MONOGRAFIAS
DE LA
ACADEMIA
DE
CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

HOMOTOPIA ALGEBRAICA: DESCRIPCION E INTERRELACION DE LAS PRINCIPALES TEORIAS

Departamento de Matemática Fundamental
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna. Tenerife (Spain)

F. J. Díaz Díaz
J. M. García-Calcines
S. J. Rodríguez-Machín

N.º 5

1994

Depósito legal: Z. 3.912 — 1994

Imprime:
Coop. de Artes Gráficas
LIBRERIA GENERAL
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

Contenido

Introducción.

De todas las axiomáticas en homotopía, la dada por Baues en su libro "Algebraic Homotopy" [2] es la que contiene más ejemplos con unos axiomas más sencillos. Homotopías como la de los espacios topológicos, la de las cadenas de álgebras y la teoría de homotopía racional son desarrolladas en este sentido.

La idea de Baues es dar una axiomática en categorías generales de forma que se obtengan categorías homotópicas en el sentido de Whitehead [59] con la axiomática clásica para espacios topológicos, donde partiendo de dicha categoría establace una relación de equivalencia (relación de homotopía) entre los morfismos (aplicaciones continuas) compatible con su composición, de forma que se pueda crear la categoría cociente (categoría homotópica) como lo hace Mac Lane [43]. De esta forma se obtiene una clasificación de los objetos de la categoría (espacios topológicos) mediante los isomorfismos de esta nueva categoría (equivalencias de homotopía).

El hecho de que existan teorías, que se pueden llamar de homotopía por su similitud con la anterior, desarrolladas en otras categorías distintas a la de los espacios topológicos, como por ejemplo los complejos de cadena de álgebras diferenciables, las homotopías proyectivas e inyectivas de Eckmann y Hilton [31], etc. es lo que hace pensar en una axiomatización en categorías lo más generales posible. Esta axiomática presenta grandes ventajas. Las demostraciones y resultados obtenidos con ella son aplicables a cualquier homotopía que verifique dicha axiomática. Por otro lado, surgen nuevas categorías que la verifican, y por tanto nuevas clasificaciones de sus objetos.

Lo ideal sería encontrar una homotopía en este sentido que resolviera algunos de los principales problemas de la homotopía clásica, como son la clasificación de los tipos de homotopía de los poliedros, relacionar los morfismos, salvo homotopía, entre dos espacios X e Y en función de la clasificación de dichos espacios, cálculo efectivo de los grupos de homotopía de un espacio X, etc. Axiomáticas en este sentido han sido dadas por Kan [40] con su aproximación simplicial, Heller [28] con sus h-c categorías, Quillen [47] con sus categorías de modelo, Huber [32] con sus construcciones estándar, Brown [6], etc. Pero la mayoría de ellas adolecen de no englobar algunas clasificaciones debidas a teorías de homotopía que no se pueden incluir en sus axiomáticas, tales como la obtenida por Quillen [48], que vio que un álgebra de Lie diferencial es un equivalente algebraico del tipo de homotopía de un espacio racional simplemente conexo, por Sullivan [55], que obtuvo el resultado dual usando cocadenas de álgebras conmutativas y el funtor de Rham, por Whitehead [57], que vio que el complejo de cadena celular de un recubridor universal es un equivalente algebraico para un poliedro 3-dimensional, y además clasificó los poliedros 4-dimensionales simplemente conexos con su "Certain exact sequence" [59], etc.

La axiomática definida por Baues engloba todas estas teorías de homotopía, y además obtiene dichas clasificaciones, utilizando lo que él denomina "torres de categorías".

Es por ello que este trabajo se basa en su axiomática para definir una nueva en categorías aditivas. La idea no es nueva, ya que en la homotopía clásica de los espacios topológicos el cono se obtiene a través del cilindro reduciendo una de sus tapas a un punto, en nuestro caso el objeto inicial de la categoría.

El concepto utilizado es el de cilindro dado por Baues con sus I-categorías. Partiendo de él y usando la aditividad de la categoría, se da la noción de C-categoría o categoría con cono natural. Esta noción ha sido introducida por Padrón y Rodríguez-Machín en [45], y algunos de los resultados expresados aquí también han sido obtenidos por el segundo autor en [45] y [50]. Este trabajo ofrece un esquema válido similar al expresado por Whitehead en [59].

Los resultados ya conocidos son desarrollados exhaustivamente, y se obtienen otros nuevos e interesantes que se comentan a continuación.

En el primer capítulo se analizan las I-categorías en el sentido de Baues. Se da su definición y se obtienen las primeras consecuencias, llegando incluso a reducir sus axiomas, puesto que alguna parte de ellos es consecuencia de los otros. Esto es un resultado nuevo no expresado hasta ahora en ninguna parte. Se sigue definiendo lo que es la relación de homotopía, comprobando que efectivamente se puede definir la categoría homotópica. También esto último es inédito. Por último se estudia brevemente el concepto denominado categoría "con todas las cofibraciones".

En el segundo capítulo se analizará con el ya nombrado esquema de Whitehead el concepto de C-categoría aditiva. Se da su definición, y análogamente al capítulo primero, se analizan sus primeras consecuencias, pudiendo reducir los axiomas, como en el caso anterior. Se define la relación de homotopía y se obtiene la categoría homotópica, siendo todos estos resultados nuevos. Se hace un estudio de las C-categorías "con todas las cofibraciones" y se obtiene la equivalencia, en el caso aditivo, entre las C-categorías y las I-categorías, o lo que es lo mismo, entre las categorías con cono natural y las categorías con cilindro natural. Los resultados de este capítulo, salvo los expresados anteriormente como nuevos, han sido obtenidos por Padrón y Rodríguez-Machín en [45] y [50], pero aquí se dan demostraciones más sencillas, simples y exhaustivas de ellos.

En el tercer capítulo se estudian las categorías de cofibraciones, definidas por Baues en [2], se da su definición y se estudian sus primeras consecuencias. Usando el concepto de homotopía dado por Baues para estas categorías, se demuestra que éste es único, reordenando para ello la demostración dada por Baues, y se obtiene la categoría homotópica correspondiente. Se ve también que toda I-categoría es una categoría de cofibraciones, haciendo más sencilla la demostración que para ello usa Baues.

En el capítulo cuarto se desarrolla, sin demostración, la teoría dual de todo lo anterior. Usando el concepto de IP-categoría dado por Baues se ve que en el caso aditivo la propiedad de elevación de homotopía relativa se obtiene como consecuencia de los otros axiomas y de la aditividad, resultado también obtenido por Padrón y Rodríguez-Machín en [45], aunque aquí se simplifica su demostración. Se obtiene la equivalencia entre IP-categoría aditiva y CA-categoría aditiva, comprobando también la equivalencia entre las respectivas categorías homotópicas, obteniendo esto como otro de los resultados inéditos de este trabajo. Por último se demuestra, como principal resultado, que toda IP-categoría aditiva con límites directos e inversos finitos es una categoría de modelo propia en el sentido de Quillen, resultado que había sido demostrado por Padrón y Rodríguez-Machín en [45] para IP-categorías aditivas con todas las cofibraciones y fibraciones. Lo que da importancia a este teorema es precisamente el poder prescindir de esta condición.

En el quinto capítulo se dan ejemplos de la teoría desarrollada a lo largo del trabajo.

Es importante destacar que aparte de los nuevos resultados obtenidos, este trabajo ofrece, basado en la estructura algebraica de homotopía de Whitehead, un estudio de las principales axiomáticas obtenidas funtorialmente (cono, cilindro, caminos, arcos) y no funtorialmente (cofibraciones y fibraciones) que existen actualmente, estableciendo las relaciones entre ellas.

Capítulo I

Categoría con cilindro natural.

En este capítulo se define lo que se llamará una *categoría con cilindro natural* o *I-categoría*, deduciendo sus primeras propiedades. Luego se define la *homotopía bajo una cofibración*, demostrando que es una relación de equivalencia, y viendo la relación de homotopía como caso particular. A continuación se demuestra que esta relación es compatible con la composición de morfismos. Por último se da el concepto de *I-categoría con todas las cofibraciones.*

I.1 I-categoría.

En esta sección se ve la definición de I-categoría y algunas consecuencias de la misma.

Definición I.1.1 Una *I-Categoría (categoría con cilindro natural)*, es una categoría $\mathbf{C}$ con objeto inicial $\varnothing$, un funtor covariante $I : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ denominado funtor cilindro, transformaciones naturales $i_0, i_1 : id_{\mathbf{C}} \to I$ y $p : I \to id_{\mathbf{C}}$, y una clase distinguida de morfismos *cof.*, denominados cofibraciones y representados por "$\rightarrowtail$", verificando los siguientes axiomas:

(I1) Axioma de cilindro.

$pi_\varepsilon = 1$, *para* $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

(I2) Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es también una cofibración. Además el funtor I transforma push outs en push outs, esto es:

$$I(B\{f,i\}) = IB\{If, Ii\}.$$

También se verifica que $I\varnothing = \varnothing$.

(I3) Axioma de cofibración.

Para cualquier objeto X, el morfismo inicial $\phi_X : \varnothing \rightarrowtail X$ es una cofibración. Así, dados los objetos X e Y se puede definir su suma como $X + Y = \varnothing\{\phi_X, \phi_Y\}$.

La composición de cofibraciones es cofibración. Además, toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ verifica la siguiente *propiedad de extensión de homotopía (PEH)* en **C**:

Sea $\varepsilon \in \{0,1\}$, para cada diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "i"] & IB \arrow[d, "H"] \arrow[dr, bend left, "Ii"] & \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "i_\varepsilon"'] & X & IA \arrow[l, "E_\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

existe un morfismo $E_\varepsilon : IA \rightarrow X$ tal que $E_\varepsilon(Ii) = H$ y $E_\varepsilon i_\varepsilon = f$.

(I4) Axioma del cilindro relativo.

Para una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el morfismo j, definido por el siguiente push out (axioma (I2)) y por la naturalidad de la transformación $\{i_0, i_1\}$, es una cofibración:

$$\begin{tikzcd}
B+B \arrow[r, tail, "\{i_0,i_1\}"] \arrow[d, tail, "i+i"] & IB \arrow[d, tail, "\overline{i+i}"] \arrow[dd, bend left, "Ii"] \\
A+A \arrow[r, tail, "\overline{\{i_0,i_1\}}"'] \arrow[dr, bend right, "\{i_0,i_1\}"'] & J \arrow[d, "j"] \\
& IA
\end{tikzcd}$$

donde $i+i$, $\{i_0,i_1\}$ son definidas en la proposición I.1.1.

(I5) Axioma de intercambio.

Existe una transformación $T : II \to II$, verificando $T(i_\varepsilon I) = Ii_\varepsilon$ y $T(Ii_\varepsilon) = i_\varepsilon I$, para $\varepsilon \in \{0,1\}$. Se llamará a T *transformación de intercambio.*

Proposición I.1.1 (Consecuencias.)

1. *Por el axioma (I3) se tiene que* $\phi : \varnothing \rightarrowtail X$ *es una cofibración, y por (I2) existirá el cuadrado:*

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, tail, "\phi"] \arrow[d, tail, "\phi"] & A \arrow[d, tail, "j_0"] \\
B \arrow[r, tail, "j_1"] & A+B
\end{tikzcd}$$

con j_0 *y* j_1 *cofibraciones.*

2. *Dados dos morfismos* $f : B \to Y$ *y* $g : B' \to Y$*, por la propiedad de push out aplicada a B+B', existe un morfismo* $\{f,g\} : B + B' \to Y$*, único verificando que* $\{f,g\}j_0 = f$ *y* $\{f,g\}j_1 = g$.

En general, el único morfismo inducido por f *y* g *en cualquier push out se notará por* $\{f,g\}$.

En el caso en que, a su vez, f *y* g *sean morfismos soluciones de push outs* ($f = \{f_0,f_1\}$ *y* $g = \{g_0,g_1\}$) *si no hay posibilidad de error se notará simplemente* $\{f_0,f_1,g_0,g_1\}$. *Según este convenio la cofibración* j *del axioma (I4) se notará por* $\{Ii,i_0,i_1\}$.

3. *Dados dos morfismos* $f : B \to A$ *y* $g : B' \to A'$*, por la propiedad de push out de B+B', existe un único morfismo* $f+g : B+B' \to A+A'$ *verificando que:*

$$\begin{cases} j_0 f = (f+g)j_0 \\ j_1 g = (f+g)j_1 \end{cases}$$

4. *Todo isomorfismo es cofibración. Basta observar el siguiente push out:*

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, tail, "\phi"] \arrow[d, tail, "\phi"] & A \arrow[d, tail, "f"] \\
\varnothing \arrow[r, tail, "\phi"] & B
\end{tikzcd}$$

5. *Si en el axioma (I4) se considera* $\mathrm{B} = \varnothing$*, entonces* $j = \{i_0, i_1\}$*, y por tanto* $\{i_0, i_1\}$ *es cofibración.*

6. j_0 *y* j_1 *son cofibraciones (consecuencia 1),* $\{i_0, i_1\}$ *también lo es (consecuencia 5) y por (I3) la composición de cofibraciones es cofibración, de donde* i_0 *e* i_1 *son también cofibraciones.*

7. *Si* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$*,* $i' : \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A}'$ *son cofibraciones, entonces* $i + i' : \mathrm{B} + \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A} + \mathrm{A}'$ *también lo es.*

Como la composición de cofibraciones es cofibración, basta ver que:

a) $(f' + g')(f + g) = f'f + g'g$.

b) $(i + 1)$ *y* $(1 + i')$ *son cofibraciones.*

a) Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, tail, "\phi"] \arrow[d, tail, "\phi"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j_0"] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[dd, tail, "j_0"] & C \arrow[ddd, tail, "j_0"] \\
A' \arrow[r, tail, "j_1"'] \arrow[d, "g"'] & A+A' \arrow[dr, "f+g"] & & \\
B' \arrow[rr, tail, "j_1"'] \arrow[d, "g'"'] & & B+B' \arrow[dr, "f'+g'"] & \\
C' \arrow[rrr, tail, "j_1"'] & & & C+C'
\end{tikzcd}$$

como

$$(f'+g')(f+g)j_0 = (f'+g')j_0 f = j_0 f' f = (f'f+g'g)j_0$$

$$(f'+g')(f+g)j_1 = (f'+g')j_1 g = j_1 g' g = (f'f+g'g)j_1$$

por la propiedad de push out se obtiene:

$$(f'+g')(f+g) = (f'f+g'g)$$

b) Observando el siguiente push out y aplicando el axioma (I2) se obtiene que $i+1$ *es cofibración:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "j_0"] \arrow[d, tail, "i"] & B+B' \arrow[d, tail, "i+1"] \\ A \arrow[r, tail, "j_0"] & A+B' \end{tikzcd}$$

de forma análoga, usando i' *y* j_1 *se obtiene que* $1+i'$ *es cofibración.*

8. *Por el axioma (I2), I transforma push outs en push outs, y por tanto* $I(\{f,g\}) = \{If, Ig\}$. *Como caso particular* $I(f+g) = If + Ig$.

