V_z = \dot{Z}$$

ya que cuando se derivan funciones de una variable, como las (3-14), en general, sus derivadas son funciones de la variable, en nuestro caso el tiempo. La rapidez es:

$$|V| = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} \quad (3-21)$$

Si se elimina el tiempo entre las ecuaciones (3-20) se obtiene una curva llamada *hodógrafa* del movimiento. Precisamente, las (3-20) son las ecuaciones paramétricas de la hodógrafa.

Como, en general, $V = V(t) = V_T T$ la variación de V con t puede ser debida a que cambia el módulo o su dirección. Si V es la velocidad en el instante t , en el instante $t + \Delta t$ la velocidad será: $V' = V + \Delta V$. Pues bien, se llama *aceleración instantánea* o *aceleración* en el instante t al vector:

$$A = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3-22)$$

siendo su módulo

$$A = |A| = \frac{|dV|}{dt} \quad (3-23)$$

En cuanto a la dirección y sentido de este vector, de momento, solo podemos decir que será la suma de dos vectores, uno que tiene la dirección de V y otro perpendicular a V . Es claro que, si

$$A = \dot{V} = A_x I + A_y J + A_z K$$

con respecto a un sistema de referencia fijo, se tiene:

$$A_x = \dot{V}_x \quad A_y = \dot{V}_y \quad A_z = \dot{V}_z \quad (3-24)$$

y el módulo de la aceleración es:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (3-25)$$

Si multiplicamos por dt las ecuaciones (3-17) y (3-19) e integramos, resulta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{V} dt \quad s = s_0 + \int_{t_0}^t V dt \quad (3-26)$$

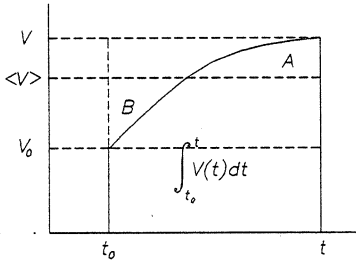
que determinan el desplazamiento $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ y el camino recorrido $s - s_0$. Para calcular las integrales de (3-26) es necesario conocer las funciones $V(t)$ y $V(t)$. En particular, cuando $V = \text{cte}$ (el movimiento es uniforme) se puede sacar de la integral, teniéndose:

$$s - s_0 = V(t - t_0) \quad (3-27)$$

Un concepto que se usa, con cierta frecuencia en el movimiento, es el de rapidez y velocidad media. Se define la *rapidez media* en el tiempo $t-t_0$ por

$$\langle V \rangle = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t V(t) dt \quad (3-28)$$

3.3.



y físicamente representa el camino recorrido en la unidad de tiempo. En cuanto a su significado geométrico resulta claro (fig 3.3), pues, representando la integral de (3-28) el área limitada por la curva $V(t)$, el eje t y las ordenadas extremas, si se cumple que $\text{área } A = \text{área } B$, el área del rectángulo de base $t-t_0$ y de altura $\langle V \rangle$, también es igual a la integral. Por tanto:

$$s - s_0 = \int_{t_0}^t V(t) dt = \langle V \rangle (t - t_0) \quad (3-29)$$

pues de acuerdo con (3-26), la integral representa el camino recorrido por el punto. Esta ecuación comparada con (3-27), nos dice que la rapidez media en el intervalo $t-t_0$ representa la rapidez constante que debe tener el móvil para que, en el mismo tiempo, recorra el mismo camino. La constante de integración s_0 representa el camino recorrido hasta el instante en que se comienzan a contar los tiempos, ya que si $t = t_0$, $s = s_0$. Análogamente, multiplicando la (3-23) por dt e integrando:

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t A dt \quad (3-30)$$

donde para integrar hace falta conocer la función $A(t)$. En particular, si A es constante,

$$V - V_0 = A(t - t_0) \quad (3-31)$$

donde V_0 es la rapidez para $t = t_0$. El módulo de la aceleración media en el intervalo de tiempo $t - t_0$ viene dado por

$$\int_{t_0}^t A(t) dt = \langle A \rangle (t - t_0)$$

y, según (3-30), se tiene:

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t A(t) dt = \langle A \rangle (t - t_0) \quad (3-32)$$

que comparada con (3-31) nos hace ver que la aceleración media representa la aceleración constante que debe tener un móvil para que, en el mismo intervalo de tiempo, tenga la misma variación de velocidad.

Atendiendo a la aceleración, un movimiento puede ser uniforme, si el módulo de la aceleración es nulo, y uniformemente acelerado (retardado), si el módulo de la aceleración es una constante positiva (negativa). Por tanto, un movimiento es

Uniforme, si:	$A = 0$	$V = \text{cte}$
Uniformemente acelerado (retardado), si:	$A = \text{cte}$	$V = f(t) \text{ lineal}$

Si un punto tiene aceleración nula con respecto a un sistema de referencia diremos que está en equilibrio relativo respecto a este sistema de referencia. Si además la velocidad es nula diremos que el equilibrio es estático y si la velocidad es constante el equilibrio es cinético.

Las ecuaciones (3-27) y (3-31) dan para ecuaciones de dimensiones de la velocidad y aceleración:

$$\{V\} = LT^{-1} \quad \{A\} = LT^{-2}$$

y las unidades son:

$$[V] = [s]/[t] \quad [A] = [V]/[t]$$

La primera nos dice que un móvil tendrá la unidad de rapidez si la unidad de longitud la recorre, con rapidez constante, en la unidad de tiempo (el segundo, símbolo s , en todos los sistemas de unidades). La segunda, que la unidad de aceleración es la aceleración constante que tiene un móvil cuya rapidez cambia en una unidad cada unidad de tiempo. Las

unidades en los sistemas cgs e internacional son:

	cgs	SI
Velocidad	cm/s	m/s
Aceleración	cm/s ²	m/s ²

Ejemplo 3.2.- Si $R = (t^3-t)I + (1-t^2)J + (t+4)K$, calcular el vector desplazamiento, velocidad y aceleración para $t = 2$.

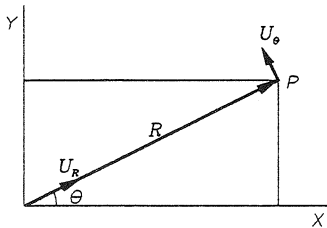
Solución: Como $R(2) = 6I - 3J + 6K$ y $R(0) = J + 4K$, el desplazamiento es: $\Delta R = 6I - 4J + 2K$. La velocidad y aceleración son:

$$V(t) = (3t^2 - 1)I - 2tJ + K \quad V(2) = 11I - 4J + K$$

$$A(t) = 6tI - 2J \quad A(2) = 12I - 2J$$

3.4.- DERIVADA DE UN VECTOR EN EL PLANO.

Consideremos un punto P que se mueve en un plano, que tomaremos como plano XY . El vector de posición de este punto es $R = P-O = XI + YJ$. Si θ es el ángulo que forma R con el eje OX , puesto que $X = R\cos\theta$ e $Y = R\sin\theta$, escribiremos:



$$R = XI + YJ = R(\cos\theta I + \sin\theta J)$$

Esta igualdad escrita en el plano complejo, de eje real OX e imaginario OY (fig 3.4), según la formula de Euler, será:

$$R = RU_R = Re^{j\theta} \quad (3-33)$$

3.4.

siendo $j = (-1)^{1/2}$ la unidad imaginaria. El vector U_R , es el vector unitario de R , llamado *vector unitario radial*, se puede escribir:

$$U_R = \cos\theta I + \sin\theta J = e^{j\theta} \quad (3-34)$$

En particular, los vectores unitarios I y J , con argumentos 0 y $\pi/2$, respectivamente, se pueden escribir en la forma:

$$I = 1 \quad J = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (3-35)$$

La derivada de U_R con respecto a θ es:

$$\frac{d\mathbf{U}_R}{d\theta} = -\text{sen}\theta \mathbf{I} + \cos\theta \mathbf{J} = e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} = \mathbf{U}_\theta \quad (3-36)$$

y es un vector unitario, perpendicular a $\mathbf{U}_R$, de argumento $\theta + \pi/2$; es decir, girado 90° en el sentido positivo de los ángulos (o sentido antihorario). Se conoce por *vector unitario transversal*. Si derivamos con respecto al tiempo y tenemos en cuenta la (3-36):

$$\frac{d\mathbf{U}_R}{dt} = \frac{d\mathbf{U}_R}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{U}_\theta \quad (3-37)$$

Este vector no es unitario, salvo que la derivada

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

sea la unidad. Esta derivada, que se denomina *rapidez angular* (con frecuencia se representa por ω o por Ω), representa la variación del ángulo barrido por el vector $\mathbf{R}$ en la unidad de tiempo. Se mide en *rad/s* (radianes por segundo) y en *rpm* (revoluciones por minuto) o en *rps* (revoluciones por segundo). Como un *radian* es un ángulo en el centro cuyo arco es igual al radio y $\theta = s/R$; cuando se dio una vuelta completa $\theta = 2\pi \text{ rad} = 1$ revolución, luego: $rps = 2\pi \text{ rad/s}$, $rpm = 2\pi \text{ rad/min} = \pi/30 \text{ rad/s}$. Su ecuación de dimensiones, ya que un ángulo carece de dimensiones, es: $\{\theta\} = T^{-1}$.

Si calculamos la derivada de $\mathbf{U}_\theta$ con respecto a θ , tendremos:

$$\frac{d\mathbf{U}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta \mathbf{I} + \text{sen}\theta \mathbf{J}) = -\mathbf{U}_R \quad (3-38)$$

cosa lógica, pues es el vector perpendicular, girado 90° hacia la izquierda; es decir, en el sentido positivo de los ángulos.

La derivada de $\mathbf{U}_\theta$ con respecto al tiempo es:

$$\frac{d\mathbf{U}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{U}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{U}_R \quad (3-39)$$

Como aplicación de esto, vamos a estudiar el movimiento en el plano.

3.5.- MOVIMIENTO EN EL PLANO.

Muchos movimientos tienen lugar en un plano. Puesto que $\mathbf{R} = R\mathbf{U}_R$, tendremos:

$$\mathbf{V} = \dot{R}\mathbf{U}_R + R\dot{\theta}\mathbf{U}_\theta \quad (3-40)$$

donde, de nuevo, la derivada es la suma de dos vectores: $\mathbf{V}_R = R\dot{\mathbf{U}}_R$ (componente radial), que tiene la dirección de $\mathbf{U}_R$, y el segundo (componente transversal), que es perpendicular al primero. El módulo de la velocidad, la rapidez, es:

$$|V| = \sqrt{\dot{R}^2 + (R\dot{\theta})^2} \quad (3-41)$$

donde se ve que el módulo de V no es $V = dR/dt$ (lo es cuando $d\theta/dt = 0$, movimiento rectilíneo), por lo que, una vez más, se debe insistir en no confundir $|dR|$ con dR .

Componentes de la velocidad: La velocidad en el plano se puede expresar en:

1) Componentes cartesianas: Son las componentes según los ejes X, Y :

$$V = V_x I + V_y J \quad V_x = \dot{X} = \frac{dX}{dt} \quad V_y = \dot{Y} = \frac{dY}{dt}$$

2) Componentes polares: Son las componentes radial y transversal:

$$V = V_R U_R + V_\theta U_\theta \quad V_R = \dot{R} = \frac{dR}{dt} \quad V_\theta = R\dot{\theta}$$

3) Componentes intrínsecas: Son las componentes tangencial y normal:

$$V = V_T T \quad V_T = V \quad V_N = 0$$

La velocidad solo tiene componente tangencial, por ser un vector tangente a la trayectoria.

Componentes de la aceleración: Las componentes de la aceleración en un movimiento plano se obtienen derivando la velocidad o sus componentes.

1) Componentes cartesianas: Derivando $V = V_x I + V_y J$, resulta

$$A_x = \dot{V}_x = \ddot{X} \quad A_y = \dot{V}_y = \ddot{Y} \quad (3-42)$$

2) Componentes polares: Derivando la (3-40), se tiene

$$A = \ddot{R} U_R + \dot{R} \dot{\theta} U_\theta + \dot{R} \ddot{\theta} U_\theta + R \ddot{\theta} U_\theta - R \dot{\theta}^2 U_R$$

donde la derivada

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

se llama *aceleración angular* (con frecuencia se representa por la letra α) y se mide en rad/s^2 . Por tanto:

$$A = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) U_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta}) U_\theta \quad (3-43)$$

expresión que resulta particularmente útil en el estudio del movimiento de un punto sometido

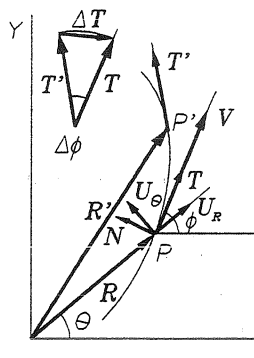
a la acción de un campo de fuerzas centrales. Las componentes radial y transversal de la aceleración son, pues, las siguientes:

$$A_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \quad A_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta}$$

3) Componentes intrínsecas: Derivando $V = VT$, se tiene:

$$A = \frac{dV}{dt}T + V\frac{dT}{dt}$$

Para comprender que representa el vector dT/dt , consideremos la variación del vector T cuando el punto P se mueve sobre la curva. El módulo de T es siempre 1, pero la dirección cambia de unos puntos a otros (salvo que la trayectoria sea una recta). Si determinamos la dirección de T mediante el ángulo ϕ que forma la tangente a la curva en P (fig 3.4), el



$$N = \frac{dT}{d\phi} \quad (3-44)$$

es unitario perpendicular a T y se llama *vector unitario normal*. Esto es evidente por tratarse de la derivada de un versor con respecto a un ángulo. (Por otro lado, $|dT| = 1d\phi$ y derivando $T \cdot T = 1$ con respecto a ϕ , se ve que T y N son perpendiculares). Su sentido se dirige hacia la parte cóncava de la curva. La derivada

$$C = \frac{d\phi}{ds} \quad (3-45)$$

3.5.

se denomina *curvatura* de la curva en el punto P y se mide en *rad/unidad longitud*. La circunferencia tangente a la curva en el punto P , que tienen su misma curvatura y cuyo centro está en la parte cóncava de la curva, se llama *circulo osculador*. El radio de esta circunferencia es $\rho = 1/C = ds/d\phi$ y se llama *radio de curvatura*. Entonces:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{V}{\rho} N$$

y, por tanto, la aceleración adopta la expresión:

$$A = \frac{dV}{dt}T + \frac{V^2}{\rho}N \quad (3-46)$$

que nos dice que la aceleración, en un instante dado, es la suma de dos vectores: uno que

tiene la dirección de la tangente a la trayectoria y módulo $A_T = dV/dt$, llamado *aceleración tangencial*, y otro cuya dirección es normal a la curva, sentido hacia el centro de curvatura (parte cóncava de la curva) y módulo $A_N = V^2/\rho$, llamado *aceleración normal* o *centrípeta*. Estas son las componentes intrínsecas de la aceleración, que son independientes del sistema de ejes de referencia.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO:

Un movimiento es rectilíneo si la trayectoria es una recta. Para un movimiento rectilíneo: $\rho = \infty$, en todos los puntos de la trayectoria (una recta se puede considerar como una circunferencia de radio infinito), por tanto, según (3-46), la aceleración normal es nula y

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_T = \frac{dV}{dt} \mathbf{T} = \dot{V} \mathbf{T}$$

y el módulo de la aceleración es: $A = dV/dt$. La rapidez es:

$$V = V_0 + \int_{t_0}^t A dt$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORMEMENTE VARIADO:

En particular, si $A = \text{cte}$, el movimiento es uniformemente variado (acelerado o retardado, según que la aceleración, que en este caso tiene la dirección del movimiento, tenga el mismo sentido o sentido contrario). En este caso la integral es inmediata. Se tiene:

$$V - V_0 = A(t - t_0) \quad (3-47.1)$$

que es la ecuación de una recta en el plano V, t (fig 3.6). Por tanto, la rapidez media entre t_0 y t es:

$$\langle V \rangle = \frac{V_0 + V}{2} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

y, por consiguiente el camino recorrido es,

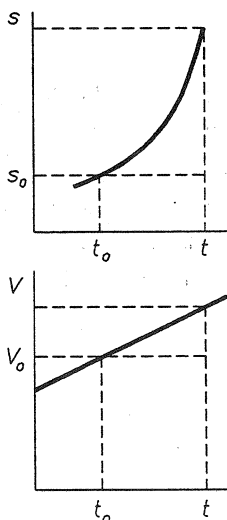
$$s - s_0 = \frac{V_0 + V}{2} (t - t_0) \quad (3-47.2)$$

Por otro lado, puesto que $V = ds/dt = V_0 + A(t - t_0)$, integrando, se obtiene:

$$s = s_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}A(t - t_0)^2 \quad (3-47.3)$$

3.6.

