MONOGRAFIAS
DE LA
ACADEMIA
DE
CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

GRUPOS EN CATEGORIAS DE HOMOTOPIA

Departamento de Matemática Fundamental
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna. Tenerife (Spain)

F. J. Díaz
J. García-Calcines
S. Rodríguez-Machín

N.º 6

1995

Depósito legal: Z. 3.969 — 1995

Imrpime:
Coop. de Artes Gráficas
LIBRERIA GENERAL
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

Contenido

Introducción

Las categorías de cofibraciones definidas por H.J. Baues [2] en su libro *Algebraic Homotopy* es, actualmente, el marco algebraico ideal para el desarrollo de la homotopía, pues siendo sus axiomas menos restrictivos que los usados por D.G. Quillen [36] en sus categorías de modelo, abarcan la mayoría de las teorías de homotopía existentes y se obtienen los principales resultados comunes a todas ellas.

En homotopía, uno de los objetivos a conseguir es el cálculo de los denominados corchetes de homotopía de dos objetos, clases de homotopía de los morfismos entre dichos objetos, en función de éstos; lo que presenta, en algunos casos, bastantes dificultades pues ni siquiera se puede asegurar la existencia de dichos corchetes. En este sentido es necesario poseer un cierto tipo de morfismos distinguidos, denominados equivalencias débiles, que actuarán como isomorfismos en una categoría donde, mediante localización, se definirán dichos corchetes de homotopía. Lo anterior permite calcular los grupos de homotopía de un objeto referido a otro mediante suspensiones o, en el caso dual, lazos. Estos grupos son muy importantes en el desarrollo de cualquier teoría de homotopía, pues el cálculo efectivo de ellos suministra una información esencial a la hora de distinguir objetos desde el punto de vista algebraico, así como en la obtención de posibles clasificaciones.

Este trabajo consta de dos partes bien diferenciadas. En la primera parte se hace un desarrollo minucioso de cómo obtener los grupos de homotopía en una categoría de cofibraciones. La línea seguida es análoga a la que realiza H.J. Baues en [2] pero se estructura de forma diferente, dándole una continuidad más clarificadora del objetivo al que se pretende llegar. Las demostraciones se simplifican y surgen nuevos conceptos. Además se complementa el trabajo con referencias y desarrollos afines y necesarios para la descripción del método de obtención de los grupos de homotopía. Esta parte consta de tres capítulos. En el primero se dan las técnicas precisas para el desarrollo de la teoría que permitirá en el capítulo tercero la creación de los grupos ya nombrados. El capítulo se divide en tres párrafos. El primero presenta, como su nombre indica, los primeros conceptos y algunos resultados que los autores han descrito detalladamente en [6] y que por ello se dan aquí sin demostración, sólo haciendo referencia a datos que más tarde serán utilizados. En el siguiente párrafo se describen las técnicas a utilizar en posteriores desarrollos sobre categorías de cofibraciones. En el último, aparte de ver que la homotopía sobre objetos fibrantes y cofibrantes funciona realmente al estilo de J.H.C. Whitehead [42], pudiéndose obtener categorías homotópicas, se da una versión similar al Teorema de Dold en la homotopía ordinaria de los espacios topológicos, que será un arma esencial en la construcción de las categorías localizadas.

En el segundo capítulo se intenta conseguir una extensión en categoría de cofibraciones de las categorías homotópicas, pero sin hacerlo sobre la subcategoría de objetos fibrantes y cofibrantes sino sobre la categoría inicial de cofibraciones. Este capítulo también se divide en tres párrafos y, así, en el primero se introduce la noción general de localización de una categoría sobre una clase de morfismos, similarmente a como lo hacen P. Gabriel y M. Zisman en [15] se construye la categoría de fracciones y usando las categorías cocientes se ven algunas breves relaciones entre éstas. La utilidad de lo anterior es reflejada en el segundo párrafo con la construcción de la categoría localizada de una categoría de cofibraciones sobre sus equivalencias débiles. Aquí se prueba que la categoría localizada de objetos fibrantes y cofibrantes sobre sus equivalencias débiles, que coincide con la homotópica, es equivalente a las localizadas de objetos cofibrantes y de la inicial de cofibraciones sobre sus equivalencias débiles. Finalmente, en el tercer párrafo se aplica el proceso descrito anteriormente, a las categorías bajo un objeto, justificándose la definición dada en el primer capítulo, de homotopía relativa a una cofibración.

El tercer y último capítulo de esta primera parte, como ya se ha dicho, presenta los grupos de homotopía de una categoría de cofibraciones. Se divide en dos párrafos, donde el primero está dedicado a la creación de los grupoides de homotopía siguiendo técnicas similares a las usadas en homotopía ordinaria, esto es, definiendo conceptos análogos a caminos, composición e inversos de éstos y probando las propiedades homotópicas que originan dicha estructura. Se termina viendo resultados relacionados con morfismos, que servirán en el siguiente párrafo, después de introducir los grupos de homotopía, para ver su carácter funtorial y las principales propiedades homotópicas que poseen, entre las que cabe destacar, por su novedad, las referidas a objetos homotópicamente equivalentes y contráctiles.

La segunda parte de este trabajo consta de un solo capítulo dividido en dos párrafos. Es conocido que las categorías con un cilindro natural son también categorías de cofibraciones, [2], [6]. Pero sus grupos de homotopía no han sido calculados de una forma precisa, sino a través de la categoría de cofibraciones asociada. En el primer párrafo se construyen los grupos de homotopía de una categoría con cilindro natural, sin hacer uso, para ello, de su categoría de cofibraciones asociada, demostrando, posteriormente, que dichos grupos son isomorfos, resultado lógico y esperado, pues las homotopías relativas coincidían en ambas categorías, pero no evidente.

En el párrafo final se plantea la misma cuestión pero, esta vez, para una categoría aditiva con un cono natural. En este caso, también es conocido que, toda categoría de este tipo tiene asociada una categoría aditiva con cilindro natural y recíprocamente, donde las homotopías relativas a una cofibración son coincidentes en ambas. Pero, como sucedía en el caso anterior, no se ha descrito el isomorfismo que existe entre los respectivos grupos de homotopía, resultado que se obtiene aquí. Entonces, los grupos en el caso aditivo funtorial son todos equivalentes, independientemente de la estructura homotópica utilizada para su definición: cono-cilindro-cofibraciones o arcos-caminos-fibraciones. En construcciones adjuntas de homotopía (cono-arcos), (cilindro-caminos) y (cofibraciones--fibraciones) también sucede lo mismo. En este caso aditivo una construcción de homotopía adjunta sobre una categoría con límites y colímites finitos da origen a una categoría de modelo propia [6], [35] con grupos de homotopía respectivamente isomorfos. Se concluye el párrafo viendo que el grupo fundamental en la homotopía funtorial aditiva es abeliano.

Capítulo I

Homotopía en categorías de cofibraciones

Una categoría de cofibraciones es, actualmente, el marco más idóneo para el desarrollo de una homotopía. En este capítulo se dan los conceptos relativos a la obtención de la homotopía en estas categorías, se crean los fundamentos básicos para construir los grupos de homotopía y se presentan algunas propiedades interesantes entre las que cabe destacar una extensión del Teorema de Dold [9] a este tipo de categorías.

I.1 Primeros conceptos y resultados

Este es un párrafo preliminar donde se dan las definiciones precisas de los conceptos que se usarán a lo largo de este trabajo así como algunos primeros resultados. Se omitirá la mayoría de las demostraciones pues éstas son desarrolladas exhaustivamente por los autores en [6].

Primeramente se introduce el concepto de categoría de cofibraciones en el sentido de H.J. Baues [2].

Definición I.1.1 Una *categoría de cofibraciones* es una categoría $\mathbf{C}$, con dos familias distinguidas de morfismos, $cof.$ y $we.$, denominadas cofibraciones ("$\rightarrowtail$") y equivalencias débiles ("$\xrightarrow{\sim}$") respectivamente, verificando los axiomas CF1, CF2, CF3 y CF4.

Definición I.1.2 *Un morfismo que sea a la vez cofibración y equivalencia débil se llamará cofibración trivial, y se representará por "$\overset{\sim}{\rightarrowtail}$".*

Definición I.1.3 *Un objeto X en una categoría de cofibraciones se dirá que es fibrante si cada cofibración trivial $i : \mathrm{X} \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathrm{Y}$ admite una retracción $r : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$.*

CF1: Axioma de composición.

Los isomorfismos son cofibraciones triviales.

Para dos morfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Si dos cualesquiera de f, g y gf son equivalencias débiles, entonces lo es también el tercero. La composición de cofibraciones es cofibración.

CF2: Axioma de push-out.

Para una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $f : B \to X$, existe el push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es cofibración. Además, si f es una equivalencia débil, también lo es $\bar{f}$.

CF3: Axioma de factorización.

Todo morfismo $f : X \to Y$ admite una factorización (j, Z, q) con $f = qj$, $j : X \rightarrowtail Z$ cofibración y $q : Z \xrightarrow{\sim} Y$ equivalencia débil.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "j"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "\sim", "q"'] & \end{tikzcd}$$

CF4: Axioma de modelo fibrante.

Para todo objeto X existe una cofibración trivial $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$, donde RX es fibrante. Se llamará a $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ *modelo fibrante* de X.

Cuando existe objeto inicial los axiomas que definen *categoría de cofibraciones* pueden ser simplificados, para ello es necesario hacer uso del concepto de cilindro relativo a una cofibración, que se utiliza, además, para introducir también la noción de homotopía relativa.

Definición I.1.4 *Dada una categoría que posea dos familias de morfismos, cofibraciones y equivalencias débiles, se dirá que verifica la propiedad CF2' cuando para toda cofibración* $i : B \rightarrowtail A$*, y morfismo* $f : B \to X$*, existe el push-out*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es cofibración, y además si i es cofibración trivial, también lo es $\bar{i}$.

Proposición I.1.1 *Toda categoría de cofibraciones verifica el axioma CF2'.*

Corolario I.1.1 *Un retracto de un objeto fibrante es fibrante.*

Demostración:

Sea B retracto de un objeto fibrante A mediante $i : B \to A$, esto es, existe $r : A \to B$ tal que $ri = 1$.

Si $j : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} C$ es cofibración trivial se considera el push-out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, tail, "j"', "\sim"] & A \arrow[d, tail, "\bar{j}", "\sim"'] \\ C \arrow[r, "\bar{i}"'] & B\{i,j\} \end{tikzcd}$$

A es fibrante, luego existe $t : B\{i,j\} \xrightarrow{\sim} A$ retracción para $\bar{j}$. Tomando $r' = rt\bar{i}$ se tiene que $r'j = 1$.

□

Definición I.1.5 *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, un cilindro relativo a i es cualquier triple $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$ procedente de la factorización del morfismo $\{1,1\} : B\{i,i\} \to A$ por CF3.*

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[rr, "{\{1,1\}}"] \arrow[dr, tail, "{\{i_0,i_1\}}"'] & & A \\ & Z^i \arrow[ur, "p"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

Nótese que i_ε es cofibración trivial pues $pi_\varepsilon = 1$ e i_ε es composición de cofibraciones; $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Definición I.1.6 *Si $\mathbf{C}$ tiene objeto inicial ϕ se dice que un objeto X es ϕ-cofibrante, o simplemente, cofibrante, cuando $\phi_X : \phi \to X$ es una cofibración.*

Teorema I.1.1 *Si todos los objetos de una categoría de cofibraciones son cofibrantes, entonces el axioma CF2 puede ser reemplazado por el CF2' y en CF1 se puede sustituir: "Todo isomorfismo es cofibración trivial" por "$1 : \phi \to \phi$ es equivalencia débil".*

Definición I.1.7 *Sea $i : B \rightarrowtail A$ una cofibración y $u : B \to X$ un morfismo. Se define $Hom(A,X)^{u(i)} = \{f : A \to X \ / \ fi = u\}$.*

Cada elemento de $Hom(A,X)^{u(i)}$ se denominará extensión de u relativa a i.

Definición I.1.8 *Sean $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u(i)}$, X fibrante, se dirá que f_0 es homótopo a f_1 relativo a i ($f_0 \simeq f_1$ rel. i) si existe un cilindro relativo $(\{i_0,i_1\}, Z^i, p)$ y un morfismo $H : Z^i \to X$ tal que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[rr, "\{f_0,f_1\}"] \arrow[dr, tail, "\{i_0,i_1\}"'] & & X \\ & Z^i \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

H se dirá una homotopía entre f_0 y f_1 relativa a i y se notará $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i. Si A es cofibrante y la cofibración i es el morfismo inicial se notará $H : f_0 \simeq f_1$.

Obsérvese que, por definición de cilindro relativo a una cofibración, éste no tiene por qué ser único, por tanto, cabe preguntarse si dos morfismos son homótopos por un cilindro si también lo serán por otro. La respuesta es afirmativa, como se ve a continuación.

Lema I.1.1 *Dada una cofibración trivial, todo morfismo con el mismo dominio que ésta y codominio fibrante tiene una extensión relativa a dicha cofibración.*

Demostración:

Sea $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$ cofibración trivial y $f : B \to X$ con X fibrante. Considérese el push-out $B\{f,i\}$, como $\bar{i}$ es cofibración trivial y X fibrante, existe una retracción r con $r\bar{i} = 1$. $\tilde{f} = r\bar{f}$ es la extensión buscada.

□

Lema I.1.2 *Dado el cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe un objeto Z, y morfismos l, m y n que hacen totalmente conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, tail, "i"'] & & X \arrow[dl, tail, "l"'] \arrow[dd, "h"] \\
& Z \arrow[dr, "m", "\sim"'] & \\
A \arrow[ur, "n"] \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

donde l es cofibración y m equivalencia débil. Además, si f es cofibración también lo es n, y si h o g son equivalencias débiles también lo son l o n respectivamente.

Demostración:

Se considera el push-out $B\{f,i\}$; por CF3 el morfismo $\{h,g\} = mk$. Se define $l = k\bar{i}$ y $n = k\overline{f}$, CF1 y CF2 concluyen el resultado.

□

Proposición I.1.2 *Si $f_0 \simeq f_1$ rel. i mediante $(\{i_0,i_1\}, Z^i, p)$ entonces $f_0 \simeq f_1$ rel. i mediante $(\{j_0,j_1\}, K^i, q)$.*

Demostración:

Por el lema anterior existe el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[rr, tail, "\{i_0,i_1\}"] \arrow[dd, tail, "\{j_0,j_1\}"'] & & Z^i \arrow[dl, tail, "l", "\sim"'] \arrow[dd, "p", "\sim"'] \\
& Z \arrow[dr, "m", "\sim"'] & \\
K^i \arrow[ur, tail, "n"', "\sim"] \arrow[rr, "q"', "\sim"] & & A
\end{tikzcd}$$

Sea $H : Z^i \to X$ homotopía entre f_0 y f_1. Por ser l cofibración trivial y por el lema I.1.1, existe $\tilde{H} : Z \to X$ extensión de H relativa a l. $H' = \tilde{H}n$ es la homotopía buscada.

□

I.2 Propiedades básicas y consecuencias

Aquí se presentan las herramientas esenciales para el desarrollo de este trabajo. Primeramente se dará una propiedad interesante para decidir cuándo morfismos que salen de un push-out y llegan a otro son cofibraciones o equivalencias débiles.

Lema I.2.1 *Dados los cuadrados conmutativos*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "D_1"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, phantom, "D_2"] & Z \arrow[d, "k"] \\
K \arrow[r, "f'"'] & L \arrow[r, "g'"'] & M
\end{tikzcd}$$

si se llama D_3 al cuadrado composición de D_1 con D_2 y si D_1 es push-out, entonces D_2 es push-out si y sólo si D_3 lo es.

Teorema I.2.1 *Sea el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "\gamma"] & & X_0 \arrow[dl, "\overline{g}"'] \arrow[dd, "\alpha"] \\
X_1 \arrow[rr, "\overline{f}"', crossing over] \arrow[dd, "\beta"'] & & X\{f,g\} & \\
 & Y \arrow[rr, "f'"] \arrow[dl, "g'"] & & Y_0 \arrow[dl, "\overline{g'}"] \\
Y_1 \arrow[rr, "\overline{f'}"'] & & Y\{f',g'\} \arrow[from=uu, "\delta", crossing over] &
\end{tikzcd}$$

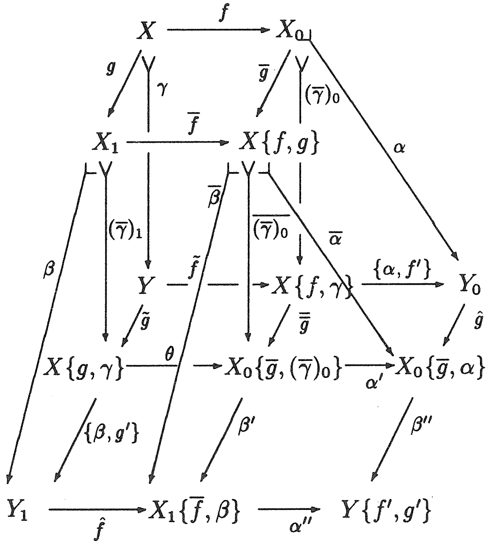
donde las bases superior e inferior son push-outs.