9. *El cilindro de toda cofibración es cofibración.*

Sea $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *una cofibración. Considérese un diagrama como el que aparece en (I4):*

$$\begin{tikzcd} B+B \arrow[r, tail, "\{i_0,i_1\}"] \arrow[d, tail, "i+i"] & IB \arrow[d, tail, "\overline{i+i}"] \arrow[ddr, bend left, "Ii"] & \\ A+A \arrow[r, tail, "\overline{\{i_0,i_1\}}"'] \arrow[drr, bend right, "\{i_0,i_1\}"'] & J \arrow[dr, "j"] & \\ & & IA \end{tikzcd}$$

- $(i+i)$ *cofibración, y por tanto su inducida* $\overline{i+i}$ *también lo es.*
- *El axioma (I4) garantiza que* j *es cofibración.*
- *La composición de cofibraciones es cofibración.*
- $Ii = j(\overline{i+i})$.

Y por tanto, como consecuencia de todo ello, (Ii) es cofibración.

□

I.3 Categoría con cilindro natural y todas las cofibraciones.

Obsérvese que el axioma ($I3$) afirma que toda cofibración verifica la PEH, pero pudiera suceder que un morfismo la verifique y no sea cofibración. Esta propiedad se puede utilizar para definir la clase de cofibraciones. Cuando esto sucede la I-categoría se dice que posee todas las cofibraciones, y se tiene en este caso que algunos de los axiomas se simplifican bastante.

Definición I.3.1 Una *I-categoría con todas las cofibraciones* es una I-categoría $\mathbf{C}$, donde un morfismo es cofibración si y sólo si verifica la PEH.

Teorema I.3.1 Una I-categoría con todas las cofibraciones es una categoría $\mathbf{C}$ con objeto inicial $\varnothing$, un funtor covariante $I : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, transformaciones naturales $i_0, i_1 : id_{\mathbf{C}} \to I$ y $p : I \to id_{\mathbf{C}}$, y una clase distinguida de morfismos *cof.*, denominados cofibraciones y definidos por la PEH, verificando los siguientes axiomas:

(I1)' Axioma de cilindro.

$pi_\varepsilon = 1$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

(I2)' Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{B}\{f, i\} \end{tikzcd}$$

Además el funtor I transforma push outs en push outs. También se verifica que $I\varnothing = \varnothing$.

(I3)' Axioma del cilindro relativo.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, el morfismo j, definido por el siguiente push out, es una cofibración:

$$\begin{tikzcd}
B+B \arrow[r, "\{i_0,i_1\}"] \arrow[d, "i+i"] & IB \arrow[d, "\overline{i+i}"] \arrow[ddr, bend left, "Ii"] & \\
A+A \arrow[r, "\overline{\{i_0,i_1\}}"'] \arrow[drr, bend right, "\{i_0,i_1\}"'] & J \arrow[dr, "j"] & \\
 & & IA
\end{tikzcd}$$

(I4)' Axioma de intercambio.

Existe una transformación $T : II \to II$, verificando $T(i_\varepsilon I) = Ii_\varepsilon$ y $T(Ii_\varepsilon) = i_\varepsilon I$, para $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Demostración:

Los axiomas (I1), (I4) e (I5) son iguales a los (I1)', (I3)' e (I4)' respectivamente.

Para probar (I2) basta ver que la inducida por una cofibración en un push out verifica la PEH.

Obsérvese el siguiente diagrama, donde el cuadrado de la izquierda es un push out, y el diagrama superior conmuta, por la naturalidad de i_ε:

$$\begin{tikzcd}
 & & IB \arrow[d, "If"] \arrow[dddr, bend left, "Ii"] & \\
B \arrow[urr, bend left, "i_\varepsilon"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[r, tail, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "\overline{i}"] & IX \arrow[d, "H"] & \\
A \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[drrr, bend right, tail, "i_\varepsilon"'] & B\{f,i\} \arrow[r, "g"] & Y & \\
 & & & IA \arrow[ul, "G"']
\end{tikzcd}$$

Por la PEH existe un morfismo $G : IA \to Y$ verificando que $G(Ii) = H(If)$ y $Gi_\varepsilon = g\overline{f}$.

Por el axioma (I2)' se tiene el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd}
IB \arrow[r, "If"] \arrow[d, tail, "Ii"] & IX \arrow[d, tail, "I\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
IA \arrow[r, "I\bar{f}"'] \arrow[drr, bend right, "G"'] & I(B\{f,i\}) \arrow[dr, "F"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

y por tanto existe un único morfismo

$$F : I(B\{f,i\}) \to Y$$

verificando $F(I\bar{f}) = G$ y $F(I\bar{i}) = H$.

Además, usando la propiedad push out del cuadrado de la izquierda del diagrama inicial, se concluye que $Fi_\varepsilon = g$, y por tanto $\bar{i}$ verifica la PEH.

Para (I3) basta comprobar que la composición de cofibraciones y el morfismo inicial verifican la PEH.

Sean $j : C \rightarrowtail B$ e $i : B \rightarrowtail A$, cofibraciones.

Considérese el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "j"] & IC \arrow[dd, "H"] \arrow[ddd, bend left, "I(ij)"] \\
B \arrow[d, tail, "i"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, tail, bend right, "i_\varepsilon"'] & X \\
& IA
\end{tikzcd}$$

por la PEH de j existe un morfismo $F : IB \to X$, de forma que $Fi_\varepsilon = fi$ y $F(Ij) = H$.

Y por la PEH de i, se obtiene un morfismo $G : IA \to X$ verificando $Gi_\varepsilon = f$ y $G(Ii) = F$.

Además: $GI(ij) = G(Ii)(Ij) = F(Ij) = H$. Por tanto ij verifica la PEH.

Considérese el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \overset{i_\varepsilon}{\rightarrowtail} & I(\varnothing) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Obsérvese que $i_\varepsilon = \phi$ y por tanto todo cuadrado conmuta (para dos morfismos H y f cualesquiera). Por el axioma (I2)' $I(\varnothing) = \varnothing$, de donde $H = \phi$. También $I(\phi) = \phi$. $F = fp$ hace que ϕ verifique la PEH. □

Capítulo II

Categoría aditiva con cono natural.

En este capítulo se define el concepto de *categoría aditiva con cono natural*, o *C-categoría aditiva*, deduciendo en primer lugar sus propiedades, para luego definir el concepto de *homotopía bajo una cofibración*, demostrando que es una relación de equivalencia y viendo la relación de homotopía como caso particular. A continuación se prueba la compatibilidad de esta relación con la composición de morfismos, y se da el concepto de *objeto contráctil*. También se define la *C-categoría aditiva con todas las cofibraciones*, y por último se demuestra la equivalencia entre los conceptos de C-categoría aditiva e I-categoría aditiva, comprobando que las homotopías definidas son también equivalentes.

II.1 C-categoría aditiva.

En esta sección se ve la definición de C-categoría aditiva y las primeras consecuencias de la misma.

Definición II.1.1 Una *C-categoría aditiva* es una categoría aditiva $\mathbf{A}$, con un funtor covariante $C : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ denominado funtor cono, una transformación natural $k : id_{\mathbf{A}} \to C$ y una clase distinguida de morfismos $cof.$, llamados cofibraciones, verificando los siguientes axiomas:

(C1) Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

Donde $\bar{i}$ es también una cofibración. Además el funtor C transforma push outs en push outs.

También se verifica que $C0 = 0$, donde 0 es el objeto cero de la categoría.

(C2) Axioma de cofibración.

El morfismo $0 : 0 \to X$ es una cofibración, para todo objeto X. La composición de cofibraciones es cofibración. Además, toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ tiene una retracción para su cono, o lo que es lo mismo, existe un morfismo $u : CA \to CB$ tal que $u(Ci) = 1$. A esto último se le denomina propiedad de extensión de homotopía (PEH).

(C3) Axioma del cono relativo.

Para una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el morfismo l, definido por el siguiente push out (axioma (C1)) y por la naturalidad de la transformación k, es una cofibración:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "i"] & CB \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \arrow[dr, bend left, "Ci"] & \\ A \arrow[r, "\bar{k}"'] \arrow[rr, bend right, "k"'] & L \arrow[r, "l"] & CA \end{tikzcd}$$

(C4) Axioma de retracción.

Existe una transformación $q : CC \to C$ verificando que: $q(kC) = 1$.

Proposición II.1.1 (Consecuencias.)

1. *Al ser* **A** *una categoría aditiva, el + definido en el Capítulo I se transforma en $\oplus$, y ahora + simbolizará la operación suma de morfismos de la categoría aditiva.*

2. $j_0 : A \rightarrowtail A \oplus B$ *y* $j_1 : B \rightarrowtail A \oplus B$ *son cofibraciones por la misma razón que en el Capítulo I.*

3. *Los isomorfismos son cofibraciones, por la misma razón que en el Capítulo I.*

4. *Por el axioma (C1), C transforma push outs en push outs, luego* $C\{f,g\} =$ $= \{Cf, Cg\}$. *Como caso particular* $C(f \oplus g) = Cf \oplus Cg$.

5. *Si en el axioma (C3) se toma como cofibración el morfismo* $0 : 0 \rightarrowtail \mathrm{X}$, *entonces* $l = k : \mathrm{X} \to C\mathrm{X}$, *y por tanto k es cofibración.*

6. *El cono de cualquier cofibración es cofibración, pues el axioma (C3) garantiza que* $Ci = l\bar{i}$, *donde l es cofibración e $\bar{i}$ también, por el axioma (C1). Entonces, por el axioma (C2), Ci es cofibración al ser composición de ellas. Obsérvese* $l = \{Ci, k\}$.

7. *Si en el axioma (C3) se toma $i = k$, entonces $l = \{Ck, kC\}$, y por tanto $\{Ck, kC\}$ es cofibración.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, tail, "k"] & CA \arrow[d, tail, "\bar{k}"] \arrow[ddr, tail, bend left, "Ck"] & \\
CA \arrow[r, tail, "\bar{k}"'] \arrow[drr, tail, bend right, "kC"'] & L \arrow[dr, tail, "l"] & \\
 & & CC\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

8. *Si en el axioma (C3) se toma $i = 1_{\mathrm{B}}$, entonces $l = \{1, k\}$, y por tanto $\{1, k\}$ es cofibración.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, tail, "1"] & CB \arrow[d, tail, "\bar{1} = 1"] \arrow[ddr, tail, bend left, "C1 = 1"] & \\
B \arrow[r, tail, "\bar{k} = k"'] \arrow[drr, tail, bend right, "k"'] & L{=}CB \arrow[dr, tail, "l"] & \\
 & & C\mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

□

II.2 Homotopía.

Definición II.2.1 Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, y dado un morfismo $f : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, se dice que f es *nulhomótopo relativo a i* cuando existe un morfismo $H : C\mathrm{A} \to \mathrm{X}$, denominado nulhomotopía rel. i, que verifica $Hk = f$ y $H(Ci) = 0$.

Esto se denotará $H : f \simeq 0$ rel. i.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L} \arrow[rr, "\{0,f\}"] \arrow[dr, tail, "l"'] & & \mathrm{X} \\
& C\mathrm{A} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que por definición $fi = 0$.

En el caso que la cofibración sea 0, cualquier morfismo $f : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ es nulhomótopo si existe un morfismo $H : C\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tal que $Hk = f$ $(H : f \simeq 0)$.

Definición II.2.2 Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, y dados dos morfismos f y g, se dice que f *es homótopo a* g *relativo a* i ($f \simeq g$ rel. i) si y sólo si $(g - f) \simeq 0$ rel. i.

Obsérvese que por definición $fi = gi$.

Si $i = 0$, se dirá simplemente que f y g son homótopos ($f \simeq g$).

Proposición II.2.1 *Ser homótopo relativo a i es una relación de equivalencia.*

Demostración:

- *Reflexiva.*

Se toma la nulhomotopía $H = 0 : f - f \simeq 0$ rel. i.

- *Simétrica.*

Si $H : g - f \simeq 0$ rel. i entonces $-H : f - g \simeq 0$ rel. i.

- *Transitiva.*

Si $H : g - f \simeq 0$ rel. i y $G : h - g \simeq 0$ rel. i, entonces $G + H : h - f \simeq 0$ rel. i. □

Obsérvese que aunque $\mathbf{A}$ sea aditiva, la categoría bajo un objeto $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$ no lo es. La aditividad de $\mathbf{A}$ permite sustituir en el caso de la cofibración cero la proposición anterior por la siguiente equivalente:

Proposición II.2.2 $Nul(\mathrm{A},\mathrm{X}) = \{f : \mathrm{A} \to \mathrm{X} / f \simeq 0\}$ *es un subgrupo de* $Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})$.

Demostración:

Si $H : f \simeq 0$ y $H' : f' \simeq 0$, entonces $H - H' : f - f' \simeq 0$. □

Proposición II.2.3 *La relación de homotopía rel. i es compatible con la composición de morfismos, esto es, si $f \simeq g$ rel. i y $f' \simeq g'$ rel. fi, entonces $f'f \simeq g'g$ rel. i.*

Demostración:

$H : f \simeq g$ rel. i y $G : f' \simeq g'$ rel. fi, entonces $f'H : f'f \simeq f'g$ rel. i y $G(Cg) : f'g \simeq g'g$ rel. i.

Luego, por la propiedad transitiva $f'f \simeq g'g$ rel. i. □

Análogamente a lo hecho en el Capítulo I, se definen las categorías **Ah** y $\mathbf{cof(A)^B h}$.

Nótese que, por el axioma (C1), toda cofibración tiene conúcleo, por lo cual se puede caracterizar la homotopía relativa de la siguiente forma:

Teorema II.2.1 *$f \simeq 0$ rel. i si y sólo si $\tilde{f} : Coker(i) \to$ X (inducida de f en el conúcleo) es nulhomótopa.*

Demostración:

Obsérvese que $\tilde{f}$ existe porque $fi = 0$.

($\Rightarrow$) Sea $H : f \simeq 0$ rel. i. Como $H(Ci) = 0$ existirá $\tilde{H} : C(Coker\ \ i) \to$ X, con $\tilde{H}k = \tilde{f}$. Nótese que por el axioma (C1), C conserva conúcleos.

($\Leftarrow$) Sea $\tilde{H} : \tilde{f} \simeq 0$, entonces $\tilde{H}(Cq) : f \simeq 0$ rel. i, donde q es el morfismo proyección sobre el conúcleo. □

Definición II.2.3 Un objeto X se dice que es *contráctil* cuando su identidad $1 :$ X $\to$ X es nulhomótopa.