Eliminando $t - t_0$ entre dos de estas ecuaciones, resulta:



$$V^2 - V_0^2 = 2A(s - s_0) \quad (3-47.4)$$

que es una parábola en el plano s, t .

Si se elige el eje OX en la dirección del movimiento, $s = X$, y se puede sustituir en las formulas uno por el otro. Las ecuaciones (3-47.1) a (3-47.4) representan un conjunto completo de ecuaciones para el movimiento rectilíneo y uniformemente variado. Nótese que, además de las condiciones iniciales del movimiento, es decir, de los valores de s y V (que son s_0 y V_0) existen cuatro incógnitas, que son: s , V , A y t . En la mayoría de los problemas del movimiento rectilíneo y uniformemente variado se conocen dos de estas incógnitas y se trata de encontrar las otras dos restantes, lo que siempre es posible utilizando dos de las cuatro ecuaciones anteriores. La elección de las ecuaciones depende de cuales son las incógnitas del problema; así, si las incógnitas son V y A , se utilizará (3-47.2), que nos permite calcular V , y (3-47.3), que nos permite calcular A . Si el tiempo se empieza a contar cuando el móvil pasa por P_0 , $t_0 = 0$.

Si el móvil está en el origen en el instante inicial; es decir, si $s = 0$, para $t = 0$, basta hacer $s_0 = 0$.

Un caso particular del movimiento rectilíneo con aceleración constante es aquel en que la aceleración es nula. Entonces el movimiento es rectilíneo y uniforme. En este caso las ecuaciones se reducen a

$$V = V_0 \quad (\text{cte}) \quad s = s_0 + V(t - t_0) \quad (3-48)$$

MOVIMIENTO CIRCULAR:

Un movimiento es circular cuando la trayectoria es una circunferencia. La circunferencia es una curva plana que podemos situar en el plano XOY . Eligiendo el centro de la circunferencia como origen de coordenadas, la posición del punto P , que recorre la circunferencia, se determina dando dos datos informativos independientes, que pueden ser las coordenadas (X, Y) ; es decir, el vector $R = XI + YJ$, o dando la longitud R y el ángulo θ , que este forma con el eje OX ; es decir, eligiendo coordenadas polares. En un movimiento circular $R = \text{cte}$, $R = 0$, luego:

Coordenadas polares:

$$\begin{aligned} R &= RU_R & |R| &= R \\ V &= R\dot{\theta}U_\theta & |V| &= R\dot{\theta} = V_\theta \\ A &= -R\dot{\theta}^2U_R + R\ddot{\theta}U_\theta & |A| &= \sqrt{(R\dot{\theta}^2)^2 + (R\ddot{\theta})^2} \end{aligned}$$

Coordenadas intrínsecas:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V\mathbf{T} & |\mathbf{V}| &= V = V_T \\ \mathbf{A} &= \dot{V}\mathbf{T} + \frac{V^2}{R}\mathbf{N} & |\mathbf{A}| &= \sqrt{\dot{V}^2 + (R\dot{\theta}^2)^2} \end{aligned}$$

Si el movimiento circular es uniforme como el radio es constante, la velocidad angular es constante y resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R\mathbf{U}_R = -R\mathbf{N} \\ \mathbf{V} &= R\dot{\theta}\mathbf{U}_\theta = R\dot{\theta}\mathbf{T} \\ \mathbf{A} &= -R\dot{\theta}^2\mathbf{U}_R = R\dot{\theta}^2\mathbf{N} = \frac{V^2}{R}\mathbf{N} \end{aligned}$$

así que un movimiento circular uniforme posee aceleración radial (y dirigida hacia el centro, aceleración centrípeta) o normal

3.6.- CAMPOS ESCALARES ESTACIONARIOS.

Un campo escalar (o vectorial) está definido en una región o dominio del espacio D si a cada punto de ese dominio se asocia una cantidad escalar (un vector). El valor numérico de la cantidad escalar, elegida una unidad de medida, puede variar de un punto a otro, en general, dependiendo la variación de: la naturaleza del campo, dirección del desplazamiento, distancia entre los puntos y del tiempo. Denotando por X, Y, Z las coordenadas cartesianas de un punto P y por t el tiempo, cualquier función escalar $\phi(X, Y, Z, t)$, definida en D (o en E_3) representa un campo escalar. Análogamente, cualquier vector $\mathbf{B}(X, Y, Z, t)$, de componentes: $B_x(X, Y, Z, t)$, $B_y(X, Y, Z, t)$, $B_z(X, Y, Z, t)$ define un campo vectorial.

Ejemplos de campos escalares lo constituyen: la temperatura, la densidad, la presión, el potencial gravitatorio y el eléctrico, etc. Ejemplos de campos vectoriales son: el campo de velocidades de un fluido en movimiento, el campo gravitatorio, el campo eléctrico y magnético, el campo de la vorticidad, etc.

En particular, en todo lo que sigue nos limitaremos a considerar campos escalares o vectoriales *estacionarios*; es decir, campos independientes del tiempo, tales como: $\phi(X, Y, Z)$, $\mathbf{B}(X, Y, Z)$. En este capítulo estudiaremos los campos escalares estacionarios, dejando para el siguiente el estudio de los campos vectoriales estacionarios.

Desde un punto de vista matemático, un campo escalar estacionario está definido por toda aplicación que a un punto $P(X, Y, Z)$ del espacio afín haga corresponder una función escalar $\phi(X, Y, Z)$ del campo escalar asociado.

El campo escalar estacionario $\phi(X, Y, Z)$, supuesta una función definida y derivable en cada uno de los puntos de cierta región del espacio, tiene en cada punto un valor perfectamente definido. Las superficies ($c = \text{cte}$), para valores positivos (y negativos, si cabe) se llaman *superficies de nivel* o *superficies equiescalares* del campo escalar. Para un conjunto de valores de la constante queda determinada una familia de superficies. Si

suponemos que el valor de la cantidad toma valores enteros que difieran en una unidad, decimos que las superficies del campo dividen el espacio en capas, que se llaman láminas unidad del escalar ϕ .

Las superficies equiescalares del campo o las líneas equiescalares, en el caso de considerar un campo plano, o la intersección de las superficies equiescalares del campo por un plano (como ocurre con las líneas de nivel) sirven para hacer la representación de un campo escalar.

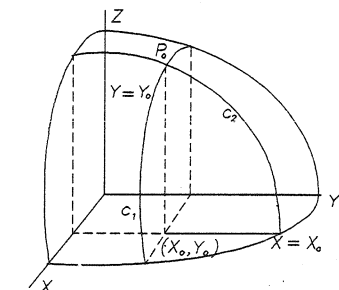
3.7.- GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR ESTACIONARIO.

Sea el campo escalar estacionario $\phi = \phi(X, Y, Z)$ y supongamos que podemos despejar Z , teniendo una función de la forma $Z = Z(X, Y)$, que también es la ecuación de una superficie. Si consideramos el plano $Y = Y_0$ (cte), el sistema de ecuaciones

$$Z = Z(X, Y) \quad Y = Y_0$$

representa una curva c_1 (fig 3.7). La derivada de Z en el punto $P_0(X, Y_0)$ sobre la curva está dada por

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta X} \Big|_{Y=Y_0} = \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{Y=Y_0}$$



3.7.

que es la derivada parcial de Z con respecto a X ; y representa la pendiente a la curva c_1 en el punto (X, Y_0) . Análogamente, la pendiente a la curva c_2 , dada por las dos ecuaciones $Z = Z(X, Y)$ y $X = X_0$, en el punto (X_0, Y) , es:

$$\lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta Y} \Big|_{X=X_0} = \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \right)_{X=X_0}$$

El concepto de gradiente se introduce para conocer como varía un campo escalar al pasar de un punto a otro. Si se consideran dos puntos del campo escalar ϕ , $P(X, Y, Z)$ y $Q(X+dX, Y+dY, Z+dZ)$, el vector que une estos puntos es:

$$dR = dXI + dYJ + dZK \quad (3-49)$$

y la variación de la función ϕ al pasar del punto P al punto Q vendrá dada por

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial X} dX + \frac{\partial \phi}{\partial Y} dY + \frac{\partial \phi}{\partial Z} dZ \quad (3-50)$$

Llamaremos gradiente de la función escalar ϕ al vector

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial X} I + \frac{\partial \phi}{\partial Y} J + \frac{\partial \phi}{\partial Z} K \quad (3-51)$$

Según (3-49) y (3-51) podemos escribir la (3-50) en la forma

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{R} \quad (3-52)$$

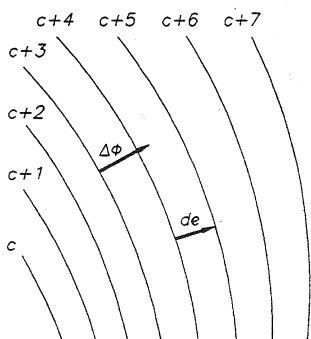
y si $d\mathbf{R} = \mathbf{U}_R ds$

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{U}_R \quad (3-53)$$

es la componente de $\nabla\phi$ en la dirección de $\mathbf{U}_R$; se llama derivada de ϕ en la dirección de $\mathbf{U}_R$, o derivada de ϕ según $\mathbf{U}_R$. Esta derivada es una medida de como varia ϕ al movernos en la dirección de $\mathbf{U}_R$. La derivada direccional de una función ϕ es máxima en la dirección del vector $\nabla\phi$ y es igual al módulo de este vector. El operador ∇ , introducido por Hamilton, se llama operador nabla y está definido por

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3-54)$$

Esté operador aplicado a una función escalar nos da el gradiente de este escalar. El gradiente de un escalar es un vector, $\nabla\phi$, cuyas componentes son las derivadas parciales de ϕ con respecto a X, Y, Z . $\nabla\phi$ indica cómo varia la función ϕ en las proximidades del punto $P(X, Y, Z)$. Su dirección es normal en cada punto a las superficies equiescalares, pues si $d\mathbf{R}$ está sobre una superficie equiescalar (los puntos P y Q pertenecen a esta superficie), $d\phi = 0$ y, de (3-52), resulta: $\nabla\phi \cdot d\mathbf{R} = 0$. En cuanto al sentido del vector $\nabla\phi$ se elige de modo que corresponda a valores crecientes de la función ϕ (fig 3.8).



3.8.

Si $d\mathbf{e} = N d\epsilon$ (no tiene por que ser unitario) es un vector paralelo al $\nabla\phi$, que tiene por módulo el espesor de la lámina unidad, según la ecuación (3-52), tendremos: $1 = |\nabla\phi| d\epsilon$, ya que la variación de la función al pasar de una superficie equiescalar a la siguiente es la unidad. Por tanto, el módulo del gradiente de un escalar es:

$$|\nabla\phi| = \frac{1}{d\epsilon}$$

igual al inverso del espesor de la lámina unidad.

Si $\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a las superficies equiescalares, que tiene el sentido de las ϕ crecientes, $d\mathbf{R} = N ds_N$, y según (3-53):

$$\frac{d\phi}{ds_N} = \nabla\phi \cdot \mathbf{N}$$

Por consiguiente el vector gradiente de la función escalar ϕ es:

$$\nabla \phi = |\nabla \phi| N = \frac{d\phi}{ds_N} N$$

Si tomamos como función escalar el módulo de R , las superficies equiescalares son esferas centradas en el origen de coordenadas y ∇R tiene, en todo punto, la dirección de R y, según (3-51), por modulo la unidad: $|\nabla R| = 1$. Luego ∇R es el versor del vector R :

$$\nabla R = U_R$$

Dado el campo escalar ϕ la aplicación del operador nabla nos permite obtener el vector $B = \nabla \phi$. Inversamente, dado el vector B ¿se puede obtener siempre un campo escalar ϕ tal que $B = \nabla \phi$? Más adelante (cap. 4), estudiaremos este problema y veremos que, en general, no es siempre posible la existencia de ϕ . También analizaremos qué condiciones debe cumplir B para determinar ϕ .

Ejemplo 3.3.- Demostrar que: $\nabla X = I$, $\nabla Y = J$, $\nabla Z = K$ y que, $\text{grad } \phi$ se puede escribir en la forma:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial X} \nabla X + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \nabla Y + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \nabla Z$$

Solución: En efecto, las superficies: $X = \text{cte}$, $Y = \text{cte}$, $Z = \text{cte}$ son planos perpendiculares a los ejes X, Y, Z , respectivamente, y sus gradientes tienen la dirección de los versores I, J y K , y como las láminas unidad están separadas una distancia unidad, sus módulos son la unidad, luego: $\nabla X = I$, etc.. Por otro lado, esto es evidente, teniendo en cuenta la definición de gradiente:

$$\nabla X = \frac{dX}{dX} I = I \quad \nabla Y = J \quad \nabla Z = K$$

pues X no depende de Y ni Z , etc.

* * *

Ejemplo 3.4: Hallar la derivada direccional de $\phi = (3X - 2Y)Z$, en el punto $P(2, 1, -1)$ y en la dirección y sentido del versor $U = (2I + J - 2K)/3$.

Solución: La derivada direccional viene dada por $\nabla \phi \cdot U$. Puesto que

$$\nabla \phi = 3ZI - 2ZJ + (3X - 2Y)K \quad \nabla \phi(P) = -3I + 2J + 4K$$

y, por tanto: $\nabla \phi(P) \cdot U = -4$.

3.8.- EMPLEO DE (LA) NABLA.

