REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA

UNA EXCURSIÓN POR GRUPOS EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO

DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JOSÉ ESTEBAN GALÉ GIMENO

EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN SOLEMNE
CELEBRADO EL DÍA 31 DE ENERO DEL AÑO 2018

Y

DISCURSO DE CONTESTACIÓN POR EL

Ilmo. Sr. D. JESÚS BASTERO ELEIZALDE

ACADÉMICO NUMERARIO

ZARAGOZA

2018

Depósito legal: Z 40-2018

Imprime:
Talleres Gráficos Edelvives

UNA EXCURSIÓN POR GRUPOS EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO

POR EL

Ilmo. Sr. D. JOSÉ ESTEBAN GALÉ GIMENO

• Presentación

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores:

Cuando no se sabe cómo empezar no es mala cosa procurar imitar a los clásicos, al menos en la forma, y salvando las distancias. De manera que sirva lo siguiente a modo de

PREÁMBULO

Un preámbulo me obligo a hacer mediante
que en mi vida me he visto en tal aprieto
más ya pensando en agradecimientos
la tarea se vuelve estimulante.
Si su sola mención no es bastante,
me puedo referir, según entiendo,
a varios personajes de talento
de entre una colección algo abundante.
Ellos ciertamente me inculcaron
lo mejor de su arte con su ejemplo;
de fijo ... no dejaron de intentarlo.
Con su ayuda anduve el largo trecho
que me trae a la Academia, confiando
en que vuestra aceptación será un hecho.

Así pues, en un orden cronológico *cíclico* –que permite situar la línea de salida a conveniencia– deseo expresar mi reconocimiento y gratitud a los miembros de la ilustre

Academia de Ciencias de Zaragoza por su benevolencia, al considerarme candidato a formar parte de la misma. Sinceramente me siento abrumado por la designación, y –a expensas de que mi discurso convenza y se me admita– espero corresponder con mi esfuerzo y mejor voluntad al funcionamiento de la institución. Gracias.

Cíclicamente entonces, es momento de remontarse a los albores de la infancia. Aparte de la imagen familiar que conservo de mi madre pacientemente sentada junto a mí, ayudándome frente a un ejército de sumas de muchas cifras –y ésto bajo la atenta mirada de papá vigilando que el niño no se desmadrara–, el recuerdo se aposenta plácido y alegre en el colegio de las Franciscanas de Montpellier de aquí mismo, en Zaragoza. Siento la ineludible necesidad de mencionar a la Madre Presentación, monja que fue mi maestra desde los cuatro a los ocho años. De ella aprendí las primeras letras –y primeros números– y a ella debo los primeros buenos ratos, y por tanto decisivos, como estudiante. Con el paso del tiempo, yo iba a visitarla de vez en cuando mientras permaneció en Zaragoza. En mi última visita le dije que, además de haber aprendido a leer, también le debía mis primeros momentos de disfrute modestamente intelectual, de la mano de la Gramática, con los adjetivos demostrativos y posesivos. Le pareció que yo exageraba y se emocionó, pero eso era la pura verdad. La madre Presentación fue una gran maestra.

También había muy buenos profesores y maestros en el colegio Cardenal Xavierre de los Padres Dominicos, de Zaragoza. Debo referirme expresamente a Pedro García Rosauro, quien resultó vital en mi desarrollo como persona, intelectual y moralmente (e incluso algo jugando al fútbol). Por lo demás, tendría que citar a otros muchos, a algunos de manera especial. Pero siempre existe una tenue frontera para marcar en estos menesteres, y mencionar a unos para dejar de citar a otros me haría sentir incómodo. Realmente guardo muy buenos recuerdos de ese colegio en el que, vivencias aparte, se nos proporcionaba unas sólidas educación y formación y del que, en consecuencia, se salía preparado para afrontar las dificultades de nuevos estudios.

Por otra parte, esta circunstancia también se daba en otros centros de enseñanza de Zaragoza y de toda España. La gente de mi generación que siguió estudios superiores entró en la universidad con un bagaje intelectual de alcance, con un entusiasmo y unas ganas de estudiar y progresar que hicieron posible, en el caso de las ciencias exactas, su edad de plata. La de oro está por llegar, pero ya queda cerca.

A tal grado de desarrollo de la ciencia matemática en España contribuyó notoriamente, no cabe duda, la sección de matemáticas de nuestra universidad. De la licenciatura en Zaragoza se salía bien formado, y esto era consecuencia de la existencia de un elenco de profesores de talla, talentosos, que estaban poniendo al día el contenido de las materias y eran predicantes de la seriedad y la honradez en el estudio, no escatimando apoyo a quien lo demandara en la justa medida.

Uno de estos profesores era don José Garay de Pablo, mi predecesor en portar la medalla número 10 de la Academia, honor que tendré la satisfación de sentir si tienen a bien reiterar su elección. Don José Garay estaba considerado entre los dos o tres mejores profesores de toda la carrera. Hablo de mi curso, pero me consta que es así para otros muchos. Y él debería saberlo –si no lo sabe ya– mejor que nadie, dada la multitud de antiguos alumnos que lo paran por la calle, afectuosamente, y de otros que periódicamente lo invitan a sus reuniones. El profesor Garay destacaba por su ciencia, su amenidad y su afabilidad. Siempre se dijo de él que era matemático listo e ingenioso, cualidades que en su faceta de investigador le han permitido explorar enjundiosa y acertadamente la teoría de la señal, y aplicarla a áreas como la cartografía cerebral u otras relativas a la electrónica. Pero quiero destacar otro aspecto de su actividad investigadora. Se trata de su tesis doctoral, dedicada a la integración en espacios topológicos cuando éstos no presentan compacidad local. El tema era de importancia a mediados y finales de los años sesenta, había unos cuantos trabajos aquí y allá sobre el mismo, y la tesis de Garay bien puede tomarse como uno de los pioneros en el campo. La teoría tomó carta de naturaleza con la publicación en 1973 del texto de L. Schwarz sobre medidas de Radon. Hoy el tema es un clásico que mantiene su relevancia.

El Doctorado marca oficialmente, sólo oficialmente, la última etapa formativa del estudioso, y el inicio de la actividad profesional universitaria propiamente hablando. En mi caso, hay dos matemáticos, excelentes investigadores, que resultan esenciales y son curiosamente complementarios, en carácter y estilo matemático. El primero, cronológicamente, es mi director de tesis, Joaquín Ortega Aramburu, catedrático, ya emérito, de la Universidad de Barcelona. Él recaló por un curso en Zaragoza, el siguiente al de mi fin de carrera, y llegó aportando la visión de la escuela catalana de entonces, de una fuerte imbricación del álgebra y aspectos de la geometría algebraica en el análisis. Su forma de exponer la teoría de las álgebras de Banach, de los ideales y espacios de gérmenes de funciones, etc, de todo esto, me resultó fascinante. Me enseñó mucho y ejerció una gran influencia en mi forma de entender las matemáticas. El segundo en el tiempo es Jean Esterle, "professeur" también emérito de la Universidad de Burdeos I, quien me recibió y acogió extraordinariamente bien en mi año de estancia post-doctoral en la capital aquitana. Para mi contento, descubrí que su línea de investigación, dentro del análisis, también aunaba éste con grandes dosis de álgebra e ideas integradoras de las matemáticas, si bien en una dirección diferente a las que yo conocía. Lejos de suponer una dificultad, esta circunstancia me abrió un panorama de muchas posibilidades de estudio. El magisterio de Esterle fue decisivo.

Naturalmente, no se puede llevar a cabo un trabajo eficaz si no se dispone alrededor de un ambiente propicio. El del antiguo departamento de Teoría de Funciones de nuestra universidad, y después el del de Matemáticas, y dentro de éste el del Área de Análisis, fue y es idóneo. Ninguna traba, toda libertad de movimientos y apoyo constante. Estoy agradecido a todos mis compañeros a lo largo de estos años. Como lo estoy a los colaboradores en investigación pasados y presentes, de los que aprendí y sigo aprendiendo una barbaridad, valga la expresión. Incluyo a mis alumnos de doctorado, a los que luego citaré. Quiero asimismo agradecer al doctor Enrique Artal, miembro de la Academia, su inestimable ayuda informática, sin la cual no hubiera podido editarse este discurso. También al doctor Mario Pérez, y especialmente al joven doctor Luciano Abadías cuyo trabajo con el "beamer" ha sido fenomenal. Precisamente estoy colaborando con Luciano en un artículo, lo conozco bien y le auguro un brillante porvenir profesional.

Por supuesto, mi familia, en el sentido amplio, y amigos ocupan lugar señalado también en lo profesional, por su interés y afecto. A mis padres les debo todo, y posteriormente a mi mujer, Soledad. Ella y mi hijo Miguel Jesús merecen mención aparte por su comprensión y paciencia, entre otras razones.

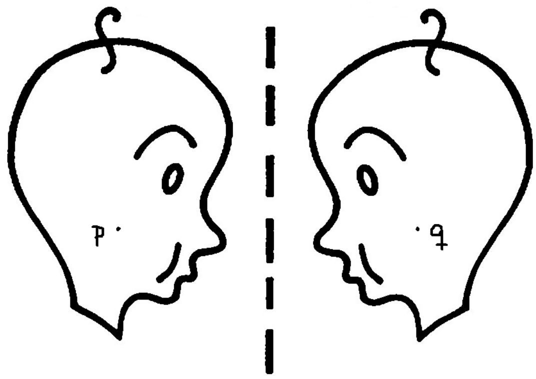
A continuación voy a exponer unos cuantos hechos e ideas sobre la presencia de la estructura de grupo en el análisis matemático. Pero la elección de los temas no ha sido ni exhaustiva ni sistemática. Se trata sólo de una serie de ítems con los que estoy más familiarizado.

1. Preliminares

La noción de *grupo* es una de las grandes ideas unificadoras y de mayor capacidad de penetración en matemáticas. Los grupos aparecen en principio asociados a simetrías de objetos ora matemáticos ora propios de otras ciencias como espectroscopia, cristalografía, física de partículas, etc. En el ámbito de las matemáticas la presencia de grupos en álgebra, teoría de ecuaciones –algebraicas y diferenciales–, geometría diferencial, teoría de números, etc., es constante y de gran importancia. También en áreas del análisis matemático los grupos, o sus variaciones, desempeñan un papel central. En esta exposición mostraré un conjunto de temas de investigación en que los grupos o sus diversas versiones aparecen como objeto de estudio o herramienta de aplicación. No es una lista ni sistemática ni exhaustiva, simplemente refleja áreas en las que he trabajado. Pero antes comenzaré haciendo una breve mención a la forma en que, a través del fascinante misterio de la simetría, los *grupos* se nos aparecen ahí, delante de nuestra mirada y profusamente.

La simetría es parte de nuestra experiencia sensorial más directa y básica. Durante siglos ha intrigado a pensadores, artistas, científicos. La superficie de un lago o estanque de aguas limpias y aquietadas es un lugar propicio para encontrarla. Así fue como el Narciso de la mitología griega se descubrió a si mismo; y lo que vió le gustó, aunque esa es otra historia. En lo que a nosotros concierne el episodio contiene los ingredientes esenciales: el plano de simetría representado por la superficie del agua, y el objeto que se simetriza; a saber, la cara (más o menos agraciada) de Narciso. Esta simetría es espacial, su análoga planar viene indicada en la Figura 1.1 [Bu], en la que el eje o recta de simetría ha reemplazado al plano-superficie de antes.

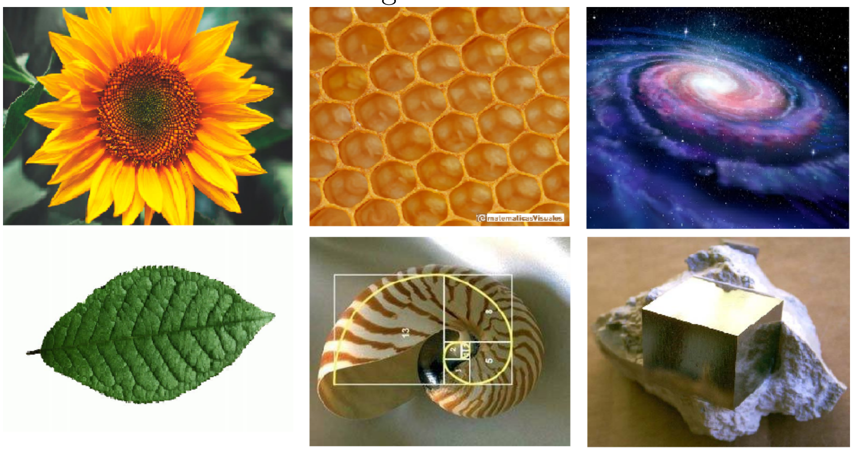
Figura 1.1:



Planos o ejes no son los únicos referentes de simetría en la naturaleza. Ésta contiene maravillosos ejemplos como los que siguen: girasoles (simetría radial), brócoli romanesco (fractal), telas de araña (reticular), panales de abejas (hexagonal), concha del nautilus (espiral logarítmica), copos de nieve (hexagonal); a los que añadir la galaxia de la Vía Láctea y, por supuesto, ¡las hojas de los árboles y las flores!, así como las extraordinarias configuraciones cristalográficas de la materia.

Que el arte imita a la naturaleza con provecho (lo recíproco es cuestión que ahora no procede) es algo de que dan buena prueba los ornamentos egipcios de las tumbas tebanas, formados por espirales recubriendo el plano. Existen 17 simetrías distintas de esa clase, cuya mayor parte se remonta a tiempos prehistóricos. El arte minoico bebió de ellas, y los griegos agregaron los mosaicos geométricos, vigentes hasta ahora mismo. En los entrelazamientos de línea árabes, sus estrellas, cuadrados y pentágonos ornamentales destaca poderosamente la fuerza de la simetría, y su principio se repite en la música, pues "el canon ... es ... un polígono sonoro que, ... en interferencia consigo mismo, produce un cierto número de compases llenos de geometría" [LeL, pp. 508, 509].

Figura 1.2:



Para descubrir grupos en la simetría es preciso un cambio de enfoque. Regresemos a la Fig. 1.1. En ella cada punto p es simétrico, respecto al eje, de un único punto q. Tal correspondencia especular, o *reflexión*, puede verse como resultado de un *movimiento* o *transformación* T que lleva p a q (y q a p en este caso). Si p y q los pensamos formando en conjunto la cara total C, dividida en dos en la Fig 1.1, ocurre que T "actúa" sobre C transformándola en sí misma –$T(C) = C$ en símbolos–. La traducción matemática de ello es que el conjunto de las reflexiones T y la identidad I, que a cada p asocia el mismo p, forma un *grupo* (de orden 2). El hecho de que $T(C) = C$ indica que el conjunto C es *invariante* bajo la acción de T.

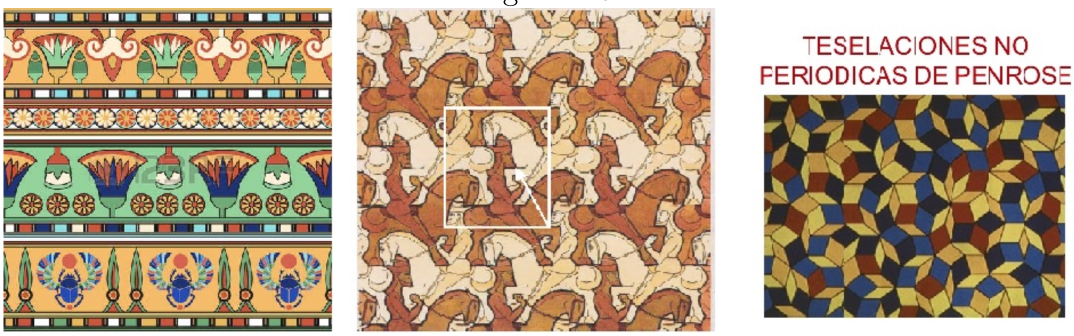
El ejemplo anterior es un caso elemental de grupo de transformaciones o movimientos en el espacio (y en el plano), siendo los más básicos o intuitivos los definidos por traslaciones, giros planos y rotaciones, simetrías (de orden n) respecto a puntos, rectas y planos, movimientos helicoidales, etc. Dado un cuerpo en el espacio su simetría está caracterizada por la colección de movimientos (grupos actuantes) que lo dejan invariante.

El cálculo de los grupos de simetría de figuras geométricas es de importancia, incluso para ornamentos planos infinitos ([AKL, pp. 337 y ss.]); por ejemplo las teselaciones, de interés por su relación con cuasicristales y su presencia en la estructura íntima de la materia.

1.2. Grupos en las Ciencias Naturales

La interacción de simetría y ausencia de simetría se ha tomado, en sus diversas formas, como condición necesaria del fenómeno físico en general (P. Curie). Las aplicaciones de este principio son amplias y bien conocidas. Así ocurre en el enantiomorfismo, relacionado

Figura 1.3:



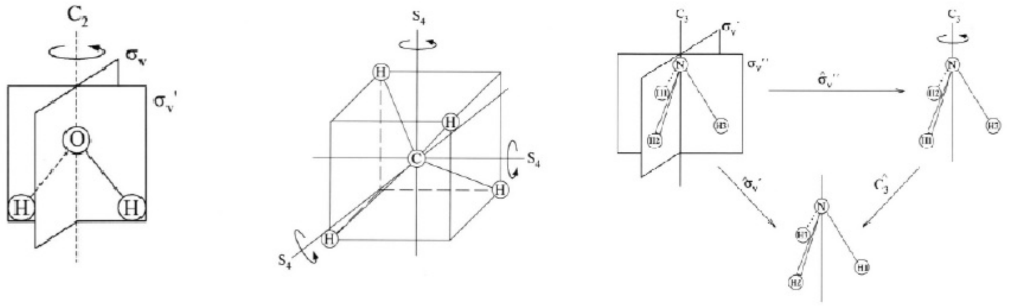
con propiedades de rotación en la polarización de la luz, en que dos cristales o moléculas se definen como isómeros ópticos si son imagen especular, no superponible, uno del otro, y presentan cada uno por separado o conjuntamente alguna disimetría interna.