(a) Si α, β, γ son cofibraciones y $\{\alpha, f'\} : X\{f,\gamma\} \to Y_0$ ó $\{\beta, g'\} : X\{g,\gamma\} \to Y_1$ es cofibración entonces $\delta = \{\overline{g'}\alpha, \overline{f'}\beta\} = \alpha \cup \beta$ es también cofibración.

(b) Si α, β, γ son equivalencias débiles entonces $\delta = \alpha \cup \beta$ es equivalencia débil.

Demostración:

(a) El siguiente diagrama es totalmente conmutativo con todas sus caras push-outs:



Obsérvese que $\theta = \{\overline{(\overline{\gamma})_0 f}, \overline{\overline{g}}\tilde{f}\}$ y por el lema I.2.1 $\overline{(\overline{\gamma})_0} = \overline{(\overline{\gamma})_1}$, $\overline{\overline{g}} = \overline{\tilde{g}}$, $\theta = \overline{\tilde{f}}$ y $X_0\{\overline{g}, (\overline{\gamma})_0\} = X_1\{\overline{f}, (\overline{\gamma})_1\}$. Por otro lado $\alpha' = \{\overline{\alpha}, \hat{g}\{\alpha, f'\}\}$, $\beta' = \{\overline{\beta}, \hat{f}\{\beta, g'\}\}$, $\alpha'' = \{\alpha \cup \beta, \overline{f'}\}$ y $\beta'' = \{\alpha \cup \beta, \overline{g'}\}$ donde también $\alpha' = \overline{\{\alpha, f'\}}$, $\alpha'' = \overline{\alpha'}$, $\beta' = \overline{\{\beta, g'\}}$, $\beta'' = \overline{\beta'}$ por el lema I.2.1 anterior.

Si $\{\alpha, f'\}$ ($\{\beta, g'\}$) es cofibración entonces α' (β') es cofibración, y por lo tanto α'' (β'') también, luego $\delta = \alpha''\overline{\beta}$ ($= \beta''\overline{\alpha}$) es cofibración.

(b) Si α, β, γ son equivalencias débiles es fácil comprobar que en el caso que f y g fueran cofibraciones se tendría un diagrama totalmente conmutativo similar al anterior, y donde todos los cuadrados son push-outs, y por CF1 y CF2 se llegaría a que δ es equivalencia débil.

En el caso general, cuando f, g no sean cofibraciones es suficiente tener en cuenta sus factorizaciones:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i"'] & & X_0 \\ & Z_0 \arrow[ur, "\sim", "p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, tail, "j"'] & & X_1 \\ & Z_1 \arrow[ur, "\sim", "q"'] & \end{tikzcd}.$$

para obtener los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, "1", "\sim"'] & & Z_0 \arrow[dl, "\bar{j}"'] \arrow[dd, "p", "\sim"'] \\
Z_1 \arrow[rr, tail, "\bar{i}"' near start] \arrow[dd, "q"', "\sim"] & & X\{i,j\} \arrow[dd, "\delta'" near start] & \\
 & X \arrow[rr, "f" near start] \arrow[dl, "g"] & & X_0 \arrow[dl, "\bar{g}"] \\
X_1 \arrow[rr, "\bar{f}"'] & & X\{f,g\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, "\gamma", "\sim"'] & & Z_0 \arrow[dl, "\bar{j}"'] \arrow[dd, "\alpha p", "\sim"'] \\
Z_1 \arrow[rr, tail, "\bar{i}"' near start] \arrow[dd, "\beta q"', "\sim"] & & X\{i,j\} \arrow[dd, "\delta''" near start] & \\
 & Y \arrow[rr, "f'" near start] \arrow[dl, "g'"] & & Y_0 \arrow[dl, "\bar{g'}"] \\
Y_1 \arrow[rr, "\bar{f'}"'] & & Y\{f',g'\} &
\end{tikzcd}
$$

Por lo anterior δ' y δ'' son equivalencias débiles y como $\delta\delta' = \delta''$ se tiene que δ es equivalencia débil.

□

Corolario I.2.1 *Dadas $i : B \to A$, $i' : B' \to A'$ cofibraciones (equivalencias débiles) entre objetos cofibrantes entonces $i \cup i' : B \cup B' \to A \cup A'$ es cofibración (equivalencia débil).*

Las equivalencias débiles permiten relacionar las homotopías relativas a distintas cofibraciones. A continuación se verán algunas de estas actuaciones.

Teorema I.2.2 *Sea $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$ cofibración trivial, $f_0, f_1 : B \to X$, X fibrante y $j : C \rightarrowtail B$ cofibración. Entonces $f_0 \simeq f_1$ rel. j si y sólo si $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$ rel. ij; donde $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ son extensiones respectivas de f_0 y f_1 relativas a i.*

Demostración:

El siguiente push-out da un cilindro relativo a ij :

$$
\begin{tikzcd}
C\{j,j\} \arrow[r, tail, "i \cup i", "\sim"'] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & C\{ij, ij\} \arrow[d, tail, "\{i'_0, i'_1\}"] \\
Z^j \arrow[r, tail, "\sim", "\overline{i \cup i}"'] & Z^{ij}
\end{tikzcd}
$$

Obsérvese que, por la proposición I.2.1 $i \cup i$ es cofibración trivial, por lo tanto $\overline{i \cup i}$ también lo es. Sea $p' = \{1, 1, ip\}$, como $p'(\overline{i \cup i}) = ip$ se concluye que p' es equivalencia débil. Por otro lado $\{i_0', i_1'\}$ es cofibración por ser la inducida en un push-out de la cofibración $\{i_0, i_1\}$.

Si $f_0 \simeq f_1$ rel. j, entonces existe $H : Z^j \to X$ tal que $H\{i_0, i_1\} = \{f_0, f_1\}$. La homotopía buscada entre $\tilde{f}_0$ y $\tilde{f}_1$ es $\tilde{H} = \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, H\}$.

Recíprocamente si $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$ rel. ij, existe $\tilde{H} : Z^{ij} \to X$ tal que $\tilde{H}\{i_0', i_1'\} = \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$. $H = \tilde{H}(\overline{i \cup i})$ es la homotopía buscada.

□

Corolario I.2.2 *Dos extensiones de un mismo morfismo relativas a una cofibración trivial son homótopas relativas a ella.*

Demostración:

Usar la cofibración $j = 1$ en el teorema I.2.2 anterior.

□

Corolario I.2.3 *$f : X \to Y$ con Y fibrante verifica CF3 factorizándose a través de un objeto fibrante.*

Demostración:

Usando CF3, CF4 y el lema I.1.1 el siguiente diagrama es totalmente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "j"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "q"', "\sim"] \arrow[d, tail, "r_Z"', "\sim"] & \\ & RZ \arrow[uur, bend right, "\tilde{q}"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

□

Este corolario permite, cuando una cofibración tenga codominio fibrante, conseguir un cilindro con objeto fibrante.

Corolario I.2.4 *Sea el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "j"'] & A \arrow[d, "f", "\sim"'] \\ C \arrow[r, "\sim", "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Sean $h_0, h_1 : A \to Y$, con Y fibrante. Entonces $h_0 \simeq h_1$ rel. i si y sólo si $\tilde{h}_0 n \simeq \tilde{h}_1 n$ rel. j; donde $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1$ son extensiones respectivas de h_0, h_1 relativas a l; con l y n como en el lema I.1.2.

Demostración:

Obsérvese que, en este caso, l y n son cofibraciones triviales.

□

También los push-outs sirven para relacionar homotopías relativas a distintas cofibraciones.

Teorema I.2.3 *Sea $i : B \rightarrowtail A$ cofibración, $uf : B \to X \to Z$ composición de morfismos con Z fibrante, $g_0, g_1 : A \to Z$ extensiones de uf relativas a i; entonces $g_0 \simeq g_1$ rel. i si y sólo si $\{u, g_0\} \simeq \{u, g_1\}$ rel. $\bar{i}$; donde $\bar{i}$ es la inducida de i por f al hacer push-out:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

Demostración:

El siguiente push-out da un cilindro relativo a $\bar{i}$:

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[r, "\bar{f} \cup \bar{f}"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & X\{\bar{i},\bar{i}\} \arrow[d, tail, "\{i'_0, i'_1\}"] \\ Z^i \arrow[r, "g"'] & Z^{\bar{i}} \end{tikzcd}$$

donde $g = \overline{\bar{f} \cup \bar{f}}$. Obsérvese que $\{i'_0, i'_1\}$ es cofibración por ser la inducida de $\{i_0, i_1\}$. Sea $p' = \{1, 1, \bar{f}p\}$. Es sencillo verificar que el siguiente cuadrado es push-out:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, tail, "i_0"', "\sim"] & B\{f,i\} \arrow[d, tail, "i'_0"] \\ Z^i \arrow[r, "g"'] & Z^{\bar{i}} \end{tikzcd}$$

y, por tanto, i'_0 es cofibración trivial y como $p' i'_0 = 1$ entonces p' es equivalencia débil.

Si $g_0 \simeq g_1$ rel. i mediante una homotopía $H : Z^i \to Z$ entonces la homotopía buscada es $\{u, g_0, u, g_1, H\} : Z^{\bar{i}} \to Z$.

Recíprocamente si $\{u, g_0\} \simeq \{u, g_1\}$ rel. $\bar{i}$ mediante $F : Z^{\bar{i}} \to Z$ entonces la homotopía buscada es $Fg : Z^i \to Z$.

□

Corolario I.2.5 *Dado el cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "j"] \\ A \arrow[r, "\sim", "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(a) Si $h : A \to Z$ es una extensión de $uf : B \to X \to Z$ relativo a i, Z fibrante, existe $\tilde{h} : Y \to Z$ extensión de u relativa a j tal que $\tilde{h}g \simeq h$ rel. i.

(b) $h_0 \simeq h_1$ rel. i si y sólo si $\tilde{h}_0 \simeq \tilde{h}_1$ rel. j.

Demostración:

El cuadrado dado en la hipótesis puede expresarse,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, tail, "\bar{i}"] & Y \arrow[d, "1", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "\sim", "\bar{f}"'] & B\{f,i\} \arrow[r, "\sim", "\{j,g\}"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\{j, g\}$ es equivalencia débil pues $\{j, g\}\bar{f} = g$. Aplicando el teorema I.2.3 anterior y el corolario I.2.4 se obtiene $\tilde{h} = \widetilde{\{u, h\}}l$, donde $\widetilde{\{u, h\}}$ es una extensión de $\{u, h\}$ relativa a la cofibración trivial n; entonces $\tilde{h}g = \widetilde{\{u, h\}}l\{j, g\}\bar{f} = \widetilde{\{u, h\}}lmn\bar{f} \simeq \widetilde{\{u, h\}}n\bar{f} = \{u, h\}\bar{f} = h$ rel. i, pues $\widetilde{\{u, h\}}l = \widetilde{\{u, h\}}lml$ y por el teorema I.2.2 $\widetilde{\{u, h\}} \simeq \widetilde{\{u, h\}}lm$ rel. $lj = n\bar{i}$.

El apartado (b) es consecuencia inmediata.

□

I.3 Homotopía y Teorema de Dold

A continuación se verán algunas propiedades básicas de la homotopía relativa, así como una versión del conocido Teorema de Dold, en categorías de cofibraciones.

Proposición I.3.1 *"Ser homótopo relativo a i" es una relación de equivalencia en $Hom(A,X)^{u(i)}$.*

Demostración:

Reflexiva:

Basta considerar fp para cualquier morfismo $f \in Hom(A,X)^{u(i)}$ y cilindro relativo $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$.

Simétrica:

Sea $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i a través del cilindro $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$, entonces $H : f_1 \simeq f_0$ rel. i mediante el cilindro $(\{i_0, i_1\}\{(\bar{i})_1, (\bar{i})_0\}, Z^i, p)$. Obsérvese que $\{(\bar{i})_1, (\bar{i})_0\}$ es cofibración (trivial) al ser isomorfismo.

Transitiva:

Sea $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i a través de $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$ y $G : f_1 \simeq f_2$ rel. i a través de $(\{j_0, j_1\}, K^i, q)$, entonces $\{F, G\} : f_0 \simeq f_2$ rel. i a través de $(i_0 \cup j_1, A\{i_1, j_0\}, \{p, q\})$.

Obsérvese que $i_0 \cup j_1$ es cofibración por el teorema I.2.1, $\{p, q\}$ equivalencia débil pues su dominio es un push-out con equivalencia débil y, evidentemente, $\{p, q\}(i_0 \cup j_1) = \{1, 1\}$.

□

Definición I.3.1 *Se define el conjunto de clases de homotopía de las extensiones de u relativas a i como el conjunto cociente*

$$[A, X]^{u(i)} = Hom(A, X)^{u(i)} / \simeq (rel.\, i).$$

Si A es cofibrante, $Hom(A,X)^{\phi_X(\phi_A)} = Hom(A,X)$ y, en este caso, $[A,X]^{\phi_X(\phi_A)}$ se notará simplemente por $[A, X]$.

Proposición I.3.2 *Si $f_0 \simeq f_1$ rel. i, f_0 es equivalencia débil si y sólo si f_1 lo es.*

Demostración:

En este caso se tiene que cualquier homotopía H es equivalencia débil.

□

Proposición I.3.3 *Dados $[f_0], [f_1] \in [A, X]^{u(i)}$ y $h : X \to Y$, si $[f_0] = [f_1]$ entonces $[hf_0] = [hf_1]$.*

Demostración:

Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i entonces $hH : hf_0 \simeq hf_1$ rel. i.

□

Otra forma de expresar esta proposición es: $h_* : [A,X]^{u(i)} \to [A,Y]^{hu(i)}$ es aplicación.

Proposición I.3.4 *Dados* $[f_0],[f_1] \in [A,X]^{u(i)}$ *y* $h : Y \to A$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & A \end{tikzcd}$$

si $[f_0] = [f_1]$ *entonces* $[f_0h] = [f_1h]$.

Demostración:

Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i a través de $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$, entonces $\tilde{H}n : f_0h \simeq f_1h$ rel. j, donde $\tilde{H}$ es la extensión de H relativa a la cofibración trivial l, con l y n los del lema I.1.2 aplicado al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} Z\{j,j\} \arrow[r, "\{i_0h,\, i_1h\}"] \arrow[d, tail, "\{i'_0,\, i'_1\}"'] & Z^i \arrow[d, "\sim"', "p"] \\ Z^j \arrow[r, "hp'"'] & A \end{tikzcd}$$

□

Esta proposición expresa que $h^* : [A,X]^{u(i)} \to [Y,X]^{uk(j)}$ es aplicación.

Corolario I.3.1 *Sean* $[f_0],[f_1] \in [A,X]^{u(i)}$, $[g_0],[g_1] \in [Y,A]^{ik(j)}$. *Si* $[f_0] = [f_1]$ *y* $[g_0] = = [g_1]$ *entonces* $[f_0g_0] = [f_1g_1]$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones I.3.3, I.3.4 y de la propiedad transitiva.

□

Haciendo uso de esta notación, se tiene que en el teorema I.2.2

$$i^* : [A,X]^{u(ij)} \to [B,X]^{u(j)}$$

es biyección, el teorema I.2.3 dice que

$$(\bar{f})^* : [B\{f,i\}, Z]^{u(\bar{i})} \longrightarrow [A, Z]^{uf(i)}$$

es una biyección, y el corolario I.2.5 dice que

$$g^* : [Y, Z]^{u(j)} \longrightarrow [A, Z]^{uf(i)}$$

es una biyección.

En la mayoría de las teorías de homotopía las cofibraciones verifican lo que se conoce como propiedad de extensión de homotopía, una categoría de cofibraciones posee una versión de dicha propiedad que tiene como una consecuencia inmediata e importante un resultado paralelo al que consigue A. Dold [9] para la homotopía ordinaria de los espacios topológicos.

Teorema I.3.1 *Dado el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "q", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(a) Si X es fibrante existe $\tilde{f}$ extensión de f relativa a i.

(b) Si además, Y es fibrante, entonces $q\tilde{f} \simeq g$ rel. i. En este caso $\tilde{f}$ es única salvo homotopía relativa a i y se dirá que $\tilde{f}$ es la extensión de f relativa a i del cuadrado o, simplemente, extensión del cuadrado.

Demostración:

(a) Por el lema I.1.2 existe el siguiente diagrama totalmente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, tail, "i"'] & & X \arrow[dl, tail, "l", "\sim"'] \arrow[dd, "q", "\sim"'] \\ & Z \arrow[dr, "m", "\sim"'] & \\ A \arrow[ur, "n"] \arrow[rr, "g"'] & & Y \end{tikzcd}$$

$l : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z$ es cofibración trivial, X es fibrante, luego existe una retracción r tal que $rl = 1$. $\tilde{f} = rn$ es la extensión buscada.