Para utilizar la nábla correctamente basta tener en cuenta que ∇ es un vector simbólico y un símbolo de derivación y todo lo que está a su derecha debe derivarse. El operador ∇ , como vector simbólico que es, se puede multiplicar escalarmente y vectorialmente por un vector. Vamos a definir los productos:

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-55)$$

cuyo significado físico veremos en el capítulo 4. El producto escalar $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \cdot \nabla$. El primer miembro es un escalar:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial X} + \frac{\partial A_y}{\partial Y} + \frac{\partial A_z}{\partial Z} \quad (3-56)$$

que es la divergencia de $\mathbf{A}$, que se escribe $\text{div } \mathbf{A}$; el segundo

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial X} + A_y \frac{\partial}{\partial Y} + A_z \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3-57)$$

es un operador. El producto $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \times \nabla$. El primero es el vector:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3-58)$$

el segundo el operador:

$$\mathbf{A} \times \nabla = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \end{vmatrix} \quad (3-59)$$

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos funciones vectoriales y f y g funciones escalares derivables en todos los puntos (X, Y, Z) del espacio. Entonces, teniendo en cuenta la propiedad distributiva:

$$1) \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (3-60)$$

$$2) \nabla(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \mathbf{A} + \nabla \mathbf{B} \quad (3-61)$$

$$3) \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (3-62)$$

que también se pueden demostrar utilizando la expresión de ∇ . Por ejemplo, para demostrar la primera de las ecuaciones (3-60), procederemos así:

$$\begin{aligned}\nabla(f+g) &= \left[I \frac{\partial}{\partial X} + J \frac{\partial}{\partial Y} + K \frac{\partial}{\partial Z} \right] (f+g) \\ &= I \frac{\partial f}{\partial X} + J \frac{\partial f}{\partial Y} + K \frac{\partial f}{\partial Z} + I \frac{\partial g}{\partial X} + J \frac{\partial g}{\partial Y} + K \frac{\partial g}{\partial Z} = \nabla f + \nabla g\end{aligned}$$

y de forma análoga las restantes.

APLICACIÓN DE (LA) NABLA A PRODUCTOS:

La aplicación de ∇ a productos de escalares y vectores cumple las igualdades:

$$4) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (3-63)$$

$$5) \nabla.(fA) = f\nabla.A + A.\nabla f \quad (3-64)$$

$$6) \nabla \times (fA) = f\nabla \times A - A \times \nabla f \quad (3-65)$$

$$7) \nabla.(A \times B) = B.\nabla \times A - A.\nabla \times B \quad (3-66)$$

o bien:

$$\text{div } A \times B = \begin{vmatrix} \nabla \times A & \nabla \times B \\ A & B \end{vmatrix}$$

Vamos a demostrar estas relaciones. En efecto, pongamos:

$$4) \nabla(fg) = \nabla(f_c g) + \nabla(fg_c)$$

indicando con el subíndice c que la función correspondiente permanece constante cuando se aplica el operador. Al efectuar los cálculos hay que tener cuidado de asociar siempre el operador nabla a los factores que han de ser derivados. Podemos escribir:

$$\nabla(f_c g) = f_c \nabla g = f \nabla g \quad \nabla(fg_c) = (\nabla f)g_c = g \nabla f$$

y sustituyendo, se obtiene (3-63).

5) Pongamos: $\nabla.(fA) = \nabla.(f_c A) + \nabla.(fA_c)$, pero $\nabla.(f_c A) = f_c \nabla.A$ y $\nabla.(fA_c) = \nabla f.A_c = A_c.\nabla f$, pues en todo producto escalar los factores escalares se pueden asociar a cualquiera de los vectores. Sustituyendo estas expresiones en las anteriores, y eliminando las c , resulta (3-64).

$$6) \text{ Se tiene: } \nabla \times (fA) = \nabla \times (f_c A) + \nabla \times (fA_c) = f_c \nabla \times A + \nabla f \times A_c$$

basándose la última transposición en que también en todo producto vectorial los factores escalares se pueden asociar a cualquiera de los vectores. Finalmente, como $\nabla f \times A = -A \times \nabla f$, se tiene (3-65).

$$7) \text{ Se tiene: } \nabla.(A \times B) = \nabla.(A_c \times B) + \nabla.(A \times B_c) = -\nabla.(B \times A_c) + \nabla.(A \times B_c)$$

y haciendo uso de las propiedades del producto mixto:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}_C) = -\mathbf{A}_C \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_C) = \mathbf{B}_C \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

y sustituyendo y eliminando los subíndices, resulta (3-66)

Estas expresiones también se pueden escribir en la forma:

$$1) \text{grad}(f+g) = \text{grad}f + \text{grad}g$$

$$2) \text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B}$$

$$3) \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot}\mathbf{B}$$

$$4) \text{grad}(fg) = f\text{grad}g + g\text{grad}f$$

$$5) \text{div}(f\mathbf{A}) = f\text{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}f$$

$$6) \text{rot}f\mathbf{A} = f\text{rot}\mathbf{A} + \text{grad}f \times \mathbf{A}$$

$$7) \text{div}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{B}$$

DOBLE APLICACIÓN DE (LA) NABLA: Apliquemos el operador ∇ a expresiones que ya contienen al operador. Es fácil demostrar que se cumplen las relaciones:

$$8) \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

$$9) \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$10) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$$

$$11) (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$12) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

que es conveniente recordar. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas, la 8):

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial Y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial Z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = \nabla^2 f$$

suponiendo que f tiene derivadas parciales continuas. El operador ∇^2 se denomina laplaciano. La 9) se comprueba así:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \end{vmatrix} = 0$$

La 10) también en coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial A_z}{\partial Y} - \frac{\partial A_y}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial Z} - \frac{\partial A_z}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial X} - \frac{\partial A_x}{\partial Y} \right) = 0$$

La 12) teniendo en cuenta que $\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) - B^2 \mathbf{A}$

y haciendo $\mathbf{B} = \nabla$.

También es posible considerar el doble producto $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$, que solo se puede expresar

en función de las derivadas de las componentes del vector $\mathbf{A}$.

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial X \partial Z} \right) \mathbf{I} + \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial Y \partial Z} \right) \mathbf{J} + \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial Y \partial Z} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial Z^2} \right) \mathbf{K}$$

También se cumplen las ecuaciones que contienen diadas:

$$13) \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \mathbf{B}) \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (3-67)$$

$$14) \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (3-68)$$

o bien, que es más fácil de recordar:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} & \nabla \cdot \mathbf{B} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot \nabla \mathbf{A} & \cdot \nabla \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{vmatrix}$$

$$15) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} \quad (3-69)$$

$$16) \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \frac{1}{2} \nabla B^2 - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3-70)$$

cuya demostración puede verse en el apéndice. La última ecuación es muy útil en fluidodinámica y se obtiene de la (3-69) haciendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

3.- CUESTIONES Y EJERCICIOS.

- 1) ¿Cómo se define la derivada de un vector $X(q)$ con respecto a la variable q ?
- 2) ¿Cuál es la derivada de un vector $A = AU$, donde U es el vector unitario en la dirección y sentido de A ?
- 3) Si un vector tiene módulo constante, ¿cómo es el vector derivada de este vector?
- 4) Siendo $R = 3t^2I + (t^2-1)J + (t-1)K$, calcular la derivada primera y segunda de este vector con respecto a t y los módulos de estos vectores.
- 5) Siendo $R = \text{sent}I + \text{cost}J$, calcular su derivada primera y segunda con respecto a t y los módulos de estos vectores.
- 6) Como el vector anterior R es un vector unitario, su derivada debe ser perpendicular al vector. Demostrar que esto es cierto.
- 7) Dados los vectores $A = 3t^2I + 2tJ - t^2K$ y $B = \text{sent}I + \text{cost}J$, calcular la derivada con respecto a t de $A \cdot B$. R: $4t\text{sent} + (3t^2 + 2)\text{cost}$.
- 8) Calcular $d(A \times B)/dt$ si $A = 3t^2I + 2tJ$ y $B = \text{sent}I + \text{cost}J$. R: $[4t\text{cost} - (3t^2 + 2)\text{sent}]K$.
- 9) Demostrar que $R \cdot dR/dt = R dR/dt$.
- 10) ¿Qué entendemos por integral de una función vectorial?
- 11) ¿Cuáles son las ecuaciones del movimiento de un punto material?
- 12) ¿Qué entendemos por velocidad instantánea?
- 13) ¿Qué es la rapidez instantánea de un punto?
- 14) ¿Qué es la hodógrafa del movimiento?
- 15) ¿Cómo se define la velocidad media?
- 16) Definir la rapidez media.
- 17) ¿Cuándo un movimiento es uniforme?
- 18) Atendiendo a la aceleración, ¿cómo se clasifican los movimientos?
- 19) Definir la unidad de velocidad en el S.I.
- 20) El movimiento de una partícula está dado por $R = 5t^2I$. ¿Cómo es el movimiento?
R: Rectilíneo y uniformemente acelerado, pues $A = 10I$.
- 21) ¿Cuál es la velocidad media durante el tercer segundo del movimiento de una partícula cuyo vector de posición es $R = 5t^2I$. R: $\langle V \rangle = 25I$.
- 22) ¿Las ecuaciones del movimiento de un punto en el plano son: $X = 5t-1$, $Y = 3t^2 + t-2$? ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria. R: Parábola $-3X^2 + 25Y - 11X + 42 = 0$.
- 23) La posición de un punto P con respecto a un sistema fijo está dado por el vector de posición $R = (t-1)I - t^2J + 2K$. ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?
R: La parábola $X^2 + Y + 2X + 1 = 0$ en el plano $Z = 2$.
- 24) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un móvil (SI), son:

$$6X = \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2} \quad Y = -t \quad Z = \frac{1}{2}t^2$$

Calcular el camino recorrido desde $t = 1$ a $t = 4$ s. R: $s_{14} = 10,5$ m.

- 25) Obtener por dos procedimientos la rapidez media del móvil del ejercicio 24) en el mismo intervalo de tiempo. R: $\langle V_{14} \rangle = 3,5$ m/s.
- 26) Las coordenadas de un punto P están dadas por las ecuaciones: $X = A\cos\Omega t$, $Y = A\sin\Omega t$. ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria suponiendo A y Ω constantes?
R: $X^2 + Y^2 = A^2$ (circunferencia de radio A).
- 27) ¿Es la hodógrafa del movimiento del 26) una circunferencia de radio $(A\Omega)^2$? R: Si.

- 28) La velocidad de un punto está dada por $V = bXI$, donde b es una constante. ¿Cuál es la aceleración del punto, en la posición X ? R: $A = b^2XI$.
- 29) ¿Cómo es la derivada de un versor que gira en el plano con respecto al ángulo θ ?
- 30) ¿Cuáles son las componentes polares de la velocidad y aceleración en el movimiento plano?
- 31) ¿Qué son las componentes intrínsecas de la aceleración en el movimiento plano?
- 32) ¿Qué entendemos por equilibrio de un punto. Qué tipos de equilibrio existen?
- 33) Si la ecuación del movimiento de un punto es de la forma: $X = at + b$, en donde a y b son constantes, ¿qué clase de movimiento es este y qué representan a y b ? R: Movimiento rectilíneo y uniforme. a = velocidad constante, b = espacio inicial.
- 34) Hágase una representación gráfica en el plano V, t de los distintos movimientos rectilíneos y escríbanse las ecuaciones que representan.
- 35) Determinar los vectores unitarios tangente y normal a la curva $X = 6\sin 2t$, $Y = 6\cos 2t$. Comprobar que el movimiento es uniforme.
R: $T = \cos 2tI - \sin 2tJ$, $N = -\sin 2tI - \cos 2tJ$, $V = 12$.
- 36) Dada la curva $X = A(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $Y = A(\sin\theta - \theta\cos\theta)$, donde A es una constante, determinar: 1) El versor tangente a la curva. 2) El módulo de V y 3) La componente normal de la aceleración. R: 1) $T = \cos\theta I + \sin\theta J$, 2) $V = A\theta d\theta/dt$ y 3) $A\theta(d\theta/dt)^2$.
- 37) La posición de un punto está dada por el vector $R = (2\theta + 5)U_R$. Si el ángulo $\theta = t^2$ rad, calcular la componente transversal de la aceleración. R: $A_\theta = 20t^2 + 10$.
- 38) La velocidad y aceleración de un punto, en un cierto instante, es: $V = 2I - 2J + K$, en m/s , y $A = -I + 2J$, en m/s^2 . Determinar la aceleración tangencial y normal y el radio de curvatura. R: $A_T = (-4I + 4J - 2K)/3$, $A_N = (I + 2J + 2K)/3$, $\rho = 9$ m.
- 39) Hallar el versor normal a la superficie $3X^2Y - Y^3Z^2 = 2$ en el punto $(1, 1, 1)$.
R: $(3I - K)/\sqrt{10}$.
- 40) Determinar el vector unitario normal a la superficie $XYZ = 6$, en el punto $(2, -1, 3)$.
R: $(-3I + 6J - 2K)/7$.
- 41) Hallar la derivada direccional de: $\phi = X^2YZ + 4XZ^2$, en el punto $(1, 1, 2)$ y en la dirección y sentido del vector $2I + 2J + K$. R: $61/3$.
- 42) ¿Cuál es la dirección según la cual es máxima la derivada direccional del campo escalar $\phi = X^2YZ^2$ en el punto $(1, 1, 1)$? R: En la dirección $(2I + J + 2K)/3$.
- 43) Dada la función $\phi = X^2YZ^3$, hallar la dirección según la cual es máxima la variación de ϕ en el punto $(-1, -2, 1)$ y su variación máxima. R: $\nabla\phi = 4I + J - 6K$, $\sqrt{53}$.
- 44) Determinar $\nabla\phi$, siendo $\phi = 1/R$. R: $\nabla\phi = -R/R^3$.
- 45) Determinar $\nabla\phi$, siendo $\phi = \ln |R|$. R: $\nabla\phi = R/R^2$.
- 46) Dado el campo escalar: $V = 3X^2Y - XYZ + 8Y$, hallar, en el punto $(1, 1, 3)$, la derivada en la dirección de la recta $X = 0, Z = 0$. R: ± 8 .
- 47) Dado el campo escalar $V = X^2 - 2XYZ + Z^2$, hallar el valor de su derivada direccional en el punto $P(1, 1, 1)$ y en la dirección que tiene la misma inclinación con respecto a los tres ejes. R: $\pm 2/\sqrt{3}$.
- 48) Dadas las superficies $X^2Y = Z$, $X^3Y^2 = Z + 2$, determinar el coseno del ángulo que forman las normales en el punto $((1, 2, 2))$. R: $53/3(322)^{-1/2}$.
- 49) Dadas las superficies $X^2 + Y^2 + Z^2 = 9$, $Z = X^2 + Y^2 - 3$, determinar el ángulo que forman las normales en el punto $(2, -1, 2)$. R: $\cos\theta = 8/3\sqrt{21}$, $\theta \doteq 54^\circ 25'$.

APÉNDICE:

Cuando se multiplican dos vectores A y B , o ∇ y B , se obtiene un tensor que se llama una diada:

$$AB = \begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix} \quad \nabla B = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial X} & \frac{\partial B_y}{\partial X} & \frac{\partial B_z}{\partial X} \\ \frac{\partial B_x}{\partial Y} & \frac{\partial B_y}{\partial Y} & \frac{\partial B_z}{\partial Y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial Z} & \frac{\partial B_y}{\partial Z} & \frac{\partial B_z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

El primer factor se llama antecedente, el segundo, consecuente. En general, el producto diádico no es conmutativo: $AB \neq BA$, pero si asociativo. La segunda expresión es el gradiente vectorial de B .

Si una diada AB se multiplica escalarmente por un vector C , o multiplicamos un vector C escalarmente por una diada AB , resulta:

$$(AB)C = (B \cdot C)A \quad C(AB) = (C \cdot A)B \quad (1)$$

así que, en ambos casos, resulta el producto escalar de los vectores contiguos al punto por el vector que no está junto a él. Según esto, el tensor AB transforma todo vector C en otro situado sobre la recta de posición del vector A , e igual al producto de este vector por el escalar $B \cdot C$, cuando C es el posfactor y, cuando C es el prefactor, lo transforma en otro vector situado sobre la recta de posición del vector B e igual al producto de este vector por el escalar $C \cdot A$.