En otra dirección, la antisimetría –representada por el añadido de un signo menos en las igualdades matemáticas que definen inicialmente la simetría– desempeña un papel capital en la explicación-comprensión del "vínculo molecular" (L. de Broglie), de modo que la función de ondas de un sistema de n partículas debería resultar simétrica o antisimétrica en cada permutación de las partículas. Por ejemplo, corpúsculos como electrón, protón, neutrón, son antisimétricos, mientras que sistemas de fotones o partículas alfa son de estado simétrico o antisimétrico según que el número de sus constituyentes sea par o impar. Es decir, este fenómeno *se explica matemáticamente por la disimetría interna del grupo de permutaciones de n objetos* [LeL, p. 61].

En mecánica cuántica, el momento angular intrínseco (espín) del electrón y otras partículas subatómicas, es un ejemplo de simetría-antisimetría susceptible de tomar simultáneamente dos valores opuestos. Se mide mediante el espinor (onda de dos parejas de dos componentes que refleja un desdoblamiento interno), concepto abstracto introducido por É. Cartan en 1913, en su estudio de las representaciones lineales del grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^n$ [LeL, p. 59]. Espines y espinores aparecen ligados a representaciones del grupo de Lorentz, o grupo de simetrías del espacio-tiempo de la relatividad especial. En nuestra actual terminología, espines y espinores se contemplan asociados a representaciones de álgebras de Clifford. Todo ello no sorprende, dada la correlación estrecha y abundante en ejemplos entre la *teoría de representaciones de grupos localmente compactos (y de Lie)* y los principios de simetría en física cuántica [A, p. 84].

En química atómica, la articulación de la simetría molecular mediante la teoría de grupos es fundamental en la descripción y predicción de las propiedades de las moléculas, para clasificar niveles de energía o funciones de onda, y en la interpretación de los espectros moleculares (espectroscopia). Las siguientes figuras (tomadas de Internet, autor desconocido) muestran la simetría de la molécula del agua, del metano y del amoníaco, así como el resultado de aplicar simetrías a la última.

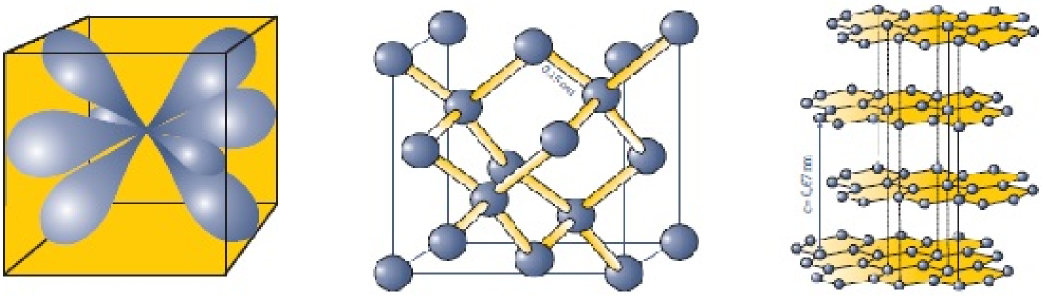
Figura 1.4:



Hay principios matemáticos que gobiernan la cuantización de electrones (cálculo de valores propios de matrices) y sus localizaciones en orbitales, que son regiones de formas de gran simetría (espacios de vectores propios, cuyo cálculo viene simplificado por la simetría [R], Fig. 1.5 a la izquierda). De este modo se explica el ensamblaje molecular, pues dos átomos formarán molécula cuando sus electrones más externos formen orbitales moleculares.

Estamos en un mundo de formas regulares, impresión reforzada ante la contemplación del carbono, que como dominador de la materia orgánica aparece organizado de diversas formas, según sea la diferente disposición de los elementos de simetría: En el diamante los átomos forman un retículo cúbico fuertemente ensamblado, regular e impenetrable, lo que explica su extrema dureza, por ejemplo. En el grafito los átomos están distribuidos en capas hexagonales deslizándose unas sobre otras. El grafito es blando y maleable (Fig. 1.5).

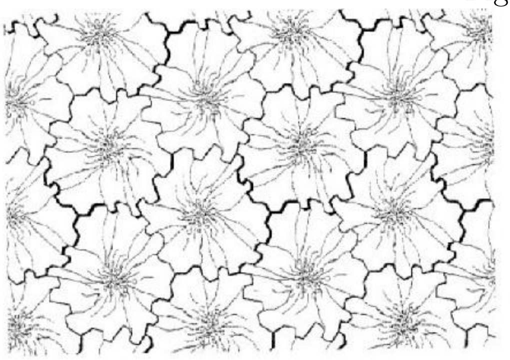
Figura 1.5:



Para terminar este apartado algo decimos sobre la acción de grupos en moléculas. Un grupo actuante sobre una molécula aislada se llama puntual si deja fijo el centro de masas. Y se llama espacial si posee simetría de traslación pero no deja ningún punto fijo; éstos son propios de las redes cristalinas, y un buen ejemplo lo tenemos en el hidrato de carbono, de estructura similar al hielo. En este sentido la cristalografía puede considerarse parcialmente como sub-área de la física y química. Problema central en esa rama era el de clasificar los sistemas regulares de puntos en el espacio, resuelto en 1890 utilizando teoría de grupos (pues la cuestión está íntimamente ligada al estudio de los grupos discretos de movimientos) [AKL, p. 342].

La cristalografía es una disciplina científica de mucha importancia y aplicación; por ejemplo, permitió determinar la estructura molecular de la penicilina y guarda relación con la difracción de los rayos X y el análisis de Fourier. En aspectos más modernos de la teoría aparecen los cuasicristales, de forma estructural no periódica y con falta de simetría traslacional. Las teselaciones no periódicas son casos particulares. Siguen unas muestras de isomorfismos (¡mediando grupos!) entre teselaciones y compuestos químicos tomadas de [MS] (Fig. 1.6).

Figura 1.6:



Benzene is tessellated as a $C_3C_3C_3C_3C_3C_3$ flower.

Ethylene can be tessellated as a CCCC duck.

1.3. Grupos en Matemáticas

No se trata aquí de exponer la ubicuidad o la inmensa variedad de aplicaciones que los grupos presentan en la ciencia matemática. Ni siquiera voy a detenerme en la epopéyica clasificación de los grupos finitos simples. El objetivo es dar una somera idea de la gestación histórica del concepto de grupo.

Un conjunto G de elementos $a, b, c, \ldots, s, t, \ldots$ es un *grupo* si existe una operación de composición $(s,t) \mapsto st$ tal que $(rs)t = r(st)$ $\forall r, s, t \in G$ (asociatividad), existe $\mathbf{1} \in G$ cumpliendo $a\mathbf{1} = \mathbf{1}a$ $\forall a \in G$ (elemento neutro), y para cada t en G existe un (único, de hecho) $s \in G$ verificando $st = ts = \mathbf{1}$, que se escribe $s := t^{-1}$ (inverso de t). Hemos empleado la notación multiplicativa st habitual; si en su lugar usamos la aditiva, $(s,t) \mapsto s + t$, entonces el elemento neutro se denota por 0 y el inverso de t por $-t$. El grupo G es *abeliano* si $ab = ba$ $\forall a, b \in G$; en este caso es frecuente usar la notación aditiva. Hemos mencionado ya implícitamente algunos ejemplos de grupos; a saber:

– *Finitos.* Contienen un número finito de elementos; v.g., grupos de movimientos en el plano o en el espacio.

– *Cíclicos finitos.* Generados por un solo elemento a; $G := \{\mathbf{1}, a, \ldots, a^{p-1}\}$, $a^p = \mathbf{1}$, $a^j \neq \mathbf{1}$, $j = 1, \ldots, p-1$ (de *orden* $p \in \mathbb{N}$). Ejemplo: grupo de las rotaciones, en el plano y en torno al origen, de ángulo múltiplo entero de $2\pi/p$.

– *De permutaciones.* Dado un conjunto X, una *permutación* de X es cualquier aplicación biyectiva $\sigma\colon X \to X$. Si el conjunto está enumerado, $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, σ puede identificarse con una biyección del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, y se escribe entonces $\sigma(x_j) = x_{\sigma(j)}$, para $j \in \mathbb{N}$. El conjunto $\mathfrak{S}(X)$ de todas las permutaciones de X es un grupo con la operación de iteración. Si X es finito con n elementos $\mathfrak{S}(X)$ se denota $\mathfrak{S}_n$ y se le llama grupo simétrico de permutaciones. El número de elementos en $\mathfrak{S}_n$ es $n! = n(n-1)\ldots 1$.

Vamos a ver cómo la noción de grupo se decanta a partir de la simetría inherente a la operación de permutación.

• Ecuaciones algebraicas

Consideramos ecuaciones definidas por polinomios, con coeficientes complejos en varias variables, igualados a cero:

$$E(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{1.1}$$

Un problema central del álgebra clásica era la obtención de fórmulas de resolución de las ecuaciones algebraicas mediante radicales, es decir, cocientes racionales de sumas o productos de raíces cuadradas, cúbicas, etc. Los griegos ya sabían resolver las ecuaciones de segundo grado, pero hubo que esperar hasta el siglo XVI para encontrar las fórmulas de las ecuaciones de tercer y cuarto grado (Scipio del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari). Hasta J. L. Lagrange, dos siglos más tarde, no se incorporó el primer elemento de duda sobre la resolución de ecuaciones de cualquier grado.

• *Método de Lagrange*

En su método, Lagrange emplea teoría de polinomios simétricos, teoría de permutaciones y su teoría de *resolventes*. Éstas son expresiones de la forma

$$y_k = \omega_k x_1 + \omega_k^2 x_1 + \cdots + \omega_k^n x_n \quad (k = 1, \ldots, n),$$

en donde las ω_k son las raíces n-ésimas complejas de la unidad. Resulta que las variables x_j son función de las y_j, y puede ocurrir –por ejemplo, si n es primo– que éstas satisfagan ecuaciones de grado inferior a n. La técnica de reducción explica por qué la ecuación de tercer grado tiene solución por radicales. Sobre esta base se pasa a una estrategia general de ataque fundada en el estudio de los distintos valores que una función racional R de las raíces de la ecuación puede tomar al *permutar* ésas arbitrariamente. El método da una serie de resultados que prefiguran la teoría de grupos. El estudio de Lagrange es de relevancia porque da una razón común de la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y muestra una relación entre las propiedades de simetría (permutaciones) de las raíces de una ecuación y la posibilidad de resolverla por radicales.

• *No resolubilidad de las ecuaciones algebraicas de grado alto*

Los resultados de Lagrange plantearon la posibilidad de que ecuaciones de grado superior no pudieran resolverse por radicales. La demostración, dificil de seguir, de este hecho estaba reservada al genio de N. Abel. Por otro lado el propio Abel obtuvo tipos de ecuaciones resolubles de grado $n > 5$ –en particular las conocidas como abelianas, en su honor–, así que quedaba abierta la cuestión de cómo caracterizar las ecuaciones resolubles por radicales en términos de las permutaciones de sus raíces.

La solución la dió É. Galois, iniciando con ello y en paralelo la teoría de cuerpos. La aproximación de Galois sigue las ideas de Lagrange. Define el grupo de Galois $\mathcal{G}(E)$ de la ecuación $E = 0$ como un cierto subgrupo de permutaciones asociadas a las funciones racionales de las soluciones de la ecuación $E = 0$ (en la presentación moderna $\mathcal{G}(E)$ se introduce como el grupo de automorfismos del "cuerpo de descomposición" de $E = 0$ que dejan invariante el cuerpo "base" de $E = 0$) y muestra que el grupo de Galois asociado a la ecuación de grado n genérica es isomorfo a $\mathfrak{S}_n$. Complementariamente, la suposición de que la ecuación algebraica admite solución por radicales le lleva a la definición de grupo (abstracto) *resoluble*, en denominación actual, cuya definición nos llevaría tiempo. Entonces Galois demuestra que *la ecuación algebraica* $E = 0$ *es resoluble por radicales si y solo si el grupo* $\mathcal{G}(E)$ *es resoluble como tal grupo*. Puesto que el grupo de permutaciones $\mathfrak{S}_n$ es soluble si y solo si $n > 4$, el resultado da la profunda razón de que la resolubilidad de ecuaciones solo sea posible para $n = 2, 3, 4$. Del teorema de Galois se sigue asimismo que es imposible la trisección del cubo o la duplicación del cubo, usando solo regla y compás.

Las ideas de Galois resultaron fundamentales en la formación del concepto de grupo. Otros trabajos importantes en ese sentido se deben a Lagrange, Ruffini, Vandermonde, Euler, Gauss, Cauchy, $\ldots$. Resultó clave para la consolidación definitiva de la teoría el "Tratado de las sustituciones", de C. Jordan El primer estudio de grupos de infinitos elementos también es de Jordan. La definición abstracta de grupo es de Cayley, en 1854.

• Grupos de Lie

El estudio de los grupos infinitos continuos se inició en una doble vertiente, geométrica y de aplicación en ecuaciones diferenciales, que cristalizó en la teoría de *grupos de Lie*, inicialmente denominados grupos *continuos* en contraste con los discretos de la teoría de Galois. Se considera a F. Klein como el adalid de la interconexión de grupos y geometría, pero también S. Lie trató con grupos continuos en trabajos sobre complejos de rectas, y en otros en colaboración con Klein. Fue éste quien hizo notar que los métodos de Lie guardaban relación con la teoría de Galois para grupos abelianos, observación que, junto a la teoría de integración de ecuaciones de Jacobi, llevó a Lie al estudio de los grupos continuos en su versión local o infinitesimal, es decir, versión *álgebras de Lie* en lenguaje moderno. La visión global se desarrollaría posteriormente.

Así pues, el establecimiento de las propiedades fundamentales de los grupos de Lie tuvo lugar inicialmente en estrecha sintonía con la búsqueda de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Estos métodos pretendían seguir el modelo introducido por Galois –tomando la simetría como principio generador– si bien sólo en espíritu, digamos, por cuanto los detalles técnicos tenían que ser a la fuerza distintos. El punto de partida de Lie radica en la siguiente sencilla observación.

Sea la ecuación de primer orden $dy/dx = g(x)$, con g función dato, de valores reales y continua en la recta real. Entonces la solución integral $G(x) = \int g$ existe gracias al teorema fundamental del Cálculo. Y la solución general de la ecuación viene dada por

$$F(x) = \left(\int g\right) + C$$

siendo C un número real cualquiera. Razonando "a lo Galois", Lie notó que la constante C puede interpretarse como un elemento del *grupo aditivo* $\mathbb{R}$ (grupo de simetría o *invariación*) que *actúa sobre el conjunto de soluciones* de la ecuación $dy/dx = g(x)$. Entonces ideó un algoritmo para determinar cuándo una ecuación de primer grado posee un grupo de invariación adecuado, en cuyo caso la ecuación posee solución por integrales elementales.

Para ecuaciones de orden mayor se procedería reduciendo el orden, siempre disponiendo de un adecuado grupo actuante sobre las soluciones. El planteamiento general puede describirse brevemente de modo simple: Suponemos dada una ecuación diferencial, condiciones de contorno aparte, en la forma $Df = g$, siendo g función dato f función incógnita, y D un *operador diferencial* fijado; es decir, suma de combinaciones lineales de productos de funciones con derivadas parciales o totales de diverso orden. Un grupo (de Lie) de simetrías de la ecuación es, si existe, un grupo que transforma soluciones de la ecuación en soluciones de la misma ecuación, o, dicho de otro modo, un grupo de operadores que actuando sobre el conjunto o espacio de soluciones conmutan con el operador D. Cuanto mayor sea este grupo más posibilidades de resolución presentará la ecuación. Una buena referencia sobre ecuaciones ligadas a la Física es [Gu].

Los grupos de Lie ocupan un lugar central en Matemáticas y en otras ciencias, de manera particular en Física, pues como es sabido si hay simetría hay alguna cantidad física que se conserva (teorema de E. Noether, expresado en versión ligera para andar por casa).

Entre los aspectos importantes de la teoría de grupos dignos de comentario, hemos elegido una parte, aquella que quizá mejor puede convencernos plásticamente de su existencia en la naturaleza, y con la que por otro lado he intentado dar idea de su gestación. Respecto a la ubicuidad de los grupos y según A. Speiser, "...los pitágoricos decían: todo es número. Hoy podríamos al mismo tiempo precisar y ampliar este pensamiento y decir: todo es grupo". Pero cierto que los grupos son recreación de la mente humana; por ello no está de más citar también a F. Le Lionnais cuando enuncia, probablemente siguiendo a P. Valéry, que "...La concepción de grupo liga su existencia y su mecanismo con la estructura del espíritu humano y quizá con la arquitectura del universo".

Sin pretender tanta rotundidad, no obstante vamos a sustentar parcialmente esas manifestaciones con algunos apuntes sobre la significación de los grupos en aspectos teóricos del análisis matemático, muchos de los cuales ya no se presentan necesariamente ligados a la noción de simetría, al menos formalmente y en principio.