(b) $\tilde{m}n' : q\tilde{f} \simeq g$ rel. i, con $\tilde{m}$ una extensión de m relativa a la cofibración trivial l' y l' y n' son las respectivas l y n del lema I.1.2 aplicado al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[r, "\{lrn,n\}"] \arrow[d, tail, "\{i_0,i_1\}"'] & Z \arrow[d, "r", "\sim"'] \\ Z^i \arrow[r, "rnp"'] & X \end{tikzcd}$$

Supóngase ahora dos extensiones $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1$ de f relativas a i tal que $q\tilde{f}_0 \simeq g$ rel. i, $q\tilde{f}_1 \simeq g$ rel. i. Sean $H_0 : q\tilde{f}_0 \simeq g$ rel. i, $H_1 : q\tilde{f}_1 \simeq g$ rel. i y sean $(\{i_0, i_1\}, Z_0^i, p)$ y $(\{i'_0, i'_1\}, Z_1^i, p')$ los respectivos cilindros de definición.

Considérese el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[r, "\{\tilde{f}_0,\tilde{f}_1\}"] \arrow[d, tail, "i_0 \cup i'_0"'] & X \arrow[d, "q", "\sim"'] \\ A\{i_1,i'_1\} \arrow[r, "\{H_0,H_1\}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Nótese que $(i_0 \cup i'_0, A\{i_1, i'_1\}, \{p, p'\})$ es un cilindro relativo a i pues $i_0 \cup i'_0$ es cofibración por el teorema I.2.1, $\{p, p'\}$ equivalencia débil y, evidentemente, $\{p, p'\}(i_0 \cup i'_0) = \{1, 1\}$.

La homotopía buscada es la extensión de $\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$ relativa a $i_0 \cup i'_0$ que existe por el apartado (a) anterior.

□

Corolario I.3.2 *Si $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$ es cofibración trivial entre objetos fibrantes entonces B es un retracto por deformación fuerte de A.*

Demostración:

Por el teorema I.3.1 anterior aplicado al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "1"] \arrow[d, tail, "i"', "\sim"] & B \arrow[d, tail, "i", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "1"'] & A \end{tikzcd}$$

se tiene $r : A \to B$ tal que $ri = 1$, $ir \simeq 1$ rel. i.

□

Teorema I.3.2 (Teorema de Dold)

Dado el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, tail, "i"'] \arrow[dr, tail, "j"] & \\ X \arrow[rr, "\sim", "h"'] & & Y \end{tikzcd}$$

con X, Y fibrantes. Entonces h es equivalencia de homotopía relativa a i.

Demostración:

Sea $g : Y \to X$ la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "j"'] & X \arrow[d, "\sim"', "h"] \\ Y \arrow[r, "1"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces $hg \simeq 1$ rel. j. Observando que gh y 1 son extensiones del cuadrado

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "\sim"', "h"] \\ X \arrow[r, "\sim", "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

se concluye el resultado.

□

Obsérvese que, por la proposición I.3.2, g es también equivalencia débil.

Proposición I.3.5 *Sea $f : A \to X$ morfismo, X fibrante, y sea (i, Z, p) una factorización de f con Z fibrante. Entonces para cualquier otra factorización (j, K, q) existe una equivalencia débil $h : K \xrightarrow{\sim} Z$ tal que $hj = i$ y $ph \simeq q$ rel. j.*

Demostración:

$h : K \to Z$ es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "j"'] & Z \arrow[d, "p", "\sim"'] \\ K \arrow[r, "\sim", "q"'] & X \end{tikzcd}$$

□

Proposición I.3.6 *Si $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ es equivalencia débil entre objetos fibrantes entonces $h_* : [A, X]^{u(i)} \rightarrow [A, Y]^{hu(i)}$ es una biyección.*

Demostración:

Por la proposición I.3.3 faltaría ver que h_* es sobre e inyectiva.

Sobre:

Dada $[f] \in [A, Y]^{hu(i)}$, aplicando el teorema I.3.1, la clase de la extensión del siguiente cuadrado es la antiimagen buscada.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "u"] \arrow[d, tail, "i"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "h", "\sim"'] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd} .$$

Inyectiva:

Si $[hf] = [hg]$ entonces, por la unicidad en el teorema I.3.1 aplicado al siguiente diagrama se obtiene el resultado sin más que observar que f y g son extensiones de dicho diagrama.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "h", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "hf"'] & Y \end{tikzcd}$$

□

Capítulo II

Categorías de homotopía

Los corchetes de homotopía han sido definidos en el capítulo anterior para dominios cofibrantes y codominios fibrantes. El objetivo de este capítulo es definirlo para cualquier tipo de dominio y codominio. Para ello será necesario analizar primeramente el concepto de localización de categorías, que, posteriormente, partiendo de una categoría homotópica en el sentido de J.H.C. Whitehead [42], se utilizará en la definición de los corchetes. Por último, se aplicará este desarrollo al caso particular de las categorías bajo un objeto, concluyendo con la justificación de la definición de homotopía relativa dada en el capítulo anterior.

II.1 Localización

En este párrafo se dan unas nociones sobre teoría de categorías que serán utilizadas a lo largo de este capítulo, en este sentido se introducen los conceptos de localización y de categoría de fracciones semejante a como lo hacen P. Gabriel y M. Zisman en [15], y se ve que las categorías cocientes en el sentido de S. Mac Lane [34] son las localizadas sobre las equivalencias de la relación.

Definición II.1.1 *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *y una clase* $\mathbf{S}$ *de morfismos de* $\mathbf{C}$*, se dirá que una categoría* $\mathbf{L}$ *es la categoría localizada de* $\mathbf{C}$ *sobre* $\mathbf{S}$ *cuando existe un funtor* $P : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ *verificando lo siguiente:*

(a) $P(s)$ *es isomorfismo, para todo* $s \in \mathbf{S}$.

(b) Si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ *es un funtor que verifica (a) existe un único funtor* $\tilde{F} : \mathbf{L} \to \mathbf{B}$ *tal que* $\tilde{F}P = F$.

Definición II.1.2 *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *y una clase* $\mathbf{S}$ *de morfismos de* $\mathbf{C}$*, se define la categoría de fracciones de* $\mathbf{C}$ *sobre* $\mathbf{S}$ *como la categoría* $\mathbf{F}$ *que tiene por objetos los* *mismos de* $\mathbf{C}$ *y como morfismos básicos de dicha categoría, salvo posterior relación en la composición, los pares de la forma* $(f, 1_{codom f})$ *y* $(1_{codom\ s}, s)$ *donde* f *es un morfismo en* $\mathbf{C}$ *y* s *un morfismo en* $\mathbf{S}$*. Además* $dom(f,1) = dom f$, $codom(f,1) = codom f$, $dom(1,s) = codom\ s$ *y* $codom(1,s) = dom\ s$*. La composición se expresa como sucesiones finitas de morfismos básicos componibles y sometidos a las siguientes relaciones:*

(i) $(f,1)(f',1) \sim (ff',1)$.

(ii) $(1,1)(1,s) \sim (1,s)$; $(1,s)(1,1) \sim (1,s)$.

(iii) $(1,s)(s,1) \sim (1,1)$; $(s,1)(1,s) \sim (1,1)$.

Teorema II.1.1 *La categoría de fracciones de* $\mathbf{C}$ *sobre* $\mathbf{S}$ *es una categoría localizada de* $\mathbf{C}$ *sobre* $\mathbf{S}$.

Demostración:

$P : \mathbf{C} \to \mathbf{F}$ viene dado por:

- $P(A) = A$, para todo objeto A de $\mathbf{C}$.
- $P(f) = [(f,1)]$, para todo morfismo f de $\mathbf{C}$.

Por la relación *(i)* P conserva la composición y por la relación *(ii)* conserva las identidades.

(a) Por la relación *(iii)* P transforma los morfismos de $\mathbf{S}$ en isomorfismos.

(b) Dado el funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ que transforma los morfismos de $\mathbf{S}$ en isomorfismos se define $\tilde{F} : \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ por: $\tilde{F}(A) = F(A)$ para todo objeto A de $\mathbf{C}$, $\tilde{F}([(1,s)]) = F(s)^{-1}$ y $\tilde{F}([(f,1)]) = F(f)$, extendiéndose por linealidad. Evidentemente $\tilde{F}$ es funtor y $\tilde{F}P = F$. La unicidad es evidente.

□

Obsérvese que las categorías localizadas de una categoría $\mathbf{C}$ sobre una clase distinguida de morfismos, $\mathbf{S}$, son únicas salvo isomorfismo, por la propiedad (b) de la definición II.1.1.

Definición II.1.3 *Se dice que una categoría* $\mathbf{C}$ *tiene una relación de equivalencia cuando para todo par de objetos* A, B *de* $\mathbf{C}$ *el conjunto* $Hom(A,B)$ *tiene una relación de equivalencia.* $[A,B]$ *representa el conjunto cociente de* $Hom(A,B)$ *sobre la relación.*

Definición II.1.4 *Una relación de equivalencia en una categoría* $\mathbf{C}$ *se dice compatible con la composición cuando dados dos morfismos* f *y* g *relacionados en* $Hom(A,B)$ *y* f', g' *relacionados en* $Hom(B,C)$*, entonces* $f'f$ *y* $g'g$ *están relacionados en* $Hom(A,C)$.

Proposición II.1.1 *Dada una relación compatible "$\sim$" en una categoría* $\mathbf{C}$ *se define la categoría cociente* $\mathbf{C}/\!\sim$ *como la que tiene por objetos los mismos de* $\mathbf{C}$ *y dados dos objetos* A, B *de* $\mathbf{C}$*, como morfismos,* $[A, B]$*. De forma natural existe un funtor proyección* $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\!\sim$ *dado por* $P(f) = [f]$.

Demostración:

Obsérvese que, por la compatibilidad, existe la composición de morfismos: $[f][g]= =[fg]$.

□

Definición II.1.5 *Un morfismo* f *de* $\mathbf{C}$ *se dirá una equivalencia de la relación cuando existen morfismos* g *y* h *de* $\mathbf{C}$ *tales que* $fg \sim 1$, $hf \sim 1$.

Teorema II.1.2 *La categoría cociente* $\mathbf{C}/\!\sim$ *de una categoría* $\mathbf{C}$ *es la categoría localizada de* $\mathbf{C}$ *sobre las equivalencias de la relación.*

Nótese que las equivalencias de la relación es la mayor clase de morfismos sobre la cual $\mathbf{C}/\!\sim$ es localizada de $\mathbf{C}$ mediante el funtor proyección P. Además, toda categoría es localizada sobre sus propios isomorfismos, mediante el funtor identidad.

II.2 Categorías homotópicas

La idea que, a continuación, se verá, es la generalización de la categoría homotópica de J.H.C. Whitehead [42] donde las equivalencias débiles desempeñan un papel similar a las equivalencias de homotopía, en el sentido de que serán isomorfismos en dichas categorías, aunque, sólo cuando su dominio y codominio son fibrantes y cofibrantes se puede asegurar que son efectivamente equivalencias de homotopía y, ni aún en este caso, tienen por qué coincidir ambas clases de equivalencias.

Dada una categoría de cofibraciones $\mathbf{C}$ con objeto inicial ϕ, se definen las subcategorías llenas, $\mathbf{C_{cf}}$ de objetos fibrantes y cofibrantes, y $\mathbf{C_c}$ de objetos cofibrantes.

Proposición II.2.1 $\mathbf{C_c}$ *es una categoría de cofibraciones con la estructura inducida por* $\mathbf{C}$.

Demostración:

CF1: Obvio.

CF2: $\phi_{B\{f,i\}} = \bar{i}\phi_X$, por tanto cofibración.

CF3: $\phi_Z = j\phi_X$.

CF4: $\phi_{RX} = r_X\phi_X$.

□

Proposición II.2.2 $\mathbf{C_{cf}}$ *con la estructura inducida por* $\mathbf{C}$ *verifica CF1, CF3 y CF4.*

Demostración:

CF1: Obvio

CF3: Corolario I.2.3 y la proposición anterior.

CF4: Se considera $1 : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} X$ para todo objeto X.

□

Obsérvese que CF2 no tiene por qué verificarse pues no se puede asegurar que el objeto push-out sea fibrante.

La relación de homotopía es una relación de equivalencia compatible con la composición de morfismos en $\mathbf{C_{cf}}$ como se vio en el párrafo I.3, y, por la proposición II.1.1, se puede definir la categoría cociente sobre dicha relación, que se denomina categoría homotópica de $\mathbf{C_{cf}}$ y se representará por $\mathbf{C_{cf}h}$. Por el teorema anterior se sabe que $\mathbf{C_{cf}h}$ es la localizada de $\mathbf{C_{cf}}$ sobre las equivalencias de homotopía, pero también sucede,

Proposición II.2.3 $\mathbf{C_{cf}h}$ *mediante el funtor proyección es la localizada de* $\mathbf{C_{cf}}$ *sobre sus equivalencias débiles.*

Demostración:

Notaremos $P_{cf} : \mathbf{C_{cf}} \to \mathbf{C_{cf}h}$ la proyección.

(a) Sea $g : X \xrightarrow{\sim} Y$ equivalencia débil en $\mathbf{C_{cf}}$, entonces se considera el triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \phi \arrow[dl, rightarrowtail, "\phi_X"'] \arrow[dr, rightarrowtail, "\phi_Y"] & \\ X \arrow[rr, "\sim", "g"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Por el Teorema de Dold (I.3.2) g es una equivalencia de homotopía, por tanto, $P_{cf}(g)=$ $=[g]$ es isomorfismo en $\mathbf{C_{cf}h}$.

(b) Sea $F : \mathbf{C_{cf}} \to \mathbf{B}$ un funtor que transforma equivalencias débiles en isomorfismos.

Se define $\tilde{F} : \mathbf{C_{cf}h} \to \mathbf{B}$ por

- $\tilde{F}(X) = F(X)$, para cualquier objeto X.
- $\tilde{F}([f]) = F(f)$, para cualquier morfismo $[f]$.

$\tilde{F}$ está bien definida pues si $f_0, f_1 : A \to X$ son morfismos homótopos en $\mathbf{C_{cf}}$, existe una homotopía $H : Z \to X$ con $Hi_0 = f_0$, $Hi_1 = f_1$ donde $(\{i_0, i_1\}, Z, p)$ es un cilindro en $\mathbf{C_{cf}}$.

Se tiene $F(pi_0) = F(pi_1) = F(1) = 1$, es decir, $F(p)F(i_0) = F(p)F(i_1)$, y como $F(p)$ es isomorfismo, puesto que p es equivalencia débil, se llega a que $F(i_0) = F(i_1)$.

Así, $F(f_0) = F(Hi_0) = F(H)F(i_0) = F(H)F(i_1) = F(Hi_1) = F(f_1)$ y por tanto $\tilde{F}$ es independiente del representante elegido en la clase.

Es sencillo comprobar que $\tilde{F}$ es funtor con $\tilde{F}P_{cf} = F$, siendo su unicidad obvia.

□

Se notará $\mathbf{C_{cf}h} = \mathbf{H_0C_{cf}}$, por ser ésta la notación que se usará para la localizada de una categoría sobre sus equivalencias débiles.

Se elige en $\mathbf{C_c}$, para cada objeto X, un modelo fibrante $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ y si X es fibrante $1 : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} X$.

Se define la categoría $\mathbf{H_0C_c}$ como la categoría cuyos objetos son los de $\mathbf{C_c}$ y cuyo conjunto de morfismos entre X e Y, que se representará por $[X, Y]$, es $[RX, RY]$. Dado $f : RX \to RY$ se tiene entonces $[f]_{X,Y} \in [X, Y]$ y $[f]_{RX,RY} \in [RX, RY]$.

Proposición II.2.4 *Distintas elecciones de modelos fibrantes dan lugar a categorías isomorfas.*

Demostración:

Dados objetos X, Y de $\mathbf{C_c}$, sean $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ y $r'_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} R'X$ modelos fibrantes de X y $r_Y : Y \overset{\sim}{\rightarrowtail} RY$, $r'_Y : Y \overset{\sim}{\rightarrowtail} R'Y$ modelos fibrantes de Y, y considérense $\mathbf{H_0C_c}$, $\mathbf{H'_0C_c}$ las respectivas categorías que inducen dichas elecciones.

Se define $F : \mathbf{H_0C_c} \to \mathbf{H'_0C_c}$ por

$$F([f]_{X,Y}) = [\widetilde{r'_Y} f \widetilde{r_X}]$$

donde $\widetilde{r'_X}$, $\widetilde{r'_Y}$, $\widetilde{r_X}$, $\widetilde{r_Y}$ son las extensiones respectivas de r'_X, r'_Y, r_X, r_Y relativas a las cofibraciones triviales r_X, r_Y, r'_X, r'_Y. Obsérvese que por ello dichas extensiones son equivalencias débiles entre objetos fibrantes y que por el Teorema de Dold son equivalencias de homotopía en $\mathbf{C_{cf}}$, concluyéndose que las respectivas clases son isomorfismos en $\mathbf{C_{cf}h}$.