Si se aplica la 1ª de (1) a $(AC)B$ y $B(CA)$, y la 2ª a $C(BA)$, como todas son iguales a $(B \cdot C)A$, resulta:

$$(AB)C = C(BA) = (AC)B = B(CA) \quad (2)$$

Por esto, más complicadas, por aparecer diadas, son las expresiones anteriores:

$$13) A \times (\nabla \times B) = (\nabla B)A - A \cdot \nabla B$$

$$14) \nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + B \cdot \nabla A - A \cdot \nabla B$$

$$15) \nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + A \cdot \nabla B + B \cdot \nabla A$$

$$16) B \cdot \nabla B = \frac{1}{2} \nabla B^2 - B \times (\nabla \times B)$$

Vamos a demostrar las ecuaciones 13) a 15), ecuaciones (3-67) a (3-69):

13) Puesto que A es un vector constante (que no está afectado por ∇), tenemos:

$$A \times (\nabla A \times B) = A_c \times (\nabla \times B) = (A_c B) \nabla - (A_c \cdot \nabla) B$$

donde se ha tenido en cuenta la (3-65). Si suprimimos los subíndices c , resulta (3-67).

14) En efecto: $\nabla \times (A \times B) = \nabla \times (A_c \times B) + \nabla \times (A \times B_c) = -\nabla \times (B \times A_c) + \nabla \times (A \times B_c)$, y teniendo en cuenta la expresión del doble producto:

$$-(\nabla \cdot A_c)B + (\nabla \cdot B)A_c + (\nabla \cdot B_c)A - (\nabla \cdot A)B_c = -(A_c \cdot \nabla)B + A_c(\nabla \cdot B) + (B_c \cdot \nabla)A - B_c(\nabla \cdot A)$$

y eliminando los subíndices resulta (3-68).

15) Esta expresión es una de las más difíciles de calcular. Pongamos

$$\nabla(A \cdot B) = \nabla(A_c \cdot B) + \nabla(A \cdot B_c) = \nabla(B \cdot A_c) + \nabla A \cdot B_c = (\nabla B)A_c + (\nabla A) \cdot B_c$$

que en virtud de la (3-67), se pueden escribir:

$$(\nabla B)A = A \cdot \nabla B + A \times (\nabla \times B) \quad (\nabla A) \cdot B = B \cdot \nabla A + B \times (\nabla \times A)$$

y sustituyendo resulta (3-69).

El carácter vectorial de ∇ nos ha permitido realizar con él operaciones propias de vectores. Los productos

$$\nabla \cdot \nabla \times A = 0 \quad \nabla \times \nabla f = 0$$

son análogas a los productos entre vectores: $B \cdot B \times A = 0$, $B \times B f = 0$. Sin embargo, la aplicación sin restricciones de esta analogía conduciría a consecuencias falsas. Así, por ejemplo:

$$A \cdot B \times A = 0 \quad A \cdot \nabla \times A \neq 0$$

pues, en general, el $\nabla \times A$ no es perpendicular a A . De la misma manera:

$$\begin{aligned} B \cdot (fA) &= fB \cdot A & \nabla \cdot (fA) &\neq f \nabla \cdot A \\ B \times (fA) &= fB \times A & \nabla \times (fA) &\neq f \nabla \times A \end{aligned}$$

[ver ecuaciones (3-64) y (3-65)]. Análogamente:

$$A \cdot B \times C = C \cdot A \times B = -C \cdot B \times A \quad A \cdot \nabla \times C \neq -C \cdot \nabla \times A$$

4 CAMPOS VECTORIALES.

4.1- CAMPOS VECTORIALES ESTACIONARIOS. FLUJO DEL CAMPO.

Un campo vectorial estacionario, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(X, Y, Z)$, está definido por toda aplicación que a un punto P del espacio afín haga corresponder un vector $\mathbf{B}$ del espacio vectorial asociado. El campo vectorial $\mathbf{B} = \mathbf{B}(X, Y, Z)$, supuesta una función definida y derivable en cada uno de los puntos de una región o dominio D , tiene en cada punto de ella un módulo, una dirección y un sentido perfectamente definidos.

En general, el conocimiento de $\mathbf{B}$ implica el de sus tres componentes B_x, B_y, B_z ; es decir, el de las tres funciones $B_x(X, Y, Z), B_y(X, Y, Z), B_z(X, Y, Z)$. En ocasiones estas funciones no son independientes entre si. Si $\mathbf{B}$ puede determinarse por una sola función de las coordenadas, el campo se dice que es monoescalar o monofuncional; si $\mathbf{B}$ se determina por dos funciones de las coordenadas, el campo es biescalar o bifuncional.

En un campo vectorial, se llaman *líneas del campo* a las del espacio afín que cumplen la condición de que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. El conjunto de líneas del campo en un instante dado se llama imagen del campo. Las ecuaciones diferenciales de estas líneas, en coordenadas cartesianas, son:

$$\frac{dX}{B_x} = \frac{dY}{B_y} = \frac{dZ}{B_z} \quad (4-1)$$

Las líneas del campo proporcionan una representación geométrica muy clara de un campo vectorial. Aunque por cada punto del espacio solo pasa una línea del campo, se conviene en dibujar las líneas del campo de modo que, considerando una superficie de área unidad perpendicular a ellas, el número de las que resulten cortadas coincide con el valor numérico del módulo del campo en el punto medio de la superficie. En otras palabras, el módulo del campo es numéricamente igual a la densidad de líneas (número de líneas por unidad de superficie) en todos los puntos del espacio. De este modo, en las regiones del campo donde las líneas del campo están muy apretadas, la intensidad del campo es mayor que en las regiones donde las líneas aparecen más espaciadas.

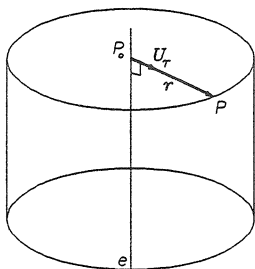
Tipos de campos vectoriales:

a) Campo uniforme: Un campo vectorial es uniforme cuando el vector campo no depende (módulo ni dirección) de la posición de P :

$$\mathbf{B} = \text{cte} \quad (4-2)$$

Las líneas del campo son rectas paralelas a $\mathbf{B}$. Las superficies equiescales del campo escalar son planos perpendiculares al campo.

b) Campo con simetría esférica: Siendo $\mathbf{R} = R\mathbf{U}_R$, un campo vectorial posee simetría esférica cuando el módulo del vector campo, en cualquier punto P es solo función de R e independiente de $\mathbf{U}_R$:



4.1.

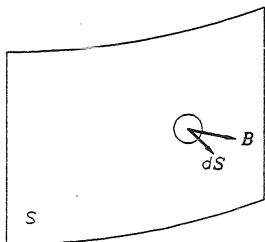
$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = B(R) \mathbf{U}_R \quad (4-3)$$

Las líneas del campo son rectas que pasan por el origen O . Las superficies equiescales del campo $\mathbf{B}(\mathbf{R})$ son esferas concéntricas.

c) Campo con simetría cilíndrica: Un campo vectorial posee simetría cilíndrica cuando el campo es de la forma $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\mathbf{U}_r$, donde $\mathbf{r} = P_0P$ y P_0 es la proyección de P sobre la recta e y $\mathbf{U}_r$ es el vector unitario de $P - P_0$ (fig 4.1). Las líneas del campo son rectas que cortan perpendicularmente a la recta e . Las superficies equiescales del campo son cilindros de eje la recta e .

FLUJO DEL CAMPO:

Consideremos un elemento de superficie $d\mathbf{S} = n dS$ en un punto P de un dominio en el cual esté definido un campo vectorial $\mathbf{B}(\mathbf{R})$. Se llama flujo elemental del campo a través de $d\mathbf{S}$ al escalar $d\phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. El flujo del campo a través de una superficie finita S es

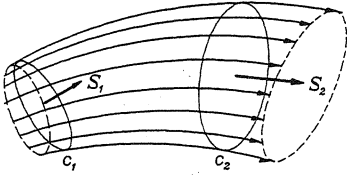


4.2.

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-4)$$

En cuanto a la significación geométrica del flujo basta tener en cuenta que $\mathbf{B}$ representa el número de líneas vectoriales que pasan por la unidad de superficie normal al campo, $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS_n$ indica el número de líneas vectoriales que atraviesan dS_n , que es el mismo que atraviesan $d\mathbf{S}$, el flujo indica el número de líneas del campo que atraviesan la superficie S (contándose positivamente de dentro afuera, si la superficie es cerrada, y negativamente de fuera adentro, puesto que el coseno del ángulo que forman $\mathbf{B}$ y $d\mathbf{S}$ es positivo y negativo, respectivamente).

En un dominio D , el conjunto de líneas del campo que pasan por los puntos de una línea cerrada cualquiera, se llama **tubo de flujo** o **tubo de líneas del campo** (fig 4.3). Si en un tubo de flujo consideramos dos contornos c_1, c_2 , y las superficies S_1, S_2 limitadas por estos contornos, tenemos una superficie cerrada. El flujo total se compone por el flujo que atraviesa la superficie lateral, que es nulo (pues, $\mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$), y el que atraviesa las bases. Y si todas las líneas que entran por S_1 salen por S_2 , el flujo total es nulo: $\phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$. Es decir:



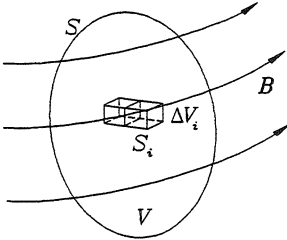
4.3.

$$\phi_2 = \phi_1 \quad (4-5)$$

y en estas condiciones, a lo largo de un tubo de flujo, el flujo es constante a través de toda superficie limitada por cualquier contorno del mismo. En otras palabras, a lo largo de un tubo de líneas del campo el flujo se conserva.

4.2.- DIVERGENCIA. TEOREMA DE GAUSS.

Consideremos un campo $\mathbf{B}(\mathbf{R})$, función vectorial de las coordenadas, que tiene en cada punto un módulo, una dirección y un sentido perfectamente definidos. Si S es la superficie que limita un volumen finito V , el flujo del campo a través de la superficie está dado por la (4-4). Si dividimos el volumen V en N elementos de volumen ΔV_i , es claro que si



4.4.

$$\Delta \phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i \quad (4-6)$$

es el flujo elemental del campo $\mathbf{B}$ a través de cada superficie parcial S_i , que limita el volumen ΔV_i , el flujo total a través de la superficie S que limita el volumen V es:

$$\sum_{i=1}^N \Delta \phi_i = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

es decir: $\phi = \sum \Delta \phi_i$, puesto que el flujo que atraviesa una superficie común a dos elementos de volumen adyacentes se cuenta positivamente para uno y negativamente para el otro.

En general, la integral (4-6) depende del volumen ΔV_i ; por lo que si N es muy grande (ΔV_i pequeño), el cociente

$$\frac{\Delta \phi_i}{\Delta V_i} = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i$$

puede tender a un límite finito. Pues bien, si este límite existe y es independiente de la manera como se haya realizado la división de V , esta expresión es una propiedad característica de $\mathbf{B}$ en cada dV . Este límite se llama divergencia de $\mathbf{B}$ y escribiremos:

$$\text{div } \mathbf{B} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi_i}{\Delta V_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i \quad (4-7)$$

La divergencia de un vector es un escalar, que puede variar de unos puntos a otros. Físicamente, representa el flujo del campo por unidad de volumen (infinitesimal); o sea, el flujo del campo a través de la superficie que rodea a la unidad de volumen. O también, la divergencia representa el número de líneas vectoriales que se originan en la unidad de volumen.

Los campos en los que $\text{div } \mathbf{B} = 0$, en todos los puntos del espacio donde $\mathbf{B}$ está definido, se llaman **campos solenoidales**. En un campo solenoidal ninguna línea del campo puede tener comienzo ni fin en ningún punto del campo; por consiguiente, todas las líneas del campo son cerradas. En los puntos de un campo no solenoidal donde $\text{div } \mathbf{B} > 0$ nacen líneas vectoriales y en los puntos donde $\text{div } \mathbf{B} < 0$ mueren; a estos puntos se les llama **fuentes o manantiales** del campo y **sumideros del campo**, respectivamente.

Puesto que el flujo total que atraviesa la superficie S es igual la suma de los flujos elementales, es decir:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \frac{1}{\Delta V_i} \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i$$

en el límite, cuando $N \rightarrow \infty$, $\Delta V_i \rightarrow 0$, el primer miembro no varía, puesto que el flujo de $\mathbf{B}$ a través de S solo depende de la superficie a la que está extendida la integral; pero el último se transforma en

$$\int_V \text{div } \mathbf{B} dV$$

por tanto:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{B} dV \quad (4-8)$$

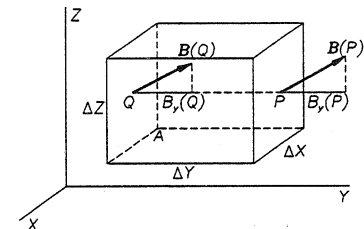
ecuación que recibe el nombre de **teorema de Gauss** o **teorema de la divergencia** y es válida en todo campo vectorial para el cual exista el límite (4-7). Por consiguiente, *según el teorema de la divergencia, dada una superficie cerrada S , que encierra un volumen V , para todo campo vectorial $\mathbf{B}$ se cumple que el flujo de $\mathbf{B}$ a través de S es igual a la integral de la divergencia extendida a todo el volumen V* . En particular, cuando $\text{div } \mathbf{B}$ es constante, el flujo es: $\phi = V \text{div } \mathbf{B}$.

La (4-7) es la definición de la divergencia, con independencia de todo sistema de coordenadas. Tratemos ahora de hallar la expresión de la divergencia en coordenadas cartesianas; o sea, vamos a calcular la divergencia de la función $\mathbf{B}(X, Y, Z)$. Para ello, tomemos ΔV en la forma de una pequeña caja rectangular con vértice en el punto $A(X, Y, Z)$, y aristas ΔX , ΔY , ΔZ (fig 4.5). La superficie se compone de 6 rectángulos: dos de área $\Delta X \Delta Y$, dos de área $\Delta Y \Delta Z$ y otros dos de área $\Delta Z \Delta X$. El flujo a través de las dos caras normales al eje Y es:

$$\Delta \phi_y = [B_y(P) - B_y(Q)] \Delta X \Delta Z = \frac{\Delta B_y}{\Delta Y} \Delta X \Delta Y \Delta Z = \frac{\Delta B_y}{\Delta Y} \Delta V$$

donde $B_y(P)$ y $B_y(Q)$ son las componentes del campo según el eje OY en los puntos medios P y Q de las dos caras y ΔV el elemento de volumen. Repitiendo el razonamiento para los

otros pares de caras, y considerando un elemento de volumen infinitesimal $dV = dXdYdZ$, resulta:



$$d\phi = \left[\frac{\partial B_x}{\partial X} + \frac{\partial B_y}{\partial Y} + \frac{\partial B_z}{\partial Z} \right] dV$$

así que el flujo del campo por unidad de volumen, es decir, la divergencia de $\mathbf{B}$ es:

4.5.

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial X} + \frac{\partial B_y}{\partial Y} + \frac{\partial B_z}{\partial Z} \quad (4-9)$$

expresión que por no contener las dimensiones de la caja es independiente de la forma de la caja y de sus proporciones.

Si se multiplica escalarmente el operador nabla por $\mathbf{B}$ resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B} \quad (4-10)$$

Esta expresión también es completamente general en el sentido de que se cumple siempre, con independencia del sistema de coordenadas adoptado. Naturalmente que la expresión de la divergencia en otro sistema de coordenadas (cilíndricas, esféricas, etc.) no coincide con (4-9), válida para coordenadas cartesianas, pero siempre se cumple (4-10).