1.4. Grupos en Análisis Matemático. Generalidades

Los grupos, y variaciones de los mismos, que voy a comentar aparecen ligados a cuestiones de análisis armónico y sus ramificaciones en ecuaciones diferenciales abstractas y cálculo funcional, así como en teoría de la medida y teoría y clasificación de álgebras de Banach.

• **Análisis armónico**

Habitualmente, el análisis armónico sobre los grupos euclídeos se denomina análisis de Fourier, mientras que el que se realiza sobre grupos más generales se conoce como análisis armónico abstracto.

• *Análisis de Fourier; algo de historia y razón de su origen*

El análisis de Fourier es una de las disciplinas de más importancia e influencia en el desarrollo del análisis matemático. Iniciado históricamente ante la necesidad de comprender problemas de naturaleza física y tipo periódico –v. g., el de la cuerda vibrante y propagación del sonido, el de la difusión del calor, ...– puede decirse modernamente, en términos muy generales y a los efectos de la presente disquisición, que consiste en el estudio de las series de Fourier y de la transformada de Fourier, y de modo que subyaciendo en ambos conceptos nos encontramos respectivamente la circunferencia unidad $\mathbb{T} : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, vista como *grupo multiplicativo* ($z, w \in \mathbb{T} \Rightarrow zw \in \mathbb{T}$) –y su dual, el *grupo aditivo* de los números enteros $\mathbb{Z}$–, y el espacio euclídeo real n-dimensional $\mathbb{R}^n$, visto como *grupo aditivo* de n-tuplas. Recordamos que la serie de Fourier compleja de una función f integrable sobre $\mathbb{T}$ viene dada por la expresión formal $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikt}$, siendo $\widehat{f}(k)$ el coeficiente k-ésimo de Fourier de f, de fórmula

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

mientras que la transformada de Fourier de una función g integrable sobre $\mathbb{R}^n$ es la función $\widehat{g}$, versión continua de la serie anterior, definida como

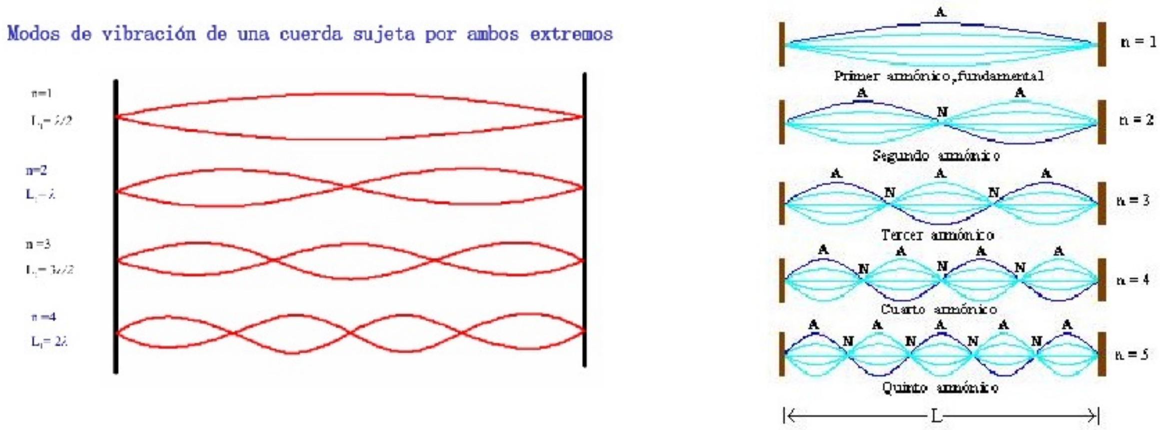
$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-ix\cdot y}\, dx, \tag{1.3}$$

en donde $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$. La estructura de grupo en $\mathbb{T}$ y en $\mathbb{R}^n$ se traduce, en el manejo de funciones, en el producto de convolución, operación de gran significación y utilidad en Análisis.

El desarrollo en serie de Fourier igualmente se expresa en la forma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{2\pi ik\omega t}$, y análogamente la integral (1.2), para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$ fijo de antemano, al que se llama *frecuencia*. Por otra parte la serie en exponenciales $e^{2\pi ik\omega t}$ admite expresión en serie de senos y/o cosenos $\operatorname{sen}(2\pi k\omega t)$, $\cos(2\pi k\omega t)$. En esa forma emerge en el análisis matemático, y de la mano de consideraciones de naturaleza física originarimente.

Supongamos una cuerda elástica y homogénea a la que flexionamos transversalmente

Figura 1.7:



mediante pequeñas vibraciones. Hallar la posición $u(x,t)$ de cada partícula x de la cuerda en cada instante t es el *problema de la cuerda vibrante*, regido por la *ecuación de ondas* unidimensional $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ obtenida por D'Alembert (c es una constante dependiente de la tensión y la densidad de la cuerda). Daniel Bernoulli descubrió una solución al problema expresada mediante *ondas estacionarias*, que son movimientos de la cuerda en que hay nodos fijos. Dependiendo del número de nodos nos encontramos con el *armónico fundamental* ω (la frecuencia de antes), y los armónicos segundo 2ω, tercero 3ω, etc. (Véase Fig. 1.7.) La denominación no es casual pues tales armónicos (tonos musicales puros) ya eran reconocidos desde Pitágoras. Más aún, Bernoulli, convencido por sus experimentos en acústica, enunció que cualquier movimiento vibratorio puede componerse mediante superposición de ondas estacionarias en forma de serie *infinita* de combinaciones lineales de senos y cosenos. Modelo universal del modo más sencillo de vibración, de forma sinusoidal, es el del *oscilador armónico simple* o *péndulo simple* (Fig. 1.8). En acústica, tal solución corresponde a un tono puro.

La solución general propuesta por Bernoulli generó una controversia que se mantuvo por más de un decenio. La confianza en la bondad de la teoría llegó con la irrupción de la memoria de J. L. Fourier sobre teoría de la difusión del calor (1822), cuestión en principio notoriamente alejada de la acústica. Fourier dedujo la ecuación del calor en función del operador "laplaciano" y observó que las condiciones iniciales del problema implicaban soluciones en forma de series de senos, cosenos, o ambos a la vez.

No extraña la equivalencia entre teoría del calor y del sonido, ya que se trata de fenómenos físicos de naturaleza periódica u ondicular, con frecuencias que forman conjunto discreto, con separación o salto entre ellas. Pero hay asimismo fenómenos en los que se producen multitud de ondas con diferencias entre ellas muy pequeñas de manera que bien

Figura 1.8:

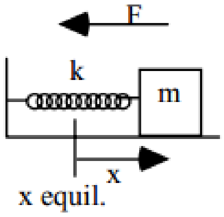
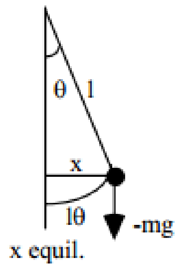
Es un **modelo** de gran utilidad en la descripción de fenómenos físicos, descrito por la **ecuación diferencial**:

$$\boxed{\ddot{\Psi} + \omega^2 \Psi = 0}$$

Ψ magnitud cualquiera (distancia, ángulo, carga eléctrica, función de ondas...).

ω_o <u>pulsación</u> o frecuencia angular (radianes/segundo) propia del sistema ($\omega_o = 2\pi/\tau$, τ periodo)

EJEMPLOS en los que el OAS es un buen modelo

	<u>MASA CON RESORTE</u> Si los desplazamientos x respecto a la posición de equilibrio son pequeños, se cumple la ley de Hooke: $F=-kx=m\ddot{x}$ Ec. movimiento: $\boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0}$ $x(t)=x_m\cos(\omega t+\phi)$ **OAS** con $\omega_o=\sqrt{\frac{k}{m}}$
	<u>PÉNDULO SIMPLE</u> de longitud l $F=-mg\sin\theta=ml\ddot{\theta}$; $\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0$ si θ<< (pequeños desplazamientos respecto al equilibrio), $\sin\theta\approx\theta$ Ec. movimiento $\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0}$ $\theta(t)=\theta_m\cos(\omega t+\phi)$ **OAS** con $\omega_o=\sqrt{\frac{g}{l}}$

pueden considerarse definiendo un continuo. Ejemplos de esto se presentan con las ondas electromagnéticas y en el movimiento de las partículas elementales. Es así como la serie de Fourier se convierte en la transformada de Fourier (1.3). Es de notar que, en mecánica cuántica, todo lo que sea físicamente observable de la partícula puede obtenerse de la función de ondas, y ésta satisface también una ecuación de ondas, mediando el laplaciano, la ecuación de Schrödinger. Para versiones cuánticas de ecuaciones clásicas en que aparece el operador laplaciano, véase [Gu].

En el anterior contexto, la estructura de grupo en $\mathbb{T}$ y en $\mathbb{R}^n$ todavía no queda explícita, salvo por el hecho de la invariación de la integral bajo la acción de traslaciones. La conciencia de la importancia de tal estructura se revela, históricamente, en paralelo a la del producto de convolución, concepto que se abre paso definitivamente al tratar con grupos topológicos abstractos.

• *Grupos topológicos*

En el primer tercio del siglo XX se planteó la necesidad de extender los fundamentos del análisis de Fourier a grupos, más generales que $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ ó $\mathbb{R}^n$, que habían aparecido en cuestiones sobre cuerpos locales, en teoría de números, o en el campo complejo vía series de Dirichlet. Vistas éstas últimas como series periódicas de infinitas variables, entraba en juego el producto cartesiano contable $\mathbb{T}^\omega$, cuyos subgrupos cerrados son todos los grupos compactos, métricos y abelianos. Tomando sus duales (discretos), los euclídeos, y los productos directos de todos ellos nos encontramos con la entera clase de los grupos localmente compactos abelianos. Por otra parte, la mecánica cuántica iba suministrando numerosos ejemplos susceptibles de entenderse en profundidad en términos de grupos de Lie no abelianos y sus representaciones irreducibles (Para otros grupos localmente compactos no abelianos de interés puede verse [F, p. 34].) La teoría de Fourier pedía de forma natural e insistentemente extenderse a este nivel de abstracción.

Distinguimos dos clases de grupos:

(a) *Grupos localmente compactos.* Un grupo topológico es un grupo dotado con una topología para la cual las operaciones de producto y de paso al inverso son continuas. Los localmente compactos son los grupos que poseen entornos compactos del elemento neutro. Siempre existe en ellos una medida invariante por traslaciones, a izquierda o a derecha: la medida de Haar.

El estudio de los grupos se facilita y enriquece mediante el método de *linealización*, que consiste en pasar a considerar un espacio vectorial que encripta las propiedades del grupo en cuestión. A saber, dado un grupo G se define su *álgebra de grupo* como el espacio vectorial complejo de sumas formales $\sum_{t\in G} \lambda_t X^t$, $(\lambda_t)_{t\in G} \subseteq \mathbb{C}$, en la indeterminada X. Este espacio es un álgebra con la regla $X^s \cdot X^t := X^{s+t}$, que trasladada a las sumas da

$$\left(\sum_{r\in G} \lambda_r X^r\right)\left(\sum_{s\in G} \lambda_s X^s\right) = \sum_{t\in G}\left(\sum_{u\in G} \lambda_u \lambda_{u^{-1}t}\right) X^t.$$

La subálgebra $l^1(G) := \{\sum_{t\in G} \lambda_t X^t \mid \sum_{t\in G} |\lambda_t| < \infty\}$, en la que G se interpreta provisto de la topología discreta, es de mayor interés en el análisis matemático. Para grupos localmente compactos generales su álgebra de grupo $L^1(G)$ está formada por las funciones $f\colon G \to \mathbb{C}$ Haar-medibles, definidas c.t.p., y tales que $\|f\|_1 := \int_G |f(t)|dt < \infty$. En este caso $L^1(G)$ es un *álgebra de Banach* con la norma $\|\cdot\|_1$ y el producto (de convolución)

$$(f * g)(t) := \int_G f(s)g(s^{-1}t)\, ds \quad (t \in G; f, g \in L^1(G)),$$

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ el grupo de operadores invertibles en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los operadores acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Se llama *representación* de un grupo topológico G en $\mathcal{H}$ a todo homomorfismo de grupos $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ fuertemente continuo. Una representación π se llama *irreducible* si no existe subespacio cerrado S de G, distinto de $\{\mathbf{1}\}$ y del propio G, tal que $\pi(S)\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$, y recibe el nombre de *unitaria* si $\pi(t) \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$, $\forall t \in G$, donde $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ es el subgrupo de los operadores unitarios de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$.

Las representaciones son una herramienta de gran alcance en el estudio de los grupos. Las unitarias ($\sim$ "simetría") irreducibles son los elementos básicos fundamentales de la teoría de representaciones, y por ello son de relevancia para analizar la estructura y propiedades de un grupo dado. Cuando G es localmente compacto π puede verse como homomorfismo acotado de álgebras de Banach, $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, mediante la fórmula

$$\pi(f)x := \int_G f(t)\pi(t)x\,dt \quad (x \in \mathcal{H}, f \in L^1(G)).$$

(b) *Grupos de Lie, en dimensión finita e infinita.* Ya hemos hablado de la importancia de los grupos de Lie en la resolución de ecuaciones diferenciales por la vía de la simetría, pero éstos van mucho más allá, siendo de gran aplicación en geometría, análisis matemático y física. Como muestra de su incidencia en Física, mencionemos que aparecen a la hora de mostrar la equivalencia de las teorías de Schrödinger y Heisenberg en mecánica cuántica, o recientemente en el desarrollo de "software" en el nuevo paradigma de los computadores cuánticos, ... La física moderna provee gran cantidad de importantes representaciones de grupos de Lie, y esto sin incluir la estrecha relación de la teoría de representaciones y la de las funciones especiales de la física matemática. Recientemente se ha visto que la teoría de ondículas en el tratamiento de señales también encaja en la de las representaciones.

También los grupos de Lie de dimensión infinita, de aplicación en electromagnetismo, análisis estocástico, mecánica hamiltoniana, dinámica de fluídos, sistemas integrables, geometría compleja, cosmología, teoría de cuerdas, ..., son de interés en el análisis matemático, particularmente los *grupos de Banach-Lie* ([deH]), por su papel en configuraciones geométricas del análisis funcional. Retornando al enfoque inicial, se debe señalar que, a diferencia del caso clásico, la teoría de Lie infinito-dimensional trata con simetrías que dependen de un número infinito de parámetros.

No hay un claro consenso sobre qué es el análisis armónico abstracto, poniéndose el acento en unos aspectos más que en otros según autores; sin embargo, implícitamente los especialistas parecen estar de acuerdo en que se trata de investigar los grupos a través de las propiedades de objetos matemáticos asociados a ellos, o definidos sobre ellos, de forma natural. Por concretar algo, se trata de estudiar espacios de funciones definidas sobre los grupos o sobre sus espacios homogéneos, y las representaciones o acciones (unitarias, principalmente) de los grupos [F]. Tal indagación presenta dos etapas:

(1) Hallar los elementos básicos en el conjunto de objetos a considerar (análisis espectral).

(2) Recuperar, construir o saber descomponer un objeto general como combinación de los elementos básicos (síntesis espectral).

• **Promediabilidad**

En los grupos localmente compactos, la medida de Haar es invariante por traslaciones del grupo, de modo análogo a como la "euclídea" en los espacios euclídeos es invariante por traslaciones (y giros, rotaciones, simetrías). Es caso particular y muy importante de la teoría de la medida de Lebesgue abstracta. Relacionada con propiedades similares de invariación, la promediabilidad de grupos es un concepto clásico del análisis que se remonta a los orígenes de la teoría moderna de la medida, y tiene conexión con la paradoja de Banach-Tarski [Run].

Sea G un grupo localmente compacto. Se llama *promedio* o simplemente *media* sobre G a cualquier funcional positivo $m\colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ tal que $m(1) = 1$, siendo $L^\infty(G)$ el espacio de funciones complejas esencialmente acotadas en G. Entonces, el grupo G se dice *promediable* si existe una media invariante por traslaciones a izquierda (o derecha). Los grupos abelianos, los compactos, y las clausuras topológicas de uniones contables de grupos promediables son promediables, entre otros. En el lado opuesto, si un grupo G contiene una copia, como subgrupo cerrado, del grupo libre de dos generadores entonces G no es promediable. El primero en considerar grupos promediables fue J. von Neumann. Y fue M. M. Day quien les puso su actual nombre.

Mucho más reciente es la noción de álgebra de Banach promediable. Éstas fueron definidas por B. E. Johnson en clave de propiedades cohomológicas: Un álgebra de Banach compleja $\mathfrak{A}$ se llama *promediable* si toda derivación acotada de $\mathfrak{A}$ en un $\mathfrak{A}$-bimódulo E de Banach es interna. La promediabilidad de $\mathfrak{A}$ equivale a que exista un cierto elemento del bidual topológico del producto tensorial proyectivo $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ llamado *diagonal virtual* [J1].

Un grupo localmente compacto $\mathfrak{G}$ es promediable como grupo si y sólo si el álgebra de grupo $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable como álgebra de Banach. Otros ejemplos importantes de álgebras de Banach promediables son $C(K)$, álgebra de las funciones continuas sobre un compacto de Hausdorff K, ó $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, álgebra de los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$; véase [J1] para todo esto.

Los grupos y álgebras promediables son objetos de investigación extremadamente interesantes, con presencia en álgebras de operadores, en la moderna teoría de espacios de operadores, cohomología, análisis armónico, ... En esta disquisición consideramos grupos y álgebras promediables en cuanto a sus connotaciones geométrico-diferenciales.