Por otro lado, como $1r'_X = r'_X$ y $\widetilde{r'_X}\widetilde{r_X}r'_X = \widetilde{r'_X}r_X = r'_X$ se tiene, por el teorema I.2.2 sustituyendo j por la cofibración inicial que $\widetilde{r'_X}$ y $\widetilde{r_X}$ son inversas homotópicas entre sí. Análogamente sucede con $\widetilde{r'_Y}$ y $\widetilde{r_Y}$.

De forma similar se define $G : \mathbf{H}'_0\mathbf{C_c} \to \mathbf{H_0C_c}$ por

$$G([g]_{X,Y}) = [\widetilde{r_Y}g\widetilde{r'_X}]$$

Evidentemente, por lo expresado anteriormente, F y G son funtores tales que $FG = 1$ y $GF = 1$.

□

Si $g : X \to Y$ es un morfismo en $\mathbf{C_c}$ se obtiene una extensión $Rg : RX \to RY$ de $r_Y g$ relativa a la cofibración trivial r_X :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "r_X"', "\sim"] & Y \arrow[d, tail, "r_Y", "\sim"'] \\ RX \arrow[r, "Rg"'] & RY \end{tikzcd}$$

Si se define $P_c : \mathbf{C_c} \to \mathbf{H_0C_c}$ por

$$P_c(g) = [Rg]_{X,Y}$$

Proposición II.2.5 *$\mathbf{H_0C_c}$ es la categoría localizada de $\mathbf{C_c}$ sobre sus equivalencias débiles mediante P_c.*

Demostración:

P_c es un funtor por la unicidad de las extensiones salvo homotopía (corolario I.2.2).

(a) Observando que cualquier extensión de una equivalencia débil relativa a una cofibración trivial es también una equivalencia débil, por el Teorema de Dold se tiene que $[Rf]$ es un isomorfismo en $\mathbf{H_0C_c}$, para toda equivalencia débil f entre objetos cofibrantes.

(b) Dado un funtor $F : \mathbf{C_c} \to \mathbf{B}$ que transforma equivalencias débiles en isomorfismos se define

$$\tilde{F}([f]_{X,Y}) = F(r_Y)^{-1}F(f)F(r_X).$$

Un razonamiento análogo al de la proposición II.2.3 demuestra que $\tilde{F}$ es independiente del morfismo representante escogido. Se puede comprobar fácilmente que $\tilde{F}$ es un funtor. Observando el diagrama de definición de Rg y que el funtor F conserva dicho diagrama se tiene, obviamente, $\tilde{F}P_c = F$.

Por otro lado, si $\tilde{F}P_c = (\tilde{F})'P_c = F$ entonces $\tilde{F}([Rg]) = (\tilde{F})'([Rg])$ y como dado $g : RX \to RY$, $Rg = g$ y $[g]_{X,Y} = [Rr_Y]^{-1}_{RY,Y}[g]_{RX,RY}[Rr_X]_{X,RX}$ se tiene la unicidad.

□

Por último se define $\mathbf{H_0C}$ como la categoría que tiene por objetos los de $\mathbf{C}$ y el conjunto de morfismos entre los objetos X, Y, que se representará por $[X, Y]$ es $[RMX, RMY]$ donde MX se elige entre las factorizaciones que induce $CF3$,

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[rr, "\phi_X"] \arrow[dr, tail, "\phi_{MX}"'] & & X \\
& MX \arrow[ur, "\sim", "m_X"'] &
\end{tikzcd}$$

teniendo en cuenta que si X es cofibrante entonces $MX = X$ y $m_X = 1_X$. Análogamente al caso anterior, dado $f : RMX \to RMY$, existen $[f]_{X,Y} \in [X, Y]$, $[f]_{MX,MY} \in [MX, MY]$ y $[f]_{RMX,RMY} \in [RMX, RMY]$.

Proposición II.2.6 *Distintas elecciones de la factorización de la cofibración inicial dan categorías isomorfas.*

Demostración:

Dadas dos factorizaciones MX, $M'X$ de X y MY, $M'Y$ de Y se tienen las respectivas categorías $\mathbf{H_0C}$, $\mathbf{H'_0C}$.

Aplicando el teorema I.3.1 al siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[r, tail, "\phi_{RM'X}"] \arrow[d, tail, "\phi_{RMX}"'] & RM'X \arrow[d, "\sim"', "Rm'_X"] \\
RMX \arrow[r, "\sim", "Rm_X"'] & RX
\end{tikzcd}$$

se obtiene una extensión $\widetilde{\phi_{RM'X}} : RMX \to RM'X$ que, por CF1 y el Teorema de Dold es una equivalencia de homotopía. De forma similar surgen las equivalencias $\widetilde{\phi_{RMX}}$, $\widetilde{\phi_{RM'Y}}$ y $\widetilde{\phi_{RMY}}$.

Obsérvese que $(Rm'_X)\widetilde{\phi_{RM'X}}\widetilde{\phi_{RMX}} \simeq (Rm_X)\widetilde{\phi_{RMX}} \simeq Rm'_X = (Rm'_X)1$ y por el apartado (b) del teorema I.3.1 se tiene que $\widetilde{\phi_{RM'X}}\widetilde{\phi_{RMX}} \simeq 1$.

Razonamientos análogos demuestran que $\widetilde{\phi_{RMX}}$, $\widetilde{\phi_{RM'X}}$ son inversos homotópicos, así como $\widetilde{\phi_{RM'Y}}$ y $\widetilde{\phi_{RMY}}$.

Sea $F : \mathbf{H_0C} \to \mathbf{H'_0C}$ definido por

$$F([f]_{X,Y}) = [\widetilde{\phi_{RM'Y}} f \widetilde{\phi_{RMX}}]$$

y $G : \mathbf{H'_0C} \to \mathbf{H_0C}$ por

$$G([g]_{X,Y}) = [\widetilde{\phi_{RMY}} g \widetilde{\phi_{RM'X}}].$$

Comprobaciones similares a las hechas en la proposición II.2.4 dan el resultado buscado.

Nótese que por la proposición II.2.4 distintos modelos fibrantes de las factorizaciones dan categorías isomorfas.

□

Dado $g : X \to Y$, se tiene, por el teorema I.3.1, $RMg : RMX \to RMY$ como una extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[r, tail, "\phi_{RMY}"] \arrow[d, tail, "\phi_{RMX}"'] & RMY \arrow[d, "Rm_Y", "\sim"'] \\
RMX \arrow[r, "(Rg)(Rm_X)"'] & RY
\end{tikzcd}$$

Se define $P : \mathbf{C} \to \mathbf{H_0C}$ por $P(g) = [RMg]_{X,Y}$.

Proposición II.2.7 $\mathbf{H_0C}$ *es la localizada de* $\mathbf{C}$ *sobre sus equivalencias débiles mediante* P.

Demostración:

P es funtor por la parte (b) del teorema I.3.1.

(a) Si g es equivalencia débil, entonces RMg lo es también por la proposición I.3.2, usando el Teorema de Dold es equivalencia de homotopía y, por tanto, $[RMg]_{X,Y}$ es un isomorfismo.

(b) Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ un funtor que transforma equivalencias débiles en isomorfismos. Se define $\tilde{F} : \mathbf{H_0C} \to \mathbf{B}$ por

$$\tilde{F}([f]_{X,Y}) = F(r_Y)^{-1} F(Rm_Y) F(f) F(Rm_X)^{-1} F(r_X).$$

Un razonamiento análogo al usado en las proposiciones II.2.3 y II.2.5 demuestra que $\tilde{F}$ no depende del morfismo representante elegido y que es un funtor.

Observando que F transforma homotopías en igualdades y considerando el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "r_X"', "\sim"] & Y \arrow[d, tail, "\sim"', "r_Y"] \\
RX \arrow[r, "Rg"] & RY \\
RMX \arrow[r, "RMg"'] \arrow[u, "Rm_X", "\sim"'] & RMY \arrow[u, "\sim", "Rm_Y"']
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\tilde{F}P = F$.

Si $(\tilde{F})'P = \tilde{F}P = F$, entonces $(\tilde{F})'([RMg])=\tilde{F}([RMg])$ y como dado el morfismo $g : RMX \to RMY$, $RMg = g$ y

$$[g]_{X,Y} = [RMr_Y]^{-1}_{RY,Y}[RMRm_Y]_{RMY,RY}[g]_{RMX,RMY}[RMRm_X]^{-1}_{RX,RMX}[RMr_X]_{X,RX}$$

se tiene la unicidad.

□

Estas categorías localizadas, como ya se ha dicho, pueden considerarse, en cierto sentido, transforman equivalencias débiles en isomorfismos, como extensiones de categorías homotópicas, idea de alguna forma confirmada por el siguiente teorema.

Teorema II.2.1 $\mathbf{H_0C_{cf}} = \mathbf{C_{cf}h}$, $\mathbf{H_0C_c}$ *y* $\mathbf{H_0C}$ *son categorías equivalentes.*

Demostración:

(a) $\mathbf{H_0C_{cf}} \approx \mathbf{H_0C_c}$

Sea $\tilde{I} : \mathbf{H_0C_{cf}} \to \mathbf{H_0C_c}$ el único funtor inducido tal que $\tilde{I}P_{cf} = P_cI$ donde I es el funtor inclusión de $\mathbf{C_{cf}}$ en $\mathbf{C_c}$.

Sea $\tilde{R} : \mathbf{H_0C_c} \to \mathbf{H_0C_{cf}}$ el único funtor inducido con $\tilde{R}P_c = R : \mathbf{C_c} \to \mathbf{H_0C_{cf}}$ definido por $R(X) = RX$, $R(f) = [Rf]$. Usando el teorema I.3.1 se ve que R es, efectivamente, un funtor.

Sea $g : X \to Y$ en $\mathbf{C_{cf}}$, entonces

$$\tilde{R}\tilde{I}P_{cf}(g) = \tilde{R}P_cI(g) = RI(g) = R(g) = [Rg]_{RX,RY} = [g]_{X,Y} = P_{cf}(g).$$

Sea $g : X \to Y$ en $\mathbf{C_c}$, entonces

$\tilde{I}\tilde{R}P_c(g) = \tilde{I}R(g) = \tilde{I}([Rg]_{RX,RY}) = \tilde{I}P_{cf}(Rg) = P_cI(Rg) = P_c(Rg)$.

Luego

$\tilde{I}\tilde{R}([g]_{X,Y}) = \tilde{I}\tilde{R}([Rr_Y]^{-1}_{RY,Y}[g]_{RX,RY}[Rr_X]_{X,RX}) = [Rr_Y]^{-1}_{RY,RY}[g]_{RX,RY}[Rr_X]_{RX,RX} =$
$= 1_{RY}[g]_{RX,RY}1_{RX} = [g]_{RX,RY}$.

La equivalencia natural $e : id \to \tilde{I}\tilde{R}$ se define por

$$e_X = [Rr_X]_{X,RX}.$$

(b) $\mathbf{H_0C_{cf}} \approx \mathbf{H_0C}$.

Sea $\tilde{J} : \mathbf{H_0C_c} \to \mathbf{H_0C}$ el único funtor tal que $\tilde{J}P_c = PJ$ donde J es el funtor inclusión de $\mathbf{C_c}$ en $\mathbf{C}$.

Se define $RM : \mathbf{C} \to \mathbf{H_0C_{cf}}$ por $RM(X) = RMX$ y $RM(g) = [RMg]$. Usando el teorema I.3.1 se tiene que RM es un funtor.

Observando que RM transforma equivalencias débiles en isomorfismos existe un único funtor $\widetilde{RM} : \mathbf{H_0C} \to \mathbf{H_0C_{cf}}$ tal que $\widetilde{RM}P = RM$.

Sea $g : X \to Y$ en $\mathbf{C_{cf}}$, entonces

$\widetilde{RM}\tilde{J}\tilde{I}P_{cf}(g) = \widetilde{RM}\tilde{J}P_cI(g) = \widetilde{RM}PJI(g) = RMJI(g) = [RMg]_{RMX,RMY} = [g]_{X,Y} =$
$= P_{cf}(g)$. Luego $\widetilde{RM}\tilde{J}\tilde{I}([g]_{X,Y}) = [g]_{X,Y}$.

Sea $g : X \to Y$ en $\mathbf{C}$, entonces

$\tilde{J}\tilde{I}\widetilde{RM}P(g) = \tilde{J}\tilde{I}RM(g) = \tilde{J}\tilde{I}([RMg]_{RMX,RMY}) = \tilde{J}\tilde{I}P_{cf}(RMg) = \tilde{J}P_cI(RMg) =$
$= PJI(RMg) = P(RMg)$.

Luego $\tilde{J}\tilde{I}\widetilde{RM}([g]_{X,Y}) =$
$= \tilde{J}\tilde{I}\widetilde{RM}([RMr_Y]^{-1}_{RY,Y}[RMRm_Y]_{RMY,RY}[g]_{RMX,RMY}[RMRm_X]^{-1}_{RX,RMX}][RMr_X]_{X,RX}) =$
$= [RMr_Y]^{-1}_{RMY,RMY}[RMRm_Y]_{RMY,RMY}[g]_{RMX,RMY}[RMRm_X]^{-1}_{RMX,RMX}[RMr_X]_{RMX,RMX} =$
$= 1_{RMY}1_{RMY}[g]_{RMX,RMY}1_{RMX}1_{RMX} = [g]_{RMX,RMY}$.

La equivalencia natural $e' : id \to \tilde{J}\tilde{I}\widetilde{RM}$ se define por

$$e'_X = [RMRm_X]^{-1}_{RX,RMX}[RMr_X]_{X,RX}.$$

Se concluye que las tres categorías son equivalentes.

□

II.3 Categoría bajo un objeto

A continuación se verá qué sucede con la homotopía en el caso de la categoría bajo un objeto de una categoría de cofibraciones y se justificará la definición de homotopía relativa dada anteriormente.

Proposición II.3.1 *Sea* $\mathbf{C}$ *categoría de cofibraciones y* B *objeto en* $\mathbf{C}$. *Entonces* $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$, *categoría bajo* B, *es una categoría de cofibraciones.*

Demostración:

Se definen las equivalencias débiles y las cofibraciones como los morfismos de $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ que son equivalencias débiles y cofibraciones respectivamente en $\mathbf{C}$.

CF1: Se induce trivialmente de $\mathbf{C}$.

CF2: Se comprueba fácilmente observando que $(u,A)\{f,i\}{=}(\bar{i}fu, A\{f,i\})$ para toda cofibración $i:(u,A)\rightarrowtail(iu,C)$ y morfismo $f:(u,A)\to(fu,X)$.

CF3: Sea un morfismo $f:(u,A)\to(fu,X)$, toda factorización de f en $\mathbf{C}$ induce una en $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$. Si (j,Z,q) es dicha factorización, entonces $(j,(ju,Z),q)$ es una en $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$.

CF4: Es fácil ver que (u,X) en $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ es fibrante si y sólo si X es fibrante. De donde se concluye que los modelos fibrantes de un objeto (u,A) son de la forma:

$$r_A:(u,A)\overset{\sim}{\rightarrowtail}(r_Au, RA).$$

□

Nótese que aunque $\mathbf{C}$ no tenga objeto inicial, $1_B:B\to B$ sí es objeto inicial en $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ y, por tanto, un objeto (i,A) es cofibrante si y sólo si i es cofibración. Luego si A es fibrante e i cofibración, (i,A) es fibrante y cofibrante.

Por otro lado, si (i,A) es un objeto cofibrante, entonces $(i,A)\cup(i,A)=((\bar{i})_0 i, B\{i,i\})$. Así $(\{i_0,i_1\},Z^i,p)$ es un cilindro relativo a i en $\mathbf{C}$ si y sólo si $(\{i_0,i_1\},(i_0 i, Z^i),p)$ es un cilindro relativo a la cofibración inicial en $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$. Por lo visto en el párrafo I.3 se concluye que $[(i,A),(u,X)]=[A,X]^{u(i)}$ y que existe la categoría $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{cf}}\mathbf{h}$.

Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado en el párrafo II.2 se obtiene $[(u,A),(v,C)]$ conjunto de morfismos de $\mathbf{H_0C^B}$, que por definición coincide con $[RM(u,A),RM(v,C)]$.