En particular, puesto que $\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}$, resulta:

$$\text{div } \mathbf{R} = 3 \quad (4-11)$$

Aunque, según (4-10), la divergencia de un vector es el producto escalar simbólico de ∇ por el vector, sin embargo, no se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla$, ya que mientras el primer miembro es un escalar, el segundo es un operador.

Ejemplo 4.1: Siendo $\mathbf{B} = X^2Y\mathbf{I} - XY^2Z\mathbf{J} + YZ^2\mathbf{K}$, calcular $\text{div } \mathbf{B}$, en el punto $P(2, -1, 2)$.

Solución: Calculando las derivadas parciales, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial X} &= 2X^2Y & \frac{\partial B_y}{\partial Y} &= -2XYZ & \frac{\partial B_z}{\partial Z} &= 4YZ^2 \\ \text{div } \mathbf{B} &= 3X^2 - 2XYZ + 4YZ^2 & \text{div } \mathbf{B}(P) &= -36 \end{aligned}$$

* * *

Ejemplo 4.2: Demostrar que el vector $\mathbf{B} = k\mathbf{R}/R^3$ es solenoidal, salvo para $R = 0$.

Solución: El vector

$$\mathbf{B} = k\mathbf{R}/R^3 = k(X^2 + Y^2 + Z^2)^{-3/2}(XI + YJ + ZK)$$

por tanto

$$B_x = kX(X^2 + Y^2 + Z^2)^{-3/2} \quad \frac{\partial B_x}{\partial X} = k[(X^2 + Y^2 + Z^2)^{-3/2} - 3X^2(X^2 + Y^2 + Z^2)^{-5/2}]$$

y análogamente para B_y y B_z sustituyendo $3Y^2$ y $3Z^2$ por $3X^2$. Luego:

$$\text{div } \mathbf{B} = k[3(X^2 + Y^2 + Z^2)^{-3/2} - 3(X^2 + Y^2 + Z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^{-5/2}] = 0$$

así que el campo es solenoidal. De otra forma:

$$\text{div } \mathbf{B} = k \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^3} \mathbf{R} \right) = k \left[\frac{1}{R^3} \nabla \cdot \mathbf{R} + \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) \cdot \mathbf{R} \right]$$

y como

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = 3 \quad \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) \cdot \mathbf{R} = -3 \frac{\nabla R}{R^4} \cdot \mathbf{R} = -\frac{3}{R^3}$$

resulta $\text{div } \mathbf{B} = 0$

4.3.- CIRCULACIÓN DE UN VECTOR. ROTACIONAL.

En todo campo vectorial se llama procepción del vector $\mathbf{B}$ a lo largo de una línea c de extremos P y Q , a la integral

$$P = \int_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}$$

Si el contorno c es cerrado ($P = Q$) se tiene el escalar llamado circulación:

$$C = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} \quad (4-12)$$

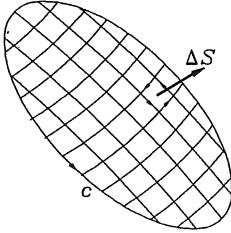
Los elementos $d\mathbf{R}$ del contorno están dirigidos en el sentido en que sea recorrida la curva. Por tanto, si se invierte ese sentido cambia el signo de C . En general, la procepción y circulación de un vector dependen del camino seguido; es decir, las integrales de línea a lo largo de caminos distintos conducen a valores distintos.

La curva cerrada a lo largo de la cual calculamos la circulación del vector $\mathbf{B}$, puede considerarse como el contorno de cierta superficie S que la abarca (fig 4.6). Si esta superficie se divide en un número N de elementos de superficie dS , la circulación del vector

$\mathbf{B}$ a lo largo de sus contornos elementales, es:

$$\Delta C_i = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}_i$$

y si se suman estas N circulaciones se obtiene C , puesto que la línea común a dos superficies contiguas es recorrida dos veces en sentidos opuestos. Por tanto:



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}_i$$

Quando N se hace más grande obtenemos superficies de menor circulación y menor área. Por tanto, parece lógico considerar la relación de la circulación del contorno al área de la superficie que limita, de forma análoga a como consideramos la relación del flujo al volumen, si bien ahora debemos tener en cuenta que una superficie tiene carácter vectorial.

4.6.

Por definición, llamaremos $\text{rot } \mathbf{B}$ al vector cuyas componentes están dada por

$$n \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta C_i}{\Delta S_i} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_i} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}_i \quad (4-13)$$

donde n es el versor normal al elemento de superficie dS . Por ejemplo, la componente x del rotacional es:

$$I \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}_i \quad (4-14)$$

Puesto que para toda la superficie original

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Delta S_i} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}_i \right) \Delta S_i$$

en el límite, cuando $N \rightarrow \infty$, $\Delta S_i \rightarrow 0$, el primer miembro no varía, pero el último se transforma en

$$\int_S n \cdot \text{rot } \mathbf{B} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

y, por tanto

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-15)$$

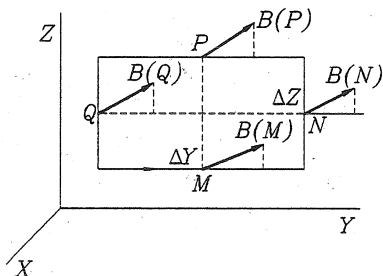
que es el teorema de Stokes. Según él la circulación de un vector $\mathbf{B}$ a lo largo de una curva cerrada c es igual al flujo del rotacional de dicho vector a través de una superficie abierta

cualquiera que está limitada por la curva. El sentido de dS está relacionado con el de recorrido del contorno c por la regla del tornillo.

Un campo vectorial se dice que es *irrotacional*, si en todos sus puntos se cumple que el rotacional es nulo.

Expresión del rotacional en coordenadas cartesianas:

Calculemos la circulación a lo largo de un rectángulo elemental de cualquier orientación con respecto a los ejes. Empecemos por considerar en el plano OYZ , el rectángulo de lados dY , dZ , paralelo a los ejes, proyección del dado (no dibujado en la fig 4.7). La circulación de B por el contorno del mismo, en el sentido contrario a las agujas de un reloj, es igual a la suma de las procesiones a lo largo de los lados. Con las notaciones de la figura y comenzando por el lado horizontal inferior:



4.7.

$$\begin{aligned} dC_x &= B_y(M)dY + B_z(N)dZ - B_y(P)dY - B_z(Q)dZ \\ &= [B_z(N) - B_z(Q)]dZ - [B_y(P) - B_y(M)]dY \end{aligned}$$

La diferencia $B_z(N) - B_z(Q)$ es lo que varía la componente B_z al ir del punto Q al N , según Y . Por tanto, $B_z(N) - B_z(Q) = (\partial B_z / \partial Y)dY$ y, de forma análoga, $B_y(P) - B_y(M) = (\partial B_y / \partial Z)dZ$. Se tiene:

$$dC_x = \frac{\partial B_z}{\partial Y} dY dZ - \frac{\partial B_y}{\partial Z} dZ dY = \left(\frac{\partial B_z}{\partial Y} - \frac{\partial B_y}{\partial Z} \right) dS_x$$

donde $dS_x = dY dZ$. Análogamente, para los planos OXZ y OXY , se obtendrían las expresiones correspondientes:

$$dC_y = \left(\frac{\partial B_x}{\partial Z} - \frac{\partial B_z}{\partial X} \right) dS_y \quad dC_z = \left(\frac{\partial B_y}{\partial X} - \frac{\partial B_x}{\partial Y} \right) dS_z$$

y sumándolos todas, se tiene como expresión de la circulación de un rectángulo infinitesimal orientado de cualquier modo con respecto a los ejes

$$dC = \left(\frac{\partial B_z}{\partial Y} - \frac{\partial B_y}{\partial Z} \right) dS_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial Z} - \frac{\partial B_z}{\partial X} \right) dS_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial X} - \frac{\partial B_x}{\partial Y} \right) dS_z$$

La extensión a una curva cerrada cualquiera es inmediata, apoyando en ella una superficie cualquiera S , la cual se divide en rectángulos infinitesimales. La circulación en los lados comunes de estos rectángulos se anula y quedan solo los lados que se apoyan en la curva. Puesto que $dS = dS_x \mathbf{i} + dS_y \mathbf{j} + dS_z \mathbf{k}$, si tenemos en cuenta la (4-15), debe ser:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial Y} - \frac{\partial B_Y}{\partial Z} \right) \mathbf{I} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial Z} - \frac{\partial B_z}{\partial X} \right) \mathbf{J} + \left(\frac{\partial B_Y}{\partial X} - \frac{\partial B_x}{\partial Y} \right) \mathbf{K}$$

que se recuerda más fácilmente en la forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4-16)$$

como expresión del rotacional en coordenadas cartesianas. En particular, utilizando (4-16) se deduce que

$$\text{rot} \mathbf{R} = 0 \quad (4-17)$$

el vector de posición es un campo irrotacional

Ejemplo 4.3: Calcular la proyección del campo $\mathbf{B} = 2(X^2 - Y)\mathbf{I} - 7YZ\mathbf{J} + 3XYZ\mathbf{K}$, desde $P(0,0,0)$ a $Q(2,1,1)$ a lo largo de la curva $X = 2t$, $Y = t^2$ y $Z = t^3$.

Solución: Sustituyendo X , Y , Z en $\mathbf{B}$, se obtiene: $\mathbf{B} = 6t^2\mathbf{I} - 7t^5\mathbf{J} + 6t^6\mathbf{K}$, y como

$$\mathbf{R} = 2t\mathbf{I} + t^2\mathbf{J} + t^3\mathbf{K} \quad d\mathbf{R} = (2\mathbf{i} + 2t\mathbf{J} + 3t^2\mathbf{K})dt$$

luego

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = (12t^2 - 14t^6 + 18t^8)dt$$

Los puntos P y Q corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Entonces

$$\int_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \int_0^1 \mathbf{B}(t)dt = [4t^3 - 2t^7 + 2t^9]_0^1 = 4$$

* * *

Ejemplo 4.4: Calcular la proyección del campo $\mathbf{B} = 2(X^2 - Y)\mathbf{I} - 7YZ\mathbf{J} + 3XYZ\mathbf{K}$, a lo largo de la recta que pasa por los puntos $P(0,0,0)$ y $Q(2,1,1)$.

Solución: La ecuación de la recta que pasa por los puntos es: $X/2 = Y = Z$. Entonces se cumple: $dX/2 = dY = dZ$, por lo que, se puede poner:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = 2(X^2 - Y)dX - 7YZdY + 3XYZdZ = (6Y^2 + 9Y^2 - 4Y)dY$$

de modo que:

$$\int_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \int_0^1 (6Y^3 + 9Y^2 - 4Y) dY = \frac{5}{2}$$

y como se ve la procesión de $\mathbf{B}$ es distinta que en el ejemplo 4.4. La procesión del campo depende del camino seguido.

4.4.- CAMPOS CONSERVATIVOS.

Un campo vectorial se dice que deriva de un escalar ϕ , en un dominio D , cuando existe una función escalar $\phi(X, Y, Z)$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \phi$$

cualquiera que sea el punto (X, Y, Z) de D . En este caso, la procesión infinitesimal del campo es: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \nabla \phi \cdot d\mathbf{R} = d\phi$ y, por tanto,

$$\int_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \phi(Q) - \phi(P) \quad (4-18)$$

que nos dice, que la procesión entre dos puntos del campo $\mathbf{B}$ es igual al número de láminas unidad que hay entre ellos. Además, nos dice que la procesión no depende de la forma de la curva (a condición de que todos sus puntos pertenezcan al dominio D), solo depende del valor que toma ϕ en los puntos extremos. Si $Q \equiv P$, la curva es cerrada y teniendo en cuenta el teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4-19)$$

válida cualquiera que sea la superficie S , limitada por el contorno de la línea a lo largo de la cual se calcula la circulación.

Los campos vectoriales que cumplen la ecuación (4-18) o la (4-19) se llaman **campos conservativos**. Tales campos cumplen, pues, la condición de que *la procesión no depende del camino* y que *la circulación es nula*. Los campos conservativos son *irrotacionales* ($\text{rot} \mathbf{B} = 0$). En todo lo que sigue, cuando un campo vectorial sea conservativo, utilizaremos la función $V(X, Y, Z) = -\phi(X, Y, Z)$. Esta función escalar se llama *función potencial* o *potencial escalar*. Si un campo es conservativo diremos que deriva de un potencial y escribiremos:

$$\mathbf{B} = -\nabla V \quad (4-20)$$

Hay que hacer notar que las líneas del campo $\mathbf{B}$, normales a las superficies equipotenciales ($V = \text{cte}$), van de los potenciales más altos a los más bajos. Puesto que

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = -\nabla V \cdot d\mathbf{R} = -dV$$

la diferencia de potencial entre dos puntos (P y P_0) del campo

$$V(P) - V(P_0) = - \int_{P_0}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \int_P^{P_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} \quad (4-21)$$

viene dada por la proyección del campo para ir del segundo al primer punto; representa el número de láminas unidad que se atraviesa para ir de un punto al otro. Naturalmente, la circulación del campo es nula. Según (4-21), existe una indeterminación en la función potencial, ya que solo podemos calcular diferencias de potencial. Esta indeterminación puede resolverse dando a la función $V(\mathbf{R})$ un valor determinado en un punto, haciendo, por ejemplo, $V(P_0) = 0$, para puntos muy alejados del campo, $P_0 = \infty$, y entonces

$$V(\mathbf{R}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{R}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}$$

Podemos decir: *La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial derive de un gradiente es que la proyección del campo sea independiente del camino, que la circulación sea nula o que el campo sea irrotacional.* Para saber si un campo es conservativo utilizaremos la condición local: $\text{rot } \mathbf{B} = 0$.

Ejemplo 4.5: Demostrar que $\mathbf{B} = 2Y^2\mathbf{I} + (4XY - Z^2)\mathbf{J} - 3YZ^2\mathbf{K}$ es conservativo.

Solución: Basta comprobar que el campo $\mathbf{B}$ es irrotacional. En efecto, como es fácil comprobar $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ y, por tanto, el campo es conservativo y deriva de un potencial. ¿Cuál es el potencial de que deriva?. Vamos a ver a continuación cómo puede calcularse el potencial del que deriva un campo conservativo.

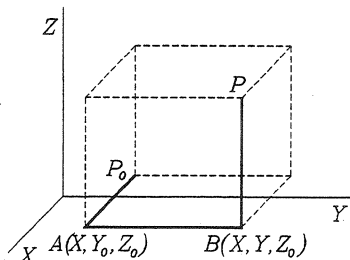
CALCULO DE LA FUNCION POTENCIAL V :

Para determinar el potencial del que deriva el campo, puede hacerse uso de las condiciones (4-20) y (4-21).

1) Utilizando (4-21): Puesto que el campo $\mathbf{B}$ es conservativo, entre los puntos P_0 y P (fig 4.8), tendremos:

$$V(P) - V(P_0) = - \int_{P_0}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = - \left[\int_{P_0}^A B_x dX + \int_A^B B_y dY + \int_B^P B_z dZ \right] \quad (1)$$

Para ir de $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ a $P(X, Y, Z)$ sigamos la quebrada que pasa por los puntos $A(X, Y_0, Z_0)$ y $B(X, Y, Z_0)$; es decir, sigamos el camino que va del punto P_0 a A , de A a B y, finalmente, de B a P .