Proposición II.2.4 *El cono de cualquier objeto* X, *C*X, *es contráctil.*

Demostración:

Basta aplicar el axioma (C4). □

Proposición II.2.5 *Sea $f :$ X $\to$ Y, entonces $f \simeq 0$ si y sólo si se factoriza a través de un objeto contráctil.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $f \simeq 0$ entonces $f = Hk$, con $H : C$X$\to$Y, y por tanto f se factoriza a través del objeto contráctil CX (proposición II.2.4).

($\Leftarrow$) Sea $f = rs$, con $s :$ X $\to$ Z, $r :$ Z $\to$ Y. Si Z es contráctil $1_Z = Hk$, con $H : C$Z $\to$ Z. Luego $f = r(Hk)s = rH(Cs)k$, y por tanto $f \simeq 0$. □

Corolario II.2.1 *Sea $f :$ X $\to$ Y. Si* X *es contráctil o* Y *contráctil, entonces $f \simeq 0$.*

II.3 C-categoría aditiva con todas las cofibraciones.

Análogamente al Capítulo I, los axiomas de una C-categoría aditiva se pueden reducir cuando las cofibraciones son definidas por la PEH.

Definición II.3.1 Una *C-categoría aditiva con todas las cofibraciones* es una C-categoría aditiva $\mathbf{A}$, donde un morfismo es cofibración si y sólo si verifica la PEH.

Teorema II.3.1 Una C-categoría aditiva con todas las cofibraciones es una categoría aditiva $\mathbf{A}$, con un funtor covariante $C : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, una transformación natural $k : id_{\mathbf{A}} \to C$ y una clase distinguida de morfismos $cof.$, llamados cofibraciones y definidos por la PEH, verificando los siguientes axiomas:

(C1)' Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{B}\{f,i\} \end{tikzcd}$$

el funtor C transforma push outs en push outs. También se verifica que $C0 = 0$.

(C2)' Axioma de todas las cofibraciones.

Existe una transformación $p : CC \to C$ tal que $p(Ck) = 1$, y dada una cofibración i existe un morfismo p_i tal que $p_i(Ck) = 1$ y $p_i(CCi) = (Ci)p$.

(C3)' Axioma de retracción.

Existe una transformación $q : CC \to C$ verificando que: $q(kC) = 1$.

Demostración:

- Se verá en primer lugar que de (C1), (C2), (C3) y (C4) se derivan (C1)', (C2)' y (C3)':

Es evidente que (C1)' y (C3)' están contenidos en (C1) y (C4), respectivamente.

Para (C2)', por la consecuencia 5 de II.1.1, k es cofibración, y por lo tanto verifica la PEH, luego existe $p : CC \to C$ tal que $p(Ck) = 1$.

Sea $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración, entonces $Ci = (Ci)p(Ck)$. Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C\mathrm{B} \arrow[r, tail, "Ck"] \arrow[d, tail, "Ci"'] & CC\mathrm{B} \arrow[d, tail, "C\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "(Ci)p"] & \\
C\mathrm{A} \arrow[r, tail, "C\bar{k}"] \arrow[drr, bend right, "1"'] & C\mathrm{B}\{Ck, Ci\} \arrow[dr, "m"] & \\
& & C\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

por la propiedad push out de $\mathrm{B}\{k, i\}$, existirá $m : C\mathrm{B}\{Ck, Ci\} \to C\mathrm{A}$ tal que $m(C\bar{k}) = 1$ y $m(C\bar{i}) = (Ci)p$.

Sea l la cofibración del axioma (C3) para i, por la PEH existirá una retracción p', para Cl. Además, por el cono conservar push outs (axioma (C1)) se tiene que:

$$(Cl)(C\bar{i}) = (CCi) \qquad \text{y} \qquad (Cl)(C\bar{k}) = (Ck)$$

Con lo cual $p_i = mp'$ verifica lo deseado.

- Se verá ahora que de (C1)', (C2)' y (C3)' se derivan (C1), (C2), (C3) y (C4):

(C1)

Para que se verifique (C1) sólo falta comprobar que $C\bar{i}$ tiene una retracción.

Por el axioma (C1)' existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd}
C\mathrm{B} \arrow[r, "Cf"] \arrow[d, "Ci"'] & C\mathrm{X} \arrow[d, "C\bar{i}"] \\
C\mathrm{A} \arrow[r, "C\bar{f}"] & C\mathrm{B}\{Cf, Ci\}
\end{tikzcd}$$

Como $(Cf)r(Ci) = 1(Cf)$, donde r es la retracción de (Ci) por ser i cofibración, entonces existe $\bar{r} : C\mathrm{B}\{Cf, Ci\} \to C\mathrm{X}$ verificando que $\bar{r}(C\bar{i}) = 1$.

(C2)

$0 : 0 \to \mathrm{X}$ es cofibración, pues $C0 = 0$.

La composición de cofibraciones es cofibración, pues su cono tiene una retracción, que es la composición de las retracciones de los respectivos conos.

(C3)

Obsérvese que Cl tiene una retracción. Sea:

$$\nu = (C\overline{k})\rho_i + (C\overline{i})(Cu) - (C\overline{i})(Cu)(Ck)\rho_i$$

Donde u es una retracción de Ci, por ser i cofibración. Aplicando la propiedad push out del cono del diagrama que aparece en el axioma (C3) se obtiene: $\nu(Cl) = 1$.

(C4)

Este axioma coincide con (C3)'. □

II.4 I-categoría aditiva.

En esta sección se ven propiedades equivalentes a la PEH, y algunas consecuencias de ellas, la más importante la equivalencia entre I-categoría aditiva y C-categoría aditiva.

Considérese el funtor $I\_ = \_ \oplus C\_$, y las transformaciones naturales $i_0 = j_0$ e $i_1 = j_0 + j_1 k : \_ \to \_ \oplus C\_$.

Teorema II.4.1 *Dado $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, en una C-categoría aditiva, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *i verifica la PEH.*

2. *Sea $\varepsilon \in \{0,1\}$, para cada diagrama conmutativo del tipo:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_\varepsilon"] \arrow[d, "i"] & IB \arrow[d, "\{f_1, f_2\}"] \arrow[ddr, bend left, "Ii"] & \\
A \arrow[r, "g"] \arrow[drr, bend right, "i_\varepsilon"'] & X & \\
& & IA \arrow[ul, "E_\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

Existe un morfismo $E_\varepsilon : I\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tal que $E_\varepsilon(Ii) = \{f_1, f_2\}$ y $E_\varepsilon i_\varepsilon = g$.

3. *Dado $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, $f \simeq 0$, existe $g : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tal que $f = gi$.*

4. *Para todo objeto contráctil* X *se verifica:*

$i^* : \mathbf{Hom(A,X)} \to \mathbf{Hom(B,X)}$ *es un epimorfismo.*

5. *Dado* $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, $f \simeq 0$, *existe* $g : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, $g \simeq 0$, *tal que* $f = gi$.

6. *Dados* $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ *y* $g : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, *tales que* $f \simeq gi$, *existe* $h : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ *de forma que:* $g \simeq h$ *y* $f = hi$.

Demostración:

(1)⇒(2)

Sea r la retracción de (Ci). Se toma, para $\varepsilon = 0$ el morfismo $E_0 = \{g, f_2r\}$ y para $\varepsilon = 1$, $E_1 = \{g - f_2rk, f_2r\}$.

(2)⇒(3)

Sea $G : f \simeq 0$.

Considérese el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{B} \oplus C\mathrm{B} \arrow[d, "\{f, -G\}"] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "0"] & \mathrm{Y}
\end{tikzcd}$$

por hipótesis, existe $\{g, g'\} : \mathrm{A} \oplus C\mathrm{A} \to \mathrm{Y}$, de forma que se verifica $f = gi$.

(3)⇒(4)

Como cualquier morfismo con codominio contráctil es nulhomótopo, corolario II.2.1, basta aplicar (3) y se obtiene el resultado.

(4)⇒(5)

Sea $F : f \simeq 0$.

Como el cono de todo objeto es contráctil, proposición II.2.4, por hipótesis existe un morfismo $((i^*)^{-1})(k) : \mathrm{A} \to C\mathrm{B}$.

Dada $g = F((i^*)^{-1})(k)$ verifica lo deseado.

(5)⇒(6)

Como $gi - f \simeq 0$, por hipótesis existe $h' \simeq 0$ tal que $h'i = gi - f$.

Tomando $h = g - h'$, $hi = f$ y $h \simeq g$ al ser h' nulhomótopo.

- $j = 1 \oplus l$, puesto que:

$$(1 \oplus l)\{<1,0>, <1,\bar{k}>\} = (1 \oplus l) < \{1,1\}, \{0,\bar{k}\} > = < \{1,1\}, \{0, l\bar{k}\} > =$$
$$= < \{1,1\}, \{0,k\} > = \{<1,0>, <1,k>\}$$
$$(1 \oplus l)(i \oplus \bar{i}) = i \oplus l\bar{i} = i \oplus Ci$$

(I5)

La transformación que verificará las condiciones pedidas es:

$$t = \{<1,0,0,0>, <0,0,1,0>, <0,1,0,0>, <0,0,0,t'>\}$$

donde t' es la transformación del corolario II.4.2. $\square$

Teorema II.4.3 Toda I-categoría aditiva es una C-categoría aditiva.

Demostración:

Se define el funtor C de la siguiente manera:

- El cono de un objeto cualquiera es:

$$CA = Coker \ \ i_{0A}$$

- El cono de un morfismo f : A $\to$ B es la inducida en los conúcleos por $q(If)$, donde q es la proyección en los conúcleos, ($Cf = \widetilde{q(If)}$).

- La transformación k se define por $k = qi_1$.

La naturalidad de k se deduce por ser composición de transformaciones naturales.

Obsérvese que

$$I_- \cong {}_- \oplus C_- \tag{II.1}$$

Mediante el isomorfismo $< p, q >$ con inverso $\{i_0, 1 - \widetilde{i_0 p}\}$.

(C1)

La primera parte es consecuencia inmediata del axioma (I2).

$C0 = 0$, trivialmente, y el funtor C lleva push outs en push outs, pues el conúcleo conserva push outs.

(C2)

Es inmediato a partir de (I3), del teorema II.4.1 y del isomorfismo (II.1)

(C3)

Se deduce del isomorfismo (II.1) y de la expresión que adopta el axioma (I4) en categorías aditivas, donde $j = 1 \oplus l$. Obsérvese que, en general, el siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd} X \oplus Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "1 \oplus f"] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \oplus Z \arrow[r, "p_1"] & Z \end{tikzcd}$$

de donde, si $1 \oplus f$ es cofibración también lo es f.

(C4)

Es consecuencia del isomorfismo (II.1) y del axioma (I5):

Obsérvese que existirá una transformación:

$$t = \{< t_1, t_2, t_3, t_4 >, < t_5, t_6, t_7, t_8 >, < t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12} >, < t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16} >\}$$

verificando:

$$t < \{1,0\}, \{0,1\}, \{0,0\}, \{0,0\} > = < \{1,0\}, \{0,0\}, \{0,1\}, \{0,0\} >$$

$$t < \{1,0\}, \{0,0\}, \{0,1\}, \{0,0\} > = < \{1,0\}, \{0,1\}, \{0,0\}, \{0,0\} >$$

$$t < \{1,0\}, \{0,1\}, \{k,0\}, \{0,kC\} > = < \{1,0\}, \{k,0\}, \{0,1\}, \{0,Ck\} >$$

$$t < \{1,0\}, \{k,0\}, \{0,1\}, \{0,Ck\} > = < \{1,0\}, \{0,1\}, \{k,0\}, \{0,kC\} >$$

Operando en las igualdades anteriores se deduce que

$$t = \{< 1,0,0,0 >, < 0,0,1,0 >, < 0,1,0,0 >, < 0,0,0,t_{16} >\}$$

donde el morfismo t_{16} tiene que verificar:

$$t_{16}(kC) = Ck \;\; y \;\; t_{16}(Ck) = kC.$$

Y como Ck tiene una retracción p (consecuencia de (C3) y (C2), ya demostrados) $q = pt_{16}$ es la transformación buscada. □

Corolario II.4.3 Dada $i : B \rightarrowtail A$, cofibración.

$f \simeq g$ rel. i en una C-categoría aditiva si y sólo si $f \simeq g$ rel. i en la I-categoría aditiva equivalente.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $H : g - f \simeq 0$ rel. i en la C-categoría aditiva, entonces $\{f, H\} : f \simeq g$ rel. i en la I-categoría aditiva.

($\Leftarrow$) Sea $G = \{G_1, G_2\} : f \simeq g$ rel. i en la I-categoría aditiva, entonces $G_2 : g - f \simeq 0$ rel. i en la C-categoría aditiva. $\square$

Capítulo III

Categoría de cofibraciones.

En este capítulo se introduce el concepto de categoría de cofibraciones, y se demuestra que toda I-categoría es una categoría de cofibraciones en el sentido de Baues.

III.1 Categoría de cofibraciones.

En esta sección se introduce el concepto de categoría de cofibraciones, viendo, a continuación, algunas de sus propiedades, entre las cuales cabe destacar, por su importancia, la definición de homotopía.

Definición III.1.1 Una *categoría de cofibraciones* es una categoría $\mathbb{C}$ con dos clases distinguidas de morfismos, *cof.* y *we.*, denominadas cofibraciones y equivalencias débiles respectivamente, estas últimas representadas por "$\xrightarrow{\sim}$", verificando los axiomas (CF1), (CF2), (CF3) y (CF4).

Definición III.1.2 Un morfismo en $\mathbb{C}$ que sea a la vez cofibración y equivalencia débil se llamará *cofibración trivial* y se representará por "$\overset{\sim}{\rightarrowtail}$".

Definición III.1.3 Un objeto R en una categoría de cofibraciones $\mathbb{C}$ se llama *modelo fibrante* o simplemente *fibrante* si cada cofibración trivial $i : \mathrm{R} \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathrm{Q}$ en $\mathbb{C}$ admite una retracción $r : \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$.

(CF1) Axioma de composición.

Los isomorfismos en $\mathbb{C}$ son equivalencias débiles y cofibraciones.

Para dos morfismos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Si dos cualesquiera de f, g, gf son equivalencias débiles, entonces lo es el tercero. La composición de cofibraciones es cofibración.

(CF2) Axioma de push out.

Para una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $f : B \to X$, siempre existe el push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es también una cofibración. Además, si f es una equivalencia débil, también lo es $\bar{f}$.

(CF3) Axioma de factorización.