• **Aspectos geométricos del análisis**

Hacia el último tercio del pasado siglo se reconoció ampliamente la existencia de configuraciones geométrico-diferenciales en el análisis matemático. Hay muchos espacios homogéneos cuya geometría es un problema básico en áreas como teoría de representaciones, álgebras de operadores y teoría de operadores en general, véase [Be]. Estos espacios suelen presentarse en forma de órbitas asociadas a estados, proyecciones, esperanzas condicionales, representaciones ..., o como bases de fibrados de notable significación.

• *Fibrados principales y vectoriales*

Como referencia para la teoría de variedades diferenciables de infinitas dimensiones tomamos [KM] y [U]. Grupo *de Banach-Lie* es todo grupo topológico G que adicionalmente es variedad diferenciable modelada en un espacio de Banach, con las aplicaciones producto e inversión de clase $C^{(\infty)}$, analítico-reales u holomorfas (*diferenciables*, genéricamente). Un subgrupo de G se llama *subgrupo de Banach-Lie* si es subvariedad de G.

Sea $(u, z) \mapsto u \cdot z \in G \times Z \to Z$ una *acción* diferenciable del grupo de Banach-Lie G sobre la variedad de Banach Z. Denotamos por $O(z) := \{u \cdot z : u \in G\}$ la *órbita* en z y por $G_z := \{u \in G : \tau_z(u) = z\}$ el subgrupo *estabilizador* de z, subgrupo de Banach-Lie de G, en tal acción. Suponemos que $O(z)$ es un *espacio homogéneo*, lo que en particular implica que los conjuntos G/G_z, $O(z)$ son variedades difeomorfas ([U, pp. 123, 136], [Be, p. 102]). Más todavía, la aplicación $\tau_z : u \in G \mapsto u \cdot z \in O(z)$ es un *fibrado principal*.

Tomemos A y B como índices. Sea G_A un grupo de Banach-Lie y G_B subgrupo de Banach-Lie de G_A. Para $J \in \{A, B\}$, sea $\mathcal{H}_J$ espacio de Hilbert complejo, con $\mathcal{H}_B$ subespacio cerrado de $\mathcal{H}_A$ y $P_{AB}\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$ la proyección ortogonal canónica. Sea $\pi_J\colon G_J \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_J)$ una representación uniformemente continua tal que $\pi_B(u) = \pi_A(u)|_{\mathcal{H}_B}$ para cada $u \in G_B$. Definimos en $G_A \times \mathcal{H}_B$ la relación de equivalencia dada por

$$(u, f) \sim (u', f') \Leftrightarrow \text{ existe } w \in G_B \text{ tal que } u' = uw, f' = \pi_B(w^{-1})f.$$

Para cada par $(u, f) \in G_A \times \mathcal{H}_B$ denotamos como $[(u, f)]$ su clase de equivalencia en la relación anterior, y por $D := G_A \times_{G_B} \mathcal{H}_B$ el conjunto de todas las clases. Entonces la aplicación $\Pi\colon D \to G_A/G_B,\ [(u, f)] \mapsto s := u\, G_B$ es un fibrado vectorial *hermítico* –con fibra $D_s := \Pi^{-1}(s) \equiv \mathcal{H}_B$–, precisamente el generado por la representación π_A a partir del fibrado principal $G_A \to G_A/G_B$, en el que G_B es el estabilizador correspondiente a la acción $(u, vG_B) \in G_A \times (G_A/G_B) \mapsto (uv)G_B \in G_A/G_B$. Puesto que $(u,f) \sim (u',f')$ implica $\pi_A(u)f = \pi_A(u')f'$, se tiene que la correspondencia $[(u,f)] \mapsto \pi_A(u)f$ infiere una estructura lineal compleja en D_s.

- *Promediabilidad y geometría*

Ejemplo importante de grupo de Banach-Lie es el grupo $G_{\mathfrak{A}}$ de elementos invertibles en un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ con unidad. El álgebra de Lie de $G_{\mathfrak{A}}$ es $\mathfrak{A}$. Sea $\tau : G_{\mathfrak{A}} \to Z$ un fibrado principal provisto de *conexión principal* en el sentido de [KM]. En particular existen subespacios vectoriales cerrados V^g (vectores verticales) y H^g (horizontales) tales que $H^g \oplus V^g = \mathfrak{A}$ $(g \in G_{\mathfrak{A}})$, y se dice que τ posee *estructura homogénea reductiva.*

Trataremos con C^*-álgebras en particular, entre las cuales las *nucleares* forman una subclase muy importante. Pues bien, una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ es nuclear si y sólo si $\mathfrak{A}$ es promediable. Una C^*-álgebra es de von Neumann si es dual topológico de alguno de sus módulos; v.g., $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entre éstas las *inyectivas* juegan papel análogo al de las nucleares entre las C^*-álgebras, y un álgebra de von Neumann es inyectiva si y solo si es *promediable en sentido de Connes.* Las demostraciones de estos resultados no son fáciles [Run].

Sean $\mathfrak{A}$ una C^*-álgebra y $\mathfrak{B}$ un álgebra de von Neumann. Designamos con $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ el espacio de homomorfismos acotados $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tales que $\varphi(\mathfrak{A})\mathfrak{B}_* = \mathfrak{B}_*$, y por $\mathrm{Hom}_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ el subespacio del anterior formado por las $*$-representaciones. El grupo $G_{\mathfrak{B}}$ actúa sobre $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ mediante automorfismos internos; a saber,

$$G_{\mathfrak{B}} \times \mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),\ \ (g,\varphi) \mapsto g\varphi g^{-1},$$

siendo $g\varphi g^{-1}(a) = g\varphi(a)g^{-1}$ $(a \in \mathfrak{A})$. Denotamos por $\mathfrak{S}(\varphi)$ la órbita de φ en $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Si φ es una $*$-representación su órbita bajo la acción anterior restringida a los unitarios $U_{\mathfrak{B}}$ sobre $\mathrm{Hom}_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ será denotada como $\mathfrak{U}(\varphi)$. Redefinimos $A := \mathfrak{B}$ y $B := \varphi(\mathfrak{A})' = \{b \in \mathfrak{B} : b\varphi(a) = \varphi(a)b \ (b \in \mathfrak{B})\}$. Con esta notación, $\mathfrak{S}(\varphi) = \mathrm{G}_A \,/\, \mathrm{G}_B$ y $\mathfrak{U}(\varphi) = U_A/U_B$, y disponemos de los fibrados $\tau^G_\varphi\colon G_A \to \mathfrak{S}(\varphi)$ y $\tau^U_\varphi\colon U_A \to \mathfrak{U}(\varphi)$. Estos son fibrados principales con estructura diferenciable bajo condiciones de promediabilidad [ACS].

Para $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto el espacio $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$ consiste en homomorfismos de grupo $\pi\colon \mathfrak{G} \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ fuertemente continuos y acotados en norma sobre $\mathfrak{G}$. Sea $C^*(\mathfrak{G})$ el álgebra C^* estándar generada por $\mathfrak{G}$. Existe una biyección entre las representaciones fuertemente continuas y unitarias de $\mathfrak{G}$ en $\mathcal{H}$, y las $*$-representaciones de $C^*(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{H}$. Diremos que una órbita en $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$, dada por la acción de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$, es $*$-órbita si posee una representación unitaria.

Algo sorprendentemente en principio, la geometría de representaciones y las teorías de promediabilidad son áreas con amplia intersección. Este hecho, siendo de interés, no es muy conocido en general, por lo que merece la pena dar una idea del mismo. Por ejemplo, un grupo $\mathfrak{G}$, localmente compacto y *conexo*, es promediable si y sólo si $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$ es localmente transitivo respecto a la acción de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ por automorfismos internos [S]. Por tanto se tiene que un grupo localmente compacto conexo $\mathfrak{G}$ es promediable si y sólo si el fibrado $\tau_\pi : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to O(\pi)$ es principal. Además, bajo condiciones de promediabilidad en las álgebras o grupos considerados los fibrados τ_φ^G y τ_φ^U están dotados de respectivas estructuras reductivas, construidas a partir de los elementos que caracterizan la promediabilidad. Volveremos sobre ello.

• *Modelizaciones geométricas de representaciones*

Uno de los motivos de relieve para el estudio de representaciones de álgebras y grupos de operadores es el de su presencia natural en problemas de la física teórica. Ha habido importantes desarrollos en esta dirección, en artículos dedicados a clasificar o describir tales representaciones.

La transferencia a este terreno infinito-dimensional de ideas o métodos de la teoría de representaciones de grupos de Lie clásicos es muy natural. Un tópico central en este campo es el de las realizaciones geométricas, según el modelo de Borel-Weil: Sea $\mathfrak{G}$ un grupo de Lie compacto y T un subgrupo conmutativo maximal compacto de $\mathfrak{G}$, de modo que $\mathfrak{G}/T$ tiene *estructura compleja*. Cada carácter μ de T define un fibrado de rectas $\mathcal{F}_\mu$ con base $\mathfrak{G}/T$. El teorema de Borel-Weil dice que *todas* las representaciones unitarias irreducibles de $\mathfrak{G}$ se realizan como representaciones de $\mathfrak{G}$ en el espacio de secciones *holomorfas* del fibrado $\mathcal{F}_\nu$, para ciertos caracteres especiales ν. El ejemplo por antonomasia que ilustra el teorema es el que toma como $\mathfrak{G}$ el grupo de matrices unitarias complejas $n \times n$, y como T el subgrupo diagonal $\mathbb{T}^n$.

El teorema de Borel-Weil ha tenido mucha influencia en la teoría de representaciones. Es claro el interés en establecer resultados de este tipo en dimensión infinita para representaciones concretas y de relevancia. Pero existen limitaciones inherentes a este ambiente (v.g., la falta de una buena teoría de integración) por lo que hay que recurrir frecuentemente a técnicas propias de álgebras de operadores. Así en [SV], donde se usa como herramienta clave una cierta familia de representaciones de Gelfand-Naimark-Segal (GNS). La importancia de representaciones GNS en teoría de operadores es ampliamente reconocida.

• **Ecuaciones diferenciales**

Existen relaciones entre grupos y ecuaciones diferenciales en un sentido diferente a lo visto anteriormente. Los grupos de Lie más elementales, a saber, los uniparamétricos con parámetro real, y otras variantes como semigrupos, grupos o semigrupos de distribuciones, integrados o regularizados, proporcionan soluciones formales de las ecuaciones.

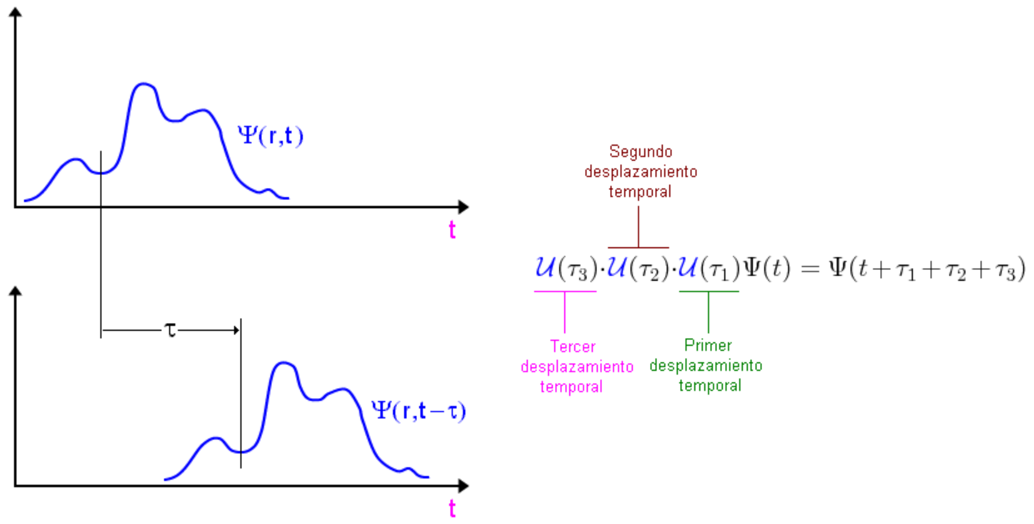
• *Ecuaciones de evolución. Problema de Cauchy*

Una ecuación de evolución es una ecuación diferencial o en derivadas parciales que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico. Se reconoce una ecuación de evolución por la posibilidad de construir su solución a partir de las condiciones iniciales, y esto se traduce precisamente en el principio de determinismo físico (que no filosófico) formulado por Hadamard en su análisis del principio de Huygens: El estado del sistema en el instante t, deducido a partir del estado en el instante inicial, puede alternativamente deducirse primero de su estado en un tiempo intermedio t_1 y a continuación desde éste al tiempo final t. Enunciado en fórmula, si el estado del sistema es descrito por $u(x,t)$ con u_0 en el instante $t=0$ y $\mathcal{U}$ es la transformación que deduce estados posteriores de estados iniciales entonces debe cumplirse

$$u(x,t) = (\mathcal{U}(u_0))\,(x,t) = \mathcal{U}\,(\mathcal{U}(u_0)(\cdot,t_1))\,(x,t-t_1) = (u(\cdot,t_1))\,(x,t-t_1),$$

que evidentemente es ¡la ley de semigrupo! (en la Fig. 1.9 se refleja el caso del semigrupo de traslaciones actuando sobre una función fase).

Figura 1.9:



Matemáticamente, el problema se formula como *ecuación de Cauchy*, de la forma

$$u_t(x,t) = Au(x,t)\ (t \geq 0), u(\cdot,0) = u_0,$$

en donde x es la variable espacial, t es el tiempo, A es el operador diferencial que gobierna la evolución y actúa en la variable x, u_t es la derivada de u respecto al tiempo, y u_0 es el estado del sistema en cada punto en el instante inicial. El *problema de Cauchy abstracto* representa con mayor generalización la anterior situación poniendo

$$u'(t) = Au(t),\ t \geq 0; \quad u(0) = f_0$$

siendo A un operador cerrado de dominio $D(A)$ y rango en un espacio de Banach $\mathcal{X}$. La solución u debe ser una aplicación diferenciable $u\colon (0,\infty) \to D(A) \subseteq \mathcal{X}$ continua en $[0,\infty)$ tal que $u(0) = u_0$. La segunda ecuación engloba la primera cuando el espacio $\mathcal{X}$ es un espacio de funciones en x que contiene a las $u(t) \equiv u(x,t)$, con $u(\cdot,t)(x) := u(\cdot,t)$.

Notemos que la solución, puramente heurística, del problema de Cauchy es el semigrupo formal $u(t) = e^{tA}$, como se podía predecir formalmente. Luego la solución de la ecuación de Cauchy debería en principio ser un semigrupo en la variable t. Sin embargo no siempre ocurre que este semigrupo tenga sentido.

(a) *Ecuación de Cauchy bien planteada.*

Se dice que una ecuación de Cauchy está bien planteada cuando el operador A satisface unas ciertas acotaciones conocidas como de Hille-Yosida, lo cual equivale a que A sea el *generador infinitesimal* de un semigrupo $T(t)$ de operadores acotados sobre $\mathcal{X}$, relación que se indica poniendo $T(t) = e^{tA}$ (en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$). Entonces la solución viene dada por $u(t) = e^{tA}u_0$. Que t recorra la recta real, o que sólo admita valores positivos depende de que la evolución del sistema sea reversible o no lo sea.

(a.1) *Soluciones no reversibles.* En este caso la solución de la ecuación de Cauchy no tiene marcha atrás, el tiempo fluye hacia adelante y no tiene sentido que tome valores negativos. Damos dos ejemplos muy importantes, centrales en diversas ramas del análisis.

Empecemos recordando que el operador laplaciano Δ es el operador diferencial

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

cuyo dominio, denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, es el conjunto de las funciones f de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ con derivadas parciales absolutamente continuas. En este caso la ecuación de Cauchy, para $A := \Delta$, es la *ecuación del calor*, está bien planteada, y Δ es el generador infinitesimal de la solución sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por el semigrupo de convolución de *Gauss-Weierstrass* $G^t = e^{-t\Delta} := g^t * (\cdot)$, siendo g^t la función gaussiana

$$g^t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/4t} \quad (x \in \mathbb{R}^n; t > 0),$$

De hecho g^z también está bien definida si $z \in \mathbb{C}^+ := \{w \in \mathbb{C} : \Re w > 0\}$, y se tiene $g^z \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall z \in \mathbb{C}^+$. En particular, el semigrupo $(G^t)_{t>0}$ admite extensión holomorfa $(G^z)_{\Re z>0}$ sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ por convolución con g^z, para todo $1 \leq p \leq \infty$.

El operador $-\Delta$ es positivo, de modo que $A := \sqrt{-\Delta}$ tiene sentido. En este caso la ecuación de Cauchy correspondiente admite como solución el semigrupo (holomorfo) de *Poisson* definido por convolución con el núcleo de Poisson

$$P^z(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{z}{(z^2 + \|x\|^2)^{(n+1)/2}} \quad (x \in \mathbb{R}^n; \Re z > 0).$$

Existen análogos de los semigrupos de Gauss-Weierstrass y Poisson sobre la circunferencia unidad pero no vamos a necesitarlos.

(a.2) *Soluciones reversibles.* Son aquellas en que el problema del que proceden tiene sentido con retroceso en el tiempo; formalmente, en e^{tA} la variable t toma cualquier valor real y por tanto el semigrupo que gobierna la solución es de hecho un *grupo*. El ejemplo típico es el de la ecuación de ondas $u_{tt} = \Delta u$ (omito las condiciones de contorno). Aunque la ecuación afecta a las derivadas segundas se puede escribir como un problema de Cauchy recurriendo a una expresión en matriz vectorial. La solución sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ puede expresarse mediante operadores "función coseno", o mediante el operador laplaciano dando lugar al llamado semigrupo de Schrödinger $e^{it\sqrt{-\Delta}}$, $t > 0$ (en su versión más simple). El que la expresión $e^{it\sqrt{-\Delta}}$ defina un operador acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ es consecuencia del teorema espectral de operadores auto-adjuntos en espacios de Hilbert. Si en lugar de $L^2(\mathbb{R}^n)$ consideramos $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \neq 2$, la cosa es muy diferente.