4.8.

a) De P_0 a A se cumple: la coordenada X varía de X_0 a X , de manera que $dX \neq 0$, siendo $Y = Y_0$, $dY = 0$; $Z = Z_0$, $dZ = 0$. El único sumando no nulo de la integral (1) es el primero. Entonces

$$V(A) - V(P_0) = - \int_{X_0}^A B_x dX = - \int_{X_0}^X B_x(X, Y_0, Z_0) dX$$

b) Al ir del punto A al B , se tiene: $dX = 0$; Y varía de Y_0 a Y , $dY \neq 0$; $Z = Z_0$, luego $dZ = 0$. El único sumando no nulo de la integral (1) es el segundo. Por tanto:

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B B_y dY = - \int_{Y_0}^Y B_y(X, Y, Z_0) dY$$

c) De B a P , se cumple: $dX = 0$; $dY = 0$; en tanto que varía Z_0 a Z , $dZ \neq 0$. El único sumando no nulo es el tercero. Luego:

$$V(P) - V(B) = - \int_B^P B_z dZ = - \int_{Z_0}^Z B_z(X, Y, Z) dZ$$

Entonces podemos escribir la integral anterior en la forma siguiente:

$$V(P) - V(P_0) = - \int_{X_0}^X B_x(X, Y_0, Z_0) dX - \int_{Y_0}^Y B_y(X, Y, Z_0) dY - \int_{Z_0}^Z B_z(X, Y, Z) dZ \quad (2)$$

Calculando las derivadas de V con respecto a X, Y, Z , debemos obtener las componentes de B , de acuerdo con (4-20). De esta forma podemos comprobar que el cálculo de la función potencial se ha efectuado correctamente. La expresión se simplifica si se parte del origen, donde $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$.

Ejemplo 4.6.- ¿Cuál es la función V del campo $B = 2Y^2I + (4XY - Z^2)J - 3YZ^2K$?

Solución: 1) Utilizando la (2), se tiene:

$$- \int_{P_0}^P B \cdot dR = -2Y_0^2 \int_{X_0}^X dX + \int_{Y_0}^Y (Z_0^2 - 4XY) dY + 3Y \int_{Z_0}^Z Z^2 dZ$$

por tanto la diferencia de potencial entre P y P_0 es:

$$V(P) - V(P_0) = -2Y_0^2X + 2Y_0^2X + Z_0^3Y - 2XY^2 - Z_0^3Y_0 + 2XY_0^2 + YZ^3 - YZ_0^3$$

luego

$$V = YZ^3 - 2XY^2 + C$$

donde C es una constante arbitraria. Más fácil resulta si se parte del origen, pues $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ y las integrales se simplifican.

$$-\int_{P_0}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = -4X \int_0^Y Y dY + 3Y \int_0^Z Z^2 dZ$$

2) Utilizando (4-20): $\mathbf{B} = -\nabla V$ y $\text{rot } \mathbf{B} = 0$; es decir, integrando las ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial X} = -B_X \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = -B_Y \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = -B_Z \quad (3)$$

Ejemplo 4.7.- ¿Cuál es la función V del campo $\mathbf{B} = 2Y^2\mathbf{I} + (4XY - Z^3)\mathbf{J} - 3YZ^2\mathbf{K}$?

2) Utilizando la (2):

$$\frac{\partial V}{\partial X} = -2Y^2 \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = Z^3 - 4XY \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 3YZ^2$$

Como $V = V(X, Y, Z)$, integremos estas ecuaciones, poniendo:

$$V = -2Y^2 \int dX + f(Y, Z) = -2Y^2X + f(Y, Z)$$

$$V = \int (Z^3 - 4XY) dY + g(X, Z) = YZ^3 - 2XY^2 + g(X, Z)$$

$$V = 3Y \int Z^2 dZ + h(X, Y) = YZ^3 + h(X, Y)$$

Para calcular, por ejemplo, $f(Y, Z)$, derivemos la primera con respecto a Y o Z . Derivando con respecto a Z (conviene así porque la derivada con respecto a Z del primer sumando de V es nula, cosa que no sucede derivando con respecto a Y) y teniendo en cuenta la tercera, de las primeras ecuaciones, tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial f}{\partial Z} = 3YZ^2 \quad f = YZ^3 \quad V = YZ^3 - 2XY^2 + C$$

o bien, utilizando la última

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial h}{\partial X} = 2Y^2$$

$$h = -2XY^2$$

$$V = YZ^3 - 2XY^2 + C$$

4.5.- CAMPO VECTORIAL DE FLUJO CONSERVATIVO.

Si un campo vectorial $\mathbf{B}$ es solenoidal en un dominio D , según el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{B} dV = 0$$

el flujo total es nulo y el campo es de flujo conservativo. La expresión anterior es la condición necesaria y suficiente para que el flujo sea conservativo, cualquiera que sea S , en forma integral. En forma local es que el campo sea solenoidal; es decir: $\text{div} \mathbf{B} = 0$, en todos los puntos de D .

Demostremos ahora que si un campo $\mathbf{B}$ cumple la ecuación

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (4-22)$$

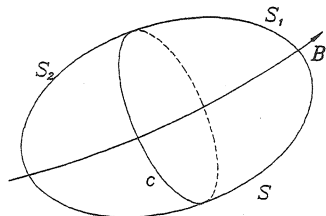
en todos los puntos de D , el campo $\mathbf{B}$ es solenoidal y, por tanto, de flujo conservativo. Entonces diremos que $\mathbf{A}$ es el *potencial vector* del campo $\mathbf{B}$. El teorema de Stokes para el campo $\mathbf{A}$, utilizando la (4-22), da:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-23)$$

expresión que es válida cualquiera que sea la superficie abierta S que se apoya en el contorno c . El flujo del campo $\mathbf{B}$ a través de S es igual a la circulación del campo $\mathbf{A}$ a lo largo de la curva c .

Consideremos ahora una superficie cerrada S que se apoya en un contorno cerrado c . Este contorno divide a S en dos superficies S_1, S_2 (fig 4.9). Los flujos de $\mathbf{B}$ a través de estas superficies, según (4-23), son iguales en valor absoluto, ya que se apoyan sobre el mismo contorno c : $|\phi_1| = |\phi_2|$. Por tanto, el flujo total a través de la superficie S es:

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 0$$



4.9.

así que el flujo es conservativo y el campo $\mathbf{B}$ es solenoidal. Por consiguiente, si un campo $\mathbf{B}$, definido en un dominio D , admite un potencial vector $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, el flujo es conservativo y el campo es solenoidal. Recíprocamente, si el flujo de un

campo $\mathbf{B}$ es conservativo el campo es solenoidal y admite un potencial vector. En otras palabras, si $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Desde luego este vector no es único, pues si $\mathbf{A}$ es un vector potencial del campo solenoidal $\mathbf{B}$ y $\phi(X, Y, Z)$ es una función escalar, el vector $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \nabla\phi$ también es un vector potencial, pues se cumple: $\text{rot } \mathbf{A}_1 = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \nabla\phi = \text{rot } \mathbf{A}$.

Recíprocamente, si $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, también es $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_1$ y $\text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1) = 0$ y el campo $\mathbf{A} - \mathbf{A}_1$ es irrotacional y, por tant, existe una función del campo ϕ tal que $\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 = -\nabla\phi$, de donde $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \nabla\phi$. Por consiguiente, hallado un vector potencial $\mathbf{A}$, la formula $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \nabla\phi$ nos dará la expresión general del vector potencial. La demostración se hace buscando una solución particular cualquiera de la ecuación en derivadas parciales: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con la condición, por ejemplo, $A_x = 0$.

Para demostrarlo, busquemos una solución particular cualquiera de la ecuación en derivadas parciales: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Esta ecuación es equivalente al sistema

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial Y} - \frac{\partial A_Y}{\partial Z} \quad B_Y = \frac{\partial A_x}{\partial Z} - \frac{\partial A_z}{\partial X} \quad B_z = \frac{\partial A_Y}{\partial X} - \frac{\partial A_x}{\partial Y}$$

y como este sistema tiene infinitas soluciones tratemos de resolverlo mediante un campo $\mathbf{A}$ que satisfaga la condición $A_x = 0$. Entonces, se tiene:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial Y} - \frac{\partial A_Y}{\partial Z} \quad B_Y = - \frac{\partial A_z}{\partial X} \quad B_z = \frac{\partial A_Y}{\partial X}$$

De las dos últimas ecuaciones se deducen las formulas:

$$A_Y = \int_{X_0}^X B_z dX + f(Y, Z) \quad A_z = - \int_{X_0}^X B_Y dX + g(Y, Z)$$

siendo f y g funciones arbitrarias y X_0 un valor elegido a capricho. La primera ecuación da:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial Y} - \frac{\partial A_Y}{\partial Z} = - \int_{X_0}^X \left[\frac{\partial B_Y}{\partial Y} + \frac{\partial B_z}{\partial Z} \right] dX + \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Z}$$

pero siendo $\text{div } \mathbf{B} = 0$, se tiene

$$B_x = \int_{X_0}^X \frac{\partial B_x}{\partial X} dX + \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Z} = B_x(X, Y, Z) - B_x(X_0, Y, Z) + \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Z}$$

es decir:

$$\frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Z} = B_x(X_0, Y, Z)$$

que también es una ecuación indeterminada. Una solución particular puede obtenerse haciendo $g = 0$. Entonces

$$f(Y, Z) = - \int_{Z_0}^Z B_x(X_0, Y, Z) dZ$$

siendo Z_0 un valor elegido a capricho. La solución

$$A_x = 0 \quad A_y = \int_{X_0}^x B_z dX - \int_{Z_0}^Z B_x(X_0, Y, Z) dZ \quad A_z = - \int_{X_0}^x B_y(X, Y, Z) dX$$

no es única, puesto que $A + \nabla\phi$, también es solución. La solución general es:

$$A_x = \frac{\partial\phi}{\partial X} \quad A_y = \int_{X_0}^x B_z dX - \int_{Z_0}^Z B_x(X_0, Y, Z) dZ + \frac{\partial\phi}{\partial Y} \quad A_z = - \int_{X_0}^x B_y dX + \frac{\partial\phi}{\partial Z}$$

En resumen, la condición necesaria y suficiente para que el campo B cumpla que $\text{div } B = 0$ es que $B = \text{rot } A$, y recíprocamente.

En particular, si el campo B es conservativo y, a la vez, es de flujo conservativo, se tiene: Por ser el campo conservativo:

$$B = -\nabla V \quad \nabla \times B = 0$$

y por ser de flujo conservativo:

$$B = \nabla \times A \quad \nabla \cdot B = 0$$

Sustituyendo B dado por la primera en la cuarta, resulta:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = 0 \quad \nabla^2 V = 0$$

así que la laplaciana del potencial es nula. Sustituyendo la tercera igualdad en la segunda, se obtiene:

$$\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = 0 \quad (4-24)$$

es decir: $\text{grad}(\text{div } A) - \nabla^2 A = 0$, ecuación que tiene gran interés en el estudio de la propagación de ondas.

4.6.- CAMPOS CON SIMETRÍA ESFÉRICA.

Se llama *centro activo* a toda partícula puntual capaz de interaccionar con otras de la misma naturaleza, situadas en las proximidades. Estos centros activos poseen una masa m y pueden tener o no carga eléctrica q . La cantidad escalar τ , característica de un centro activo es siempre positiva para la masa y puede ser positiva o negativa para la carga eléctrica.

Supongamos que todo centro activo produce una perturbación en el medio que le rodea; es decir, modifica de alguna manera el espacio que le rodea. Decimos entonces que el centro activo crea un campo en el espacio. Este campo es una descripción del estado del medio que rodea al centro activo, y viene a ser una medida de la perturbación producida por el centro activo; el campo producido es un atributo fundamental del espacio, cuando en él existen centros activos.

Consideremos campos con simetría esférica, que según (4-3), cumplen la condición: $b(R) = b(R)U_R$, siendo $R = RU_R$ el vector que une el centro activo con el punto del espacio origen de b . Las líneas de b son rectas que pasan por el centro activo. Si queremos incluir el escalar τ característico del centro activo en el campo, escribiremos:

$$B(R) = \tau b(R) = \tau b(R)U_R$$

Estos campos deben ser conservativos, ya que las superficies equipotenciales del campo escalar del que derivan serían esferas con centro en el centro activo. Es más, podemos demostrar que estos campos son conservativos puesto que $\text{rot } B(R) = 0$, y, por tanto, admite una función escalar. Multiplicando por dR , se tiene:

$$B(R) \cdot dR = \tau b(R)U_R \cdot dR = \tau b(R) \frac{R \cdot dR}{R} = \tau b(R) dR = -dV(R)$$

pues, es una función de R multiplicada por dR . La función V es función de τ y R y se denomina *función potencial*. Como, $dV = \nabla V \cdot dR$, resulta:

$$-\nabla V = B(R) = \tau b(R)U_R$$

que nos hace ver que, si τ es positivo, el ∇V tiene sentido contrario a U_R . Como el sentido de ∇V va de los potenciales bajos a los altos, U_R va de los potenciales altos a los bajos. Naturalmente,

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 B \cdot dR = - \tau \int_1^2 b(R) dR$$

Campos con simetría esférica que tienen especial interés son los campos newtonianos, en los que $b = C/R^2$, que están definidos en todos los puntos del espacio, salvo en el punto donde se encuentre el centro activo. El centro activo produce un campo vectorial de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{C\tau}{R^2} \mathbf{U}_R = C\tau \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (4-25)$$

donde C es una constante que depende del sistema de unidades utilizado y $\mathbf{U}_R$ el vector unitario de $\mathbf{R}$, que es el vector de posición del punto del espacio donde se quiere calcular el campo. Las líneas del campo newtoniano son rectas que pasan por el centro activo, que, muchas veces, supondremos está en el origen de coordenadas. Los campos newtonianos son, pues, campos inversos del cuadrado de la distancia (abreviadamente, campos inverso cuadráticos).