Todo morfismo $f : B \to X$ en $\mathbf{C}$ se puede factorizar de la forma:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i"'] & & X \\ & Z \arrow[ur, "\sim", "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i : B \rightarrowtail Z$ es cofibración y $g : Z \xrightarrow{\sim} X$ es equivalencia débil.

(CF4) Axioma de modelos fibrantes.

Para todo objeto X de $\mathbf{C}$ existe una cofibración trivial $X \xrightarrow{\sim} RX$, donde RX es fibrante en $\mathbf{C}$. Se llamará a $X \xrightarrow{\sim} RX$ *modelo fibrante* de X.

Definición III.1.4 Si $\mathbf{C}$ tiene objeto inicial $\varnothing$ se dice que un objeto X de $\mathbf{C}$ es *ϕ-cofibrante* cuando $\phi : \varnothing \to X$ es una cofibración.

Definición III.1.5 . (Axioma (CF2)')

Se dice que una categoría de cofibraciones verifica el axioma (CF2)' cuando para una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, y un morfismo $f : B \to X$, siempre existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"] & B\{f,i\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es también cofibración, y además si i es cofibración trivial, también lo es $\bar{i}$.

Proposición III.1.1 *En una categoría de cofibraciones, si la cofibración i en (CF2) es trivial, entonces también la inducida es trivial.*

Demostración:

Considérense los siguientes push outs:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, tail, "i", "\sim"'] & X \arrow[r, "g", "\sim"'] \arrow[d, tail, "(\bar{i})'", "\sim"'] & Y \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, tail, "\bar{j}"'] & B\{j,i\} \arrow[r, "\sim", "\bar{g}"'] & X\{g,(\bar{i})'\} \equiv B\{f=gj,i\} \end{tikzcd}$$

donde $gj = f$, por (CF3). Si i es equivalencia débil, también lo es $(\bar{i})'$ por (CF2). Además, como g es equivalencia débil, también lo es $\bar{g}$ por (CF2). Así pues, por (CF1), también $\bar{i}$ es equivalencia débil, con lo cual queda demostrado.

□

Corolario III.1.1 *Toda categoría de cofibraciones verifica el axioma (CF2)'.*

Definición III.1.6 Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, se define el *cilindro relativo a i* como el objeto Z de (CF3) a través del cual se factoriza el morfismo $\{1,1\} : B\{i,i\} \to A$.

$$\begin{tikzcd} B\{i,i\} \arrow[rr, "\{1,1\}"] \arrow[dr, tail, "j'"'] & & A \\ & Z \arrow[ur, "h'"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

se llamará $i'_0 = j'(\bar{i})_0$ e $i'_1 = j'(\bar{i})_1$.

Nótese que por (CF1) i'_0 e i'_1 son equivalencias débiles y cofibraciones. En este caso, al cilindro Z se le denotará por Z^i, dejando $Z = Z^\phi$.

Definición III.1.7 Si todos los objetos de una categoría de cofibraciones son ϕ-cofibrantes, entonces se define el cilindro de un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ como el objeto Z_f a través del cual se factoriza el morfismo $\{1, f\} : \mathrm{X} + \mathrm{B} \to \mathrm{X}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}+\mathrm{B} \arrow[rr, "{\{1,f\}}"] \arrow[dr, tail, "j"'] & & \mathrm{X} \\
& \mathrm{Z}_f \arrow[ur, "h", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser todos los objetos ϕ-cofibrantes existe X+B, que $i_0 = jj_0$ e $i_1 = jj_1$ son cofibraciones al ser composición de ellas (axioma (CF1)), y que i_0 es equivalencia débil (también axioma (CF1)).

En general, los cilindros definidos en III.1.6 y III.1.7 no son únicos, pues pueden existir diversas factorizaciones. Otra forma de obtener un cilindro para el morfismo f es la siguiente:

Lema III.1.1 *En una categoría que verifica los axiomas (CF1), (CF2)' y (CF3) con todos los objetos ϕ-cofibrantes, Z_f definido por el siguiente push out:*

$$\begin{tikzcd}
B+B \arrow[r, "f+1"] \arrow[d, tail, "{j' = \{i'_0, i'_1\}}"] & X+B \arrow[d, tail, "{\{i_0, i_1\}}"] \arrow[ddr, bend left, "{\{1,f\}}"] & \\
Z \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, bend right, "h'"'] & \mathrm{Z}_f \arrow[dr, "h"] & \\
& B \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

es un cilindro para el morfismo f, con $j = \{i_0, i_1\}$.

Demostración:

j' es cofibración (proposición III.1.6), con lo cual $j = \{i_0, i_1\}$ también lo es, por la primera parte del axioma (CF2)', y por (CF1) i_0 e i_1 son cofibraciones. Se define $h = \{1, f, fh'\}$, y observando el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i'_0", "\sim"'] & X \arrow[d, tail, "i_0", "\sim"'] \\
Z \arrow[r, "\pi"] & Z_f
\end{tikzcd}$$

Por el axioma (CF2)', i_0 es cofibración trivial, y como $hi_0 = 1$, por el axioma (CF1) h es equivalencia débil. □

Proposición III.1.2 *Si todos los objetos de una categoría de cofibraciones son ϕ-cofibrantes, entonces el axioma (CF2) puede ser sustituido por el (CF2)'. Además en (CF1) se puede sustituir: "Todo isomorfismo es cofibración trivial" por "$1 : \varnothing \rightarrow \varnothing$ es equivalencia débil".*

Demostración:

Dado el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\
A \arrow[r, "\bar{f}"] & B\{f, i\}
\end{tikzcd}$$

con f equivalencia débil e i cofibración, se verá que $\bar{f}$ es también equivalencia débil.

Sean los siguientes push outs, con Z_f definido como en el lema III.1.1:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\sim", "i_1"'] \arrow[d, tail, "i"] \arrow[rr, bend left, "f", "\sim"'] & Z_f \arrow[r, "\sim", "h"'] \arrow[d, tail, "\bar{\bar{i}}"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\
A \arrow[r, tail, "\sim", "\overline{i_1}"'] \arrow[rr, bend right, "\bar{f}"'] & M_1 \arrow[r, "(\bar{h})_1"'] & B\{f, i\}
\end{tikzcd}$$

por el axioma ($CF1$), como h y f son equivalencias débiles, también lo es $i_1 : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z_f$, y como este morfismo es también cofibración, (CF2)' garantiza que $\overline{i_1}$ es también cofibración trivial.

Considérese ahora:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\sim", "f"'] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[r, tail, "\sim", "i_0"'] \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \arrow[rr, bend left, "1", "\sim"'] & Z_f \arrow[r, "\sim", "h"'] \arrow[d, tail, "(\bar{i})'"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\
A \arrow[r, "\overline{f}"'] & B\{f,i\} \arrow[r, tail, "\sim", "\overline{i_0}"'] \arrow[rr, bend right, "1"', "\sim"] & M_0 \arrow[r, "\sim", "(\overline{h})_0"'] & B\{f,i\}
\end{tikzcd}$$

como $hi_0 = 1$, se tiene que $(\overline{h})_0\overline{i_0} = \overline{1} = 1$. Además $\overline{i_0}$ es equivalencia débil (axioma (CF2)') y 1 también (usando en (CF2)' la cofibración trivial $1 : \varnothing \overset{\sim}{\rightarrowtail} \varnothing$), y de la segunda parte de (CF1) se deduce que $(\overline{h})_0$ es equivalencia débil.

A continuación se obtiene para Z_{id} los siguientes push outs, para $\varepsilon \in \{0,1\}$:

(Nótese que Z_{id} es obtenido por el método dado en el lema III.1.1, y coincide con un cilindro relativo a ϕ, Z).

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\sim", "i'_\varepsilon"'] \arrow[d, tail, "i"] \arrow[rr, bend left, "1", "\sim"'] & Z \arrow[r, "\sim", "h'"'] \arrow[d, tail, "s_\varepsilon"] & B \arrow[d, tail, "i"] \\
A \arrow[r, tail, "\sim", "\overline{i'_\varepsilon}"'] \arrow[rr, bend right, "1"', "\sim"] & Z_\varepsilon \arrow[r, "\sim", "(\overline{h'})_\varepsilon"'] & A
\end{tikzcd}$$

Como $h'i'_\varepsilon = 1$, se tiene que $(\overline{h'})_\varepsilon\overline{i'}_\varepsilon = \overline{1} = 1$.

Por el axioma (CF2)' $\overline{i'_\varepsilon}$ es una equivalencia débil, y por (CF1) $(\overline{h'})_\varepsilon$ es también una equivalencia débil, para $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Lo anterior permite construir el siguiente push out:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, tail, "s_1"] \arrow[d, tail, "s_0"'] & Z_1 \arrow[d, tail, "\overline{s_0}"] \arrow[ddr, "l_1", "\sim"'] \arrow[dddrr, bend left, "(\overline{h'})_1", "\sim"'] & & \\
Z_0 \arrow[r, tail, "\overline{s_1}"'] \arrow[drr, "l_0"', "\sim"] \arrow[ddrrr, bend right, "(\overline{h'})_0"', "\sim"] & P \arrow[dr, "v"] & & \\
& & Z_{01} \arrow[dr, "v'"', "\sim"] & \\
& & & A
\end{tikzcd}
$$

El morfismo $\{(\overline{h'})_1, (\overline{h'})_0\} : P \to A$, se factoriza por (CF3) de la forma expresada en el diagrama.

De los siguientes push outs, en los cuales $\pi : Z \to Z_f$ es el morfismo del lema III.1.1, surgen los morfismos $m_\varepsilon : Z_\varepsilon \to M_\varepsilon$:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\sim", "i'_0"'] \arrow[d, tail, "i"] & Z \arrow[d, tail, "s_0"] \arrow[ddr, bend left, "(\bar{i})'\pi"] & \\
A \arrow[r, tail, "\sim", "\overline{i'_0}"'] \arrow[drr, bend right, "(\overline{i_0})(\overline{f})"'] & Z_0 \arrow[dr, "m_0"] & \\
& & M_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\sim", "i'_1"'] \arrow[d, tail, "i"] & Z \arrow[d, tail, "s_1"] \arrow[ddr, bend left, "\bar{\bar{i}}\pi"] & \\
A \arrow[r, tail, "\sim", "\overline{i'_1}"'] \arrow[drr, tail, bend right, "\sim", "\overline{i_1}"'] & Z_1 \arrow[dr, "m_1", "\sim"'] & \\
& & M_1
\end{tikzcd}
$$

con todos los morfismos y objetos que se han creado se puede fabricar el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& & Z_f \arrow[r, tail, "(\bar{i})'"] \arrow[d, tail, "\bar{\bar{i}}"] & M_0 \arrow[d, tail, "k_0"] \arrow[ddr, bend left, "\bar{v}k_0", "\sim"'] & \\
& & M_1 \arrow[r, tail, "k_1"] \arrow[drr, tail, bend right, "\sim", "\bar{v}k_1"'] & P' \arrow[dr, "\bar{v}"] & \\
Z \arrow[uurr, "\pi"] \arrow[r, tail, "s_0"] \arrow[d, tail, "s_1"'] & Z_0 \arrow[uurr, "m_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "\overline{s_1}"] \arrow[ddr, bend left, "v\overline{s_1}", "\sim"'] & & & M_{01} \\
Z_1 \arrow[uurr, "m_1", "\sim"'] \arrow[r, tail, "\overline{s_0}"'] \arrow[drr, tail, bend right, "\sim", "v\overline{s_0}"'] & P \arrow[uurr, "p"] \arrow[dr, "v"] & & & \\
& & Z_{01} \arrow[uurr, "\overline{p}", "\sim"'] & &
\end{tikzcd}
$$

donde $p : \mathrm{P} \to \mathrm{P}'$ es la inducida por la propiedad push out, pues:

$$k_0 m_0 s_0 = k_1 m_1 s_1$$

Es fácil comprobar que todas las caras del diagrama anterior son push outs. Por otro lado $hi_1 = f$, de donde por el axioma (CF1) i_1 es equivalencia débil. Por idéntica razón m_1 es equivalencia débil, pues $m_1\overline{i'_1} = \overline{i_1}$. Como $v\overline{s_0}$ es cofibración trivial, por el axioma (CF2)' también lo es $\overline{v}k_1$, y por el axioma (CF1) $\overline{p}$ es equivalencia débil. Razones análogas a estas últimas hacen a m_0 equivalencia débil.

Se concluye que $\overline{f} = (\overline{h})_0 m_0 \overline{i'}_0$ es una equivalencia débil.

Por ser $\phi = 1 : \varnothing \to \varnothing$ cofibración trivial y usando un razonamiento análogo que en la consecuencia 4 de la proposición I.1.1 se concluye que todo isomorfismo es una cofibración trivial.

□

III.2 Homotopía.

En esta sección se verá la noción de homotopía en una categoría de cofibraciones.

Definición III.2.1 Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y dos morfismos $f, g : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ verificando que $fi = gi = u$, y donde X es un objeto fibrante. Se dirá que f *es homótopo a* g *relativo a* i, y se denotará por $f \simeq g$ rel. i, cuando existe $H : \mathrm{Z}^i \to \mathrm{X}$ haciendo conmutativo el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}\{i,i\} \arrow[rr, "\{f,g\}"] \arrow[dr, tail, "j'"'] & & \mathrm{X} \\
& \mathrm{Z}^i \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

se llamará a H homotopía entre f y g rel. i.

Lema III.2.1 *Dada una cofibración* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, *considérese el siguiente cuadrado conmutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}
$$

entonces existe un objeto Z, una cofibración j y morfismos q y l que hacen también conmutativo el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, tail, "i"'] & & X \arrow[dl, tail, "j"'] \arrow[dd, "h"] \\
& Z \arrow[dr, "q", "\sim"'] & \\
A \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "g"] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Además, si f es cofibración también lo es l, y si h o g son equivalencias débiles también lo son j o l, respectivamente.

Demostración:

Por el axioma (CF2) existe el siguiente push out:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{B}\{f,i\}
\end{tikzcd}
$$

como $hf = gi$, existe un morfismo $\{h,g\} = qk$, (axioma (CF3)). Se toma $j = k\bar{i}$ y $l = k\bar{f}$.

Obsérvese que j es cofibración pues k e $\bar{i}$ lo son. Si h o g son equivalencias débiles, también lo serán j o l, respectivamente, por serlo q (axioma (CF1)). Además si f es cofibración l también lo es, por ser composición de ellas. □

Lema III.2.2 *Dada una cofibración trivial $i : \mathrm{B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, con X fibrante, existe $\tilde{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tal que $\tilde{f}i = f$.*

Demostración:

Basta aplicar push out notando que, por la proposición III.1.2, $\bar{\imath}$ es también cofibración trivial, y al ser X fibrante tendrá una retracción r.