(b) *Ecuación de Cauchy mal planteada.* En este caso el operador A no satisface las condiciones de Hille-Yosida y por tanto *no genera* ningún semigrupo de operadores acotados. Puesto que cada e^{tA} sólo admite entidad como operador cerrado las estimaciones de la solución se hacen más complicadas. Ejemplos típicos son los de la ecuación de ondas

$$u''(t) = \Delta u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

o la de tipo Schrödinger

$$u'(t) = i\Delta u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

cuando están planteadas sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \neq 2$, para las cuales las soluciones respectivas

$e^{it\sqrt{-\Delta}}$, $e^{it\Delta}$ no corresponden a ningún operador acotado [ABHN, p. 176].

Así pues en problemas mal planteados (de generador A) no se puede estimar las soluciones encontradas directamente en el espacio de salida. Una de las líneas de actuación que se ha seguido para salvar esa dificultad consiste en sustituir la función operatorial e^{tA}, no computable tal cual, por expresiones de la forma $f(A)e^{tA}$ o más generalmente $g(A)$. En ellas las funciones f y g se eligen adecuadamente para que tales expresiones resulten operadores acotados sobre $\mathcal{X}$ con buenas estimaciones o "tamaños". Por una parte el método entronca con el llamado cálculo funcional, simbólico u operacional. Por otra, da lugar a la introducción de familias como las de los (semi-)grupos de distribuciones, integrados o regularizados.

• **Cálculo funcional y representaciones**

Suele entenderse por cálculo funcional en sentido amplio todo homomorfismo acotado de álgebras de Banach con dominio un álgebra de funciones, con multiplicación punto a punto. A veces, también se denomina en algunos foros cálculo funcional a todo homomorfismo acotado con un álgebra de convolución como dominio. Nosotros, para designar estos últimos emplearemos simplemente el término "representación", especificando el rango de llegada cuando se precise.

• *Las fórmulas del cálculo funcional*

La técnica de construcción de funciones de un operador, consistente en sustituir la variable natural de las funciones por la "variable operador", es muy útil y conocida de antiguo. Se basa en fórmulas integrales o series, etc., que reproducen la función a partir de datos sobre ella misma que aparecen en el "interior" de la fórmula. Hay muchas de ellas; nos centramos en cuatro.

Cauchy: $f(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}\,dz$ $(\lambda \in \mathbb{C})$. La función f es holomorfa en un dominio complejo y γ es un camino cerrado.

Fourier: $f(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{i\lambda t}\,dt$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, con $\widehat{f}$ transformada de Fourier de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ó la serie de Fourier $h(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(n)e^{int}$ $(t \in [-\pi,\pi))$, de $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

Barrow de orden n: $f(\lambda) = (-1)^n \displaystyle\int_\lambda^\infty \frac{(t-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Davies-Helffer-Sjöstrand: $f(\lambda) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\int_{\mathbb{C}} \frac{\bar\partial \tilde f(z)}{z-\lambda}\,dz$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. La función $\tilde f$ es una extensión cuasi-analítica a $\mathbb{C}$ de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(a) *Cálculo funcional holomorfo.* En éste las funciones que operan son holomorfas. El espectro de un operador A en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{X})\}$ de operadores acotados sobre un espacio de Banach $\mathcal{X}$ es el conjunto $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A$ no tiene inverso en $\mathcal{B}(\mathcal{X})\}$. Si A es una matriz entonces $\sigma(A)$ coincide con el conjunto sus valores propios.

Supóngase que A es un operador acotado, en cuyo caso $\sigma(A)$ es acotado como conjunto, Ω es un abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(A) \subset \Omega$ y f es holomorfa en Ω. Entonces se define

$$(\mathcal{C}) \qquad f(A) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-A)^{-1}\, dz,$$

con γ camino cerrado contenido en Ω y rodeando a $\sigma(A)$ una vez. El cálculo funcional así introducido es muy importante, con un gran número de aplicaciones. Aquí estamos interesados en su extensión a operadores *sectoriales, de tipo* ω, cuya definición puede verse en [CDMY]. Es de reseñar que para tipo $\omega < \pi/2$, un operador es sectorial si y solo si es el generador de un semigrupo holomorfo que tiene el crecimiento de orden $\alpha \geq 0$,

$$(HG_\alpha) \qquad \|e^{zA}\| \leq C_\alpha \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^\alpha, \quad \Re z > 0.$$

Para $\sigma(A)$ no acotado la fórmula $(\mathcal{C})$ tiene sentido sobre adecuados γ (de longitud infinita) y funciones f de conveniente decrecimiento en el infinito, y da lugar al *cálculo funcional de Dunford-Riesz.* Cuando tal cálculo puede extenderse a funciones holomorfas y acotadas en sectores S_θ conteniendo $\sigma(A)$ decimos que A tiene un *cálculo funcional* H^∞. Es decir, la aplicación $f \in H^\infty(S_\theta) \mapsto f(T) \in \mathcal{B}(H)$ es un homomorfismo acotado de álgebras de Banach. El cálculo H^∞ se usa en análisis armónico, teoría de la interpolación, geometría de los espacios de Banach, con aplicaciones a la ecuación de Navier-Stokes y en problemas parabólicos. Veremos su relación con los modelos funcionales.

(b) *Cálculo funcional diferenciable.* Diseñado para que operen funciones diferenciables reales, con derivadas de orden suficiente.

(b.1) *Cálculo basado en la transformada o serie de Fourier.* Es el propio para trabajar con operadores del tipo Schrödinger e^{itA}, y se expresa mediante

$$f(A) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{itA}\, dt, \quad h(A) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(n)e^{inA}$$

para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Comento solo el caso integral puesto que el otro es análogo. Para que la fórmula tenga sentido es preciso que el decrecimiento de f en el infinito compense el posible crecimiento del operador e^{itA} en t. Si A no es acotado bien puede ocurrir que e^{itA} ni siquiera esté definido. Sin embargo en muchos casos, la integral define un operador acotado si f es diferenciable y $\widehat{f}$ de soporte compacto (y f está definida sobre el espectro de A como mínimo). Nos encontramos por tanto con que las *condiciones de crecimiento* de semigrupos o grupos *sobre rectas verticales* como $\{it : t \in \mathbb{R}\}$ son de relevancia, imponiendo restricciones a las funciones operantes. Este cálculo ha sido empleado en el estudio de operadores hermíticos, espectrales de tipo escalar, bien-acotados, etc.; en la ecuación de ondas, y en análisis de Fourier o análisis armónico, en particular para construir *multiplicadores*, entre otras aplicaciones.

(b.2) *Análisis sobre grupos; multiplicadores espectrales.* Clásicamente, una de las razones de la introducción de multiplicadores en el análisis de Fourier está en su relación con la convergencia de la serie de Fourier modificada (promedios, etc.). No vamos a detenernos en este punto, sino que planteamos la cuestión muy en general.

Sea M espacio de medida, métrico, y A un operador definido-positivo sobre $L^2(M)$. Por el teorema espectral disponemos de operadores acotados $f(A)$ para toda función de Borel acotada $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$. *El problema del multiplicador* para A, sobre M, consiste en hallar condiciones suficientes sobre f para que la función restricción $f(A) \mid_{L^p(M)\cap L^2(M)}$ se extienda como operador acotado $f(A) : L^p(M) \to L^p(M)$, para $1 < p < \infty$ (los casos $p = 1, \infty$ escapan a la acotación generalmente); entonces se dice que $f(A)$ es un multiplicador de $L^p(M)$. Las condiciones más habituales afectan al grado de derivabilidad de f y son del tipo "Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander". Hay una literatura extensísima en este contexto, particularmente sobre grupos de Lie y variedades de Riemann [Da1]. Por ejemplo, en el caso de un grupo el operador A se presenta en forma de sub-laplaciano asociado a alguna colección de campos vectoriales invariantes a izquierda que generan el álgebra de Lie del grupo.

(b.3) *Funciones absolutamente continuas de orden fraccionario.* Llamamos integral fraccionaria de $f \in C_c^\infty[0,\infty)$, de orden $\nu > 0$, a

$$W^{-\nu}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_t^\infty (t-s)^{\nu-1} f(s)ds, \qquad t > 0,$$

y derivada fraccionaria of f, of orden $\nu > 0$, a

$$W^\nu f(t) := (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} W^{-(n-\nu)} f(t), \quad t > 0, \ \text{si } n \in \mathbb{N}, n \geq \nu.$$

Sea AC^ν la compleción de $C_c^\infty[0,\infty)$ en la norma

$$\|f\|_{(\nu)} := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty |W^\nu f(t)| t^{\nu-1} dt.$$

Entonces cada $f \in AC^\nu$ tiene asociada una única función $W^\nu f$ tal que

$$f(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{(t-\lambda)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} Wf^\nu(t)\, dt \quad (\lambda > 0),$$

(generalización de la regla de Barrow).

Si A es un operador sujeto a ciertas hipótesis relativas a sus medias de Bochner-Riesz $(t-A)_+^{\nu-1}$ (definidas inicialmente sobre algún espacio auxiliar de Hilbert mediante el teorema espectral), puede construirse un cálculo funcional dado por

$$f(A) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty (t-A)_+^{\nu-1} Wf^\nu(t)\, dt,$$

que tiene aplicaciones en teoría de la aproximación [BNT], o en espacios de Besov [Pe]. Veremos que también está relacionado con crecimiento de semigrupos.

(b.4) *Cálculo funcional de Davies.* Recientemente se han considerado cálculos simbólicos basados en la fórmula

(DHS) $$f(A) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\partial} f(z)(z-A)^{-1} dz,$$

en la que $\tilde{f}$ denota una extensión casi-analítica a $\mathbb{C}$, en el sentido de Hörmander, de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La fórmula fue introducida por B. Helffer y J. Sjöstrand para operadores auto-adjuntos en espacios de Hilbert. Posteriormente, E. B. Davies demostró que la fórmula (DHS) puede extenderse a operadores A cerrados densamente definidos, con $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ y cuya resolvente satisface la propiedad

(R_α) $$\|(z-A)^{-1}\| \le C \frac{(1+|z|^2)^{\alpha/2}}{|\Im z|^{\alpha+1}}, \quad z \notin \mathbb{R},$$

donde $\alpha \ge 0$ está fijo [Da1]. Denotaremos este cálculo mediante $\Theta(f)$ (en lugar de $f(A)$), que algunos autores denominan *cálculo funcional de Davies-Helffer-Sjöstrand.* Éste ha recibido mucha atención, aplicándose a operadores en espacios L^p en dominios de $\mathbb{R}^n$ u otros grupos de Lie, y a resultados de p-invariación de $\sigma(A)$ en particular [Da2].

• *Las fórmulas de las representaciones para convolución*

Los homomorfismos que consideramos aquí tienen por dominio álgebras de convolución. A veces, por conveniencia respecto a la ubicación del espectro del operador A, escribiremos el generador infinitesimal de un semigrupo como $-A$ en lugar de A.

(a) *Semigrupos acotados.* Supongamos que la solución al problema de Cauchy para $-A$

viene gobernada por un semigrupo $T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ cumpliendo $\sup_{t>0} \|T(t)\| < \infty$. Entonces se define el *cálculo funcional de Hille-Phillips*

$$(HPh_0) \qquad \pi_0 \colon L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{B}(\mathcal{X}),\ \pi_0(f) := \int_0^\infty f(t)T(t)\ dt.$$

Dar el semigrupo $T(t)$ es equivalente a dar el morfismo π_0, y π_0 es de gran utilidad en teoría general de semigrupos [HP]. Si $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ se sustituye por un álgebra de Banach arbitraria $\mathfrak{A}$ y $a^t := T(t) \in \mathfrak{A}$, el homomorfismo anterior recibe el nombre de aplicación de Sinclair.

(b) *Semigrupos no acotados.* Si e^{-tA} no es de operadores acotados en $\mathcal{X}$ a veces se consideran semigrupos de distribución, integrados, ó C-regularizados, entre otras teorías. A pesar de su denominación, los semigrupos de distribución son de hecho homomorfismos continuos $\Lambda \colon C^{(\infty)}([0,\infty)) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ (asociados al "no grupo" e^{-tA} de forma natural), o sea, distribuciones vectoriales tales que $\Lambda(\varphi * \psi) = \Lambda(\varphi)\Lambda(\psi)$ con $\varphi, \psi \in C^{(\infty)}([0,\infty))$. Fueron introducidos por J. P. Lions, y C. Foias. La estructura de grupo permanece latente en el producto de convolución.

Frecuentemente e^{-tA}, aunque no acotado, tiene sentido actuando sobre elementos y en un subespacio del dominio de A, y de forma que promediando $\nu > 0$ "veces"

$$T_\nu(t)y := \frac{1}{\Gamma(\nu} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} e^{-tA} y\ ds,$$

resulta una familia $(T_\nu(t))_{t>0}$ de operadores acotados en todo $\mathcal{X}$. Tiene sentido llamar a $(T_\nu(t))_{t>0}$ *semigrupo integrado* ν-veces. De hecho, el concepto admite una definición abstracta más general, sin apelar a e^{-tA}, pues éste en principio no tiene por qué existir. Tal definición se debe a W. Arendt, pero no la necesitamos aquí. Lo que nos importa es lo siguiente. Sea $T_n(t)$ un semigrupo integrado n veces, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|T_n(t)\| \leq Ct^n$. Se define $\mathcal{T}^{(n)}(0,\infty)$ como la clausura de $C_c^{(\infty)}$ respecto a la norma $f \mapsto \int_0^\infty |f^{(n)}(t)| t^n dt$. Entonces $\mathcal{T}^{(n)}(0,\infty)$ es un álgebra de convolución, subálgebra de $L^1(\mathbb{R}^+)$, y la aplicación

$$(HPh_n) \qquad \pi_n \colon \mathcal{T}^{(n)}(0,\infty) \to \mathcal{B}(X),\ \pi_n(f) := (-1)^n \int_0^\infty f^{(n)}(t) T_n(t) dt$$

es un homomorfismo acotado que se llama *semigrupo de distribución de orden n*.

Con lo apuntado podemos hacernos idea de que el análisis de los homomorfismos relacionados con ecuaciones de Cauchy es de mucho interés. Además ocurre que muchos homomorfismos entre álgebras de Banach admiten expresión integral mediando un núcleo (integral) en forma de semigrupo, grupo, o variante de estos. Nos ocuparemos de algunos de ellos.

(c) *Transformada de Weyl.* Ésta define el cálculo funcional de Weyl –de distinta naturaleza a lo visto hasta ahora– aplicable a operadores seudo-diferenciales y establecido sobre la base de la teoría de representaciones del grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$. Asociados a este cálculo, G. Mauceri introdujo en [M] los que llamó multiplicadores de Weyl, cuya diferencia respecto a los espectrales sobre $\mathbb{H}_n$ estriba en que los segundos hacen referencia al producto de convolución dado por la operación traslación mientras que los primeros están ligados a la convolución por torsión ("twisted convolution"). Hay una extensión muy notable del cálculo de Weyl sobre grupos de Lie nilpotentes, debida a N. V. Pedersen [P]. Más adelante haré referencia a multiplicadores de torsión en este contexto.

• Semigrupos uniparamétricos en álgebras de Banach

Un *semigrupo* en un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ es una aplicación $z \mapsto a^z$, $S \to A$ tal que $a^{z+w} = a^z a^w$, $\forall z, w \in S$, donde S es un sector en $\mathbb{C}$ simétrico en torno a $(0, \infty)$. El semigrupo es *continuo* si la aplicación $z \mapsto a^z$ es continua en la norma de A, y *holomorfo* si S es abierto y la aplicación es holomorfa. Consideraremos ahora semigrupos definidos en los sectores $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ y $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Los semigrupos son de gran utilidad en la teoría de álgebras de Banach y para álgebras radicales en particular. Un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ conmutativa se llama *radical* si el espectro de caracteres de $\mathfrak{A}$ es vacío, de donde se sigue que $\sigma(a) = \emptyset$, $\forall a \in \mathfrak{A}$. Ejemplos notables de tales álgebras son las de convolución, de Volterra $L^1(0,1)$ ó del tipo $L^1(\mathbb{R}^+, w)$ con peso radical. El estudio de las álgebras de Banach radicales cobró un renovado interés a raíz de la solución de la *Conjetura de Kaplansky*: En 1948, I. Kaplansky descubrió que toda norma de álgebra en $C(K)$ está minorada por la norma del supremo $\|f\|_\infty := \{|f(x)| \mid x \in K\}$, y conjeturó que todo homomorfismo inyectivo $C(K) \hookrightarrow \mathfrak{A}$, con $\mathfrak{A}$ cualquier álgebra de Banach, es continuo respecto a $\|\cdot\|_\infty$. Entre 1975 y 1976, H. G. Dales y J. Esterle, por separado y con demostraciones distintas, mostraron que la conjetura no se cumple bajo la hipótesis del continuo $2^{\chi_0} = \chi_1$ [DE]. Concretamente, probaron que asumiendo tal hipótesis existen álgebras de Banach de la forma $\mathfrak{A} = R \oplus \mathbb{C}$, con R radical, de modo que puede construirse monomorfismos inyectivos discontinuos $\Theta \colon C(K) \to \mathfrak{A}$ [DE].