Luego si (u',Z,q) es una factorización de u y se designa $Z=Mu$, $q=m_u$ y $M(u,A)=$ $=(u',Mu)$ entonces

$$[RM(u,A),RM(v,C)]=[(r_{Mu}u',RMu),(r_{Mv}v',RMv)]=[RMu,RMv]^{r_{Mv}v'(r_{Mu}u')}.$$

Teorema II.3.1 *Los corchetes* $[RMu, RMv]^{r_{M_v}v'(r_{M_u}u')}$, $[Mu, RC]^{r_C v(u')}$ *son biyectivos.*

Demostración:

Obsérvese que $Rm_v : RMv \xrightarrow{\sim} RC$ es equivalencia débil entre objetos fibrantes, aplicando la proposición I.3.6 y como $(Rmv)(r_{Mv})v' = r_C v$ se tiene que

$$[RMu, RMv]^{r_{M_v}v'(r_{M_u}u')} \cong [RMu, RC]^{r_C v(r_{M_u}u')}.$$

Por otro lado $r_{Mu} : Mu \rightarrowtail RMu$ es una cofibración trivial y usando el teorema I.2.2 se obtiene que

$$[RMu, RC]^{r_C v(r_{M_u}u')} \cong [Mu, RC]^{r_C v(u')}.$$

□

Nótese que si u es cofibración y C es fibrante entonces, por el teorema anterior, $[(u, A), (v, C)]$ coincide con $[A, C]^{v(u)}$, por otra parte, si $B = \phi$ se tiene $[RM\phi_A, RM\phi_C]=$ $=[RMA, RMC]$ biyectivo a $[M\phi_A, RC]=[MA, RC]$ y por localización se tendría que $[A, C] \equiv [MA, RC]$.

Por la definición de RMf y $R(fm_A) \simeq (Rf)(Rm_A)$, vista en el párrafo II.2 anterior, el siguiente diagrama es completamente conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
 & RMA \arrow[r, "RMf"] \arrow[rrd, "(Rf)(Rm_A)"'] & RMC \arrow[rd, "Rm_C", "\sim"'] & \\
MA \arrow[ru, tail, "r_{MA}", "\sim"'] \arrow[rd, "m_A"', "\sim"] & & & RC \\
 & A \arrow[r, "f"'] & C \arrow[ru, tail, "r_C"', "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

se tiene que dado un morfismo $f : A \to C$, se le asocia $[(Rm_C)(RMf)r_{MA}] = [r_C f m_A]$.

Capítulo III

Grupos de homotopía

Uno de los objetivos principales de cualquier teoría de homotopía es la obtención de sus grupos. En este capítulo, al igual que sucede con la homotopía ordinaria de los espacios topológicos, se desarrollan primeramente los grupoides de homotopía y se obtienen algunas de sus propiedades, usadas posteriormente en los grupos de homotopía. También se hace un análisis del carácter funtorial de éstos últimos, así como un estudio de sus propiedades más características.

III.1 Grupoides de homotopía

En teoría de categorías un grupoide es conocido como una categoría con morfismos inversibles. Un ejemplo bien conocido de ellos es el grupoide fundamental de los espacios topológicos (ver S. MacLane [34]). Aquí se hace una generalización a categoría de cofibraciones de dichos grupoides de homotopía.

Dado $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$ un cilindro relativo a una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, X objeto fibrante y un morfismo $u : B \to X$, se va a obtener un grupoide cuyos conjuntos de morfismos son $[Z^i, X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})}$ donde $x, y \in Hom(A, X)^{u(i)}$, que serán los objetos.

Sean $x, y, z \in Hom(A, X)^{u(i)}$. Se define

(a) $- : [Z^i, X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})} \to [Z^i, X]^{\{y,x\}(\{i_0,i_1\})}$ por

$$\overline{[H]} = [\overline{H}]$$

(b) $* : [Z^i, X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})} \times [Z^i, X]^{\{y,z\}(\{i_0,i_1\})} \to [Z^i, X]^{\{x,z\}(\{i_0,i_1\})}$ por

$$[F] * [G] = [F * G]$$

donde $\overline{H}$, $F * G$ son las inducidas por la proposición I.1.2 de las respectivas homotopías soluciones para la propiedad simétrica y transitiva de la proposición I.3.1.

En esta definición de $-$ y $*$ aparecen, por el lema I.1.2, morfismos l, m, n y objeto Z que se notarán en estos casos por (l'', m'', n'', Z'') y (l', m', n', Z') respectivamente.

Proposición III.1.1 *$-$, $*$ son aplicaciones.*

Demostración:

Por simplificar se notará $j = \{i_0, i_1\}$, $k = i_0 \cup i_1$, considerando el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
(B\{i,i\})\{k,k\} \arrow[r, "\{i'_0 \cup i'_0,\, i'_1 \cup i'_1\}"] \arrow[d, tail, "\{i''_0,\, i''_1\}"'] & A\{i'_1 i_1, i'_0 i_0\} \arrow[d, "p' \cup p'", "\sim"'] \\
Z^k \arrow[r, "\sim", "p''"'] & A\{i_1, i_0\}
\end{tikzcd}$$

donde $(\{i''_0, i''_1\}, Z^k, p'')$, $(\{i'_0, i'_1\}, Z^j, p')$ son cilindros relativos respectivamente a k y j; $p' \cup p'$ es equivalencia débil por el teorema I.2.1. Entonces $\widetilde{\{F,G\}}n : \{F_0, G_0\} \simeq \{F_1, G_1\}$ rel. k con $F : F_0 \simeq F_1$ rel. j, $G : G_0 \simeq G_1$ rel. j y $\widetilde{\{F,G\}}$ la extensión de $\{F, G\}$ relativo a la cofibración trivial l, donde l y n son los del lema I.1.2 aplicado al cuadrado anterior.

El corolario I.2.4 aplicado a los cuadrados de definición de $-$ y $*$ nos da el resultado buscado.

$\square$

Sea $1_x = [xp] \in [Z^i, X]^{\{x,x\}(\{i_0,i_1\})}$.

Lema III.1.1 *Dado $[F] \in [Z^i, X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})}$,*

(i) $[F] * 1_y = [F]$.

(ii) $1_x * [F] = [F]$.

Demostración:

(i) Por la definición de $*$ y por el teorema I.2.2 basta demostrar $\{F, yp\} \simeq \tilde{F}l'$ rel. k, donde $\tilde{F}$ es la extensión de F relativa a la cofibración trivial n'.

La homotopía buscada es $\tilde{\tilde{F}}n$ donde $\tilde{\tilde{F}}$ es la extensión de $\tilde{F}$ relativa a la cofibración trivial l, donde l y n son obtenidas por el lema I.1.2 aplicado al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
(B\{i,i\})\{k,k\} \arrow[r, "{\{n',n'i_1p,l'\}}"] \arrow[d, tail, "{\{i_0'',i_1''\}}"'] & Z' \arrow[d, "m'", "\sim"'] \\
Z^k \arrow[r, "\sim", "{\{p,p\}p''}"'] & A
\end{tikzcd}$$

(ii) Demostración similar sustituyendo $\{n',n'i_1p,l'\}$ por $\{n'i_0p,n',l'\}$.

$\square$

Lema III.1.2

Dados $[F] \in [Z^i,X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})}$, $[G] \in [Z^i,X]^{\{y,z\}(\{i_0,i_1\})}$ *y* $[H] \in [Z^i,X]^{\{z,w\}(\{i_0,i_1\})}$ *entonces* $([F]*[G])*[H] = [F]*([G]*[H])$.

Demostración:

Por el corolario I.2.4 basta demostrar que $\{F{*}G,H\} \simeq \{F,G{*}H\}$ rel. k. La homotopía buscada es $\widetilde{\{\widetilde{\{F,G\}},\widetilde{\{G,H\}}\}}n$ donde $\widetilde{\{F,G\}}$, $\widetilde{\{G,H\}}$ son las extensiones respectivas de $\{F,G\}$, $\{G,H\}$ relativas a la cofibración trivial l' y $\widetilde{\{\widetilde{\{F,G\}},\widetilde{\{G,H\}}\}}$ es la extensión de $\{\widetilde{\{F,G\}},\widetilde{\{G,H\}}\}$ relativa a la cofibración trivial l y donde l, n son definidas por el lema I.1.2 aplicado al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
(B\{i,i\})\{k,k\} \arrow[r, "{\{n'\cup(l'\overline{i_1}),(l'\overline{i_0})\cup n'\}}"] \arrow[d, tail, "{\{i_0'',i_1''\}}"'] & Z^i\{l'\overline{i_1},l'\overline{i_0}\} \arrow[d, "{\{m',m'\}}", "\sim"'] \\
Z^k \arrow[r, "{\{p,p\}p''}"'] & A
\end{tikzcd}$$

Nótese que $\{m',m'\}$ es una equivalencia débil pues lo son sus componentes y sale de un push-out donde hay una equivalencia débil.

$\square$

Lema III.1.3 *Dado* $[F] \in [Z^i,X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})}$,

(i) $[F]*[\overline{F}] = 1_x$.

(ii) $[\overline{F}] * [F] = 1_y$.

Demostración:

(i) $xp = xm'n'$, de donde se deduce que xm' es una extensión de xp relativa a n', entonces, por la definición de $*$ y el corolario I.2.4 basta ver que $\{F, \overline{F}\} \simeq xm'l' = x\{p,p\} = \{xp, xp\}$ rel. k.

La homotopía buscada es $\tilde{\tilde{F}}n$ donde $\tilde{F}$ es una extensión de F relativa a la cofibración trivial l'', $\tilde{\tilde{F}}$ es una extensión de $\tilde{F}$ relativa a la cofibración trivial l, donde l y n son obtenidas aplicando el lema I.1.2 al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
(B\{i,i\})\{k,k\} \arrow[r, "{\{l'', n'', l''i_0p, n''i_1p\}}"] \arrow[d, tail, "{\{i_0'', i_1''\}}"'] & Z'' \arrow[d, "m''", "\sim"'] \\
Z^k \arrow[r, "\sim", "{\{p,p\}p''}"'] & A
\end{tikzcd}$$

(ii) Demostración análoga a la anterior cambiando el morfismo $\{l'', n'', l''i_0p, n''i_1p\}$ por $\{n'', l'', n''i_0p, l''i_1p\}$.

□

Teorema III.1.1 *Si se toma como conjunto de objetos $Hom(A,X)^{u(i)}$ y como morfismos de x en y, $[Z^i, X]^{\{x,y\}(\{i_0,i_1\})}$ se tiene un grupoide, que se notará por $\mathbf{H_iC_X}$.*

Dicho grupoide se denomina grupoide de homotopía relativo a la cofibración i.

El conjunto de morfismos y el conjunto de objetos de $\mathbf{H_iC_X}$ hacen las veces de los caminos y los puntos de los espacios topológicos. Por otro lado las operaciones $-$ y $*$ equivalen, respectivamente, al inverso de un camino y a la composición de caminos, y los lemas son los análogos a los respectivos que dan los neutros, asociativa e inverso homotópicos del grupoide de homotopía de dichos espacios topológicos.

Se analiza, a continuación, la relación existente entre los morfismos y los objetos que definen los grupoides.

Proposición III.1.2 *Sean $i : B \rightarrowtail A$, $j : D \rightarrowtail C$ cofibraciones, $g : C \to A$ y $f : Z^j \to Z^i$ morfismos de forma tal que hacen totalmente conmutativo el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
D\{j,j\} \arrow[r, "g \cup g"] \arrow[d, tail, "\{j_0,j_1\}"'] & B\{i,i\} \arrow[d, tail, "\{i_0,i_1\}"] \\
Z^j \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"', "\sim"] & Z^i \arrow[d, "p", "\sim"'] \\
C \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}
$$

donde $(\{i_0,i_1\}, Z^i, p)$, $(\{j_0,j_1\}, Z^j, q)$ *son cilindros relativos a las cofibraciones* i *y* j *respectivamente. Entonces* f *induce un funtor* $f^* : \mathbf{H_iC_X} \to \mathbf{H_jC_X}$.

Demostración:

Se define $f^*([H]) = [Hf]$. La definición no depende de la homotopía representante H escogida, por la proposición I.3.4.

Se verá, a continuación, que $f^*([F] *' [G]) = f^*([F]) \hat{*} f^*([G])$, donde $*'$ y $\hat{*}$ representan la composición de morfismos en las respectivas categorías con (l', m', n', Z') y $(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}, \hat{Z})$ los respectivos morfismos inducidos en los cuadrados de definición de las operaciones.

La homotopía buscada es $\{\widetilde{\{F,G\}}, \widetilde{\{Ff,Gf\}}\}n$ donde $\widetilde{\{F,G\}}$, $\widetilde{\{Ff,Gf\}}$ son las extensiones respectivas de $\{F,G\}$, $\{Ff,Gf\}$ relativas a las cofibraciones triviales l', $\hat{l}$; $\widetilde{\{\widetilde{\{F,G\}}, \widetilde{\{Ff,Gf\}}\}}$ es la extensión de $\{\widetilde{\{F,G\}}, \widetilde{\{Ff,Gf\}}\}$ relativa a la cofibración trivial l y donde l, n son los morfismos obtenidos aplicando el lema I.1.2 al siguiente cuadrado:

$$
\begin{tikzcd}
(D\{j,j\})\{s,s\} \arrow[r, "n'f \cup \hat{n}"] \arrow[d, tail, "\{j_0'',j_1''\}"'] & (C\{j_1,j_0\})\{l'(f \cup f), \hat{l}\} \arrow[d, "\{m', g\hat{m}\}", "\sim"'] \\
Z^s \arrow[r, "gqq''"'] & A
\end{tikzcd}
$$

donde $s = \{j_0, j_1\}$.

Obsérvese que el conjunto de morfismos entre un objeto es un grupo y, por tanto, f^* restringida a estos grupos es un homomorfismo, en particular conserva el morfismo identidad $1_x = [xp]$.

$\square$

Definición III.1.1 *Dado el siguiente cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ C \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

se define el cilindro de g, que se notará por Zg, como el morfismo n inducido por el lema I.1.2 en el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} D\{j,j\} \arrow[r, "\{i_0 g, i_1 g\}"] \arrow[d, tail, "\{j_0,j_1\}"'] & Z^i \arrow[d, "p", "\sim"'] \\ Z^j \arrow[r, "gq"'] & A \end{tikzcd}$$

Corolario III.1.1 $(Zg)^* : \mathbf{H_i C_X} \to \mathbf{H_j C_X}$ *es un funtor.*

Demostración:

Basta observar que $n = Zg : Z^j \to Z$, $(l\{i_0, i_1\}, Z, m)$ es un cilindro relativo a i y aplicar la proposición III.1.2 anterior.

□

A la hora de construir los grupoides se ha fijado un cilindro, cabe preguntarse qué sucede cuando se elige otro cilindro. Como consecuencia de la proposición anterior surge la respuesta.

Teorema III.1.2 *Dados $(\{i_0, i_1\}, Z^i, p)$, $(\{j_0, j_1\}, K^i, q)$ dos cilindros relativos a i, los respectivos grupoides $\mathbf{H_i C_X}$, $\mathbf{H'_i C_X}$ son isomorfos.*

Demostración:

Basta considerar la proposición I.1.2 y el corolario I.2.5. Observando que por la proposición III.1.2 anterior aplicada a los casos $(f = n,\ g = 1)$ y $(f = l,\ g = 1)$ se obtienen los funtores inversos

$$n^*(l^*)^{-1} : \mathbf{H_i C_X} \to \mathbf{H'_i C_X}, \qquad l^*(n^*)^{-1} : \mathbf{H'_i C_X} \to \mathbf{H_i C_X}$$

Nótese que $(l\{i_0, i_1\} = n\{j_0, j_1\}, Z, m)$ es un cilindro relativo a la cofibración i y que el inverso de un funtor como aplicación también es inverso como funtor.

□

En la obtención de $-$ y de $*$ se han considerado fijos, respectivamente, (l'', m'', n'', Z''), (l', m', n', Z'). Se puede cuestionar qué sucede si se consideraran otros paréntesis de este tipo a la hora de definir dichas aplicaciones. El siguiente teorema demuestra la invarianza de dichas operaciones respecto de los paréntesis considerados.

Teorema III.1.3 *Dados los siguientes cuadrados conmutativos:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "h", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "g_\varepsilon"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \varepsilon \in \{0,1\}$$

con $g_0 \simeq g_1$ rel. i. Entonces $(\widetilde{H})_0 n_0 \simeq (\widetilde{H})_1 n_1$ rel. i, donde $(\widetilde{H})_\varepsilon$ es extensión de $H : X \to K$ con K fibrante, relativa a la cofibración trivial l_ε, donde l_ε, n_ε son obtenidos aplicando el lema I.1.2 a los cuadrados anteriores, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Demostración:

Sea $G : g_0 \simeq g_1$ rel. i. La homotopía buscada es $\widetilde{\{(\widetilde{H})_0, (\widetilde{H})_1\}} n$, donde $\widetilde{\{(\widetilde{H})_0, (\widetilde{H})_1\}}$ es la extensión de $\{(\widetilde{H})_0, (\widetilde{H})_1\}$ relativa a la cofibración trivial l, donde l, n son obtenidos aplicando el lema I.1.2 al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[r, "n_0 \cup n_1"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & X\{l_0, l_1\} \arrow[d, "\{m_0, m_1\}", "\sim"'] \\ Z^i \arrow[r, "G"'] & Y \end{tikzcd}$$

□

Corolario III.1.2 *Dados los cuadrados*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "h_\varepsilon", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "g_\varepsilon"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \varepsilon \in \{0,1\}$$

donde $g_0 \simeq g_1$ rel. i, $h_0 \simeq h_1$ rel. j, entonces $(\widetilde{H})_0 n_0 \simeq (\widetilde{H})_1 n_1$ rel. i.