Se define $\tilde{f} = r\overline{f}$ □

Teorema III.2.1 *La relación ser homótopo rel. i no depende del cilindro elegido.*

Demostración:

Supóngase que se define la relación mediante dos cilindros distintos, Z_1^i y Z_2^i. Aplicando el lema III.2.1 al cuadrado exterior del siguiente diagrama se obtiene:

$$\begin{tikzcd}
B\{i,i\} \arrow[rr, tail, "j'"] \arrow[dd, tail, "j''"'] & & Z_1^i \arrow[dl, tail, "l'", "\sim"'] \arrow[dd, "h'", "\sim"'] \\
& Z \arrow[dr, "l", "\sim"'] & \\
Z_2^i \arrow[ur, tail, "l''"', "\sim"] \arrow[rr, "h''", "\sim"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que l' y l'' son cofibraciones triviales, por lo que si existe $H_1 : Z_1^i \to X$, homotopía rel. i entre f y g, se induce un morfismo $\tilde{H}_1 : Z \to X$, por el lema III.2.2, de forma que $\tilde{H}_1 l''$ es una homotopía rel. i entre f y g con dominio Z_2^i.

Se procede análogamente si la homotopía primera tiene como dominio Z_2^i.

□

Teorema III.2.2 *La relación ser homótopo rel. i es una relación de equivalencia.*

Demostración:

- *Reflexiva.*

$fh' : f \simeq f$ rel. i.

- *Simétrica.*

Si $H : f \simeq g$ rel. i.

Como $(\bar{\imath})_0 i = (\bar{\imath})_1 i$, por la propiedad de push out existe un morfismo $T : B\{i,i\} \to B\{i,i\}$ verificando que $T(\bar{\imath})_0 = (\bar{\imath})_1$ y $T(\bar{\imath})_1 = (\bar{\imath})_0$.

Análogamente a la demostración del teorema III.2.1 se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \\
B\{i,i\} \arrow[rr, "j'T"] \arrow[dd, tail, "j'"'] & & Z^i \arrow[ur, "H"'] \arrow[dl, "l'", "\sim"'] \arrow[dd, "h'", "\sim"'] & \\
 & Z \arrow[uurr, dashed, bend left, "\tilde{H}"] \arrow[dr, "\sim"] & & \\
Z^i \arrow[ur, "l", "\sim"'] \arrow[rr, "h'", "\sim"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

luego $\tilde{H}l : g \simeq f$ rel. i.

- *Transitiva.*

Si $H : f \simeq g$ rel. i y $G : g \simeq h$ rel. i, aplicando de nuevo los lemas III.2.1 y III.2.2 se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \\
B\{i,i\} \arrow[rr, "\{\overline{i'_0}i'_0, \overline{i'_1}i'_1\}"] \arrow[dd, tail, "j'"'] & & A\{i'_0,i'_1\} \arrow[ur, "\{G,H\}"'] \arrow[dl, "l'", "\sim"'] \arrow[dd, "\{h',h'\}", "\sim"'] & \\
 & DZ \arrow[uurr, dashed, bend left, "F"] \arrow[dr, "\sim"] & & \\
Z^i \arrow[ur, "l", "\sim"'] \arrow[rr, "h'", "\sim"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

Se tiene que $Fl : f \simeq h$ rel. i.

Nótese que, aplicando (CF1), $\{h', h'\}$ es equivalencia débil pues:

$$\{h', h'\}\overline{i'_0} = h'.$$

□

Teorema III.2.3 *Si $f \simeq g$ rel. i y $f' \simeq g'$ rel. fi, entonces $f'f \simeq g'g$ rel. i.*

Demostración:

Sea $H : f \simeq g$ rel. i, y $H' : f' \simeq g'$ rel. fi, entonces $(f'H) : f'f \simeq f'g$ rel. i.

Aplicando los lemas III.2.1 y III.2.2 resulta el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & Y \\
B\{i,i\} \arrow[r, "\{(\overline{u})_0 g, (\overline{u})_1 g\}"] \arrow[dd, tail, "j'"'] & B\{u,u\} \arrow[r, tail, "j''"] & Z^u \arrow[ur, "H'"'] \arrow[dl, "l'", "\sim"'] \arrow[dd, "h''", "\sim"'] & \\
 & Z \arrow[uurr, dashed, bend left, "\tilde{H}'"] \arrow[dr, "\sim"] & & \\
Z^i \arrow[ur, "l"'] \arrow[rr, "gh'"] & & X &
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{H}'l : f'g \simeq g'g$ rel. i, y aplicando la propiedad transitiva se obtiene lo buscado. □

Este último teorema permite definir las categorías homotópicas, análogamente a lo hecho en los capítulos anteriores.

III.3 I-categoría.

En esta sección se verá que toda I-categoría es una categoría de cofibraciones, y que las homotopías son equivalentes.

Definición III.3.1 Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, y un morfismo $f : A \to X$ en una I-categoría, se dice que f es *una equivalencia de homotopía rel. i*, o *h-equivalencia rel. i* cuando existe un morfismo $f' : X \to A$ tal que $ff' \simeq 1_X$ rel. fi y $f'f \simeq 1_A$ rel. i.

En el caso de que la cofibración sea la trivial $\phi : \varnothing \rightarrowtail A$, se dirá simplemente que f es una *equivalencia de homotopía* o *h-equivalencia.*

Teorema III.3.1 *Toda I-categoría es una categoría de cofibraciones.*

Demostración:

Considérese como familia de cofibraciones la familia $cof.$ de la I-categoría, y como equivalencias débiles la familia de h-equivalencias de la I-categoría.

Obsérvese que por el axioma (I3) todo objeto es ϕ-cofibrante y por tanto podemos sustituir el axioma (CF2) por el (CF2)' (proposición III.1.2).

Por otro lado obsérvese que todo objeto es también fibrante, pues dada una cofibración trivial $i : \mathrm{B} \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathrm{A}$ existe $i' : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tal que $i'i \simeq 1_\mathrm{B}$, y observando el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, tail, "i_0"] \arrow[d, tail, "i", "\sim"'] & I\mathrm{B} \arrow[d, "H"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "i'"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

donde $H : i'i \simeq 1_\mathrm{B}$, existe, por la PEH, $F : I\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tal que $Fi_0 = i'$ y $F(Ii) = H$. $r = Fi_1$ es la retracción buscada para i. Como consecuencia de esto, se satisface trivialmente el axioma (CF4), con la identidad.

(CF1)

Es evidente que los isomorfismos son h-equivalencias, por la propiedad reflexiva. El axioma (I3) asegura que la composición de cofibraciones es cofibración. La compatibilidad de la relación de equivalencia de homotopía con la composición de morfismos en una I-categoría garantiza el resto.

(CF2)'

La primera parte del axioma (CF2)' viene dada en el axioma (I2).

Obsérvese que si $i : \mathrm{B} \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathrm{A}$ es trivial, entonces $\bar{i} : \mathrm{X} \rightarrowtail \mathrm{B}\{f, i\}$ también lo es.

Sea $r : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ una retracción de i (B es fibrante) entonces como $fri = 1f$, por la propiedad de push out existe $r' : \mathrm{B}\{f, i\} \to \mathrm{X}$ tal que $r'\bar{i} = 1$ y $r'\bar{f} = fr$.

Además, como i es h-equivalencia, existirá $r^* : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tal que $r^*i \simeq 1_\mathrm{B}$ e $ir^* \simeq 1_\mathrm{A}$. Por la compatibilidad de la relación de equivalencia de homotopía con la composición de morfismos se tiene que existe $H : ir \simeq 1$.

Considérese el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{J} \arrow[r, tail, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{Ii, i_0, i_1\}"] & I\mathrm{J} \arrow[d, "\{H(Ii)(Ip), H, H(Ii)(Ir)\}"] \\ I\mathrm{A} \arrow[r, "irp"] & \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

donde J es el del axioma (I4). Por la PEH existe $F : II\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ verificando:

$$\begin{cases} F(i_0 I) = irp \\ F(I i_0) = H \\ F(I i_1) = H(Ii)(Ir) \\ F(IIi) = H(Ii)(Ip) \end{cases}$$

Sea $G = F(i_1 I)$, entonces como $\overline{f}G(Ii) = \overline{i}p(If)$, por la propiedad de push out existe $K : I(\mathrm{B}\{f, i\}) = I\mathrm{B}\{If, Ii\} \to \mathrm{B}\{f, i\}$, (axioma (I2)), que verifica $Ki_0 = 1$ y $Ki_1 = \overline{i}r'$.

(CF3)

Dado $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, se construye el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i_0"] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "\overline{i_0}"] \arrow[ddr, bend left, "1", "\sim"'] & \\
I\mathrm{B} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dr, bend right, "p"'] & \mathrm{Z}_f \arrow[dr, "h"] & \\
& \mathrm{B} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

como $1f = fpi_0$, por la propiedad de push out se induce un morfismo $h : \mathrm{Z}_f \to \mathrm{X}$ tal que $h\overline{i_0} = 1$ y $h\overline{f} = fp$.

Sea $j = \overline{f}i_1$, entonces $hj = f$.

j es cofibración, pues observando los siguientes push outs:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j_0"'] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "j_0"] \\
\mathrm{B}+\mathrm{B} \arrow[r, "f+1"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & \mathrm{X}+\mathrm{B} \arrow[d, tail, "\{\overline{i_0}, \overline{f}i_1\}"] \\
I\mathrm{B} \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Z}_f
\end{tikzcd}$$

se tiene $j = \overline{f}i_1 = \{\overline{i_0}, \overline{f}i_1\}j_1$, que es cofibración por ser composición de ellas, (axioma (I2)). Nótese que $\{i_0, i_1\}$ es cofibración (consecuencia 5 del capítulo I) y que por tanto la inducida $\{\overline{i_0}, \overline{f}i_1\}$ también lo es, por el axioma (I2).

h es h-equivalencia, pues $\overline{i_0}h \simeq 1_{Z_f}$, ya que aplicando la PEH al siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B+B \arrow[r, tail, "i_0"] \arrow[d, tail, "\{i_0, i_1\}"'] & IB + IB \arrow[d, "\{i_0p, 1\}"] \\ IB \arrow[r, "i_0p"] & IB \end{tikzcd}$$

existe $H : IIB \to IB$ tal que:

$$\begin{cases} H(i_0 I) &= i_0 p \\ H(I i_0) &= i_0 p \\ H(I i_1) &= 1 \end{cases}$$

Por otro lado, como $\overline{f}(Ht)(Ii_0) = \overline{i_0}p(If)$, por conservar el cilindro push outs (axioma (I2)) existe $G : I(Z_f) \to Z_f$ tal que $Gi_0 = \overline{i_0}h$ y $Gi_1 = 1$, donde t es el morfismo de intercambio del axioma (I5).

Nótese que, por lo ya demostrado, se ha utilizado la notación $Z_f = B\{f, i_0\}$.

□

Proposición III.3.1 *$f \simeq g$ rel. i en una I-categoría si y sólo si $f \simeq g$ rel. i en la categoría de cofibraciones asociada.*

Demostración:

En la categoría con cilindro, el siguiente push out da un cilindro relativo:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "q"] \arrow[d, tail, "j"'] & B\{i,i\} \arrow[d, tail, "\overline{j}"] \\ IA \arrow[r, "\overline{q}"] & Z^i \end{tikzcd}$$

Donde $q = \{(\overline{i})_0 ip, (\overline{i})_0, (\overline{i})_1\}$, $\overline{j} : B\{i,i\} \to Z^i$ es la cofibración y $p_i = \{1, 1, p\} : Z^i \to A$ es la equivalencia débil del cilindro relativo.

Obsérvese que p_i es equivalencia de homotopía, pues $p_i\overline{q} = p$, p es equivalencia de homotopía, ya que $Ht : i_0 p \simeq 1$, donde H es la construida en la demostración del axioma

(CF3), en el teorema III.3.1, y también lo es $\overline{q}$, como se puede ver en el siguiente push out:

$$
\begin{tikzcd}
IB \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d, tail, "Ii"] & B \arrow[d, tail, "(\overline{j})_0 i"] \\
IA \arrow[r, "\overline{q}", "\sim"'] & Z^i
\end{tikzcd}
$$

($\Rightarrow$)

Si $F : f \simeq g$ rel. i en la I-categoría entonces $F' = \{f, g, F\} : f \simeq g$ rel. i en la categoría de cofibraciones asociada.

($\Leftarrow$)

Si $F' : f \simeq g$ rel. i en la categoría de cofibraciones asociada, entonces $F = F'\overline{q} : f \simeq g$ rel. i en la I-categoría.

$\square$

Capítulo IV

Dualización.

Todo lo hecho en los capítulos anteriores tiene una dualización obvia, que simplemente se enunciará en este capítulo, sin demostrar nada. Por otra parte se tendrá en cuenta el caso especial de que existan las teorías anteriores y sus duales, viendo cuándo éstas son compatibles entre si. Por último se analizarán y compararán estas teorías y sus duales con la teoría de homotopía dada por Quillen en sus categorías de modelo.

IV.1 Teorías duales.

Definición IV.1.1 Una *P-Categoría (categoría con caminos naturales)*, es una categoría $\mathbf{C}$ con objeto final e, un funtor covariante $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ denominado funtor caminos, transformaciones naturales $q_0, q_1 : P \to id_{\mathbf{C}}$ e $i : id_{\mathbf{C}} \to P$, y una clase distinguida de morfismos *fib.*, denominados fibraciones y representados por "$\twoheadrightarrow$", verificando los siguientes axiomas:

(P1) Axioma de caminos.

$q_\varepsilon i = 1$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

(P2) Axioma de pull back.

Para una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, siempre existe el siguiente pull back:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B} < p, f > & \xrightarrow{\overline{f}} & \mathrm{A} \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} \end{array}$$

donde $\overline{p}$ es también una fibración. Además el funtor P transforma pull backs en pull backs, esto es:

$$P(\mathrm{B} < p, f >) = P\mathrm{B} < Pp, Pf >$$

También se verifica que $Pe = e$.

(P3) Axioma de fibración.

Para cualquier objeto X, el morfismo final $e_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \rightarrow e$, es una fibración. Así, dados los objetos X e Y se puede definir su producto como:

$$\mathrm{X}\Pi\mathrm{Y} = e < e_{\mathrm{X}}, e_{\mathrm{Y}} >$$

La composición de fibraciones es fibración. Además, cualquier fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ verifica la siguiente *propiedad de elevación de homotopía (PLH)* en $\mathbb{C}$:

Sea $\varepsilon \in \{0,1\}$, para cada diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd}
P\mathrm{A} \arrow[drr, bend left, "q_\varepsilon"] \arrow[ddr, bend right, "Pp"'] & & \\
& \mathrm{X} \arrow[ul, "E_\varepsilon"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "H"] & \mathrm{A} \arrow[d, "p"] \\
& P\mathrm{B} \arrow[r, "q_\varepsilon"'] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo $E_\varepsilon : \mathrm{X} \rightarrow P\mathrm{A}$ tal que $q_\varepsilon E_\varepsilon = f$ y $(Pp)E_\varepsilon = H$.