La investigación de la estructura de las álgebras radicales no es factible mediante la habitual maquinaria espectral, ante la ausencia de espectro. Pero es posible hacer una enjundiosa clasificación de álgebras radicales a través de distintas clases de unidades aproximadas y semigrupos, y de consideraciones sobre ideales principales [E2]. Naturalmente, el análisis de la reación entre semigrupos y álgebras de Banach no queda limitado al caso de las radicales, pudiendo plantearse para toda álgebra de Banach.

2. Una mirada al paisaje local

Comienza este capítulo donde hemos dejado el anterior, sobre las implicaciones que la existencia de semigrupos con determinadas propiedades en un álgebra de Banach tiene en la estructura del álgebra y de sus morfismos.

2.1. Semigrupos en álgebras de Banach

Como punto de partida tomaremos semigrupos holomorfos.

• Aproximación de semigrupos a la frontera de sus dominios

Sea I un ideal cerrado propio en el álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$, sin ceros comunes de las transformadas de Fourier de sus elementos. Entonces I está contenido en algún ideal maximal de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Este es el famoso *teorema tauberiano de Wiener*, que admite versiones abstractas en álgebras de Banach sujetas a condiciones sobre el espectro que incluyen la regularidad del mismo. El teorema también puede obtenerse alternativamente como corolario de la existencia de ciertos semigrupos.

Teorema 2.1.1. *Sea R un álgebra de Banach radical. Supongamos que $(a^z)_{\Re z>0}$ es un semigrupo analítico en R tal que $\overline{a^z R} = R$ ($\Re z > 0$), y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ \|a^{1+iy}\|}{1+y^2} dy < +\infty.$$

Entonces el semigrupo es idénticamente nulo, $a^z = 0$ ($\Re z > 0$).

El teorema fue probado (usando el teorema de Ahlfors-Heins, de variable compleja) por J. Esterle ([E1]) para semigrupos $(a^z)_{\Re z>0}$ en R tales que $\|a^{1+iy}\| = O(|y|^k)$ si $|y| \to \infty$, para algún $k > 0$, y fue extendido por A. M. Sinclair a semigrupos como en el enunciado (y para álgebras no necesariamente conmutativas) en [Si]. La propiedad de regularidad permanece latente en este contexto de variable compleja: en [EG] se prueba que si a^z es como en el teorema entonces el álgebra de Banach generada por $\{a^z : \Re z > 0\}$ es regular.

Por otro lado, en el caso en que $\mathfrak{A} = L^1(G)$, G grupo localmente compacto, se tiene que G es metrizable si y solo si $L^1(G)$ posee semigrupo holomorfo $(a^z)_{\Re z>0}$ generando ideales densos [Si, p. 41]. Debido a estos hechos y a otros semejantes quedó planteada la siguiente cuestión: Dada $\mathfrak{A}$ álgebra de Banach con semigrupo holomorfo $(a^z)_{\Re z>0}$, estudiar la relación entre la estructura de $\mathfrak{A}$, o la estructura de G en el caso en que $\mathfrak{A} = L^1(G)$, y las propiedades de a^z cuando z se aproxima a la frontera de $\mathbb{C}^+$. Al respecto, nos centraremos en un par de problemas de la larga lista expuesta en [Ba, pp. 460-468]:

(P1) **[Ba, pp.** 460**])**: ¿ Existe en el álgebra de convolución $L^1(\mathbb{R})$ algún semigrupo analítico $(a^z)_{\Re z>0}$ no nulo *acotado* en el semidisco $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^+ : |z| \leq 1\}$?

(P2) **[Ba, pp.** 460**])**: Sea G grupo localmente compacto no discreto y $L^1(G)$ su álgebra de grupo. Supóngase que $L^1(G)$ contiene un semigrupo analítico $(a^z)_{\Re z>0}$ no nulo tal que $\sup_{y\in\mathbb{R}} \|a^{1+iy}\|_1 < \infty$, ¿ debe G ser necesariamente compacto ?

- *Aproximación al eje imaginario*

La motivación del problema (P1) proviene de la clasificación de las álgebras radicales commutativas elaborada en [E1]. Se muestra ahí que el álgebra radical $L^1(\mathbb{R}^+, e^{-t^2})$ *no* posee semigrupo analítico no nulo $(a^z)_{\Re z>0}$ acotado en Ω, y la prueba es algebraica (multiplicativa) y específica para álgebras de Banach *radicales*. Sin embargo, en colaboración con J. C. Candeal, se resolvió la cuestión observando que ésta depende exclusivamente de la estructura *lineal* de $L^1(\mathbb{R})$. El doctor Candeal fue mi primer alumno de doctorado.

Teorema 2.1.2 ([CG])**.** *Sea $\mathfrak{A}$ álgebra de Banach, sin unidad, generada por un semigrupo holomorfo no nulo $(a^z)_{\Re z>0}$. Supongamos que $\sup_{z\in\Omega} \|a^z\| < \infty$. Entonces $\mathfrak{A}$ no posee la propiedad de Radon-Nikodym analítica.*

A saber, un espacio de Banach $\mathcal{X}$ tiene la *propiedad de Radon-Nikodym analítica* si toda función holomorfa y acotada de $\mathbb{D}$ en $\mathcal{X}$ puede extenderse a casi todo punto de la frontera de $\mathbb{D}$, con valores en $\mathcal{X}$. Hay muchos ejemplos de álgebras de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym analítica, y que por tanto *no pueden* tener semigrupos holomorfos como en el teorema; en particular toda álgebra de Beurling $L^1(G, \omega)$, lo que responde *negativa* y directamente al problema (P1) tomando $G = \mathbb{R}$ y $\omega = 1$.

Crecimiento de semigrupos sobre verticales

La relevancia del crecimiento de semigrupos sobre verticales ya se ha apuntado en relación con el cálculo funcional y en el Teorema 2.1.1. El problema (P2) abunda en el tema: Existen en $L^1(\mathbb{R}^n)$ semigrupos holomorfos de crecimiento polinomial en verticales como por ejemplo los semigrupos de Poisson P^z y el de Gauss-Weierstrass G^z. El crecimiento de P^{1+iy} cuando $|y| \to \infty$ es

$$\|P^{1+iy}\|_1 = O(|y|^{(n-1)/2}),\ \text{si } n \geq 2,\ \text{y } \|P^{1+iy}\|_1 = O(\log|y|) \text{ si } n = 1.$$

Por otra parte, si G es compacto, hay abundancia de semigrupos holomorfos $(a^z)_{\Re z>0}$ en $L^1(G)$ no nulos verificando $\sup_{y\in\mathbb{R}} \|a^{1+iy}\|_1 < \infty$. De ahí la pregunta del problema (P2). La respuesta, obtenida en colaboración con M. C. White, es como sigue para grupos abelianos.

Teorema 2.1.3 ([GWh, pp 160,161])**.** *Sea G un grupo localmente compacto abeliano. Son equivalentes:*

(i) $L^1(G)$ *contiene un semigrupo analítico no nulo* $(a^z)_{\Re z>0}$ *que es acotado sobre la recta vertical* $1+iy$, $y\in\mathbb{R}$.

(ii) $L^1(G)$ *contiene un elemento idempotente de norma 1.*

(iii) G *contiene un subgrupo abierto y compacto.*

El teorema descansa en una adaptación no trivial de la caracterización de los endomorfismos de álgebra de $L^1(\mathbb{R})$ debida a Beurling y Helson. Con esto a mano, luego basta aplicar resultados estándar sobre la estructura de los grupos localmente compactos *abelianos*. Tales resultados no se dan si G no es abeliano, en general, y de hecho queda abierta la cuestión de extender el Teorema 2.1.3 al caso no conmutativo.

Según hemos visto el álgebra $L^1(\mathbb{R})$ no posee semigrupos holomorfos no nulos a^z acotados sobre $1+iy$, $y\in\mathbb{R}$. Por otra parte el crecimiento del semigrupo de Poisson si $n=1$ es logarítmico y éste es el menor que se conoce entre semigrupos de $L^1(\mathbb{R})$. Esto da pie a plantear el próximo:

(P3) *Problema*: ¿ Existe semigrupo holomorfo no nulo $(a^z)_{\Re z>0}$ en el álgebra $L^1(\mathbb{R})$ cumpliendo $\|a^{1+iy}\| = o(\log|y|)$ cuando $|y|\to\infty$; es decir,

$$\lim_{|y|\to\infty} (\log|y|)^{-1}\|a^{1+iy}\| = 0\ ?$$

El problema es interesante en sí mismo pero además porque su análogo para el álgebra de convolución (discreta) de sucesiones $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un problema clásico en análisis de Fourier:

(P4) *Problema* (J. P. Kahane, Cong. Int. Mat., Estocolmo 1962, y [K, p. 87]: ¿ Existe $\phi\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ continua a trozos tal que $\|e^{in\phi}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = o(\log|n|)$, cuando $|n|\to\infty$?

Muy probablemente, solucionar el caso continuo implicaría solucionar el discreto, y viceversa. Ambos casos permanecen abiertos. En relación con (P3), junto con T. J. Ransford se obtuvo el teorema que sigue.

Teorema 2.1.4 ([GR, p 167]). (1) *Existe un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$, sin semigrupo holomorfo no nulo acotado en $\{\Re z = 1\}$, tal que para cada función $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpliendo $\lim_{|y|\to\infty} \varphi(y) = \infty$ e $\inf_{y\in\mathbb{R}} \varphi(y) > 0$ hay un semigrupo analítico a^z en $\mathfrak{A}$ con*

$$\lim_{|y|\to\infty} \|a^{1+iy}\| = \infty, \qquad y \qquad \|a^{1+iy}\| \leq \varphi(y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

(2) *Existe un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$, sin semigrupo holomorfo no nulo acotado en $\{\Re z = 1\}$, tal que para cada $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente acotada hay un semigrupo analítico b^z en $\mathfrak{B}$ con*

$$\|b^{1+iy}\| \geq \varphi(y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

El teorema nos dice por un lado que existe un álgebra de Banach universal que contiene semigrupos holomorfos no nulos creciendo a infinito sobre verticales de manera arbitrariamente lenta. Y por otro que existe un álgebra de Banach universal que contiene semigrupos holomorfos creciendo a infinito de manera arbitrariamente rápida sobre verticales. Notemos que esto no puede ocurrir en álgebras de Banach radicales (Teorema 2.1.1).

• **Semigrupos y rango de homomorfismos**

Las ideas previas tienen aplicación a homomorfismos relacionados con semigrupos o grupos.

• *Homomorfismos débilmente compactos*

La literatura acerca de álgebras de Banach y compacidad contiene artículos sobre endomorfismos compactos (trabajos de Kamowitz, Scheinberg, Wortman), homomorfismos compactos y débilmente compactos entre álgebras uniformes (Ohno y Wada), o endomorfismos compactos entre C^*-álgebras (Ghahramani). Este último probó en [Gh] que el rango de todo homomorfismo compacto entre C^*-álgebras es necesariamente de dimensión finita y *semisimple* (i.e., su ideal radical es cero). Con Ransford y White se obtuvo la siguiente extensión.

Teorema 2.1.5 ([GRW, p 819]). *Sean $\mathfrak{A}$ una C^*-álgebra y $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach. Si $\Theta\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es un homomorfismo débilmente compacto entonces $\Theta(\mathfrak{A})$ es finito-dimensional y semisimple.*

En la demostración intervienen grupos de la forma $(e^{iyh})_{y\in\mathbb{R}}$ donde h recorre los elementos hermíticos de $\mathfrak{A}$. Se da también en [GRW] extensiones de los resultados de los autores citados y variantes del Teorema 2.1.5, dependiendo del dominio y rango del homomorfismo. Entre ellas se puede destacar la siguiente, en donde reaparece la promediabilidad.

Teorema 2.1.6 ([GRW, pp 816-818, 822])**.** *Sean $\mathfrak{A}$ promediable y $\mathfrak{B}$ tal que sus representaciones irreducibles y acotadas son de dimensión finita. Sea $\Theta\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ homomorfismo débilmente compacto de rango denso. Entonces $\Theta(\mathfrak{A})$ es finito-dimensional y semisimple.*

Con un método general que consiste en analizar la estructura de $\Theta(\mathfrak{G})$, como núcleo integral, en el espacio imagen de Θ, para un adecuado grupo $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{A}$, se prueba en [G] que si $\mathfrak{A} = L^1(G)$ en el Teorema 2.1.6 entonces no hace falta que G sea promediable ([G, Teor. 2.3; Cor. 2.5]), y se caracteriza los homomorfismos débilmente compactos de las álgebras de convolución $L^1(\mathbb{R}^+)$, $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ y del álgebra del disco $A(\mathbb{D})$ mediante propiedades espectrales en el el rango.

Representaciones

Existen variaciones del tema anterior para representaciones de grupos. Supongamos que G es un grupo compacto y $\rho\colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ una representación fuertemente continua de G en un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Sea $\tilde{\rho}(\mu) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ el operador definido en el álgebra de medidas de Borel acotadas $M(G)$ como $\tilde{\rho}(\mu)x := \int_G \rho(t)x\, d\mu(t)$, $\mu \in M(G)$. Con Armando Villena, de Granada, se obtuvo el

Teorema 2.1.7 ([GV, p 357])**.** *La subálgebra cerrada en $\mathcal{B}(X)$, respecto a la topología débil de operadores, generada por $\{\tilde{\rho}(\mu) : \mu \in M(G)\}$ es semisimple.*

El teorema anterior es el primer resultado “no conmutativo” de una serie de otros resultados previos, en la misma línea, obtenidos por Sinclair (1972), Feldman (1974), Muraz y Vũ (1994), Huang (1999), siempre en el contexto abeliano. Fue extendido posteriormente por Alaminos, Extremera y Villena a grupos de Moore no compactos.

Algebraicidad de grado acotado. Problema de Kurosh

Parte de los argumentos empleados en [GRW] son de utilidad en un importante problema de Álgebra.

Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra sobre un cuerpo K. Un elemento $x \in \mathfrak{A}$ es *algebraico* si existe polinomio no nulo $p \in K[X]$ tal que $p(x) = 0$. El mínimo grado de tales polinomios se llama *grado* de x. El álgebra $\mathfrak{A}$ se llama *algebraica* si cada elemento de $\mathfrak{A}$ es algebraico, y algebraica *de grado acotado* si hay cota superior uniforme para el grado de todos sus elementos. El *problema de Kurosh* consiste en saber si cada álgebra algebraica $\mathfrak{A}$ es necesariamente *localmente finita*, es decir, tal que toda subálgebra finitamente generada es de dimensión lineal finita. Golod probó, vía un resultado de Shafarevich, que hay álgebras algebraicas *no* localmente finitas, y entonces los algebristas se aplicaron a encontrar respuestas afirmativas, imponiendo restricciones aceptables al álgebra algebraica en cuestión. Por ejemplo, I. Kaplansky demostró en 1947 que si A es asociativa, metrizable y completa, algebraica sobre un cuerpo K no discreto y completo respecto a un valor absoluto, entonces A es de grado acotado (lo que equivale a ser localmente finita) [Ka]. El teorema fue redescubierto para álgebras de Banach (Grabiner, 1969; Dixon, 1974; Müller 1990) y ampliado a un contexto de álgebras topológicas de Jordan o alternativas (A. Slinko, 1986, 1990).

La demostración primera de Kaplansky utiliza la teoría de Jacobson para anillos. El propio Kaplansky simplificó algo la prueba en 1950 mediante teoría de la representación Ninguno de estos métodos es trasladable al mundo no-asociativo, de modo que Slinko utilizó argumentos combinatorios (teoría de Shirshov) para establecer sus extensiones [Sl]. Junto a B. Cuartero, se extendieron estos resultados con razonamientos más simples basados en argumentos de categoría de Baire aplicados a ceros de polinomios.

Teorema 2.1.8 ([CuG, p 331]). *Sea K un cuerpo evaluable, completo, no discreto, y sea $\mathfrak{A}$ un álgebra asociativa de potencias, topológica de Baire sobre K. Si algún subconjunto abierto U de $\mathfrak{A}$ consiste de elementos algebraicos entonces $\mathfrak{A}$ es algebraica de grado acotado.*

(Una de las motivaciones de Kaplansky en [Ka], llevada a buen puerto, era extender un resultado clásico de A. Ostrowski (1913, 1917) sobre extensiones de grado acotado de cuerpos con valoración completa. El correspondiente resultado tipo Ostrowski, corolario del Teorema 2.1.8, es [CuG, p 336].) Para variaciones del tema véase [CGRS, CGS].

2.2. Cálculo funcional

Para disponer de adecuadas fórmulas y estimaciones de funciones de un operador cerrado se suele recurrir a la diferenciabilidad, real o compleja, de tales funciones.

- **Cálculo funcional diferenciable**

El cálculo operacional a considerar va a estar ligado a semigrupos holomorfos y a depender del comportamiento de estos sobre rectas verticales.

• *Crecimiento en verticales*

En el cálculo operacional la expresión que usa de la transformada de Fourier $f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{itA}\,dt$ presenta inconvenientes derivados del crecimiento del operador formal e^{itA} cuando $|t| \to \infty$, de que incluso e^{itA} puede no existir como acotado –con lo que hay que precisar bien su punto de partida o definición– y de que la fórmula de $f(A)$ depende de $\widehat{f}$ y no de f directamente. Esto hace que tal cálculo se defina por extensión, sin fórmula explícita. Además, los resultados sobre acotación en norma obtenidos por este camino son satisfactorios en casos como los espacios L^p, $p \in (1,\infty)$ y $p \neq 2$, pero carecen de suficiente claridad para espacios tipo L^1 o de funciones continuas ..., o sencillamente no existen.