Demostración:

Fijando el morfismo h_0 y utilizando el teorema III.1.3 anterior surgen dos morfismos $F_{00}, F_{10} : A \to K$ homótopos relativos a i. Fijando ahora g_1 y aplicando el mismo teorema a F_{00} y F_{10} surgen cuatro morfismos F_{0010}, F_{0011}, F_{1010}, $F_{1011} : X \to K$ todos homótopos relativos a j. Pero F_{1010} es homótopo a F relativo a j por el corolario I.2.4. Por último, fijando g_1 y h_1 y aplicando el cuadrado a F_{0011} y F se obtienen F_{001111} y F_{11} homótopos relativos a i, pero por el mismo corolario, F_{001111} es homótopo a F_{00} relativo a i, lo que concluye el resultado.

□

Finalmente se verá cómo actúa $f_* : \mathbf{H_i C_X} \to \mathbf{H_i C_Y}$.

Proposición III.1.3 *Dado $f : X \to Y$ morfismo entre objetos fibrantes, entonces $f_* : \mathbf{H_i C_X} \to \mathbf{H_i C_Y}$ es un funtor.*

Demostración:

Se define $f_*([H]) = [fH]$ que no depende del representante elegido como se vio en la proposición I.3.3.

$f_*([F] * [G]) = f_*([F]) * f_*([G])$ si y sólo si $f(F * G) \simeq fF * fG$ rel. $\{i_0, i_1\}$ si y sólo si $f\{F, G\} \simeq \{fF, fG\}$ rel. $i_0 \cup i_1$ lo cual es evidente pues no sólo se cumple la homotopía sino la igualdad.

□

III.2 Grupos de homotopía

Toda teoría de homotopía tiene asociado unos grupos denominados de homotopía, que poseen un carácter funtorial. Aquí se generaliza este concepto para categoría de cofibraciones y se obtienen sus principales propiedades, relativas a objetos débilmente equivalentes, homotópicamente equivalentes, contráctiles y relativas a la unión de objetos.

Antes de definir los grupos de homotopía se introduce el concepto de categoría basada y se analizan algunas propiedades que serán utilizadas posteriormente en la construcción de dichos grupos.

Definición III.2.1 *Dada $\mathbf{C}$ categoría de cofibraciones con objeto inicial ϕ, un objeto cofibrante A de $\mathbf{C}$ se dirá basado cuando existe un morfismo $\alpha : A \to \phi$.*

Definición III.2.2 *Un morfismo $f : A \to B$ se dirá basado entre (A, α), (B, β) si $\beta f = \alpha$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & \phi & \end{tikzcd}$$

Proposición III.2.1 *Los objetos basados de $\mathbf{C}$ con los morfismos basados forman una categoría denominada categoría basada de $\mathbf{C}$, y que se notará por $\mathbf{C}(\phi)$.*

Nótese que $(\phi, 1)$ es objeto cero en esta categoría y que, por tanto, existe el morfismo $0 = \phi_B \alpha : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ para cualquier par de objetos de $\mathbf{C}(\phi)$.

Proposición III.2.2 $\mathbf{C}(\phi)$ *verifica CF1, CF2 y CF3 con las cofibraciones basadas y equivalencias débiles basadas.*

Demostración:

CF1: Por la proposición II.2.1 es obvio.

CF2: Basta observar que dada una cofibración $i : (B, \beta) \rightarrowtail (A, \alpha)$ y un morfismo $f : (B, \beta) \to (X, w)$, $(B, \beta)\{f, i\} = (B\{f, i\}, \{w, \alpha\})$.

CF3: Dada $f : (A, \alpha) \to (X, w)$ si (j, Z, q) es una factorización en $\mathbf{C}$ de f, entonces $(j, (Z, wq), q)$ es una factorización de f en $\mathbf{C}(\phi)$.

□

Otro concepto, generalizado de los espacios topológicos, necesario para la definición de los grupos de homotopía es el de suspensión de un objeto.

Definición III.2.3 *Dado un objeto basado (A, α) se define la suspensión de A, como el siguiente push-out:*

$$\begin{tikzcd} A \cup A \arrow[r, "\{\alpha, \alpha\}"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & \phi \arrow[d, tail, "\phi_{SA}"] \\ ZA \arrow[r, "\overline{\{\alpha, \alpha\}}"'] & SA \end{tikzcd}$$

donde $(\{i_0, i_1\}, ZA, p)$ es un cilindro relativo a la cofibración inicial ϕ_A.

Obsérvese que $A \cup A$ es basado por CF2 anterior, ZA por CF3 y por tanto SA. Usando esto último se puede iterar el proceso y definir $S^n A = S(S^{n-1} A)$, $n \in \mathbb{N}$, donde $S^0 A = A$.

Aplicando el teorema I.2.3 se tiene

Proposición III.2.3 *$[S^nA, X]$ es biyectivo a $[ZS^{n-1}A, X]^{\{0,0\}(\{i_0,i_1\})}$ y, por tanto, es grupo.*

Definición III.2.4 *Se define el n-grupo de homotopía de un objeto X de $\mathbf{C}$ referido a un objeto basado (A, α) por $\pi_n^A(X) = [S^nA, X]$.*

Nótese que por la proposición III.1.2 dicho grupo está definido salvo isomorfismo.

El carácter funtorial y algunas de las principales propiedades de los grupos de homotopía se analizan a continuación.

Definición III.2.5 *Dado un morfismo $f : X \to Y$, se define*

$$\pi_n^A(f) = (Rf)_* : \pi_n^A(X) \to \pi_n^A(Y).$$

Proposición III.2.4 *$\pi_n^A(f)$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones I.2.3 y III.1.3.

□

Proposición III.2.5

(i) $\pi_n^A(1_X) = 1_{\pi_n^A(X)}$.

(ii) $\pi_n^A(gf) = \pi_n^A(g)\pi_n^A(f)$.

Demostración:

Obsérvese que $R(gf) \simeq (Rg)(Rf)$ y que $R1 \simeq 1$ y por la compatibilidad de la homotopía con la composición se concluye el resultado.

□

Corolario III.2.1 *Dos objetos débilmente equivalentes tienen grupos de homotopía isomorfos referidos a cualquier objeto basado.*

Demostración:

Si $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ es equivalencia débil entonces $Rf : RX \xrightarrow{\sim} RY$ también lo es y por el teorema I.3.6 $(Rf)_*$ es biyección.

□

Es conocido que espacios homotópicamente equivalentes poseen grupos de homotopía isomorfos. Este resultado también se cumple en este caso, para ello es necesario extender el concepto de espacio homotópicamente equivalente en categoría de cofibraciones.

Definición III.2.6 *Dados dos objetos X, Y se dirán homotópicamente equivalentes cuando existen morfismos $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que $r_X g f m_X \simeq r_X m_X$ y $r_Y f g m_Y \simeq$ $\simeq r_Y m_Y$.*

Proposición III.2.6 *Si X, Y son homotópicamente equivalentes entonces $\pi_n^A(X) \cong$ $\cong \pi_n^A(Y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

Si $r_X g f m_X \simeq r_X m_X$ se tiene $R(r_X g f m_X)_* = R(r_X m_X)_*$ y observando que m_X y r_X son equivalencias débiles y por el teorema I.3.1 se concluye que $(Rg)_*(Rf)_* = 1$.

De forma análoga se obtiene $(Rf)_*(Rg)_* = 1$.

□

En la homotopía ordinaria de los espacios topológicos se tiene el concepto de espacio contráctil como espacio homotópicamente equivalente a un punto. En una categoría de cofibraciones con un objeto final ε una forma de extender dicho concepto es:

Definición III.2.7 *Un objeto X es contráctil cuando es homotópicamente equivalente al objeto final ε.*

Proposición III.2.7 *Si X es contráctil entonces $\pi_n^A(X)$ es el grupo trivial, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

$\pi_n^A(\varepsilon)$ posee un único elemento.

□

Por último, se estudian algunas propiedades sobre el objeto referencial de los grupos de homotopía.

Por ser $S\phi = \phi$, se observa que $\pi_n^\phi(X)$ es el grupo trivial, para cualquier objeto X.

Proposición III.2.8 *Dados dos objetos A_0,A_1 cofibrantes y dados $(\{i_0^0, i_1^0\}, ZA_0, p^0)$, $(\{i_0^1, i_1^1\}, ZA_1, p^1)$, dos cilindros respectivos, se tiene que*

$$(\{i_0^0 \cup i_0^1, i_1^0 \cup i_1^1\}, ZA_0 \cup ZA_1, p^0 \cup p^1)$$

es un cilindro de $A_0 \cup A_1$.

Demostración:

$\{i_0^0 \cup i_0^1, i_1^0 \cup i_1^1\} = (\{i_0^0, i_1^0\} \cup \{i_0^1, i_1^1\})(\{j_0 \cup j_0, j_1 \cup j_1\})$, por tanto cofibración por ser composición de ellas, pues $\{j_0 \cup j_0, j_1 \cup j_1\})$ es cofibración por ser un isomorfismo, cuyo inverso tiene la misma notación y $\{i_0^0, i_1^0\} \cup \{i_0^1, i_1^1\}$ es cofibración por el corolario I.2.1.

Por el mismo corolario $p^0 \cup p^1$ es equivalencia débil y $(p^0 \cup p^1)\{i_0^0 \cup i_0^1, i_1^0 \cup i_1^1\} =$ $= \{1 \cup 1, 1 \cup 1\} = \{1, 1\}$.

□

Teorema III.2.1 $\pi_n^{A_0 \cup A_1}(X) \cong \pi_n^{A_0}(X) \times \pi_n^{A_1}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Demostración:

Observando el siguiente push-out,

$$\begin{tikzcd}
(A_0 \cup A_1) \cup (A_0 \cup A_1) \arrow[r, "{\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1\}}"] \arrow[d, tail, "{\{i_0^0 \cup i_0^1, i_1^0 \cup i_1^1\}}"'] & \phi \arrow[d, tail, "\phi_{SA_0 \cup SA_1}"] \\
ZA_0 \cup ZA_1 \arrow[r, "{\overline{\{\alpha_0, \alpha_0\}} \cup \overline{\{\alpha_1, \alpha_1\}}}"'] & SA_0 \cup SA_1
\end{tikzcd}$$

se tiene que $S(A_0 \cup A_1) \cong SA_0 \cup SA_1$, por tanto $[S(A_0 \cup A_1), X] \cong [SA_0 \cup SA_1, X]$. Iterando el proceso resulta que $[S^n(A_0 \cup A_1), X] \cong [S^n A_0 \cup S^n A_1, X]$.

El isomorfismo buscado es $((j_0)^*, (j_1)^*) : \pi_n^{A_0 \cup A_1}(X) \longrightarrow \pi_n^{A_0}(X) \times \pi_n^{A_1}(X)$ definido por $((j_0)^*, (j_1)^*)([f]) = ((j_0)^*([f]), (j_1)^*([f]))$.

La proposición III.1.2 aplicada al siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
A_\varepsilon \cup A_\varepsilon \arrow[r, tail, "j_\varepsilon \cup j_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "{\{i_0^\varepsilon, i_1^\varepsilon\}}"'] & (A_0 \cup A_1) \cup (A_0 \cup A_1) \arrow[d, tail, "{\{i_0^0 \cup i_0^1, i_1^0 \cup i_1^1\}}"] \\
ZA_\varepsilon \arrow[r, tail, "j_\varepsilon"] \arrow[d, "p^\varepsilon"', "\sim"] & ZA_0 \cup ZA_1 \arrow[d, "\sim"', "p^0 \cup p^1"] \\
A_\varepsilon \arrow[r, tail, "j_\varepsilon"'] & A_0 \cup A_1
\end{tikzcd} \qquad \varepsilon \in \{0, 1\}$$

da que $(j_\varepsilon)^*$ es un homomorfismo y, por la proposición III.2.8 anterior, se concluye la inyectividad y, por tanto, el resultado.

□

Teorema III.2.2 *Dado un cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, rightarrowtail, "i"'] & B' \arrow[d, rightarrowtail, "i'"] \\ A \arrow[r, "g"'] & A' \end{tikzcd}$$

entonces existe un funtor $g^{\#} : \mathbf{H_{i'}C_X} \to \mathbf{H_iC_X}$.

Demostración:

Basta considerar el siguiente diagrama y aplicar la proposición III.1.2

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[r, "g \cup g"] \arrow[d, rightarrowtail, "\{i_0,i_1\}"'] & B'\{i',i'\} \arrow[d, rightarrowtail, "j\overline{\{i_0,i_1\}}"] \\ Z^i \arrow[r, "j(\overline{g \cup g})"] \arrow[d, "p"', "\sim"] & Z^{i'} \arrow[d, "q", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "g"'] & A' \end{tikzcd}$$

donde $(j, Z^{i'}, q)$ es una factorización, por CF3, del morfismo

$$\{gp, 1, 1\} : B\{i,i\}\{\{i_0, i_1\}, g \cup g\} \to A'.$$

Obsérvese que $(j\overline{\{i_0, i_1\}}, Z^{i'}, q)$ es un cilindro relativo a la cofibración i', y que $g^{\#} =$
$= (j(\overline{g \cup g}))^*$.

□

Corolario III.2.2 *Dado* $g : (A, \alpha) \to (A', \alpha')$ *un morfismo basado, entonces* $g^{\#}$ *induce un homomorfimo de grupos* $g_n^* : \pi_n^{A'}(X) \to \pi_n^A(X)$.

Demostración:

$g_n^* = (S^n g)^* : [S^n A', X] \to [S^n A, X]$, donde $S^n g$ se define inductivamente con $Sg =$
$= 1 \cup j(\overline{g \cup g}) : SA \to SA'$.

□

Corolario III.2.3 *Si* $g : (A, \alpha) \to (A', \alpha')$ *es una equivalencia débil basada entonces* $g_n^* : \pi_n^{A'}(X) \to \pi_n^A(X)$ *es un isomorfismo.*

Demostración:

Nótese que, en este caso, $\{gp, 1, 1\}$ es una equivalencia débil y entonces se puede tomar, en la demostración del teorema III.2.2, $j = 1$, por lo que $Z^{i'}$ es un push-out y basta aplicar el teorema I.2.3. Por otro lado SA' es también un push-out:

$$\begin{tikzcd} \phi \arrow[r, "1"] \arrow[d, tail, "\phi_{SA}"'] & \phi \arrow[d, tail, "\phi_{SA'}"] \\ SA \arrow[r, "Sg"'] & SA' \end{tikzcd}$$

Reiterando el proceso se obtiene el resultado para $S^n A'$, $n \geqslant 1$.

$\square$

Capítulo IV

Homotopía funtorial

Toda homotopía obtenida a través de un cilindro natural da lugar a una categoría de cofibraciones, cabe preguntarse si los grupos de homotopía de ambas teorías son isomorfos. Por otro lado, toda categoría aditiva con cono natural da origen a una con cilindro natural, también aquí se plantea la misma cuestión. La homotopía aditiva con funtores adjuntos y límites y colímites finitos tiene asociada una categoría de modelo en el sentido de D.G. Quillen [36] y otra vez surge la misma pregunta. En este capítulo se responde a ello viendo que los grupos son isomorfos en todos los casos considerados.

IV.1 Categoría con cilindro natural

H.J. Baues [2] da la definición de categoría con cilindro natural. Un estudio más detallado de este tipo de categorías es realizado por los autores en [6]. En este párrafo se estudian, usando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, los grupos de homotopía de dichas categorías, pues éstas inducen categorías de cofibraciones, concluyéndose que los grupos de homotopía obtenidos en ambas teorías son isomorfos.

Previamente se recuerdan las definiciones básicas y resultados que se usarán posteriormente. Estos resultados, salvo que se vaya a usar notación de la demostración, se darán sin ella. Para una visión más completa de esto puede consultarse [2] y [6].

Definición IV.1.1 *Una I-categoría (categoría con cilindro natural), es una categoría* $\mathbf{C}$ *con objeto inicial* ϕ*, un funtor cilindro* $I : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *, transformaciones naturales* $i_0, i_1 : id_{\mathbf{C}} \to I$*,* $p : I \to id_{\mathbf{C}}$*, y una clase distinguida de morfismos cof., denominados cofibraciones verificando los siguientes axiomas:*

I1: Axioma de cilindro.

$pi_\varepsilon = 1$, *para* $\varepsilon \in \{0,1\}$

I2: Axioma de push-out.

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ *y un morfismo* $f : B \to X$, *existe el siguiente push-out,*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ *es cofibración. El funtor* I *transforma push-outs en push-outs:* $I(B\{f,i\})=$ $=IB\{If,Ii\}$. *Además* $I\phi = \phi$.

I3: Axioma de cofibración.

Para cualquier objeto X, *el morfismo inicial* $\phi_X : \phi \to X$ *es una cofibración.*

La composición de cofibraciones es cofibración. Además, toda cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *verifica la siguiente propiedad de extensión de homotopía (PEH):*

Sea $\varepsilon \in \{0,1\}$, *para cada diagrama conmutativo del tipo,*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "i"'] & IB \arrow[d, "H"] \\ A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

existe un morfismo extensión $E_\varepsilon : I\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ *tal que* $E_\varepsilon(Ii) = H$ *y* $E_\varepsilon i_\varepsilon = f$.