(P4) Axioma de caminos relativos.

Para una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, el morfismo j, definido por el siguiente pull back, es una fibración:

$$\begin{tikzcd}
P\mathrm{A} \arrow[drr, bend left, "< q_0, q_1 >"] \arrow[dr, "j"] \arrow[ddr, bend right, "Pp"'] & & \\
& \mathrm{J} \arrow[r, "\overline{< q_0, q_1 >}"] \arrow[d, "\overline{p\Pi p}"] & \mathrm{A}\Pi\mathrm{A} \arrow[d, "p\Pi p"] \\
& P\mathrm{B} \arrow[r, "< q_0, q_1 >"'] & \mathrm{B}\Pi\mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

donde $p\Pi p$ y $< q_0, q_1 >$ son definidos en la proposición IV.1.1.

(P5) Axioma de intercambio.

Existe una transformación $t' : PP \to PP$, verificando $(Pq_\varepsilon)t' = q_\varepsilon P$ y $(q_\varepsilon P)t' = Pq_\varepsilon$, para $\varepsilon \in \{0,1\}$. Se llamará a t' *transformación de intercambio.*

Proposición IV.1.1 (Consecuencias.)

1. *Los morfismos* $p_0 : \mathrm{A}\Pi\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *y* $p_1 : \mathrm{A}\Pi\mathrm{B} \to \mathrm{B}$ *son fibraciones.*

2. *El único morfismo inducido por dos morfismos* f *y* g *en un pull back se denotará por* $< f, g >$.

3. *Dados dos morfismos* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *y* $g : \mathrm{A}' \to \mathrm{B}'$, *existe un único morfismo* $f\Pi g : \mathrm{A}\Pi\mathrm{A}' \to \mathrm{B}\Pi\mathrm{B}'$ *verificando que:*

$$\begin{cases} fp_0 = p_0(f\Pi g) \\ fp_1 = p_1(f\Pi g) \end{cases}$$

4. *Todo isomorfismo es fibración.*

5. $< q_0, q_1 >$ *es fibración.*

6. q_0 *y* q_1 *son fibraciones.*

7. *Si* $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, $p' : \mathrm{A}' \twoheadrightarrow \mathrm{B}'$ *son fibraciones, entonces se verifica que* $p\Pi p' : \mathrm{A}\Pi\mathrm{A}' \twoheadrightarrow \mathrm{B}\Pi\mathrm{B}'$ *también lo es.*

8. $P < f, g > = < Pf, Pg >$, *y en particular* $P(f\Pi g) = (Pf)\Pi(Pg)$.

9. *Los caminos de toda fibración es fibración.*

Definición IV.1.2 Dada una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, y dos morfismos g_0, $g_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$, verificando que $pg_0 = pg_1 = v$, se dice que g_0 *es homótopo a* g_1 *relativo a* p si existe un morfismo $H : \mathrm{X} \to P\mathrm{A}$, verificando que $q_0 H = g_0$, $q_1 H = g_1$ y $(Pp)H = iv$.

Esto se denotará $H : g_0 \simeq g_1$ rel. p, y al morfismo H se le denomina *homotopía relativa a* p.

$$\begin{tikzcd} & P\mathrm{A} \arrow[dr, two heads, "p"] & \\ \mathrm{X} \arrow[ur, "H"] \arrow[rr, "< g_0, g_1, , iv >"'] & & \mathrm{J} \end{tikzcd}$$

Proposición IV.1.2 *Sea $p : A \twoheadrightarrow B$ una fibración. Ser homótopo relativo a p es una relación de equivalencia.*

Si la fibración tomada es la final se obtiene la homotopía no relativa.

Proposición IV.1.3 *Si $f \simeq g$ rel. p y $f' \simeq g'$ rel. pf, entonces $ff' \simeq gg'$ rel. p.*

Definición IV.1.3 Una *P-categoría con todas las fibraciones* es una P-categoría C, donde un morfismo es fibración si y sólo si verifica la PLH.

Teorema IV.1.1 Una P-categoría con todas las fibraciones es una categoría $\mathbf{C}$ con objeto final e, un funtor $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, transformaciones naturales $q_0, q_1 : P \to id_{\mathbf{C}}$ e $i : id_{\mathbf{C}} \to P$, y una clase distinguida de morfismos *fib.*, denominados fibraciones y definidos por la PLH, verificando los siguientes axiomas:

(P1)' Axioma de caminos.

$q_\varepsilon i = 1$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$

(P2)' Axioma de pull back.

Para una fibración $p : A \twoheadrightarrow B$ y un morfismo $f : X \to B$, siempre existe el siguiente pull back:

$$\begin{tikzcd}
B<p,f> \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"] & A \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Además el funtor P transforma pull backs en pull backs. También se verifica que $Pe = e$.

(P3)' Axioma de caminos relativos.

Para una fibración $p : A \twoheadrightarrow B$, el morfismo j, definido por el siguiente pull back, es una fibración:

$$\begin{tikzcd}
PA \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, bend left, "< q_0, q_1 >"] \arrow[ddr, bend right, "Pp"'] & & \\
& J \arrow[r, "\overline{< q_0, q_1 >}"] \arrow[d, "\overline{p\Pi p}"] & A\Pi A \arrow[d, "p\Pi p"] \\
& PB \arrow[r, "< q_0, q_1 >"'] & B\Pi B
\end{tikzcd}$$

(P4)' Axioma de intercambio.

Existe una transformación $t' : PP \to PP$, verificando $(Pq_\varepsilon)t' = q_\varepsilon P$ y $(q_\varepsilon P)t' = Pq_\varepsilon$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Se llamará a t' *morfismo de intercambio.*

Definición IV.1.4 Una *A-categoría aditiva* es una categoría aditiva $\mathbf{A}$, con un funtor covariante $A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ denominado funtor arcos, una transformación natural $r : A \to id_{\mathbf{A}}$ y una clase distinguida de morfismos llamados fibraciones, verificando los siguientes axiomas:

(A1) Axioma de pull back.

Para una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, siempre existe el siguiente pull back:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} < p, f > \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"] & \mathrm{A} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{p}$ es también una fibración. Además el funtor A transforma pull backs en pull backs.

También se verifica que $A(0) = 0$, donde 0 es el objeto cero de la categoría.

(A2) Axioma de fibración.

El morfismo $0 : \mathrm{X} \to 0$ es una fibración, para cualquier objeto X. La composición de fibraciones es fibración. Además, toda fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ tiene una sección para sus arcos, o lo que es lo mismo, existe un morfismo $s : P\mathrm{B} \to P\mathrm{A}$ tal que $(Ap)s = 1$. A esto último se le denomina propiedad de elevación de homotopía (PLH).

(A3) Axioma de arcos relativos.

El morfismo l definido por el siguiente pull back es fibración:

$$\begin{tikzcd}
AA \arrow[dr, "l"] \arrow[drr, bend left, "r"] \arrow[ddr, bend right, "Ap"'] & & \\
& \mathrm{L} \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] & \mathrm{A} \arrow[d, two heads, "p"] \\
& \mathrm{AB} \arrow[r, "r"'] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

(A4) Axioma de sección.

Existe una transfomación $j : A \to AA$ verificando que: $(rA)j = 1$.

Proposición IV.1.4 (Consecuencias.)

1. *Al ser* $\mathbf{A}$ *una categoría aditiva, el* Π *definido anteriormente se transforma en* $\oplus$.
2. $p_0 : \mathrm{A} \oplus \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *y* $p_1 : \mathrm{A} \oplus \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ *son fibraciones.*
3. *Los isomorfismos son fibraciones.*
4. $A < f, g > = < Af, Ag >$*, y como caso particular* $A(f \oplus g) = Af \oplus Ag$.
5. r *es fibración.*
6. *Los arcos de cualquier fibración es fibración.*
7. $< rA, Ar >$ *es fibración.*
8. $< r, 1 >$ *es fibración.*

Definición IV.1.5 Dada una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, y dado un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$, tales que $pf = 0$, se dice que f es *nulhomótopo relativo a* p ($f \simeq 0$ rel. p) cuando existe un morfismo $H : \mathrm{X} \to A(\mathrm{A})$, denominado nulhomotopía rel. p, que verifica que $rH = f$ y $(Ap)H = 0$.

Si la fibración es la 0, resulta la homotopía no relativa.

$$\begin{tikzcd}
& AA \arrow[dr, "l"] & \\
X \arrow[ur, "H"] \arrow[rr, "< f, 0 >"'] & & L
\end{tikzcd}$$

Definición IV.1.6 Dada una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, y dados dos morfismos f y g tales que $pf = pg$, se dice que f *es homótopo a* g *relativo a* p ($f \simeq g$ rel. p) si y sólo si $(g - f) \simeq 0$ rel. p.

Si la fibración es la 0, se dirá simplemente que f y g son homótopos ($f \simeq g$).

Proposición IV.1.5 *Ser homótopo relativo a p es una relación de equivalencia.*

Proposición IV.1.6 $Nul(\mathrm{X},\mathrm{A}) = \{f : \mathrm{X} \to \mathrm{A}/f \simeq 0\}$ *es un subgrupo de* $Hom(\mathrm{X},\mathrm{A})$.

Proposición IV.1.7 *La relación de homotopía rel. p es compatible con la composición de morfismos.*

Se pueden así definir las categorías $\mathbf{Ah}$ y $\mathbf{fib(A)_B h}$.

Teorema IV.1.2 $f \simeq 0$ *rel. p si y sólo si* $\tilde{f} : \mathrm{X} \to Ker(p)$ *(inducida de f en el núcleo) es nulhomótopa.*

Proposición IV.1.8 *Los arcos de cualquier objeto* X *es un objeto contráctil.*

Definición IV.1.7 Una *A-categoría aditiva con todas las fibraciones* es una A-categoría aditiva $\mathbf{A}$, donde un morfismo es fibración si y sólo si verifica la PLH.

Teorema IV.1.3 Una A-categoría aditiva con todas las fibraciones es una categoría aditiva $\mathbf{A}$, con un funtor covariante $A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, una transformación natural $r : A \to id_{\mathbf{A}}$ y una clase distinguida de morfismos llamados fibraciones y definidos por la PLH, verificando los siguientes axiomas:

(A1)' Axioma de pull back.

Para una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, siempre existe el siguiente pull back:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} < p,f > \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"] & \mathrm{A} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

Además el funtor A transforma pull backs en pull backs.

También se verifica que $A0 = 0$.

(A2)' Axioma de todas las fibraciones.

existe una transformación $i : A \to AA$ tal que $(Ar)i = 1$, y dada una fibración p existe un morfismo i_p tal que $(Ar)i_p = 1$ y $(AAp)i_p = i(Ap)$.

(A3)' Axioma de sección.

Existe una transfomación $j : A \to AA$ verificando que: $(rA)j = 1$.

Considérese el funtor $P_{\_} = {\_} \oplus A_{\_}$*, y las transformaciones naturales* $q_0 = p_0$ *y* $q_1 = p_0 + rp_1 : {\_} \oplus A_{\_} \to {\_}$.

Teorema IV.1.4 *Dado* $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$*, en una A-categoría aditiva, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *p verifica la PLH.*

2. *Sea* $\varepsilon \in \{0,1\}$*, para cada diagrama conmutativo del tipo:*

$$\begin{tikzcd}
P\mathrm{A} \arrow[drr, bend left, "q_\varepsilon"] \arrow[ddr, bend right, "Pp"'] & & \\
& X \arrow[ul, "E_\varepsilon"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "H"] & A \arrow[d, "p"] \\
& P\mathrm{B} \arrow[r, "q_\varepsilon"'] & B
\end{tikzcd}$$

   Existe un morfismo $E_\varepsilon : \mathrm{X} \to P\mathrm{A}$ *tal que* $q_\varepsilon E_\varepsilon = f$ *y* $(Pp)E_\varepsilon = H$.

3. *Dado* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, $f \simeq 0$, *existe* $g : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$ *tal que* $pg = f$.

4. *Para todo objeto contráctil* X*, se verifica:*

   $p_* : \mathbf{Hom(X, A)} \to \mathbf{Hom(X, B)}$ *es un epimorfismo.*

5. *Dado* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, $f \simeq 0$, *existe* $g : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$, $g \simeq 0$, *tal que* $f = pg$.

6. *Dados* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ *y* $g : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$*, tales que* $f \simeq pg$*, existe* $h : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$ *de forma que:* $g \simeq h$ *y* $f = ph$.

Corolario IV.1.1 *Existe una transformación $j' : A \to AA$ verificando que: $(rA)j' = 1$ y $(Ar)j' = 1$.*

Corolario IV.1.2 *Existe una transformación $t'' : AA \to AA$ verificando: $(rA)t'' = Ar$ y $(Ar)t'' = rA$.*

Teorema IV.1.5 *Toda A-categoría aditiva es una P-categoría aditiva.*

Teorema IV.1.6 Toda P-categoría aditiva es una A-categoría aditiva.

Corolario IV.1.3 Dada $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$:

$f \simeq g$ rel. p en una A-categoría aditiva, si y sólo si $f \simeq g$ rel. p en la P-categoría aditiva equivalente.

Definición IV.1.8 Una *categoría de fibraciones* es una categoría $\mathbb{C}$, con dos familias distinguidas de morfismos denominadas fibraciones y equivalencias débiles, verificando los axiomas (F1), (F2), (F3) y (F4).

Definición IV.1.9 Un morfismo en $\mathbb{C}$ que sea a la vez fibración y equivalencia débil se llamará *fibración trivial*, y se representará por "$\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$".

Definición IV.1.10 Un objeto S en una categoría de fibraciones $\mathbb{C}$ se llama *modelo cofibrante* o simplemente *cofibrante* si cada fibración trivial $p : \mathrm{Q} \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \mathrm{S}$ en $\mathbb{C}$ admite una sección $s : \mathrm{S} \to \mathrm{Q}$.

(F1) Axioma de composición.

Los isomorfismos en $\mathbb{C}$ son equivalencias débiles y fibraciones.

Para dos morfismos:

$$\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{B} \xrightarrow{g} \mathrm{C}$$

si dos cualesquiera de f, g , gf son equivalencias débiles, entonces lo es el tercero. La composición de fibraciones es fibración.

(F2) Axioma de pull back.

Para una fibración $p : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, siempre existe el pull back:

$$\begin{array}{ccc} B<p,f> & \xrightarrow{\overline{f}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde $\overline{p}$ es también una fibración. Además, si f es una equivalencia débil, también lo es $\overline{f}$.