En [GP], junto a T. Pytlik, se introduce un cálculo funcional adecuado a estos efectos, mediante un análisis a fondo de la idea motriz de [deL1] consistente en representar el semigrupo en el interior de $\mathbb{C}^+$ mediante la fórmula de Poisson. El cálculo tiene inicialmente como dominio las álgebras AC^ν introducidas anteriormente. Denotemos como $AC^\nu_{2,1}$ la compleción de $C_c^\infty[0,\infty)$ respecto a la norma

$$\|f\|_{(\nu);2,1} := \int_0^\infty \left[\int_y^{2y} |W^\nu f(x)x^\nu|^2 \frac{dx}{x}\right]^{1/2} \frac{dy}{y}.$$

Se tiene entonces $AC^{\nu+1/2} \subseteq AC^\mu_{2,1} \subseteq AC^\mu$ if $\nu > \mu > 0$ y estos espacios son invariantes por cambios de variable $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha > 0$ [GP, pp 323, 321]. Además $AC^\nu_{2,1}$ es un álgebra de Banach para el producto punto a punto [GP, pp 320, 325].

Sea $a^z = e^{-zA}$ un C_0-semigrupo analítico en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ de generador $-A$ tal que

$$(HG_\alpha) \qquad \|a^z\| \leq C_\alpha \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^\alpha \qquad (\Re z > 0),$$

para algún $\alpha \geq 0$, siendo C_α una constante positiva. Esta condición implica $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$ y permite definir el operador núcleo G^ν como la transformada de Laplace vectorial inversa

$$G^\nu(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re z=1} \frac{a^z}{z^{\nu+1}} e^{uz}\,dz, \quad u \in \mathbb{R},$$

que cumple $G^\nu(u) = 0$ if $u \leq 0$, y $\sup_{u>0} u^{-\nu}\|G^\nu(u)\| < \infty$. Resulta que este núcleo coincide con el operador de Bochner-Riesz de A, y si definimos $\Phi\colon AC^{(\nu+1)} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ mediante $\Phi(f)x = \displaystyle\int_0^\infty W^{\nu+1}f(u)G^\nu(u)x\,du$ ($x \in \mathcal{X}, f \in AC^{\nu+1}$), reobtenemos el cálculo funcional de [BNT] pero ahora la expresión integral de $G^\nu(u)$ permite una mejora del cálculo.

Teorema 2.2.1 ([GP, p 330, 341]). *En las condiciones anteriores, si $\nu > \alpha$ entonces el cálculo funcional Φ se extiende como homomorfismo acotado de álgebras de Banach*

$\Phi\colon AC^{\nu+(1/2)}_{2,1} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

El núcleo integral $G^\nu(u)$ ha sido también considerado en [deL2] en los casos $\nu = 1, 2$. Las motivación, concepción y técnicas de demostración en [deL2] y [GP] son diferentes. El cálculo dado en el Teorema 2.2.1 puede a su vez generalizarse; véase [GMPy].

• *Aplicaciones*

(a) *Cálculo funcional de Davies.* Una inspección atenta revela que para operadores A con espectro en $[0,\infty)$ las condiciones (HG_α) y (R_α) sobre A citadas con anterioridad están esencialmente relacionadas, por lo que no sorprende un enunciado como el que sigue.

Teorema 2.2.2 ([GMPy, p 393]). *Sea $(a^z)_{\Re z>0}$ un (C_0)-semigrupo holomorfo en $\mathcal{B}(X)$ de generator infinitesimal $-A$ tal que $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Supongamos que $-A$ satisface la condición (R_α) para algún $\alpha \geq 0$. Entonces $\Theta(f) = \Phi(f)$ para toda $f \in C^{(\infty)}_c(\mathbb{R})$.*

Este resultado permite mejorar el cálculo de Davies-Helffer-Sjöstrand, a través de $AC^\nu_{2,1}$, y de este modo pueden extenderse resultados de Davies sobre independencia del espectro [GMPy, pp. 395, 396]. Por otra parte A. Jensen y S. Nakamura obtuvieron en [JN] estimaciones de operadores de la forma $f(A)e^{itA}$, asociados a ecuaciones de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, mediante métodos de teoría de multiplicadores y amalgamas, tomando como catalizador la fórmula (DHS), es decir, el cálculo Θ. Cotas del mismo tipo son también factibles utilizando métodos de semigrupos integrados o regularizados [deL3]. La aplicación del cálculo Ψ sobre $AC^{(\nu)}_{2,1}$ nos proporciona más casos.

Teorema 2.2.3 ([GMPy, p 400]). *Sea $(a^z)_{\Re z>0}$ semigrupo en $\mathcal{B}(X)$ cumpliendo (HG_α), $\alpha \geq 0$. Entonces $a^{it}\Phi(f) \in \mathcal{B}(X)$ y para todo $f \in AC^{(\nu+\frac{1}{2})}_{2,1}$,*

$$\|a^{it}\Phi(f)\| \leq C_\nu (1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|^{(\alpha)}_{\nu;2,1} \qquad (t \in \mathbb{R}, \nu > \alpha).$$

La estimación se aplica a expresiones clásicas cuyas cotas aparecen en la literatura obtenidas por otras vías, algo más complicadas. Estimación nueva es

$$\|(\operatorname{sen} tH)H^{-1}(1+H)^{-\nu+1}\| \leq \begin{cases} C_\nu |t|(1+|t|^{\Re\nu-1}) & \text{if } \Re\nu > 1 \text{ or } \nu = 1, \\ C_{\nu,\varepsilon}|t|^{\Re\nu}(1+|t|^{-\varepsilon}) & \text{if } 0 < \Re\nu \leq 1. \nu \neq 1, \end{cases}$$

véase [GMPy, p. 401].

(b) *Análisis armónico; multiplicadores.* La producción de multiplicadores de tipo espectral en grupos de Lie se apoya inicialmente en el teorema espectral para operadores autoadjuntos. Los multiplicadores obtenidos son acotados sobre L^p para $1 < p < \infty$ pero no para

$p=1$, usualmente. El cálculo con funciones de $AC^{(\nu)}_{2,1}$ puede emplearse en este contexto, y parece idóneo para manejarse con L^1.

Sea G grupo de Lie estratificado de dimensión homogénea n, L operador sublaplaciano sobre G y $g(L)=\int_0^\infty g(\lambda)dE(\lambda)$, con $g\in L^\infty[0,\infty)$ el cálculo funcional espectral de L en $L^2(G)$. Entonces e^{-zL} satisface la propiedad (HG_α) para $\alpha>n$ en $L^1(G)$. Por tanto,

Teorema 2.2.4 ([GP, p 351])**.** *Para toda* $f\in AC^{(\nu)}_{2,1}$ *se cumple* $f(L)=\Psi(f)$ *y entonces* $f(L)\in L^1(G)$ *con* $\|f(L)\|_1\le C\|f\|_{(\nu),2,1}$ *para todo* $\nu>(n+1)/2$.

Al menos en un caso relevante el índice crítico $(n+1)/2$ del teorema puede mejorarse. El grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ es el espacio $\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ dotado de la ley de grupo

$$(z,t)\cdot(z',t'):=(z+z',t+t'-\frac{1}{2}\Im(z\cdot z')),\quad \forall z,z'\in\mathbb{C}^n,\ t,t'\in\mathbb{R}.$$

Es bien conocido que $\mathbb{H}_n$ es un grupo de Lie estratificado de dimensión $d=2n+1$ como grupo de Lie real, y con dimensión homogénea $Q=2n+2$. De un resultado de D. Müller y E. M. Stein en [MuS] se sigue que, para un cierto sub-laplaciano distinguido L en $\mathbb{H}_n$, el semigrupo holomorfo $p^z:=e^{-z\sqrt{L}}$ en $L^1(\mathbb{H}_n)$ satisface la condición (HG_α) para todo $\alpha>(d-1)/2$. Por tanto, según el Teorema 2.2.1, $f(L)\in L^1(\mathbb{H}_n)$ para toda $f\in AC^\nu_{2,1}$ con $\nu>d/2$, ya que los espacios $AC^\nu_{2,1}$ son invariantes mediante cambios de variable potenciales. Por otra parte, el Teorema 2.2.2 vale para obtener multiplicadores de operadores tipo Schrödinger, incluso sobre grupos de Lie muy generales. En el caso de los $\mathbb{H}_n$ y L anteriores se tiene $f(\sqrt{L})e^{it\sqrt{L}}\in L^1(\mathbb{H}_n)$ y $f(L)e^{itL}\in L^1(\mathbb{H}_n)$ para una amplia gama de funciones f –sujetas a ciertas condiciones de integrabilidad– derivables ν veces con $\nu>\alpha>(d/2)$ [GMPy, p. 413].

Los resultados mencionados tienen versiones para potencias de laplacianos, y en espacios generales como espacios métricos con bolas de crecimientro polinomial en el radio (v. g., variedades de Riemann de crecimiento polinomial y sus operadores de Laplace-Beltrami asociados), o en algunos grupos solubles sin crecimiento polinomial de bolas, pero con semigrupo del calor cumpliendo la condición (HG_α), véase [GP, GMPy, GMMu].

• Cálculo funcional holomorfo

El estudio espectral de muchos tipos de operadores se facilita si se dispone de un *modelo funcional* que los represente. Uno de los ejemplos mejor conocidos es el de Nagy-Foias, introducido para tratar operadores de contracción con espectro en $\overline{\mathbb{D}}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$, y para operadores disipativos y espectro en $\{\mathrm{Im}z\ge 0\}$. El objeto del modelo pasa por construir una isometría hilbertiana entre cocientes de determinados espacios de Hardy de funciones holomorfas con valores vectoriales, de modo que el operador T pueda realizarse como operador multiplicación. La existencia de un tal modelo implica automáticamente la de un cálculo funcional H^∞. Yakubovich construyó modelos funcionales relacionados con teoría de control y de observación sobre dominios parabólicos. Era natural entonces investigar modelos de control y observación para operadores en dominios sectoriales. En [GMY], junto a P. J. Miana y D. Yakubovich se aborda la cuestión, y entre otros resultados se obtiene:

Teorema 2.2.5 ([GMY, p 741]). *Existe cálculo funcional H^∞ en S_θ para un operador sectorial T en el sector S_θ si y solo si existe modelo funcional para T de tipo Nagy–Foiaş generalizado en S_θ entendiendo por esto que T se representa como un operador multiplicación cociente de espacios de Hardy-Smirnov vectoriales con dominio S_θ.*

Referencia fundamental sobre operadores sectoriales es el artículo [CDMY], que ha sido de gran influencia. Además de asentar la teoría general iniciada por A. McIntosh, en [CDMY] se aborda la cuestión de cuantificar la relación entre cálculo H^∞ y existencia de multiplicadores para operadores sectoriales (cuestión apuntada por R. Coiffman). Se muestra en [CDMY] que, para sectoriales T de tipo 0, existe cálculo H^∞ tal que $\|f(T)\| \leq C_\nu \tau^{-\nu} \|f\|_\infty \quad (\tau > 0; f \in H^\infty(S_\tau))$ si y solo si T posee un cálculo funcional $\Lambda^\nu_{\infty,1}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para todo $\nu > \alpha$, siendo $\Lambda^\nu_{\infty,1}(\mathbb{R}^+)$ álgebra de funciones de tipo Besov. Sería interesante obtener, para sectoriales de tipo 0, un modelo funcional $\Lambda^\nu_{\infty,1}(\mathbb{R}^+)$, con versiones vectoriales de este espacio.

2.3. Representaciones

Una familia de operadores cerrados e^{-itA} ($t \in \mathbb{R}$) puede interpretarse como grupo, meramente formal en principio, de *valores frontera* del semigrupo de operadores e^{-zA}, $\Re z > 0$, supuesto existente. Este punto de vista se ha seguido en varias direcciones [ABHN, deL3]. Otra vía alternativa de interpretar e^{-itA} en cuanto que valores frontera la proporcionan los cuasimultiplicadores regulares de J. Esterle: Sea $\mathfrak{A}$ álgebra de Banach conmutativa *sin* unidad y de anulador nulo. Un *cuasimultiplicador* de $\mathfrak{A}$ es todo operador cerrado en $\mathfrak{A}$ expresable como $T = (Ta)/a$, con $a\mathfrak{A}$ denso en $\mathfrak{A}$. Un cuasimultiplicador T es *regular* si satisface ciertas acotaciones. El conjunto $QM_r(\mathfrak{A})$ de cuasimultiplicadores regulares de $\mathfrak{A}$ es límite inductivo de álgebras de Banach de multiplicadores, y posee un rico arsenal de propiedades espectrales. Realmente los cuasimultiplicadores fueron introducidos en [E3] como aproximación al problema clásico de la existencia de álgebras de Banach radicales sin ideal cerrado propio.

En [GM] se definen los *grupos* de cuasimultiplicadores regulares, con objeto de dar un sentido unificado a numerosas familias "grupo" de operadores cerrados no acotados, problema en la literatura de solución “ad hoc” según el contexto. Sin entrar en detalles sobre la teoría general, veamos parte de su aplicación a la interpretación de valores frontera.

Sea a^z semigrupo holomorfo en un álgebra $\mathfrak{A}$ como antes, tal que $\overline{a^z A} = \mathfrak{A}$ $(z \in \mathbb{C}^+)$ y sujeto a la condición de crecimiento $\|a^{1+it}\| = O(\omega(t))$, $|t| \to \infty$, para algún peso continuo submultiplicativo ω on $\mathbb{R}$. Tales semigrupos abundan. Puesto que $\overline{a^z A} = \mathfrak{A}$ el álgebra $QM_r(\mathfrak{A})$ está bien definida. Sea

$$a^{it} := \frac{a^{1+it}}{a^1} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Entonces $\|(a^{it})^n a^1\| = \|a^{1+int}\| \leq C\omega(nt) \leq C\omega(t)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, lo que significa que a^{it} es un cuasimultiplicador regular de $\mathfrak{A}$ y $(a^{it})_{t\in\mathbb{R}}$ constituye un *grupo* en $QM_r(\mathfrak{A})$. Además los generadores infinitesimales de a^{it} y $-i(a^z)'/a^z$ coinciden como cuasimultiplicadores, y $(a^z)'/a^z$ es una extensión cerrada del generador infinitesimal de a^z sobre $\mathfrak{A}$. Para más información y detalles remito a [GM]. Lo que nos interesa ahora de [GM] son las álgebras de convolución de funciones absolutamente continuas ahí defnidas, versiones fraccionarias con peso de álgebras L^1 .

Álgebras de Sobolev de convolución

Previamente hemos considerado la integral $W^{-\nu} f$ y la derivada $W^\nu f$ fraccionarias $(\nu > 0)$ de funciones en AC^ν, compleción de $C_c^{(\infty)}[0,\infty)$ en la norma $\int_0^\infty |W^\nu f(t)| t^{\nu-1} dt$. Ahora consideramos la compleción $\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ de $C^{(\infty)}[0,\infty)$ en la norma

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty |W^\nu f(t) t^\nu| dt,$$

y su espacio simétrico $\mathcal{T}^{(\nu)}((-t)^\nu)$ respecto al origen en $\mathbb{R}$. El espacio suma directa de ambos lo denotamos por $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$. Tanto $\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ como $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$ son álgebras de Banach con el producto de convolución en $\mathbb{R}$, subálgebras (densas) de $L^1(\mathbb{R}^+) = \mathcal{T}^{(0)}(t^0)$ y $L^1(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^{(0)}(|t|^0)$ respectivamente [GM]. Las llamaremos álgebras de Sobolev (de convolución).

A causa de su similitud con las álgebras L^1 es natural indagar en las propiedades y alcance de las aplicaciones de estas álgebras de Sobolev. Junto con P. J. Miana y J. J. Royo Espallargas se ha probado que la transformada de Gelfand de $\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ es la transformada de Laplace $\mathcal{L}$, que la imagen $\mathcal{L}(\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu))$ está contenida y es densa en un álgebra de Banach $\mathcal{A}^{(\nu)}(\mathbb{C}^+)$ formada por funciones holomorfas en $\mathbb{C}^+$ con derivadas fraccionarias complejas [GMR1], y se han caracterizado los ideales densos de $\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ [GMR2]. La estructura de los ideales cerrados “standard” de $\mathcal{T}^{(n)}(t^n)$ y $\mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$ se ha descrito en [GW1] y [GW2]. En el otro extremo, junto a L. Sánchez Lajusticia se ha estudiado en

[GS] la estructura y derivaciones acotadas de un álgebra radical de tipo Volterra-Sobolev, cociente de $\mathcal{T}^{(n)}(t^n)$, formada por funciones absolutamente continuas de orden superior en el intervalo $(0,1)$. Junto a Miana y A. Peña, se han obtenido aplicaciones del semigrupo de derivación fraccionaria a funciones especiales con valores matriciales [GMP].

(Tuve la satisfacción de ser el director de tesis de Miana, Royo y Martínez; en los dos segundos casos con Miana como codirector. Sánchez está pasando ahora por el trance.)

Las álgebras de Sobolev dan lugar a útiles cálculos funcionales. Veamos.

Semigrupos de distribución e integrados

Sean $\nu > 0$ y $\mathcal{X}$ espacio de Banach. Llamamos *semigrupo o grupo de distribuciones de orden* ν en $\mathcal{X}$ a todo homomorfismo de álgebras de Banach acotado $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}^\nu = \mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ ó $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$, respectivamente, en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $\mathcal{G}(\mathcal{T}^\nu)\mathcal{X}$ sea denso in $\mathcal{X}$. Claramente, estas definiciones extienden las nociones de semigrupo y grupo de distribuciones de Lions-Foias y Arendt.