I4: Axioma de cilindro relativo.

Para una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, *el morfismo* $j = \{Ii, i_0, i_1\}$, *definido por el siguiente push-out es una cofibración:*

$$\begin{tikzcd} B \cup B \arrow[r, "\{i_0,i_1\}"] \arrow[d, tail, "i \cup i"'] & IB \arrow[d, tail, "\overline{i \cup i}"] \arrow[ddr, bend left, "Ii"] & \\ A \cup A \arrow[r, "\overline{\{i_0,i_1\}}"'] \arrow[drr, bend right, "\{i_0,i_1\}"'] & J \arrow[dr, "j"] & \\ & & IA \end{tikzcd}$$

I5: Axioma de intercambio.

Existe una transformación de intercambio $t : II \to II$, *verificando* $t(i_\varepsilon I) = Ii_\varepsilon$ *y* $t(Ii_\varepsilon) = i_\varepsilon I$, *para* $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Como consecuencia inmediata de esto surge,

Proposición IV.1.1

1. *Todo isomorfismo es cofibración.*
2. $\{i_0, i_1\} : A \cup A \to IA$ *es cofibración.*
3. i_0 *e* i_1 *son cofibraciones.*
4. $I(\{f,g\}) = \{If, Ig\}$. *Como caso particular* $I(f \cup g) = If \cup Ig$.
5. *El cilindro de toda cofibración es cofibración.*

Definición IV.1.2 *Sean* $i : B \rightarrowtail A$ *cofibración,* $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u(i)}$ *con* $u : B \to X$, *se dirá que* f_0 *es homótopo a* f_1 *relativo a* i *si existe un morfismo* $F : IA \to X$ *tal que hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "\{up, f_0, f_1\}"] \arrow[dr, tail, "\{Ii, i_0, i_1\}"'] & & X \\ & IA \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición IV.1.2 *La homotopía relativa a* i *es una relación de equivalencia.*

Demostración:

(a) Reflexiva.

$fp : f \simeq f$ rel. i.

(b) Simétrica.

Si $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i entonces $\hat{F} = Ei_1 : f_1 \simeq f_0$ rel. i, donde $E : IIA \to X$ es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{Ii, i_0, i_1\}"'] & IJ \arrow[d, "\{upp, F, f_0p\}"] \\ IA \arrow[r, "f_0p"'] & X \end{tikzcd}$$

(c) Transitiva.

Si $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i, $G : f_1 \simeq f_2$ rel. i entonces $F \vartriangle G = Di_1 : f_0 \simeq f_2$ rel. i, donde $D : IIA \to X$ es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "{\{Ii, i_0, i_1\}}"'] & IJ \arrow[d, "{\{upp, \hat{F}, G\}}"] \\
IA \arrow[r, "f_1 p"'] & X
\end{tikzcd}$$

□

Teorema IV.1.1 *Toda I-categoría es una categoría de cofibraciones con todos sus objetos fibrantes y cofibrantes usando como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía y como cofibraciones la clase cof. de la I-categoría.*

Proposición IV.1.3 *$f_0 \simeq f_1$ rel. i en una I-categoría si y sólo si $f_0 \simeq f_1$ rel. i en la categoría de cofibraciones asociada.*

Demostración:

Basta observar que en el siguiente push-out,

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "{\{(\bar{i})_0 ip, 1 \cup 1\}}"] \arrow[d, tail, "{\{Ii, i_0, i_1\}}"'] & B\{i, i\} \arrow[d, tail, "{\{i'_0, i'_1\}}"] \\
IA \arrow[r, "\omega"'] & Z^i
\end{tikzcd}$$

$(\{i'_0, i'_1\}, Z^i, p' = \{1, 1, p\})$ es un cilindro relativo a i.

□

Como consecuencia de esto se tiene que $[A, X]^{u(i)}$ coincide en ambas teorías.

Proposición IV.1.4 *Sean $u_0, u_1 : B \to X$ morfismos tales que $G : u_0 \simeq u_1$, $i : B \rightarrowtail A$ cofibración. Entonces $G^\varepsilon : [A, X]^{u_\varepsilon(i)} \to [A, X]^{u_{\varepsilon'}(i)}$ definido por $G^\varepsilon([\alpha]) = [E^\varepsilon_\alpha i_{\varepsilon'}]$, donde E^ε_α es la extensión del cuadrado*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "i"'] & IB \arrow[d, "G"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

es una aplicación, donde $\varepsilon \in \{0,1\}$, $\varepsilon' = (\varepsilon + 1)$ *mod.* 2.

Demostración:

G^ε está bien definido:

Si $H : \alpha \simeq \beta$ rel. i entonces $Ei_{\varepsilon'} : E^\varepsilon_\alpha i_{\varepsilon'} \simeq E^\varepsilon_\beta i_{\varepsilon'}$ rel. i donde E es la extensión de siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "\{Ii, i_0, i_1\}"'] & IJ \arrow[d, "\{G(Ip), E^\varepsilon_\alpha, E^\varepsilon_\beta\}"] \\ IA \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

□

Corolario IV.1.1 *Si D y E son extensiones de un mismo cuadrado con transformación i_ε entonces $Di_{\varepsilon'} \simeq Ei_{\varepsilon'}$ relativo a la cofibración de dicho cuadrado.*

Corolario IV.1.2 *G^ε es una biyección.*

Demostración:

G^ε y $G^{\varepsilon'}$ son aplicaciones inversas pues $E^\varepsilon_{E^{\varepsilon'}_\alpha i_\varepsilon}$ y $E^{\varepsilon'}_\alpha$ son extensiones de un mismo cuadrado y por el corolario IV.1.1 anterior se concluye el resultado.

□

Proposición IV.1.5 *Sean $G_0, G_1 \in Hom(IB, X)^{\{u_0,u_1\}(\{i_0,i_1\})}$ con $G_0 \simeq G_1$ rel. $\{i_0, i_1\}$. Entonces $G^\varepsilon_0 = G^\varepsilon_1$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.*

Demostración:

Sea $[\alpha] \in [A, X]^{u_\varepsilon(i)}$, se tiene que $G^\varepsilon_0([\alpha]) = [D^\varepsilon_\alpha i_{\varepsilon'}]$ y $G^\varepsilon_1([\alpha]) = [E^\varepsilon_\alpha i_{\varepsilon'}]$.

Sea $H : G_0 \simeq G_1$ rel. $\{i_0, i_1\}$, entonces $Ei_{\varepsilon'} : D^\varepsilon_\alpha i_{\varepsilon'} \simeq E^\varepsilon_\alpha i_{\varepsilon'}$ rel. i, donde E es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "\{Ii, i_0, i_1\}"'] & IJ \arrow[d, "\{Ht, D^\varepsilon_\alpha, E^\varepsilon_\beta\}"] \\ IA \arrow[r, "\alpha p"'] & X \end{tikzcd}$$

con t la transformación de intercambio.

□

Dados $x, y \in Hom(A, X)^{u(i)}$ se notará por $H_i(x, y) = [IA, X]^{\{up,x,y\}(\{Ii,i_0,i_1\}}$. Se definen

$$\hat{}: H_i(x, y) \to H_i(y, x)$$

$$\Delta: H_i(x, y) \times H_i(y, z) \to H_i(x, z)$$

de forma natural por $\widehat{[F]} = [\hat{F}]$ y $[F] \Delta [G] = [F \Delta G]$

Proposición IV.1.6 *$\hat{}$ y Δ son aplicaciones.*

Demostración:

Sea $H : F_0 \simeq F_1$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$, entonces

$$\{uppp, H, xpp\} : \{upp, F_0, xp\} \simeq \{upp, F_1, xp\}\ rel.\ \{i_0, i_1\}$$

y por la proposición IV.1.5 $\{upp, F_0, xp\}^0 = \{upp, F_1, xp\}^0$ y por tanto

$$[\hat{F}_0] = \{upp, F_0, xp\}^0([xp]) = \{upp, F_1, xp\}^0([xp]) = [\hat{F}_1].$$

Supóngase ahora $F_0 \simeq F_1$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$ y $G : G_0 \simeq G_1$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$. Por lo demostrado anteriormente existe $F : \hat{F}_0 \simeq \hat{F}_1$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$. Entonces

$$\{uppp, F, G\} : \{upp, \hat{F}_0, G_0\} \simeq \{upp, \hat{F}_1, G_1\}\ rel.\ \{i_0, i_1\}.$$

Por la proposición IV.1.5 $\{upp, \hat{F}_0, G_0\}^0 = \{upp, \hat{F}_1, G_1\}^0$ y por tanto

$$[F_0 \Delta G_0] = \{upp, \hat{F}_0, G_0\}^0([yp]) = \{upp, \hat{F}_1, G_1\}^0([yp]) = [F_1 \Delta G_1].$$

□

Una vez creadas las herramientas necesarias se van a obtener unos resultados que concluirán con el objetivo buscado, ver que los grupos de homotopía de una I-categoría son isomorfos a los respectivos de su categoría de cofibraciones asociada por el teorema IV.1.1.

Sea $\omega = IA \to Z^i$ el morfismo definido en la proposición IV.1.3,

Teorema IV.1.2 *Dada* $[F] \in [Z^i, X]^{\{x,y\}(\{i'_0,i'_1\})}$ *y* $[G] \in [Z^i, X]^{\{y,z\}(\{i'_0,i'_1\})}$,

(i) $\omega^*([\overline{F}]) = \widehat{\omega^*([F])}$.

(ii) $\omega^*([F] * [G]) = \omega^*([F]) \, \Delta \, \omega^*([G])$.

Demostración:

(i) Sea $(-1) = Ei_1$ donde E es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{i'_0, i'_1\}"'] & IB\{Ii, Ii\} \arrow[d, "\{\omega, i'_0 p\}"] \\
Z^i \arrow[r, "i'_0 p'"'] & Z^i
\end{tikzcd}$$

Dado $H : Z^i \to X$ se notará $-H = H(-1)$.

$p'p$ y $p'E$ son extensiones del cuadrado

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{i'_0, i'_1\}"'] & IB\{Ii, Ii\} \arrow[d, "\{p, p\}"] \\
Z^i \arrow[r, "p'"'] & A
\end{tikzcd}$$

y por el corolario IV.1.1 se concluye que $p' \simeq -p'$ rel. $\{i'_0, i'_1\}$. Por el teorema III.1.3, observando el siguiente cuadrado se tiene que $[\overline{F}] = [-F]$.

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[rr, tail, "\{i'_1, i'_0\}"] \arrow[dd, tail, "\{i'_0, i'_1\}"'] & & Z^i \arrow[dl, "\sim"', "1"] \arrow[dd, "\sim"', "p'"] \\
 & Z^i \arrow[dr, "\sim"', "p'"] & \\
Z^i \arrow[ur, "\sim", "-1"'] \arrow[rr, "\sim", "-p'"'] & & \mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

Se concluye que $\omega^*([\overline{F}]) = \omega^*([-F]) = [FEi_1\omega] = [FE(I\omega)i_1] = [\widehat{F\omega}] = \widehat{\omega^*([F])}$, pues $FE(I\omega)$ es una extensión del cuadrado que define $\widehat{F\omega}$, y por el corolario IV.1.1 $FE(I\omega)i_1 \simeq$ $\simeq \widehat{F\omega}$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$.

(ii) Se define $\pi = Di_1 : Z^i \to A\{i'_1, i'_0\}$ donde D es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "{\{i'_0, i'_1\}}"'] & IB\{Ii, Ii\} \arrow[d, "{\{(-\overline{i'_0})\omega, \overline{i'_1}\omega\}}"] \\
Z^i \arrow[r, "\overline{i'_0}i'_1p'"'] & A\{i'_1, i'_0\}
\end{tikzcd}$$

Se notará $F \cdot G = \{F, G\}\pi$.

pp y $\{p', p'\}D(I\omega)$ son extensiones respectivas de los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "{\{Ii, i_0, i_1\}}"'] & IJ \arrow[d, "{\{ipp, p, p\}}"] \\
IA \arrow[r, "p"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "{\{Ii, i_0, i_1\}}"'] & IJ \arrow[d, "{\{ipp, (-p')\omega, p\}}"] \\
IA \arrow[r, "p"'] & A
\end{tikzcd}$$

y si $H : p = p'\omega \simeq (-p')\omega$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$ entonces $\{ipp, H, pp\} : \{ipp, p, p\} \simeq \{ipp, (-p')\omega, p\}$ rel. $\{i_0, i_1\}$ y, por la proposición IV.1.5 $p \simeq (p' \cdot p')\omega$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$ o equivalentemente, por ser biyectiva la aplicación $\omega^* : [Z^i, A]^{\{1,1\}(\{i'_0, i'_1\})} \to [IA, A]^{\{ip,1,1\}(\{Ii, i_0, i_1\})}$, $p' \simeq p' \cdot p'$ rel. $\{i'_0, i'_1\}$.

Por el teorema III.1.3 aplicado al siguiente cuadrado se tiene que $[F \cdot G] = [F * G]$,

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[rr, tail, "i'_0 \cup i'_1"] \arrow[dd, tail, "{\{i'_0, i'_1\}}"'] & & A\{i'_1, i'_0\} \arrow[dl, "\sim"', "1"] \arrow[dd, "\sim"', "{\{p', p'\}}"] \\
& A\{i'_1, i'_0\} \arrow[dr, "\sim", "{\{p', p'\}}"'] & \\
Z^i \arrow[ur, "\sim", "\pi"'] \arrow[rr, "\sim", "p' \cdot p'"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Por lo ya visto $(-F)\omega \simeq \widehat{F\omega}$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$ y de forma análoga a la anterior

$$\{upp, (-F)\omega, G\omega\} \simeq \{upp, \widehat{F\omega}, G\omega\} \ rel. \ \{i_0, i_1\}$$

y por la proposición IV.1.5, $\{F, G\}D(I\omega)i_1 \simeq F\omega \vartriangle G\omega$ rel. $\{Ii, i_0, i_1\}$, pues $\{F, G\}D(I\omega)$ es una extensión para el cuadrado de definición de $F\omega \vartriangle G\omega$ sustituyendo $\{upp, \widehat{F\omega}, G\omega\}$

por $\{upp, (-F)\omega, G\omega\}$. De donde se concluye

$\omega^*([F] * [G]) = \omega^*([F \cdot G]) = [\{F, G\}Di_1\omega] = [\{F, G\}D(I\omega)i_1] = [F\omega \vartriangle G\omega] =$ $=\omega^*([F]) \vartriangle \omega^*([G])$.

□

Corolario IV.1.3 $\mathbf{H_iC_X}$ *con objetos el conjunto* $Hom(A, X)^{u(i)}$ *y morfismos* $H_i(x, y)$ *es un grupoide isomorfo al respectivo* $\mathbf{H_iC_X}$ *obtenido en la categoría de cofibraciones asociada.*

Demostración:

Es evidente observando que ω^* es una biyección y que por el teorema IV.1.2 anterior se conservan las operaciones.

□

Corolario IV.1.4 $H_i(x, x) \cong [Z^i, X]^{\{x,x\}(\{i_0', i_1'\})}$ *como grupos.*

Se nota por $(\pi_n^A(X), \vartriangle)$ y $(\pi_n^A(X), *)$ los grupos de homotopía con las operaciones indicadas.

Corolario IV.1.5 $(\pi_n^A(X), \vartriangle) \cong (\pi_n^A(X), *)$.

Demostración:

Un cilindro relativo a la cofibración inicial es IA pues, en este caso, $\omega = 1$.

□

IV.2 Categoría aditiva con cono natural

En el caso de la homotopía funtorial, los autores [6] y E. Padrón y S. Rodríguez-Machín [35] han visto que toda categoría aditiva con un cono natural da origen a una categoría aditiva con un cilindro natural y recíprocamente, donde las homotopías en ambas teorías son coincidentes. S. Rodríguez-Machín también en [38] hace un estudio sobre las categorías aditivas con un cono natural. Aquí se usará la noción de categoría aditiva con cono natural y se darán las principales propiedades y consecuencias sin demostración, pues éstas se pueden ver en los trabajos anteriormente mencionados, para concluir con el isomorfismo que existe entre los grupos de homotopía en ambas teorías.

Por último, utilizando también los resultados duales y que toda categoría aditiva con un par adjunto (cilindro-caminos) da origen a una categoría de modelo propia en el sentido de D.G. Quillen [36], se demuestra que los grupos de homotopía resultantes de ambas teorías son también isomorfos.

Definición IV.2.1 *Una C-categoría aditiva (categoría aditiva con cono natural) es una categoría aditiva* $\mathbf{A}$*, con un funtor cono* $C : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$*, una transformación natural* $k : id_{\mathbf{A}} \to C$ *y una clase distinguida de morfismos cof., llamados cofibraciones, verificando los siguientes axiomas:*

C1: Axioma de push-out.