(F3) Axioma de factorización

Todo morfismo $f : X \to B$ en $\mathbf{C}$ se puede factorizar de la forma:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[ur, "g", "\sim"'] \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

donde $p : A \twoheadrightarrow B$ es fibración y $g : X \xrightarrow{\sim} A$ es equivalencia débil.

(F4) Axioma de modelos cofibrantes

Para todo objeto X de $\mathbf{C}$ existe una fibración trivial $SX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$, donde SX es cofibrante en $\mathbf{C}$. Se llamará a $SX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ *modelo cofibrante* de X.

Definición IV.1.11 Si $\mathbf{C}$ tiene objeto final e se dice que un objeto X de $\mathbf{C}$ es *e-fibrante* cuando $e : X \to e$ es una fibración.

Definición IV.1.12 . (Axioma (F2)')

Se dice que una categoría de fibraciones verifica el axioma (F2)' cuando para una fibración $p : A \twoheadrightarrow B$, y un morfismo $f : X \to B$, siempre existe el siguiente pull back:

$$\begin{array}{ccc} B<p,f> & \xrightarrow{\overline{f}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde $\overline{p}$ es también fibración, y además si p es fibración trivial, también lo es $\overline{p}$.

Proposición IV.1.9 *En una categoría de fibraciones, si la fibración p en (F2) es trivial, entonces también la inducida es trivial.*

Corolario IV.1.4 *Toda categoría de fibraciones verifica el axioma (F2)'.*

Definición IV.1.13 Dada una fibración $p : A \twoheadrightarrow B$, se definen los *caminos relativos a p* como el objeto Z de (F3) a través del cual se factoriza el morfismo $< 1,1 >: A \to B < p,p >$. Dicho objeto se denotará Z^p:

$$\begin{tikzcd} & Z^p \arrow[dr, "q'"] & \\ A \arrow[ur, "h'", "\sim"'] \arrow[rr, "<1,1>"'] & & B<p,p> \end{tikzcd}$$

Se define $q'_0 = (\overline{p})_0 q'$ y $q'_1 = (\overline{p})_1 q'$.

Definición IV.1.14 Si todos los objetos de una categoría de fibraciones son e-fibrantes, entonces se definen los caminos de un morfismo $f : X \to B$ como el objeto Z_f a través del cual se factoriza el morfismo $< 1, f >: X \to X\Pi B$.

$$\begin{tikzcd} & Z_f \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[ur, "h", "\sim"'] \arrow[rr, "<1,f>"'] & & X\Pi B \end{tikzcd}$$

Se define $q_0 = p_0 q$ y $q_1 = p_1 q$.

Proposición IV.1.10 *Si todos los objetos de una categoría de fibraciones son e-fibrantes, entonces el axioma (F2) puede ser sustituido por el (F2)'. Además en (F1) se puede sustituir: "Todo isomorfismo es fibración trivial" por "$1 : e \to e$ es equivalencia débil".*

Definición IV.1.15 Dada una fibración $p : A \twoheadrightarrow B$ y dos morfismos $f, g : X \to A$ verificando que $pf = pg = v$, y donde X es un objeto cofibrante. Se dirá que f *es homótopo a g relativo a p*, y se denota por $f \simeq g$ rel. p, cuando existe un triángulo conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} & Z^p \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[ur, "H"] \arrow[rr, "<f,g>"'] & & B<p,p> \end{tikzcd}$$

Demostración:

Basta observar que $I_{-} \cong {}_{-} \oplus C_{-}$ y que $P_{-} \cong {}_{-} \oplus A_{-}$. $\square$

Teorema IV.2.1 *En una IP-categoría aditiva la propiedad de elevación de la homotopía relativa es consecuencia de los otros axiomas.*

Demostración:

Considérese el diagrama de (IP3). Obsérvese que $I\mathrm{A} = \mathrm{A} \oplus C\mathrm{A}$, y que por tanto podemos poner $g = \{g_0, g_1\}$, donde $g_1 : C\mathrm{A} \to \mathrm{B}'$. Como $C\mathrm{A}$ es contráctil, entonces $g_1 \simeq 0 = p0$, luego existe una homotopía $H : C\mathrm{A} \to P\mathrm{B}'$ tal que $q_0 H = g_1$ y $q_1 H = p0$; aplicando a esto último la PLH, existe $F : C\mathrm{A} \to P\mathrm{A}'$ tal que $q_1 F = 0$ y $(Pp)F = H$. Sea $\alpha = q_0 F$, entonces $g_1 = p\alpha$.

Como $q_0 j_0 g_1 = g_1 = p\alpha$, por la PLH existe $\beta : C\mathrm{A} \to P\mathrm{A}'$ verificando $(Pp)\beta = j_0 g_1$ y $q_0\beta = \alpha$.

Por otro lado aplicando la PEH al push out originado por i_0 e i, existe $\gamma : I\mathrm{A} \to \mathrm{B}\{i_0, i\}$ tal que $\gamma i_0 = \overline{i_0}$ y $\gamma(Ii) = \bar{i}$.

Sea $h = f\gamma i_0 p_0 - p_0\beta(Ci)up_1 + p_0\beta p_1 + f\bar{i}j_1 up_1$, donde u es la retracción de Ci. h es el morfismo buscado. $\square$

Corolario IV.2.1 *Una categoría aditiva* $\mathbf{C}$ *es una IP-categoría si y sólo si es una CA-categoría.*

Como consecuencia de este corolario, todo lo que se diga sobre una IP-categoría aditiva puede usarse para una CA-categoría aditiva y viceversa, como se verá en la siguiente sección, en la cual se usará indistintamente una u otra.

IV.3 Categoría de modelo de Quillen.

En esta sección se relacionarán las IP-categorías con las categorías de modelo de Quillen.

Definición IV.3.1 Una *categoría de modelo* es una categoría $\mathbf{M}$, con tres familias distinguidas de morfismos denominadas cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles, (*cof.*, *fib.* y *we.*), que satisfacen los axiomas (CF1), (F1), (CF2)', (F2)', (M0), (M1) y (M2), donde:

(M0) **M** es cerrada para límites y colímites finitos.

(M1) Dado un diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & A' \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B' \end{tikzcd}$$

donde i es cofibración, q fibración y uno de ellos es equivalencia débil, entonces existe $h : A \to A'$ que hace los triángulos conmutativos.

(M2) Cualquier morfismo f puede ser factorizado de la forma $f = pi$, donde p es fibración e i cofibración trivial, y también con i cofibración y p fibración trivial.

Definición IV.3.2 Una *categoría de modelo propia* es una categoría de modelo verificando además los axiomas (CF2) y (F2).

Definición IV.3.3 Un morfismo $f : V \to W$ se llama *retracto* de $g : X \to Y$ si existe un diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "w"] & Y \arrow[r, "w'"] & W \end{tikzcd}$$

donde $v'v = 1_V$ y $w'w = 1_W$.

Definición IV.3.4 Se dice que una categoría de modelo es *cerrada* si satisface el siguiente axioma:

(CM) Si f es un retracto de g, y g es equivalencia débil, fibración o cofibración, también lo es f.

Teorema IV.3.1 *Una CA-categoría aditiva con límites y colímites finitos es una categoría de modelo propia en el sentido de Quillen.*

Demostración:

Considérense como cofibraciones la familia $cof.$ de la C-categoría, como fibraciones la familia $fib.$ de la A-categoría y como equivalencias débiles las h-equivalencias de la CA-categoría. Entonces:

(CF1), (F1), (CF2)' y (F2)' se verifican, por los teoremas III.3.1 y IV.1.10 y el corolario IV.2.1.

(M0) Se verifica, por hipótesis.

(M1) Dado un diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & A' \arrow[d, two heads, "q"] \\ A \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

si i es h-equivalencia, existe $v' : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tal que $v'i \simeq 1$ e $iv' \simeq 1$, y aplicando la PEH existirá $v : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $v \simeq v'$, tal que $vi = 1$ e $iv \simeq 1$. Entonces $giv \simeq g$, y existirá $H : I\mathrm{A} \to \mathrm{B}'$ con $Hi_0 = g$ y $Hi_1 = giv$.

Tomando $H' = gp + HI(iv) - H$, ocurre que $H'\{i_0, Ii\} = q\{fv, fp\}$, y por (IP3) existe $H'' : I\mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ tal que $H''\{i_0, Ii\} = \{fv, fp\}$ y $qH'' = H'$.

$h = H''i_1$ es el morfismo buscado.

Dualmente, si p es fibración trivial, utilizando la propiedad de extensión de homotopía relativa (dual de la propiedad de elevación de homotopía relativa).

(M2) Sea un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. En este caso la factorización hecha para demostrar el axioma (CF3) en el teorema III.3.1 queda reducida a lo siguiente:

Se toma el push out:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & Y \arrow[d, "j_0"] \arrow[ddr, bend left, "1"] & \\ X \oplus CX \arrow[r, "f \oplus 1"'] \arrow[drr, bend right, "fp_0 = \{f, 0\}"'] & Y \oplus CX \arrow[dr, "p_0"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

y $f = p_0 j$, donde $j = (f \oplus 1)i_1 =< f, k >$. En III.3.1 se demuestra que j es cofibración y p_0 es equivalencia débil, y es evidente que p_0 es fibración al ser la inducida de la fibración 0 en el pull back de $X \oplus CX$.

Dualmente se tiene la otra parte del axioma.

Nótese que (CF2) y (F2) se verifican, pues se está en una categoría con todos los objetos ϕ-cofibrantes y e-fibrantes. □

Teorema IV.3.2 *Una CA-categoría aditiva con límites y colímites finitos y todas las cofibraciones y fibraciones es una categoría de modelo propia y cerrada en el sentido de Quillen.*

Demostración:

Bastaría ver que si $f : V \to W$ es un retracto de $g : X \to Y$, y g es equivalencia débil, cofibración o fibración, también lo es f.

Luego se tiene un diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "w"] & Y \arrow[r, "w'"] & W \end{tikzcd}$$

donde $v'v = 1_V$ y $w'w = 1_W$.

- Si g es equivalencia de homotopía con inversa homotópica h, entonces f es una equivalencia de homotopía con inversa homotópica $(v'hw)$.

- Si g es cofibración, con $r : Y \to X$ retracción para su cono, entonces f es una cofibración, puesto que $R = (Cv')r(Cw)$ verifica que $R(Cf) = 1$.

- Si g es fibración, con $s : Y \to X$ sección para sus arcos, entonces f es una fibración, puesto que $S = (Av')s(Aw)$ verifica que $(Af)S = 1$.

□

Capítulo V

Ejemplos.

En este capítulo se dan ejemplos de lo visto anteriormente.

1. Categoría de Espacios Topológicos.

La categoría de espacios topológicos, con el cilindro y caminos definidos de forma natural, y las cofibraciones y fibraciones definidas mediante la PEH y la PLH, respectivamente, es una I-categoría y una P-categoría (ver [2], pag. 29), aunque no una IP-categoría (Ver [2], pág. 33). Por tanto será también una categoría de cofibraciones y una categoría de fibraciones, ambas con todos los objetos fibrantes y cofibrantes.

2. Categoría de objetos sobre C y bajo D.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $u : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ un morfismo fijado en $\mathbf{C}$. Se define la categoría $\mathbf{C}(u) = \mathbf{C}(\mathrm{C} \to \mathrm{D})$ de objetos bajo C y sobre D del siguiente modo:

Los objetos son las tripletas del tipo $(\mathrm{X},\check{x},\hat{x})$, donde $\check{x} : \mathrm{C} \to \mathrm{X}$, $\hat{x} : \mathrm{X} \to \mathrm{D}$ y $u = \hat{x}\,\check{x}$.

Un morfismo f: $(\mathrm{X},\check{x},\hat{x}) \to (\mathrm{Y},\check{y},\hat{y})$ es un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ verificando que $f\check{x} = \check{y}$ e $\hat{y}f = \hat{x}$.

C(u) tiene el objeto inicial $\mathrm{C} \xrightarrow{1} \mathrm{C} \xrightarrow{u} \mathrm{D}$ y el objeto final $\mathrm{C} \xrightarrow{u} \mathrm{D} \xrightarrow{1} \mathrm{D}$. Los push outs y pull backs en $\mathbf{C}$(u) se toman como los push outs y pull backs en $\mathbf{C}$.

En el caso C=**Top**, se definen los funtores cilindro natural y caminos naturales a partir de los siguientes push out y pull back en **Top**, respectivamente:

$$
\begin{tikzcd}
C\times I \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\breve{x}\times 1"'] & C \arrow[d, "\breve{z}"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\
X\times I \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[drr, bend right, "\hat{x}p"'] & Z \arrow[dr, "\hat{z}"] & \\
 & & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "\breve{w}"] \arrow[drr, bend left, "i\hat{x}"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
 & W \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d, "\hat{w}"] & X^{I} \arrow[d, "\hat{x}^{I}"] \\
 & D \arrow[r, "i"'] & D^{I}
\end{tikzcd}
$$

Las transformaciones naturales i_0, i_1, q_0, q_1, p, i se definen de forma análoga a lo hecho en **Top**.

Además (I, P) es un par adjunto.

Si se definen las u-cofibraciones y las u-fibraciones como aquellos morfismos en **Top(u)** que verifican la PEH y la PLH, respectivamente, **Top(u)**, con las u-cofibraciones y las u-fibraciones, es una I-categoría y una P-categoría, respectivamente.

Algunos casos particulares de estas categorías, para morfismos u concretos, serían:

$\mathbf{Top}(\phi \to *) = \mathbf{Top}$

$\mathbf{Top}(* \to *) = \mathbf{Top}^*$ (Categoría de espacios topológicos punteados).

$\mathbf{Top}(C \to *) = \mathbf{Top}^C$ (Espacios topológicos bajo C).

$\mathbf{Top}(\phi \to D) = \mathbf{Top}_D$ (Espacios topológicos sobre D).

$\mathbf{Top}(* \to D) = \mathbf{Top}^*_D$ (Categoría de espacios topológicos punteados sobre D).

$\mathbf{Top}(D \xrightarrow{1} D) = \mathbf{Top(D)}$

Donde se ha denotado $\phi \equiv$ conjunto vacío, $* \equiv$ punto.

Un desarrollo más completo de estas categorías puede verse en [2].

3. Categoría de Espacios Topológicos con las cofibraciones cerradas.

Si en la categoría de los espacios topológicos se consideran como cofibraciones sólo las cofibraciones cerradas (cofibraciones cuya imagen es un conjunto cerrado) es una IP-categoría en el sentido de Baues (Ver [2], pág. 32 y [53]).