Cuando el centro activo es una masa m el campo se denomina *campo gravitatorio*, cuando el centro activo es una carga q el campo se llama *campo eléctrico*. Escribiremos:

$$\mathbf{g}_0 = -G \frac{m}{R^2} \mathbf{U}_R = -G \frac{m}{R^3} \mathbf{R} \quad \mathbf{E} = K \frac{q}{R^2} \mathbf{U}_R = K \frac{q}{R^3} \mathbf{R} \quad (4-26)$$

donde G y K son constantes (de gravitación y de Coulomb), que dependen del sistema de unidades utilizado. En el sistema internacional:

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2.$$

$$K = 8.98755 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2. \quad (\text{En el vacío})$$

Por tanto:

$$C\tau = \begin{cases} -Gm & \text{Campo gravitatorio} \\ Kq & \text{Campo electrostático} \end{cases} \quad (4-27)$$

Propiedades de los campos inverso del cuadrado de la distancia:

- 1) Un campo inverso del cuadrado de la distancia es conservativo:
- a) El campo es irrotacional; es decir: $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. En efecto:

$$\nabla \times \mathbf{B} = C\tau \nabla \times \left(\frac{1}{R^3} \mathbf{R} \right) = C\tau \left[\frac{1}{R^3} \nabla \times \mathbf{R} + \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) \times \mathbf{R} \right] = 0$$

pues $\nabla \times \mathbf{R} = 0$, y

$$\nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) = -\frac{3\nabla R}{R^4} = -\frac{3\mathbf{U}_R}{R^4} = -\frac{3\mathbf{R}}{R^5} \quad \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) \times \mathbf{R} = 0$$

b) El campo $\mathbf{B}$ admite una función potencial que cumple: $\mathbf{B} = -\nabla V$ y es de la forma $V = C\tau/R$, en todos los puntos, salvo en el punto (o puntos) donde se encuentre el centro activo ($R = 0$). Para verlo, calculemos la proyección del campo. Como $dV = -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}$:

$$V - V_0 = - \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = -C\tau \int_{R_0}^R \frac{R dR}{R^2} = \frac{C\tau}{R} \Big|_{R_0}^R = C\tau \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

de manera que

$$\mathbf{V} = \frac{C\tau}{R} \begin{cases} \mathbf{V} = -\frac{Gm}{R} & \text{Campo gravitatorio} \\ \mathbf{V} = \frac{Kq}{R} & \text{Campo electrostático} \end{cases} \quad (4-28)$$

2) En los puntos del espacio donde no hay centros activos el flujo de $\mathbf{B}$ es conservativo; o sea, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, salvo para $R = 0$. En efecto:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = C\tau \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^3} \mathbf{R} \right) = C\tau \left[\frac{1}{R^3} \nabla \cdot \mathbf{R} + \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) \cdot \mathbf{R} \right] = 0$$

pues $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$, como se vio en (4-11), y

$$\nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) \cdot \mathbf{R} = -\frac{3R^2 \nabla R}{R^6} \cdot \mathbf{R} = -\frac{3}{R^3}$$

3) Teorema de Gauss: *El flujo que atraviesa una superficie cerrada cualquiera que contiene un centro activo τ es $\phi = 4\pi C\tau$, siendo independiente de la forma y tamaño de la superficie.*

En efecto, sea S una superficie cerrada cualquiera, que contiene un centro activo τ , en el punto A (fig 4.10). Construyamos el cono elemental, con vértice en A que determina sobre la superficie un elemento de superficie dS . Si consideramos, además, la superficie esférica de radio unidad con centro en A , el cono determina sobre ella un elemento de superficie, que denotaremos por $d\omega$, denominado *ángulo sólido*. Como $dS_n = dS \cdot \cos \theta$ y $d\omega$ cumplen la relación:

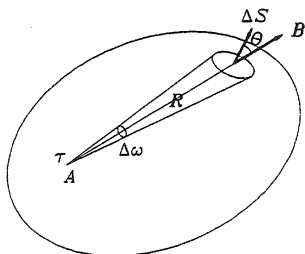
$$\frac{dS_n}{d\omega} = \frac{R^2}{1} \quad (4-29)$$

luego

$$dS_n = \cos \theta dS = R^2 d\omega$$

4.10.

y el flujo elemental del campo $\mathbf{B}$ que atraviesa la superficie



elemental dS es:

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{C\tau}{R^2} \cos\theta dS = C\tau d\omega$$

e integrando para toda la superficie ω (que es el área de la superficie esférica de radio unidad, que vale 4π), resulta:

$$\phi = 4\pi C\tau \begin{cases} \phi = -4\pi Gm & \text{Campo gravitatorio} \\ \phi = 4\pi Kq & \text{Campo electrostático} \end{cases} \quad (4-30)$$

De acuerdo con el teorema de Gauss, el flujo (o número de líneas del campo que atraviesan la superficie) es independiente de la forma y dimensiones de la superficie, solo depende del valor del centro activo situado en su interior.

4.7.- EL CAMPO EN UNA DISTRIBUCIÓN DE CENTROS ACTIVOS.

1) Distribución discontinua:

El campo $\mathbf{B}$ que varios centros activos puntiformes τ_i , de la misma naturaleza, situados en los puntos A_i , originan en un punto P cualquiera del dominio D donde el campo está definido, resulta de componer vectorialmente los campos $\mathbf{B}_i$, que cada centro activo produce por separado en dicho punto. Esta proposición, que se conoce como *principio de superposición del campo*, es evidente si se admite que $\mathbf{B}$ es una magnitud vectorial.

El campo en P , por consiguiente, es:

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i = C \sum_i \frac{\tau_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i \begin{cases} \mathbf{g}_0 = -G \sum_i \frac{m_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i & (\text{C. gravitatorio}) \\ \mathbf{E} = K \sum_i \frac{q_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i & (\text{C. electrostático}) \end{cases} \quad (4-31)$$

El potencial V del campo $\mathbf{B}$, en P , debido a los centros activos, es:

$$V = \sum_i V_i = C \sum_i \frac{\tau_i}{R_i} \quad (4-32)$$

La divergencia del campo es:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \sum_i \mathbf{B}_i = \sum_i \nabla \cdot \mathbf{B}_i$$

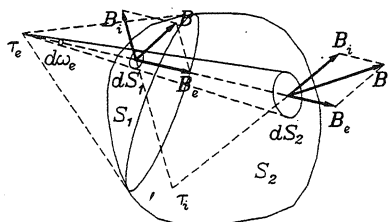
y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ en todos los puntos donde no existan centros activos, por lo que el flujo a través de una superficie cerrada que no contenga centros activos será nula.

Si una superficie cerrada contiene centros activos, aplicando la (4-30) al conjunto de centros activos, tendremos:

$$\phi = \sum_i \phi_i = 4\pi C \sum_i \tau_i \quad \left\{ \begin{array}{ll} \phi = -4\pi G \sum_i m_i & \text{(C. gravitatorio)} \\ \phi = 4\pi K \sum_i q_i & \text{(C. electrostático)} \end{array} \right. \quad (4-33)$$

que es el teorema de Gauss para una distribución discontinua de centros activos en el interior de la superficie gaussiana. Como se ve el flujo total que atraviesa la superficie cerrada se obtiene multiplicando por $4\pi C$ la suma algebraica de los centros activos.

Supongamos ahora que, además de los centros activos en el interior existen centros activos fuera de la superficie gaussiana S . Por sencillez consideremos un solo centro activo interior τ_i y otro exterior τ_e . El campo B en cada elemento de superficie dS , producido por los centros activos, es la suma vectorial de los campos B_i y B_e producidos por cada centro



4.11.

activo (fig 4.11): $B = B_i + B_e$, el flujo total es: $\phi = \phi_i + \phi_e$. El flujo debido al campo del centro activo interior es $\phi_i = 4\pi C \tau_i$. El flujo debido al campo del centro activo exterior es nulo. En efecto, el ángulo sólido $d\omega_e$ intercepta las superficies diferenciales dS_1 y dS_2 . Los flujos a través de estas superficies son iguales y contrarios, ya que el campo está dirigido hacia el interior en todos los puntos de la superficie S_1 y

hacia el exterior en la superficie S_2 . Por tanto $d\phi_e = C \tau_e (-d\omega_e + d\omega_e) = 0$, luego: $\phi_e = 0$. Como esto sucede para cada centro activo exterior, en el caso de ser varios los centros activos exteriores el flujo total a través de la superficie gaussiana es también nulo. Por consiguiente,

$$\phi = \phi_i = 4\pi C \tau_i$$

ningún centro activo situado en el exterior de la superficie gaussiana contribuye al flujo que la atraviesa.

2) Distribución continua:

En la práctica, es frecuente que los centros activos estén distribuidos de forma continua en un volumen V . La formula (4-31) tiene un sentido perfectamente claro cuando el centro activo esta concentrado en un punto o volumen muy pequeño con respecto a la distancia; pero no cuando los centros activos se distribuyen en un volumen grande, ya que entonces no sabemos desde que punto debemos medir la distancia. Resolvemos esta indeterminación dividiendo el volumen V en elementos de volumen infinitesimales dV , cada uno de los cuales contiene un elemento infinitesimal de centro activo $d\tau$. Definimos la densidad cúbica $\rho(A)$ de centros activos en cada punto A por la expresión:

$$d\tau = \rho(A)dV \quad (4-34)$$

siendo dV un volumen infinitesimal tomado alrededor de A . También se pueden definir las densidades superficial y lineal por

$$d\tau = \sigma(A)dS \quad d\tau = \lambda(A)ds \quad (4-35)$$

El campo $d\mathbf{B}$ que, en el punto P , produce cada $d\tau$, situado en A , es:

$$d\mathbf{B} = C \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\tau = C \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV \quad (4-36)$$

donde R es la distancia de A a P . El campo total en P es:

$$\mathbf{B} = C \int \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\tau = C \int \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV \quad (4-37)$$

extendiéndose la integral a todo el volumen V .

Para distribuciones continuas, la (4-32) queda modificada en la forma:

$$\mathbf{B} = C \int \frac{d\tau}{R} = C \int \frac{\rho}{R} dV \quad (4-38)$$

Cuando los centros activos están distribuidos en forma continua, con una densidad cúbica ρ , el teorema de Gauss (4-33) se convierte en

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi C \int_V \rho dV$$

donde V es el volumen limitado por la superficie S a través de la cual calculamos el flujo. El teorema de la divergencia nos permite escribir:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 4\pi C \int_V \rho dV \quad \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B} - 4\pi C \rho) dV = 0$$

cualquiera que sea el volumen V . Por tanto, el teorema de Gauss, en forma diferencial, es:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi C \rho \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{g}_0 = -4\pi G \rho & (\text{C. gravitatorio}) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi K \rho & (\text{C. electrostático}) \end{cases} \quad (4-39)$$

y expresa la relación local entre el campo y la densidad cúbica de centros activos. Esta ecuación nos hace ver que si hay centros activos el campo posee divergencia y, por tanto, es un campo no solenoidal. Precisamente, los centros activos son las fuentes o manantiales y sumideros del campo. En los puntos del campo donde $\rho = 0$ el campo es solenoidal. Por otro lado, puesto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V$, resulta:

$$\nabla^2 V = 4\pi C\rho \begin{cases} \nabla^2 V = 4\pi G\rho & (\text{C. gravitatorio}) \\ \nabla^2 V = -4\pi K\rho & (\text{C. electrostático}) \end{cases} \quad (4-40)$$

y se tiene la ecuación de Poisson, que relaciona el potencial con la densidad cúbica.

Si $\rho = 0$, es decir, en las regiones del espacio que no contengan centros activos, el potencial escalar cumple la ecuación de Laplace para el potencial:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4-41)$$

La ecuación de Poisson expresa la forma en que el potencial debe variar en las regiones del espacio en las que existe una distribución de centros activos, la ecuación de Laplace hace lo mismo en las regiones del espacio que no contienen centros activos.

Ejemplo 4.7.- Un centro activo está distribuido uniformemente en toda la longitud de un hilo infinitamente largo con una densidad lineal $\lambda = d\tau/ds$. Determinar el campo B a una distancia h del hilo.

Solución: Eligiendo el hilo como eje X (fig 4.12) del sistema de coordenadas, resulta $Y = h$ y podemos escribir, según la (4-37), con $d\tau = \lambda dX$ y $R = -XI + hJ$, en la forma:

$$B(R) = C\lambda \int \frac{R}{R^3} dX = C\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(hJ - XI)dX}{(X^2 + h^2)^{3/2}} = C\lambda hJ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX}{(X^2 + h^2)^{3/2}}$$

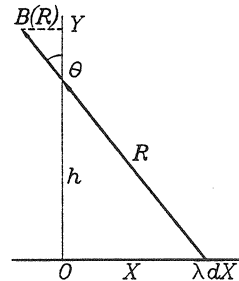
puesto que la contribución de las componentes X se compensan entre si. Resulta así que el campo tiene la dirección del eje Y . Para calcular esta integral podemos utilizar la sustitución

$X = Y \operatorname{tg} \theta$. Entonces resulta

$$dX = \frac{h d\theta}{\cos^2 \theta} \quad X^2 + h^2 = h^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = \frac{h^2}{\cos^2 \theta}$$

y, por consiguiente,

$$B(R) = \frac{C\lambda}{h} J \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2C\lambda}{h} J$$



4.12.

y el campo es inverso de la distancia.

APÉNDICE:

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE GAUSS: Del teorema de Gauss

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{B} dV$$

se deduce:

1) Pongamos, $\mathbf{B} = b\mathbf{C}$, donde b es un campo escalar y $\mathbf{C}$ un vector arbitrario constante. Puesto que $\nabla \cdot (b\mathbf{C}) = b\nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \nabla b = \mathbf{C} \cdot \nabla b$ resulta:

$$\mathbf{C} \cdot \int_S b d\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \int_V \nabla b dV$$

y puesto que $\mathbf{C}$ es arbitrario

$$\int_S b d\mathbf{S} = \int_V \nabla b dV \quad (1)$$

2) Poniendo $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ en lugar de $\mathbf{B}$, donde $\mathbf{C}$ es un vector arbitrario constante, como: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$, se tiene:

$$\mathbf{C} \cdot \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = \int_V \text{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot dV = \mathbf{C} \cdot \int_V \text{rot} \mathbf{A} dV$$

y por la arbitrariedad de $\mathbf{C}$:

$$\int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = \int_V \text{rot} \mathbf{A} dV \quad (2)$$

El teorema de Gauss y las ecuaciones (1) y (2), usando la notación simbólica de ∇ , dan:

$$\int_S d\mathbf{S} * \mathbf{A} = \int_V \nabla * \mathbf{A} dV \quad (3)$$

donde $\mathbf{A}$ es un campo escalar o vectorial y $*$ representa el producto ordinario, escalar o el producto vectorial, según el caso.

3) Teoremas de Green: Si hacemos: $\mathbf{B} = f\nabla g$, donde f y g son campos escalares, tenemos:

$$\int_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (f \nabla g) dV$$

y como: $\nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla \cdot \nabla g + \nabla f \cdot \nabla g = \nabla f \cdot \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$, resulta:

$$\int_S f \nabla g \cdot dS = \int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dV \quad (4)$$

que es el primer teorema de Green. Es evidente que, según este teorema:

$$\int_S g \nabla f \cdot dS = \int_V (\nabla f \cdot \nabla g + g \nabla^2 f) dV$$

y restando ambas ecuaciones resulta el segundo teorema de Green:

$$\int_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot dS = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV \quad (5)$$

Haciendo $f = 1/R$, como $\nabla(1/R) = -R/R^3$ y $\nabla^2(1/R) = \nabla \cdot \nabla(1/R) = 0$, tendremos:

$$\int_S \left(\frac{1}{R} \nabla g - g \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot dS = \int_V \left(\frac{1}{R} \nabla^2 g \right) dV \quad (6)$$

que puede aplicarse a cualquier superficie cerrada S , con tal de que el origen no esté en el recinto V limitado por ella, ya que de otra manera surgen valores infinitos de $1/R$ y, para evitarlos, hay que excluir del recinto V de integración una esfera tan pequeña como se quiera, centrada en O , de radio R_1 y superficie S_1 . Se puede escribir:

$$\int_{V-V_1} \frac{1}{R} \nabla^2 g dV = \int_S \left(\frac{1}{R} \nabla g - g \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot dS + \int_{S_1} \left(\frac{1}{R} \nabla g - g \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot dS_1$$

donde dS es la normal saliente con respecto al recinto $V-V_1$, y entrante con respecto a la esfera V_1 . Haciendo tender R_1 a cero, se tiene:

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \int_{S_1} \frac{1}{R} \nabla g \cdot dS_1 = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int_{S_1} \nabla g \cdot dS_1 = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \int_{V_1} \nabla^2 g dV_1 = 0$$

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \int_{S_1} g \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS_1 = - \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \int_{S_1} g U_R \cdot dS_1 = - \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \int_{V_1} g (-|dS_1|) = 4\pi g(O)$$

donde U_R es el vector unitario de R y $g(O)$ es el valor de g en un punto O cualquiera. Resulta así:

$$\int_V \frac{1}{R} \nabla^2 g dV = \int_S \left(\frac{1}{R} \nabla g - g \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot dS - 4\pi g(O) \quad (7)$$

Si $\nabla^2 g = 0$, esta ecuación se reduce a

$$g(O) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{R} \nabla g - g \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot dS \quad (8)$$

que nos da el valor de g en un punto cualquiera O , cuando en todos los puntos de una superficie S que encierra a O , se conocen g y ∇g .