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ *y un morfismo* $f : B \to X$*, existe el siguiente push out,*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ *es cofibración.* C *transforma push-outs en push-outs:* $C(B\{f,i\}) = CB\{Cf, Ci\}$*. Además* $C0 = 0$*, donde* 0 *es el objeto cero de la categoría.*

C2: Axioma de cofibración.

El morfismo $0 : 0 \to X$ *es una cofibración, para todo objeto* X*. La composición de cofibraciones es cofibración. Además, toda cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *posee la denominada propiedad de extensión de homotopía, esto es, tiene una retracción* r *para su cono* Ci*,* $(r(Ci) = 1.)$

C3: Axioma de cono relativo.

Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$*, el morfismo* $l = \{Ci, k\}$*, definido por el siguiente push-out es una cofibración:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "i"'] & CB \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "Ci"] & \\ A \arrow[r, "\bar{k}"'] \arrow[drr, bend right, "k"'] & B\{k,i\} \arrow[dr, "l"] & \\ & & CA \end{tikzcd}$$

C4: Axioma de retracción.

Existe una transformación $q : CC \to C$ verificando $q(kC) = 1$.

Como consecuencia inmediata de esto surge:

Proposición IV.2.1

1. *Los isomorfismos son cofibraciones.*
2. $C\{f,g\} = \{Cf, Cg\}$. *En particular* $C(f \oplus g) = Cf \oplus Cg$.
3. k *es cofibración.*
4. *El cono de toda cofibración es cofibración.*
5. $\{Ck, kC\} : A\{k,k\} \rightarrowtail CCA$ *es cofibración.*

Definición IV.2.2 *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $f : B \to X$, se dice que f es nulhomótopo relativo a i si existe un morfismo $H : CB \to X$ tal que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B\{k,i\} \arrow[rr, "\{0,f\}"] \arrow[dr, tail, "\{Ci,k\}"'] & & X \\ & CA \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Si la cofibración $i = 0_A$ se obtiene la definición de morfismo nulhomótopo. El conjunto de estos morfismos nulhomótopos se notará por $Nul(A,X)$.

Definición IV.2.3 *Dados $f, g \in Hom(A,X)^{u(i)}$ se dirá que f es homótopo a g relativo a i si $g - f \simeq 0$ rel. i.*

Proposición IV.2.2 *La homotopía relativa a i es relación de equivalencia.*

Se puede, entonces, definir de forma natural $[A,X]^{u(i)}$. Obsérvese que cuando $i = 0_A$, $[A,X] = Hom(A,X)/Nul(A,X)$, y por tanto, un grupo.

Proposición IV.2.3

Existe una transformación $\omega : CC \to C$ tal que $\omega(kC)=1$ y $\omega(Ck)=1$.

Teorema IV.2.1 *Toda C-categoría aditiva es una I-categoría aditiva.*

Teorema IV.2.2 *Toda I-categoría aditiva es una C-categoría aditiva.*

Proposición IV.2.4 *Sea $i : B \rightarrowtail A$ cofibración. Entonces $f \simeq g$ rel. i en la C-categoría si y sólo si $f \simeq g$ rel. i en la I-categoría equivalente.*

Por lo anterior, el corchete de homotopía $[A, X]^{u(i)}$ coincide en ambas teorías, por tanto, también coincide en la categoría de cofibraciones asociada.

Usando lo anterior, a partir de aquí, se verá el isomorfismo que existe entre los grupos de homotopía de una categoría aditiva con cono y la de cilindro asociada, y recíprocamente.

Definición IV.2.4 *Dado un objeto A, se define $\Sigma A = coker(k_A)$ la suspensión de A.*

Obsérvese que dicho conúcleo existe por ser k_A cofibración y ser éste un push-out.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "0"] \arrow[d, tail, "k"'] & 0 \arrow[d, tail, "0"] \\ CA \arrow[r, "l"'] & \Sigma A \end{tikzcd}$$

Iterando el proceso se obtiene $\Sigma^n A = \Sigma(\Sigma^{n-1} A)$, $n \in \mathbb{N}$, donde $\Sigma^0 A = A$.

Definición IV.2.5 *Dados dos objetos A,X, se define el n-ésimo grupo de homotopía de X bajo A a $(\pi_n^A(X), +) = [\Sigma^n A, X]$.*

En el párrafo anterior se ha visto que los grupos de homotopía de una categoría con cilindro natural son isomorfos a los respectivos de su categoría de cofibraciones asociada. Se tiene ahora que una categoría aditiva con cono natural es también una categoría aditiva con cilindro natural. Se verá que los grupos de homotopía obtenidos en la categoría aditiva con cono natural son isomorfos a los respectivos obtenidos en la categoría de cofibraciones asociada a la categoría con cilindro natural procedente de la primera, concluyéndose que los tres tipos de grupos de homotopía son isomorfos.

Proposición IV.2.5 *Dado un objeto A, SA es isomorfo a ΣA.*

Demostración:

En este caso aditivo $A \cup A = A \oplus A$, $IA = A \oplus CA$, $i_0 = j_0$, $i_1 = j_0 + j_1 k : A \to A \oplus CA$ y $p = p_0 : A \oplus CA \to A$.

Observando que lo siguiente es un push-out se concluye el resultado.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "0"] \arrow[d, tail, "k"'] & 0 \arrow[d, tail, "0"] \\ CA \arrow[r, "r"'] & SA \end{tikzcd}$$

donde $r = \overline{\{0,0\}}j_1$ con $\overline{\{0,0\}}$ la inducida de $\{0,0\}$ en el push-out de definición de SA.

□

Es fácil ver que si dos objetos A y A' son isomorfos en $\mathbf{A}$, existe una biyección entre $[A, X]$ y $[A', X]$ en cualquiera de las estructuras de homotopía hasta ahora consideradas, pues en todas ellas la homotopía es compatible con la composición de morfismos.

Teorema IV.2.3 *Sean* $F, G : CA \to X$, $F : x \simeq y$, $G : y \simeq z$.

(i) $\widehat{\{x,F\}} \simeq \{y, -F\}$ *rel.* $\{j_0, j_0 + j_1 k\}$.

(ii) $\{x,F\} \vartriangle \{y,G\} \simeq \{x, F+G\}$ *rel.* $\{j_0, j_0 + j_1 k\}$.

Demostración:

Obsérvese que si $F : x \simeq y$ entonces $\{x, F\} : A \oplus CA \to X$ hace $\{x,F\} : x \simeq y$.

(i) Se tiene que $\{x, 0, F, -F\omega\}$ es una extensión del siguiente cuadrado,

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & A \oplus A \oplus CA \oplus CA \arrow[d, "\{x,x,F,0\}"] \\ A \oplus CA \arrow[r, "\{x,0\}"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces $\{x, 0, F, -F\omega\}(j_0 + j_1 k) = \{y, -F\}$ y como dicho cuadrado define $\widehat{\{x,F\}}$, por el corolario IV.1.1 se concluye el resultado.

(ii) Por lo visto anteriormente $\{\widehat{\{x,F\}}j_0, \widehat{\{x,F\}}j_1, h_1, h_2\}$:$\widehat{\{x,F\}} \simeq \{y, -F\}$ rel. $\{i_0, i_1\}$ entonces $\{\widehat{\{x,F\}}j_0, y, \widehat{\{x,F\}}j_1, G, h_1, 0, h_2, 0\}$ es una homotopía relativa a $\{i_0, i_1\}$ entre $\{\widehat{\{x,F\}}j_0, y, \widehat{\{x,F\}}j_1, G\}$ y $\{y, y, -F, G\}$.

$\{y, 0, -F, (F+G)\omega\}$ es una extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & A \oplus A \oplus CA \oplus CA \arrow[d, "\{y, y, -F, G\}"] \\ A \oplus CA \arrow[r, "\{y, 0\}"'] & X \end{tikzcd}$$

Por la proposición IV.1.5, este cuadrado puede usarse para definir $\{x, F\} \vartriangle \{y, G\}$, observando que $\{y, 0, -F, (F+G)\omega\}i_1 = \{x, F+G\}$, por un razonamiento análogo al anterior se tiene lo buscado.

□

Corolario IV.2.1 *Dados dos objetos A, X se tiene*

$$(\pi_n^A(X), +) \cong (\pi_n^A(X), \vartriangle) \cong (\pi_n^A(X), *)$$

Demostración:

Sólo hay que ver el primer isomorfismo pues el segundo está visto en el párrafo anterior.

$\sigma^* = \overline{\{0,0\}}^* : [SA, X] \to [A \oplus CA, X]^{\{0,0\},(\{j_0, j_0 + j_1 k\})}$ es isomorfismo pues, por el teorema IV.2.3 anterior, dados $[F], [G] \in [SA, X]$, se tiene

$\sigma^*([F] + [G]) = [F\sigma + G\sigma] = [\{0, Fr\} + \{0, Gr\}] = [\{0, Fr + Gr\}] = [\{0, Fr\} \vartriangle \{0, Gr\}] =$
$= \sigma^*([F]) \vartriangle \sigma^*([G])$.

□

Todo lo hecho hasta aquí tiene una fácil dualización usando los conceptos de categoría de fibraciones, P-categoría o categoría con caminos naturales y A-categoría aditiva o categoría aditiva con arcos naturales, utilizando para definir los grupos de homotopía los lazos de un objeto. En categorías con construcciones adjuntas (cono-arcos o cilindro-caminos) los grupos de homotopía obtenidos a través de los funtores adjuntos son isomorfos.

Por otra parte también es cierto que, en categorías aditivas, construcciones adjuntas conos-arcos dan lugar a construcciones adjuntas cilindro-caminos, de forma que se obtiene grupos de homotopía isomorfos en ambas. Si en estas homotopías aditivas con funtores adjuntos se supone que la categoría tiene límites finitos se obtiene asociada una categoría de modelo propia con todos los objetos fibrantes y cofibrantes.

Toda categoría de modelo induce una categoría de cofibraciones restringida a sus objetos cofibrantes, así mismo induce una categoría de fibraciones restringida a sus objetos fibrantes. En este caso la categoría de cofibraciones y fibraciones inducidas por la homotopía aditiva funtorial adjunta y la inducida por la categoría de modelo propia asociada coinciden.

Para una visión más amplia de lo comentado aquí pueden consultarse [2], [6], [35], [36] y [38]

Como los grupos de homotopía de la categoría de cofibraciones y fibraciones asociada a la de modelo son isomorfos a los grupos de homotopía de éste se concluye:

Teorema IV.2.4 *Los grupos de homotopía aditivos de la homotopía funtorial adjunta son isomorfos en cualquiera de las estructuras de homotopía asociada, cono-arcos, cilindro-caminos, cofibraciones-fibraciones y categorías de modelo propias.*

Observando la definición del corchete de homotopía en una categoría aditiva con cono natural se tiene entonces:

Teorema IV.2.5 *El grupo fundamental de la homotopía aditiva funtorial es abeliano.*

Bibliografía

[1] BARRAT, M.G.

Homotopy ringoids and homotopy groups. Q.J. Math. Oxford (2), **5** (1954), 271-290.

[2] BAUES, H.J.

Algebraic homotopy. Cambridge University Press (1989).

[3] BAUES, H.J.

Commutator Calculus and Groups of Homotopy Classes. London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge University Press 50 (1981), 160 pages.

[4] BOUSFIELD, A.K. & KAN, D.M.

Homotopy Limits, Completions and Localizations. Lecture Notes in Math. **304**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[5] BROWN, K.S.

Abstract homotopy theory and generalizated sheaf cohomology. Trans. of AMS, **186** (1973), 419-458.

[6] DIAZ, F.J., GARCIA-CALCINES, J.M. & RODRIGUEZ-MACHIN, S.

Homotopía Algebraica: Descripción e interrelación de las principales teorías. Monografías Acad. Cien. Zaragoza **5** (1994).

[7] DIECK,T., KAMPS, K.H. & PUPPE, D.

Homotopietheorie. Lecture Notes in Math. 157, Springer-Verlag, (1970)

[8] DOLD, A.

Halbexakte Homotopiefunktoren. Lecture Notes in Math. 12, Springer-Verlag, (1966)

[9] DOLD, A.

Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, (1972).

[10] DWYER, W.G. & KAN, D.M.

Homotopy theory and simplicial grupoids. Proc. Konik. Neder. Akad., **87** (1984), 379-389.

[11] ECKMANN, B.

Homotopie et dualite. Colloque de Topologie algebraique Louvain, (1956).

[12] ECKMANN, B. & HILTON, P.J.

Groupes d'homotopie et dualité. Bull. Soc. Math. de France, **86** (1958), 271-281.

[13] ECKMANN, B. & HILTON, P.J.

Groups like structures in general categories, I multiplications. Ann. of Math., **145** (1962), 227-255.

[14] ECKMANN, B. & HILTON, P.J.

Unions and intersections in Homotopy Theory. Comment. Math. Helv., **38** (1964), 239-307.

[15] GABRIEL, P. & ZISMAN, M.

Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 35, Springer-Verlang, (1967).

[16] GANEA, T.

A generalization of the homology and homotopy suspension. Comment. Math. Helv., **39** (1965), 295-322.

[17] GOLASINSKI, M. & GROMADZKI, G.

The homotopy category of chain complex is a homotopy category. Colloq. Math., **47**, 2 (1982), 173-178.

[18] HALPERIN, S. & WATKISS, C.

Relative Homotopical Algebra. Lille Publ., IRMA.

[19] HELLER, A.

Homotopical Algebra in abelian categories. Annals of Math., **68** (1958), 484-525.

[20] HELLER, A.

Abstract homotopy in categories of cofibrations and the spectral sequence of Eilenberg--Moore. J. Math., **16** (1972).

[21] HILTON, P.J.

Homotopy theory of Modules and duality. International Symposium on Algebraic Topology. Univ. Nacional Autónoma de Mexico (1958), 273-281.

[22] HILTON, P.J.

Homotopy theory and duality. Nelson Gordon and Breach (1965).

[23] HILTON, P., MISLIN, G. & ROITBERG, J.

Localizations of Nilpotent Groups and Spaces. North Holland Math. Studies 15, Amsterdam (1975).

[24] HILTON, P.J. & STAMMBACH, U.

A Course in Homological Algebra. Springer GTM 4, New York (1971).

[25] HU, S.T.

Homotopy Theory. Academic Press, New York and London, (1959).

[26] HUBER, P.J.

Homotopy theory in general categories. Math. Annalen, **144** (1961), 361-385.

[27] HUBER, P.J.

Standard constructions in Abelian Categories. Math. Annalen, **146** (1962), 321-325.

[28] KAMPS, K.H.

Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopietheorie. Math. Zeitschrift, **124** (1972), 215-236.

[29] KAMPS, K.H.

Fundamentelgruppoid and Homotopien. Arch. Math., **24** (1973), 456-460.

[30] KAN, D.M.

Abstract homotopy I, II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41** (1955), 1092-1096: **42** (1956), 255-258.

[31] KAN, D.M.

On homotopy theory and C.s.s. groups. Ann. of Math., **68** (1958), 38-53.

[32] KLEISLI, H.

Homotopy theory in Abelian Categories. Canad. J. Math., **14** (1962), 139-169.

[33] KLEISLI, H.

Every standard construction is induced by a pair of adjount functors. Proc. A.M.S., **16**, 3 (1965), 544-546.

[34] MAC LANE, S.

Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag (1971).

[35] PADRON, E. & RODRIGUEZ-MACHIN, S.

Model additive categories. Suppl. Rendiconti Circolo Mat. Palermo. Serie II. n° 24 (1990), 465-474.

[36] QUILLEN, D.G.

Homotopical algebra. Lecture notes en Math. 43, Springer-Verlag (1967).

[37] QUILLEN, D.G.

Rational homotopy theory. Ann. of Math., **90** (1969), 205-295.

[38] RODRIGUEZ-MACHIN, S.

Homotopía en categorías aditivas. Rev. Academia de Ciencias de Zaragoza, **43** (1988), 73-91.

[39] SERRE. S.P.

Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math., **58** (1953).

[40] TANRE, D.

Homotopie Rationnelle; Modeles de Chen, Quillen, Sullivan. Lecture Notes in Math. 1025 Springer-Verlag (1983).

[41] WHITEHEAD, J.H.C.

A certain exact sequence. Ann. Math., **5** (1950), 51-110.

[42] WHITEHEAD, J.H.C.

Algebraic homotopy theory. Proc. Int. Congress of Mathematicians, Harvard, **2** (1950), 354-357.

[43] VARADARAJAN, K.

Numerical invariants in homotopical Algebra I, II. Can J. Math., **27** (1975), 901-934, 935-960.

[44] ZISMAN, M.

Espaces fibrés et groupes d'homotopie. Seminaire Henri Cartan. E.N.S. 11e (1958/59).

F. J. Díaz, J. García-Calcines, S. Rodríguez-Machín.
Departamento de Matemática Fundamental.
Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna.
C/ Astrofísico Fco. Sánchez s/n.
38271 - La Laguna.
S/C de Tenerife. España.