4. Categoría de Grupos abelianos.

Esta categoría es una CA-categoría aditiva con todas las cofibraciones y fibraciones, y por tanto una categoría de modelo cerrada y propia, con la siguiente estructura:

Sea R un anillo unitario fijo. Dado un grupo abeliano X se puede definir $C\mathrm{X} = \mathrm{R}\otimes\mathrm{X}$ y $A\mathrm{X} = Hom(\mathrm{R},\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\mathrm{R}}$, donde se ha considerado la estructura de grupo abeliano de R, y la condición de Z-módulos de los grupos. Evidentemente $C\mathrm{X}$ y $A\mathrm{X}$ son grupos abelianos y dado $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, homomorfismo de grupos, se tienen los homomorfismos $Cf = 1 \otimes f$ y $Af(g) = fg$. A y C así definidos son funtores.

Se define $k(\mathrm{x}) = \mathrm{e} \otimes \mathrm{x}$ y $r(g) = g(\mathrm{e})$, donde e es el elemento identidad de R. k y r son transformaciones naturales.

Cofibraciones y fibraciones se definen mediante la PEH y la PLH, respectivamente.

Para ver un desarrollo más detallado consultar [29] y [45].

5. Homotopía de R-casi-módulos.

Sea R un anillo unitario. Un R-casi-módulo X es un grupo abeliano con una operación externa de $\mathrm{R} \times \mathrm{X}$ en X verificando las siguientes propiedades:

1. $(\mathrm{r}+\mathrm{s})\mathrm{x} = \mathrm{rx}+\mathrm{sx}$, $\quad \mathrm{r},\mathrm{s} \in \mathrm{R}$ y $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$

2. $\mathrm{r}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mathrm{rx}+\mathrm{ry}$, $\quad \mathrm{r} \in \mathrm{R}$ y $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathrm{X}$

3. $\mathrm{ex} = \mathrm{x}$, $\quad \mathrm{x} \in \mathrm{X}$ y $\mathrm{e} \equiv$ elemento unidad de R.

Los homomorfismos de R-casi-módulos son las aplicaciones que preservan las operaciones con sus propiedades.

De un modo natural se pueden definir el producto tensorial $\mathrm{R} \otimes \mathrm{X}$ y X^{R} como R-casi-módulos.

Una construcción análoga al ejemplo anterior da una homotopía en la categoría de R-casi-módulos. Esta homotopía fue desarrollada por M. Sanz en [51].

6. Homotopía de R-módulos.

Sean R, S anillos unitarios y $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ homomorfismo de anillos que conserva el elemento unidad. Dado un R-módulo X se define $C\mathrm{X} = \mathrm{S} \otimes \mathrm{X}$ y $A\mathrm{X} = Hom(\mathrm{S},\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\mathrm{S}}$. $C\mathrm{X}$ y $A\mathrm{X}$ son R-módulos puesto que S es un R-módulo con la operación $r.s = f(r).s$, con $\mathrm{r} \in R$ y $\mathrm{s} \in S$.

Un proceso similar a los ejemplos anteriores da a la categoría de R-módulos una estructura de CA-categoría aditiva con todas las cofibraciones y fibraciones, y por tanto de categoría de modelo cerrada y propia.

7. Homotopía de grupos topológicos abelianos y Hausdorff.

Sea R un anillo topológico unitario localmente compacto. Dado un grupo topológico abeliano y Hausdorff X, se tiene que X^{R}, con la topología compacto-abierta, y $\mathrm{R} \otimes \mathrm{X}$, con la topología inicial asociada al homomorfismo inducido por las aplicaciones bilineales continuas con dominio $\mathrm{R} \times \mathrm{X}$, son grupos topológicos abelianos y Hausdorff.

La misma construcción de los ejemplos precedentes dota a la categoría de los grupos topológicos abelianos y Hausdorff de estructura de CA-categoría aditiva con todas las cofibraciones y fibraciones, y por tanto de categoría de modelo cerrada y propia.

Notar que la compacidad local de R asegura la buena definición del isomorfismo natural de adjunción.

8. Homotopía en espacios vectoriales topológicos.

Similar a la anterior.

9. Homotopía en complejos de cadena.

Considérese en este ejemplo la conocida homotopía en complejos de cadena sobre una categoría abeliana.

Sea X un complejo de cadena, se definen $C\mathrm{X}$ y $A\mathrm{X}$ por:

$$(C\mathrm{X})_n = \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_{n-1}, \text{ con } \delta_n^{C\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} \delta_n^{\mathrm{X}} & -1_{\mathrm{X}_{n-1}} \\ 0 & -\delta_{n-1}^{\mathrm{X}} \end{pmatrix}$$

$$(A\mathrm{X})_n = \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_{n+1}, \text{ con } \delta_n^{A\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} \delta_n^{\mathrm{X}} & 0 \\ -1_{\mathrm{X}_n} & -\delta_{n+1}^{\mathrm{X}} \end{pmatrix}$$

Y dado un homomorfismo de complejos de cadena $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, se define:

$(Cf)_n = f_n \oplus f_{n-1}$

$(Af)_n = f_n \oplus f_{n+1}$

C y A son funtores covariantes.

k y r se definen del siguiente modo:

$$k_n = \begin{pmatrix} 1_{X_n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_n = (1_{X_n} \quad 0)$$

que son transformaciones naturales.

Fibraciones y cofibraciones son definidas en el sentido de Kamps [38], esto es, como los homomorfismos de complejos de cadena que tienen secciones y retracciones en cada nivel, respectivamente. Definición que coincide con la PLH y la PEH, respectivamente. Con esta estructura se obtiene una CA-categoría con todas las cofibraciones y fibraciones, y por tanto una categoría de modelo cerrada y propia. Esto último ya fue probado por Golasinski y Gromadzki en [22], pero es más simple hacerlo como aquí se indica. Para verlo más detallado consultar [45].

10. Categoría de espacios topológicos punteados.

Si se considera la categoría $\mathbf{Top}^*$ de espacios topológicos punteados, tomando como cofibraciones los morfismos de $\mathbf{Top}^*$ que son cofibraciones en $\mathbf{Top}$, como fibraciones los morfismos de $\mathbf{Top}^*$ que son fibraciones en $\mathbf{Top}$ y como equivalencias débiles los morfismos de $\mathbf{Top}^*$ que son equivalencias de homotopía en $\mathbf{Top}$, entonces ($\mathbf{Top}^*$,$cof.$,$we.$) es una categoría de cofibraciones, en la cual además todos los objetos son modelos fibrantes, y ($\mathbf{Top}^*$,$fib.$,$we.$) es una categoría de fibraciones, en la cual además todos los objetos son modelos cofibrantes.

Para ver un desarrollo más exhaustivo de este ejemplo, consultar [2].

Bibliografía

[1] ADAMS, J.F.

On the chain algebra of a loop space. Comment. M. Helv., **30** (1956), 305-330.

[2] BAUES, H.J.

Algebraic homotopy. Cambridge University Press (1989).

[3] BOUSFIELD, A.K. AND GUGENHEIM, V.K.A.M.

On PL De Rham theory and rational homotopy type. Memoirs of the AMS, **179** (1976).

[4] BOUSFIELD, A.K. AND FRIEDLANDER, E.M.

Homotopy theory of Γ-spaces, Spectra, and Bisimplicial Sets. Lecture Notes in Math. 658, Springer-Verlag , Geometric Aplications of homotopy Theory, **11** (1978), 80-130.

[5] BOUSFIELD, A.K. AND KAN, D.M.

Homotopy Limits, Completions and Localizations. Lecture Notes in Math. **304**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[6] BROWN, K.S.

Abstract homotopy theory and generalizated sheaf cohomology. Trans. of AMS, **186** (1973), 419-458.

[7] DIECK,T., KAMPS, K.H. AND PUPPE, D.

Homotopietheorie. Lecture Notes in Math. 157, Springer-Verlag (1970)

[8] DOLD, A.

Halbexakte Homotopiefunktoren. Lecture Notes in Math. 12, Springer-Verlag, (1966)

[9] DOLD, A., PUPPE, D.

Homologie nicht-additiven Funktoren, Auwederngen. Ann. Inst. Fourier II (1961), 201-312.

[10] DWYER, W.G.

Tame homotopy theory. Topology, **18** (1979), 321-338.

[11] DWYER, W.G. AND KAN, D.M.

Function complexes for diagrams of simplicial sets. Proc. Konink. Neder. Akad., **86** (1983), 139-150.

[12] DWYER, W.G. AND KAN, D.M.

Homotopy theory and simplicial grupoids. Proc. Konik. Neder. Akad., **87** (1984), 379-389.

[13] ECKMANN, B.

Homotopie et dualite. Colloque de Topologie algebraique Louvain, (1956).

[14] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.

Groupes d'homotopie et dualité. Boll. Soc. Math. de France, **86** (1958), 271-281.

[15] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.

Groups like structures in general categories, I multiplications. Ann. of Math., **145** (1962), 227-255.

[16] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.

Unions and intersections in Homotopy Theory. Comment. Math. Helv., **38** (1964), 239-307.

[17] EDWARS, D.A. AND HASTING, H.M.

Cech and Steenrod Homotopy Theories. Lecture notes in Math. 542, Springer-Verlag (1976).

[18] EGGAR, M.H.

Ex-Homotopy theory. Composito Math, **27** (2) (1973), 185-195.

[19] FELIX,Y.

Etude de quelques cofibrations formelle. Univ. des Sciences et Techniques de Lille, Vol. I, Fasc. II, Part.III (1979).

[20] FREYD, P.

Abelian Categories. Harper International (1966).

[21] FRITSCH, R. AND LATCH, D.M.

Homotopy inverses for Nerve. Math. Z., **177** (2) (1981), 147-180.

[22] GOLASINSKI, M. AND GROMADZKI, G.

The homotopy category of chain complex is a homotopy category. Colloq. Math., **47**, 2 (1982), 173-178.

[23] GRAY, B.

Homotopy theory. Academic Press (1975).

[24] GROTHENDIECK, A.

Pursuing Stakes. Preprint.

[25] HALPERIN, S. AND WATKISS, C.

Relative Homotopical Algebra. Lille Publ., IRMA.

[26] HELLER, A.

Homotopical Algebra in abelian categories. Anals of Math., **68** (1958), 484-525.

[27] HELLER, A.

Stable Homotopy Categories. Bull. AMS, **74** (1968), 28-36.

[28] HELLER, A.

Abstract homotopy in categories of cofibrations and the spectral sequence of Eilenberg-Moore. J. Math., **16** (1972).

[29] HERNANDEZ, L.J.

Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos. Dpto. de Geometría y Topología. Universidad de Zaragoza (1980).

[30] HILTON, P.J.
Homotopy theory of Modules and duality. International Symposium on Algebraic Topology. Univ. Nacional Autónoma de Mexico (1958), 273-281.

[31] HILTON, P.J.
Homotopy theory and duality. Nelson Gordon and Breach (1965).

[32] HUBER, P.J.
Homotopy theory in general categories. Math. Annalen, **144** (1961), 361-385.

[33] HUBER, P.J.
Standard constructions in Abelian Categories. Math. Annalen, **146** (1962), 321-325.

[34] ILLUSIE, L.
Complexe cotangent et deformations II. Lecture Notes in Math. 283, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[35] JAMES, I.M.
Ex Homotopy theory I. Illinois J. of Math., **15** (1971), 329-345.

[36] JAMES, I.M.
General Topology and Homotopy Theory. Springer-Verlag, Berlin (1984).

[37] JARDINE, J.F.
Simplicial presheaves. J. Pure Appl. Algebra 47 n°1 (1987), 35-87.

[38] KAMPS, K.H.
Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopietheorie. Math. Zeitschrift, **124** (1972), 215-236.

[39] KAMPS, K.H.
Fundamentelgruppoid and Homotopien. Arch. Math., **24** (1973), 456-460.

[40] KAN, D.M.
Abstract homotopy I,II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41** (1955), 1092-1096.

[41] KLEISLI, H.
Homotopy theory in Abelian Categories. Canad. J. Math., **14** (1962), 139-169.

[42] KLEISLI, H.

Every Standard construction is induced by a pair of Adjount Functors. Proc. A.M.S., **16**, 3 (1965) 544-546.

[43] Mac LANE, S.

Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag (1971).

[44] MUNKHOLM, H.J.

DGA algebras as in Quillen model Category, relations to shm maps. J. Pure Appl. Algebra, **13** (1878), 221-232.

[45] PADRON, E. AND RODRIGUEZ-MACHIN, S.J.

Model additive categories. Suppl. Rendiconti Circolo Mat. Palermo. Serie II. n° 24 (1990), 465-474.

[46] PUPPE, V.

A remark on homotopy fibrations. Manuscripta Math., **12** (1974), 113-120.

[47] QUILLEN, D.G.

Homotopical algebra. Lecture notes en Math. 43, Springer-Verlag (1967).

[48] QUILLEN, D.G.

Rational homotopy theory. Ann. of Math., **90** (1969), 205-295.

[49] RODRIGUEZ-MACHIN, S.J.

Una axiomatización de la teoría de homotopía. Dpto. Geometría y Topología. Univ. de Zaragoza. (1985).

[50] RODRIGUEZ-MACHIN, S.J.

Homotopía en categorías aditivas. Rev. Academia de Ciencias de Zaragoza, **43** (1988), 73-91.

[51] SANZ, M.

Homotopía en R-casi módulos. Dpto. Geometría y Topología Univ. de Zaragoza (1980).

[52] SERRE. S.P.
Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math., **58** (1953).

[53] STRØM, A.
Note on cofibrations II. Math. Scand., **22** (1968), 130-142.

[54] STRØM, A.
The homotopy category is a homotopy category. Arch. Math., **23** (1972), 435-441.

[55] SULLIVAN, D.
Infinitesimal computations in Topology. Public. Math, **47**, Inst. Hautes Etudes Sc. Paris (1977).

[56] THOMASSON, R.W.
Cat as a Closed Model Category. Preprint, MIT, Cambridge, Massachusetts.

[57] WHITEHEAD, J.H.C.
On simply connected 4-dimensional polihedra. Comment Math. Helv., **22** (1949), 48-92.

[58] WHITEHEAD, J.H.C.
Combinatorial Homotopy II. Bull. AMS, **55** (1949), 213-245.

[59] WHITEHEAD, J.H.C.
Algebraic homotopy theory. Proc. Int. Congress of Mathematicians, Harvard, **2** (1950), 354-357.

[60] WHITEHEAD, J.H.C.
A certain exact sequence. Ann. Math., **52** (1950), 51-110.

[61] WHITEHEAD, J.H.C.
Simple homotopy types. Amer. J. Math., **72** (1950), 1-57.

[62] VARADARAJAN, K.
Numerical invariants in homotopical Algebra I,II. Can J. Math., **27** (1975), 901-934, 935-960.

[63] ZISMAN, M.

Espaces fibrés et groupes d'homotopie. Seminaire Henri Cartan. E.N.S. 11e (1958/59).