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE STOKES:

Otros teoremas que se deducen del teorema de Stokes son:

1) Pongamos $B = bC$, donde C es un vector constante arbitrario, en

$$\oint B \cdot dR = \int_S \text{rot } B \cdot dS$$

Puesto que $\nabla \times B = \nabla \times bC = b \nabla \times C + \nabla b \times C = \nabla b \times C$, se tiene:

$$\oint b dR = - \int_S \nabla b \times dS \quad (9)$$

2) Poniendo $B \times C$ en lugar de B , siendo C un vector constante arbitrario:

$$\oint B \times C \cdot dR = \int_S \nabla \times (B \times C) \cdot dS$$

pero como

$$\nabla \times (B \times C) = \begin{vmatrix} B & C \\ \nabla \cdot B & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nabla B & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = C \cdot \nabla B - C \nabla \cdot B$$

pues $\nabla C = \nabla \cdot C = 0$. Por consiguiente:

$$\oint B \times C \cdot dR = \int_S C \cdot \nabla B \cdot dS - \int_S C \nabla \cdot B \cdot dS$$

o bien, puesto que: $B \times C \cdot dR = -C \times B \cdot dR = -C \cdot B \times dR$ y como $\nabla \cdot B$ es un escalar que se puede asociar a cualquiera de los vectores, resulta $C(\nabla \cdot B) \cdot dS = C \cdot (\nabla \cdot B) dS$, de manera que:

$$\oint B \times dR = \int_S \nabla \cdot B dS - \int_S \nabla B \cdot dS \quad (10)$$

4.- CUESTIONES Y EJERCICIOS.

- 1) ¿Qué es un campo vectorial?
- 2) ¿Qué son las líneas de un campo vectorial?
- 3) ¿Cuándo un campo vectorial tiene simetría esférica?
- 4) ¿Cuándo un campo tiene simetría cilíndrica?
- 5) ¿Qué es el flujo del campo y qué significado geométrico tiene?
- 6) ¿Qué es la divergencia de un vector?
- 7) Calcular la divergencia de $\mathbf{B} = 3X^2\mathbf{I} + XY^2\mathbf{J} + 2YZ^2\mathbf{K}$. R: $2(3XZ + XY + 2YZ)$.
- 8) ¿Qué es un campo solenoidal?
- 9) Dado el campo $\mathbf{B} = (X+2Y)\mathbf{I} + (2Y-Z)\mathbf{J} + (XY-aZ)\mathbf{K}$, determinar la constante a para que el campo sea solenoidal. R: $a = 3$.
- 10) Dado el campo vectorial $\mathbf{B} = 2X^3\mathbf{I} + 2Y^3\mathbf{J} - 4Z\mathbf{K}$ hallar el lugar geométrico de los puntos que presentan sumidero. R: Los puntos interiores al cilindro de eje Z y base la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{2/3}$.
- 11) ¿Qué expresa el teorema de la divergencia?
- 12) Calcular el flujo neto del campo vectorial: $\mathbf{B} = 2X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} - Z\mathbf{K}$, a través de un cubo de arista 2 m , uno de cuyos vértices está en el origen y tres aristas sobre los ejes. R: $16 [\mathbf{B}]\cdot\text{m}^2$.
- 13) Dado el campo $\mathbf{B} = 2X\mathbf{I} + 7Y\mathbf{J} + (4Z^2+1)\mathbf{K}$ hallar su flujo a través del cilindro de altura 3 cuya base es la circunferencia $X^2 + Y^2 = 9$. R: $\phi = 567\pi$.
- 14) Dado el campo vectorial $\mathbf{B} = 3X\mathbf{I} + 2Y\mathbf{J} + (5Z^3-3Z)\mathbf{K}$ hallar su flujo a través de un cilindro cerrado de ecuación $X^2 + Y^2 = 4$ y cuyas bases están en los planos $Z = 0$; $Z = 4$. R: $\phi = 1312\pi [\phi]$.
- 15) Dado el campo vectorial $\mathbf{B} = 3XY\mathbf{I} + 8Xe^2\mathbf{J} + (3Z+8)\mathbf{K}$ hallar su flujo a través del triángulo determinado por los ejes X e Y y la recta $X + Y = 2$; $Z = 0$. R: $\phi = 16$.
- 16) Demostrar que el flujo del campo $\mathbf{B} = (3X-2)\mathbf{I} + (4Y+2)\mathbf{J} + (5Z-3)\mathbf{K}$ a través de una esfera de centro en el origen de coordenadas y radio 2 es $402,1 [\phi]$.
- 17) Calcular el flujo neto del campo $\mathbf{B} = (3Z^2+7)\mathbf{K}$ a través del cubo de aristas 2 m coincidiendo con los ejes y vértice en el origen de coordenadas. R: $\phi = 48 [\mathbf{B}]\text{m}^2$.
- 18) ¿Qué es la circulación de un vector?
- 19) ¿Qué es el rotacional de un vector?
- 20) Calcular el rot $\mathbf{B}$, si $\mathbf{B} = (X+2Y)\mathbf{I} + (2Y-Z)\mathbf{J} + (XY-aZ)\mathbf{K}$. R: $(X+1)\mathbf{I} - Y\mathbf{J} - 2\mathbf{K}$.
- 21) Calcular el rot $\mathbf{B}$, si $\mathbf{B} = 3X^2Z\mathbf{I} + XY^2\mathbf{J} + 2XZ^2\mathbf{K}$ en el punto $(1,-1,1)$. R: $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{K}$.
- 22) Siendo $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$, donde $\boldsymbol{\Omega}$ es un vector constante, demostrar que $\text{rot } \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\Omega}$.
- 23) ¿Cuándo un campo vectorial es conservativo?
- 24) ¿Es conservativo el campo $\mathbf{B}$ del ejercicio 7)? R: $\text{rot } \mathbf{B} = 2Z^2\mathbf{I} + 3X^2\mathbf{J} + Y^2\mathbf{K} \neq 0$.
- 25) Dado el campo vectorial $\mathbf{B} = 3XY\mathbf{I} + (X^3+3)\mathbf{J}$, calcular su proyección desde el origen hasta el punto $P(2,1)$ siguiendo el eje X y una paralela al eje Y . R: $P = 11$.
- 26) Calcular la proyección del campo $\mathbf{B} = 3X^2Z\mathbf{I} + XY^2\mathbf{J} + 2YZ^2\mathbf{K}$, desde el punto $(0,0,0)$ al $(1,1,1)$, siguiendo la recta que los une. R: $P = 3/2$.
- 27) Calcular la proyección del campo $\mathbf{B} = (2Y+3)\mathbf{I} + XZ\mathbf{J} + (YZ-X)\mathbf{K}$, desde el punto $(0,0,0)$ al $(2,1,1)$, siguiendo la recta que los une. R: $P = 24$.
- 28) Demostrar que $\mathbf{B} = (2XY+Z^3)\mathbf{I} + X^2\mathbf{J} + 3XZ^2\mathbf{K}$ es un campo conservativo y calcular la proyección del campo desde el punto $P(0,0,1)$ al $Q(2,1,3)$. R: $P = 58$.

- 29) ¿Cuál es la función potencial V del campo del ejercicio anterior?. Comprobar que $V(Q)-V(P) = a$ la proyección entre Q y P . R: $V = -X^2Y-Z^3X + C$. $V(Q)-V(P) = -58$.
- 30) Demostrar que el campo $B = (3Y, 3X-2YZ, -Y^2)$ es conservativo y encontrar su función potencial V . R: $V = Y^2Z-3XY + C$.
- 31) Dado el campo $B = (3X^2+6Y)I - 14YZJ + 20XZ^2K$, hallar su proyección desde el punto $P(0,0,0)$ al $Q(1,1,1)$, siguiendo la recta que los une. R: $P = 13/3$.
- 32) Dado el campo vectorial $B = (XY-1)I + X^2J$ hallar la proyección a lo largo de la parábola $Y^2 = 3X$ desde $(0,0)$ hasta $(3,3)$. R: $P = 19,37$.
- 33) Dado el campo vectorial $B = 2XYI + XYJ$ hallar su proyección a lo largo del primer cuadrante de una circunferencia de centro el origen y radio 3, situada en el plano $Z = 0$. R: $P = -9$.
- 34) Obtener la función potencial V del campo $B = 2XYZ^2I + X^2Z^2J + 2X^2YZK$.
R: $V = -X^2YZ^2 + C$.
- 35) Obtener la función potencial V del campo $B = (3Y^2+4XZ)I + 6XYJ + 2X^2K$.
R: $V = -3XY^2 - 2X^2Z + C$.
- 36) Obtener la función potencial V del campo $B = -3XZ^2(2YZI + XZJ + 3XYK)$.
R: $V = 3X^2YZ^3 + C$.
- 37) Siendo $B = X^2YI - 2XZJ + 2YZK$, comprobar que $\text{rot}(\text{rot } B) = 2(X+1)J$.
- 38) Dado el vector $B = 2(XYI + XZJ + YZK)$, calcular la proyección de $\text{rot } B$ a lo largo de la curva $Z = 2X^2+1$, entre los puntos $P(0,1,1)$ y $Q(1,2,3)$. R: $P = 23/3$
- 39) Hallar la circulación del campo $B = (2X-Y+Z)I + (X+Y-Z^3)J + (3X-2Y+4Z)K$, a lo largo de la circunferencia de centro el origen y radio 3, contenida en el plano $Z = 0$, siguiendo el sentido positivo de giro. R: $C = 18\pi$.
- 40) ¿Cuando un campo vectorial tiene flujo conservativo?.
- 41) Dado el campo $B = (3X^2I + X^3ZJ + X^3YK)e^{2Y}$ calcular su función potencial escalar ϕ e indicar si es de flujo conservativo. R: $\phi = X^3e^{2Y} + C$; ϕ no conservativo.
- 42) ¿Qué condiciones debe cumplir un campo para que sea a la vez conservativo y tenga flujo conservativo?.
- 43) Suponiendo que $\phi = \phi(X,Y,Z)$ tiene derivadas segundas parciales continuas, demostrar que $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$.
- 44) Suponiendo que $B = B(X,Y,Z)$ tiene derivadas segundas parciales continuas, demostrar que $\text{div}(\text{rot } B) = 0$.
- 45) Demostrar que $V = 1/R$ es una función armónica.
- 46) Demostrar que si $\phi = \phi(X,Y,Z)$ es una solución de la ecuación de Laplace, el campo vectorial $\nabla\phi$ es conservativo y de flujo conservativo.
- 47) ¿Qué es un campo inverso cuadrático?.
- 48) ¿Como son las líneas del campo y las superficies equipotenciales de un campo inverso cuadrático?.
- 49) ¿Qué campos inverso cuadráticos conoce y que propiedades satisface?.
- 50) ¿Qué dice el teorema de Gauss para campos inverso cuadráticos?.
- 51) Se llama dipolo al sistema de cargas constituido por dos cargas puntuales iguales $-q$ y q , separadas por una distancia l , que se caracteriza por el vector I , cuyo sentido va desde la carga negativa a la positiva. Tomando como origen de coordenadas el punto medio del segmento determinado por las cargas y el eje X en la dirección y sentido de I , demostrar que el campo eléctrico en los puntos $P(X,0)$ y $P(0,Y)$ esta dado por $E = 2KqXIII/[X^2-(l^2/4)]^2$ y $E = -KqI/[Y^2+(l^2/4)]^{3/2}$, respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA:

INTRODUCCIÓN:

- 1) H. Poincare. *Últimos pensamientos*. Espasa Calpe. C. Austral. 1946.
- 2) P. W. Bridgman. *La naturaleza de la Teoría Física*. Ibero Americana. B. Aires. 1948.
- 3) H. Poincare. *El valor de la ciencia*. Espasa Calpe. C. Austral. 1946.
- 4) A. Einstein y L. Infeld. *La Física aventura del pensamiento*. Ed, Losada. B. Aires. 1961.
- 5) J. Jeans. *Nuevos fundamentos de la ciencia*. Espasa Calpe. Madrid, 1944. Cap. I y II.
- 6) H. Poincare. *Ciencia y método*. Espasa Calpe. C. Austral. 1946.
- 7) H. Poincare. *La ciencia y la hipótesis*. Espasa Calpe. C. Austral. 1963.
- 8) R. San Juan. *Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algébricos*. Rev. de la Acad. de Ciencias. Madrid, t. 39.
- 9) G. Holton y D. Roller. *Fundamentos de Física Moderna*. Ed. Reverté. Barcelona, 1963
- 10) J. Palacios. *Análisis dimensional*. Espasa Calpe, S. A. 1964.
- 11) E. Heimendahl. *Física y filosofía*. Ed. Guadarrama. Madrid, 1966. Cap. V.
- 12) G. Holten y S. G. Bruch. *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias Físicas*. Ed. Reverté. Barcelona. 1976.
- 13) A. Arenas Gomez. *Análisis dimensional*. Selecciones Científicas. Madrid, 1986.

VECTORES Y CAMPOS:

- 1) F. D. Murnaghan. *Introduction to applied mathematics*. Dover Publications, Inc. New York. 1948.
- 2) D. E. Rutherford. *Vector Methods*. Oliver & Boyd Ltd. Edinburgh, Or Intenciencia Publishers, Inc. New Yord. 1949.
- 2) G. E. Gay. *Vector and tensor analysis*. Dover Publications, Inc. New York. 1953.
- 3) F. D. Murnaghan. *Theoretical mechanics an introduction to mathematical physics*. Dover Publications, Inc. New York. 1957.
- 4) L. Brand. *Vector and tensor analysis*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1958.
- 5) R. Becker. *Teoría de la electricidad*. t.1. Artes Gráficas Grigelmo, S. A. Bilbao. 1959.
- 6) F. Morán. *Los tensores cartesianos rectangulares*. Madrid 1959. Cap. IV, VII, IX y X.
- 7) J. M. Iñiguez y R. Cid. *Mecánica teórica*. Ed. Dossat, S.A. Madrid, 1965. t.1. Cap. I a IV.
- 8) R. Cid y V. Camarena. *Curso de Mecánica*. Facultad de Ciencias . Universidad de Zaragoza. Cap. 1. Cursores y sistemas de cursores.
- 9) M. R. Spiegel. *Análisis vectorial*. McGraw-Hill. Serie Schaum. 1970.
- 10) S. Simons. *Análisis vectorial*. Ed. Alhambra. Madrid. 1973.

- 11) D. E. Bourne y P. C. Kendall. *Análisis vectorial y tensores cartesianos*. Ed. Limusa. Mexico 1976.
- 12) R. B. McQuistan. *Campos escalares y vectoriales*. Interpretación física. Ed. Limusa. Mexico. 1978.
- 13) Higdon-Stiles-Davis-Evces-Weese. *Ingeniería Mecánica*. Ed. Prentice/Hall Internacional, 1982. t. 1. cap 1 y 2.
- 14) M. Prieto Alberca. *Curso de mecánica racional*. t.1. Cap 1 y 3. Madrid, 1986.
- 15) J. L. Scala. *Análisis vectorial*. Ed. Reverté. Barcelona, 1990.
- 16) J. M. de Juana. *Física General 1*. Ed. Alhambra, S. A. Madrid. 1990. Cap 1 a 4.
- 17) H. F. Davis. y A. D. Sneider. *Análisis vectorial*. McGraw-Hill. 1991.

* * *