Supondremos que un semigrupo integrado (T_ν) satisface $\|T_\nu(t)\| \leq Ct^\nu$ $(t > 0)$. Entonces la aplicación $\pi_\nu \colon \mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ dada por $\pi_\nu(f) := \int_0^\infty W^\nu f(t) T_\nu(t)\, dt$ es un semigrupo de distribuciones (de orden ν). Recíprocamente si tenemos un semigrupo de distribuciones como $\mathcal{G}$ de orden $\nu > 0$ –y una condición adicional de tipo técnico–, entonces existe un (único) semigrupo ν veces integrado [GMM1]. Tenemos por tanto una identificación entre semigrupos de distribución de orden $\nu > 0$ y semigrupos ν-veces integrados (moderados).

Llamamos a la aplicación π_ν *morfismo de Hille-Phillips de orden* ν. (Similares hechos pueden afirmarse sobre representaciones del álgebra $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$ y grupos integrados). La aplicación π_ν admite extensión como homorfismo entre álgebras de cuasimultiplicadores regulares y puede contemplarse de este modo como parte de la teoría de cuasimultiplicadores [GM, p. 33].

Vamos a ver algunas aplicaciones de las álgebras de tipo Sobolev y morfismos π_ν.

• *Órbitas de estabilidad asintótica*

La solución $u(t) = e^{-tA}x_0$ de un problema de Cauchy para $-A$ bien planteado está gobernada por el semigrupo $T(t) = e^{-tA}$ y entonces la evolución del sistema determinado por la ecuación viene expresada por las diversas propiedades de u, esto es, de $T(t)$. Una de las importantes es la *estabilidad asintótica* (a cero): $\lim_{t\to\infty} T(t)x = 0, \forall x \in \mathcal{X}$. Modelos canónicos son los de propagación del calor en que después de un tiempo se llega a equilibrio térmico, o sea, "$T(t)=0$". Resulta que la estabilidad (asintótica, se sobreentenderá) está ligada a propiedades espectrales del operador.

Teorema AB-LV ([AB, LV]). *Un C_0-semigrupo uniformemente acotado $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ de generador $-A$ es estable si el espectro periférico $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ es contable y si se cumple $\sigma_P(A^*)\cap i\mathbb{R}=\emptyset$.*

El conjunto $\sigma_P(A^*)$ es el espectro puntual del operador adjunto A^* de A. El teorema fue extendido por Vũ a semigrupos de crecimiento más general [V2]. Hay asimismo resultados de estabilidad en norma para especiales elementos del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Recordemos que f es *de síntesis espectral* en $L^1(\mathbb{R})$ para F subconjunto de $\mathbb{R}$ si existe $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ nula en un entorno de F para cada n, y $\lim_{n\to\infty}\|f-g_n\|_1=0$.

Teorema ESZ-V ([ESZ], [V1]). *Sea π_0 el morfismo de Hille-Phillips asociado a $T(t)$. Si $f\in L^1(\mathbb{R}^+)$ es de síntesis espectral en $L^1(\mathbb{R})$ con respecto a $i\sigma(H)\cap\mathbb{R}$ entonces*

$$\lim_{t\to\infty}\|T(t)\pi_0(f)\|=0.$$

En [ESZ] se demuestra que el espacio de vectores $\pi_0(f)x$, con f como en el Teorema ESZ-V y $x\in\mathcal{X}$, es denso en $\mathcal{X}$. El argumento descansa parcialmente en que todo punto de $\mathbb{R}$ es de síntesis espectral en $L^1(\mathbb{R})$. De este modo se tiene otra prueba del teorema de Arendt-Batty-Lyubich-Vũ distinta de las originales.

Hay importantes casos de ecuaciones de Cauchy en las que el operador A no satisface la condición de Hille-Yosida pero genera un semigrupo integrado $T_n(t)$. Entonces la función $u(t):=(d/dt)^nT_n(t)x$ es la única solución del problema y el límite $\lim_{t\to\infty}T_n(t)$, o su versión ergódica $\lim_{t\to\infty}t^{-n}T_n(t)$, refleja el comportamiento de la solución en el infinito. Junto a M. Martínez y Miana se extendieron los Teoremas ESZ-V y AB-LV como sigue. La síntesis espectral en $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$ se define análogamente como en $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3.1 ([GMM1]). *Sea $\nu>0$ y $T_\nu(t)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ un semigrupo ν veces integrado de generador $-A$, verificando $\sup_{t>0}t^{-\nu}\|T_\nu(t)\|<\infty$ y $\lim_{t\to 0^+}t^{-\nu}T_\nu(t)x=x,\ x\in\mathcal{X}$. Supongamos que $f\in\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ es de síntesis espectral en $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$ con respecto a $i\sigma(A)\cap\mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty}t^{-\nu}\|T_\nu(t)\pi_\nu(f)\|=0.$$

siendo π_ν el morfismo de Hille-Phillips de orden ν asociado a $T_\nu(t)$.

El Teorema 2.3.1 extiende literalmente el ESZ-V pero ahora la estrategia de [ESZ] para probar el Teorema AB-LV, pasando por la densidad del subespacio vectorial $\{\pi_\nu(f)x\}$ en $\mathcal{X}$, es considerablemente más complicada en el caso integrado, entre otras razones porque los puntos de $\mathbb{R}$, salvo el origen, no son de síntesis espectral en $\mathcal{T}^{(\nu)}(|t|^\nu)$ [GMM2]. Al menos se tiene un resultado parcial.

Teorema 2.3.2 ([GMM2])**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $T_n(t)$ semigrupo n veces integrado de generador $-A$ tal que*

$$\sup_{t>0} t^{-n}\|T_n(t)\| < \infty \ \text{y} \ \lim_{t\to 0^+} t^{-n}T_n(t)x = x, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Supongamos que $i\sigma(A) \cap \mathbb{R}$ es un conjunto compacto y contable de interpolación para $\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ en $\mathcal{T}^{(n)}(|t|^n)$, y $\sigma_P(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Entonces $\lim_{t\to\infty} t^{-n}T_n(t)\pi_n(f)x = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

• *Problema de extensión Dirichlet a Neumann*

Tratamos aquí con una ecuación diferencial de tipo Bessel, que no es de Cauchy. Interesados en las propiedades de regularidad de soluciones de ecuaciones no lineales asociadas a potencias fraccionarias $(-\Delta)^\sigma$, $0 < \sigma < 1$, del operador laplaciano positivo $-\Delta$, L. Caffarelli y L. Silvestre ([CS]) se preguntaron por las soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} u_{yy} + \dfrac{1-2\sigma}{y} u_y = -\Delta u, \ y > 0, \\ u(0) = f \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

interpretada ésta, heurísticamente, como una generalización a dimensión fraccionaria $2 - 2\sigma$ de la ecuación de Dirichlet. Con esta idea, pudieron expresar el operador no local $(-\Delta)^\sigma$ a través de soluciones u de la ecuación local. Esto se conoce como *problema de extensión*, de Dirichlet a Neumann, y su solución en $\mathbb{R}^n$ ha tenido gran impacto en breve tiempo.

Posteriormente, P. R. Stinga y J. L. Torrea extendieron en [ST] los resultados de Caffarelli y Silvestre sobre el laplaciano a una clase muy amplia de operadores diferenciales de segundo orden sobre espacios L^2. Tales operadores incluyen laplacianos en dominios acotados de $\mathbb{R}^n$, operadores de Schrödinger elípticos, o el oscilador armónico fraccionario. Junto a Miana y Stinga se ha probado recientemente que los resultados de [CS] y [ST] pueden extenderse en abstracto de manera que los ejemplos de aplicación abarquen una más amplia colección de operadores.

Teorema 2.3.3 ([GMS])**.** *Sea $\nu \geq 0$ y A el generador de un semigrupo integrado ν veces $(T_\nu(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$; sea $0 < \sigma < 1$. Una solución $u : (0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ de la ecuación*

$$\begin{cases} u''(t) + \dfrac{1-2\sigma}{t} u'(t) = -Au(t), \ t > 0; \\ \lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = f, \ f \in X \end{cases}$$

es

$$(\text{PrExt}) \qquad u(t) = \frac{t^{2\sigma}}{4^\sigma\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty W^\nu \left(\frac{e^{-t^2/(4s)}}{s^{1+\sigma}} \right) T_\nu(s) f \, ds, \quad t > 0.$$

Más aún, si $f \in \mathcal{D}(A)$ *entonces, siendo* $c_\sigma = 4^{-\sigma}\Gamma(-\sigma)\Gamma(\sigma)^{-1}$, *tenemos*

$$(\text{L}) \qquad \lim_{t\to 0} \frac{u(t) - f}{t^{2\sigma}} = c_\sigma(-A)^\sigma f = \frac{1}{2\sigma} \lim_{t\to 0} t^{1-2\sigma} u'(t).$$

La demostración del teorema utiliza el álgebra de convolución $\mathcal{T}^{(\nu)}(t^\nu)$ y la representación π_ν a ella asociada. Para $\nu = 0$ la fórmula (PrExt) ya aparece en [CS] y [ST]. Ahora además observamos que el teorema es válido en particular para *todo generador infinitesimal* A *de cualquier* C_0*-semigrupo acotado*. La generalidad del resultado permite dar con soluciones del problema de extensión para operadores de grado mayor que dos –v.g., operadores de tipo Schrödinger, o asociados a la ecuación de Korteweg-de Vries–, y para operadores sobre variedades de Riemann o grupos de Lie [GMS]. Las igualdades en (L) son los límites de localizaciones del operador $(-A)^\sigma$; la segunda proporciona la caracterización de la potencia fraccionaria como una correspondencia de la condición frontera de Dirichlet a la condición frontera de Neumann (dada en [CS] para Δ). Finalmente, la fórmula (PrExt) es la base de un número de otras fórmulas integrales de u, entre las cuales se puede destacar la que expresa u en términos de la solución de la ecuación de ondas relativa a A [GMS].

• **Multiplicadores de Pedersen**

Estos son generalización, en grupos de Lie, de los multiplicadores de Weyl para el producto de torsión. Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, G grupo de Lie nilpotente, y $\pi\colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ representación irreducible unitaria. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Por la teoría de Kirillov ([Ki, p. 226]), la colección de tales representaciones π está en correspondencia biunívoca con la familia de órbitas co-adjuntas del grupo G en el dual $\mathfrak{g}^*$. Sea $\mathcal{O}_\pi$ la órbita co-adjunta correspondiente a π, y $\mathfrak{g}_e$ el subespacio de $\mathfrak{g}$ conocido como *predual* de $\mathcal{O}_\pi$. Denotamos por $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_e)$ el espacio de funciones de Schwarz sobre $\mathfrak{g}_e$. La transformada de (Weyl-)Pedersen, con respecto a π, es la aplicación lineal $T^\pi\colon \mathcal{S}(\mathfrak{g}_e) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por

$$T^\pi(\varphi) := \int_{X\in\mathfrak{g}_e} \varphi(X)\pi(\exp_G X)\, dX, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_e).$$

Esta transformada tiene buenas propiedades algebraicas y de continuidad que permiten extenderla al espacio de distribuciones $\mathcal{S}'(\mathfrak{g}_e)$ sobre $\mathfrak{g}_e$, asi como definir el producto de convolución de torsión $(\varphi, \phi) \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_e) \times \mathcal{S}(\mathfrak{g}_e) \mapsto \varphi *_e \phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_e)$ mediante la ley

$$T^\pi(\varphi *_e \phi) := T^\pi(\varphi) T^\pi(\phi), \quad \forall \varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_e).$$

En [BBG, Def. 3.9] se define como *multiplicador de Pedersen* de $L^p(\mathfrak{g}_e)$, $1 \leq p \leq \infty$, todo operador $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para el que existe otro operador acotado $C_M \colon L^p(\mathfrak{g}_e) \to L^p(\mathfrak{g}_e)$ verificando

$$T^\pi(C_M \phi) = M T^\pi(\phi), \quad \phi \in L^1(\mathfrak{g}_e) \cap L^p(\mathfrak{g}_e).$$

Nos restringiremos a grupos de Lie G con centro unidimensional y poseyendo órbitas genéricas lisas ($\mathbb{H}_n$ es un ejemplo), lo que quiere decir que los elementos de $\mathfrak{g}^*$ asociados forman un conjunto abierto, denso de Zariski en $\mathfrak{g}^*$, y que las representaciones adheridas son de cuadrado integrable, módulo el centro. En estas condiciones, toda tal representación τ es unitariamente equivalente a otra $\pi \colon G \to \mathcal{B}(L^2(\mathcal{V}))$ donde $\mathcal{V}$ es un espacio euclídeo [CoGr]. Esto hace posible el uso de herramientas del análisis real y consiguientemente la obtención del siguiente resultado.

Teorema 2.3.4 ([BBG]). *Sea G grupo de Lie nilpotente con centro unidimensional y con órbitas genéricas lisas. Sea ξ un punto del dual unitario de G correspondiente a una órbita lisa y tomemos una realización admisible $\pi \colon G \to \mathcal{B}(L^2(\mathcal{V}))$ cualquiera de ξ. Entonces para cada $p \in (1, \infty)$ y cada multiplicador de Pedersen asociado a π la restricción de M a $L^2(\mathcal{V}) \cap L^p(\mathcal{V})$ se extiende a un operador acotado de $\mathcal{B}(L^p(\mathcal{V}))$.*

El teorema extiende el de Mauceri [M, Th. 5.2] puesto que este segundo se recupera simplemente tomando π igual a la representación de Schrödinger de $\mathbb{H}_n$.

2.4. Geometría y representaciones

Vamos a contemplar conjuntos de representaciones desde el ángulo de la geometría. De aquí al final emplearé la letra A, que en parágrafos previos ha venido designando generadores infinitesimales, para designar un álgebra de Banach.

• Realizaciones geométricas

Supongamos $B \subseteq A$ dos C^*-álgebras con unidad, B cerrada en A, y $\mathcal{E} \colon A \to B$ esperanza condicional, o sea, una proyección de norma 1. Sea φ un *estado* de A (funcional sobre A de norma 1 y $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$) tal que $\varphi \circ \mathcal{E} = \varphi$. Sea $\pi_A \colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ la representación GNS asociada a φ. Denotamos por U_A el grupo de unitarios en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$.

• *Realizaciones sobre grupos unitarios*

Construir realizaciones geométricas, en dimensión infinita, de representaciones de grupos en espacios de Hilbert de secciones de fibrados es complicado, ya que no se dispone de medida invariante por traslaciones. En [BR] se aborda el problema para la representación $\pi_A \mid_{U_A}$ mediante una brillante idea: utilizar núcleos reproductivos sobre fibrados.

Consideremos el fibrado $\Pi_\varphi^U \colon D_U \equiv U_A \times_{U_B} \mathcal{H}_B \to U_A/U_B,\ [(u,f)] \mapsto uU_B$, en donde $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ son los espacios de Hilbert del proceso GNS en A y B respectivamente. Sobre Π_φ^U se define el núcleo reproductivo hermítico

$$K^U(s,t)\xi := \big[(u_1, P_{AB}(\pi_A(u_1)^{-1}\pi_A(u_2)f))\big]$$

para todo $s = u_1U_B$, $t = u_2U_B$; $\xi = [(u_2, f)] \in D_t$, siendo D_t la fibra en t y P_{AB} la proyección ortogonal de $\mathcal{H}_A$ sobre $\mathcal{H}_B$, que por cierto se obtiene como extensión continua de la esperanza $\mathcal{E} \colon A \to B$ en el proceso GNS. Entonces K^U genera un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A(\mathcal{E},\varphi)$, isomorfo a $\mathcal{H}_A$, de secciones analítico-reales de Π_φ^U de forma que π_A se "realiza" como operador de multiplicación en $\mathcal{H}_A(\mathcal{E},\varphi)$ [BR, Th. 5.4]. Este resultado es de tipo Borel-Weil claramente, si bien las secciones del fibrado construidas son real-analíticas, mientras que el resutado clásico en dimensión finita alcanza su plenitud en el contexto holomorfo. Aunque existe algún resultado con secciones holomorfas ([BR, Th. 5.8]), éste es de alcance limitado. Como regla, no es habitual encontrar holomorfía en variedades formadas a partir de grupos unitarios. El asunto que nos ocupa, en su generalidad, hay que abordarlo desde otro punto de vista, el de las complexificaciones.

• *Grupos de Banach-Lie involutivos y complexificaciones*

Sean A, B por un momento meros índices. Llamamos grupo de Banach-Lie *involutivo* a todo grupo de Banach-Lie G_A equipado con un difeomorfismo $u \mapsto u^*$ que satisface $(uv)^* = v^*u^*$ and $(u^*)^* = u$ para $u, v \in G_A$. En tal caso, se tiene que $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$ y $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$. Definimos $u^{-*} := (u^{-1})^*$, si $u \in G_A$, y $G_A^+ := \{u^*u \mid u \in G_A\}$ (conjunto de elementos *positivos* de G_A). Un subgrupo G_B de Banach-Lie de G_A se dirá involutivo si $u^* \in G_B$, $\forall u \in G_B$, y en este caso $z^{-*} := u^{-*}G_B$ ($z = uG_B$, $u \in G_A$) define el difeomorfismo involutivo $z \in G_A/G_B \mapsto z^{-*} \in G_A/G_B$. Para $j \in \{A, B\}$ denotamos $U_J = \{u \in G_J \mid u^{-*} = u\}$, subgrupo de Banach-Lie de G_J, y con U_B subgrupo de Banach-Lie de U_A. Para $G_B^+ := G_A^+ \cap G_B$, la aplicación $\lambda \colon uU_B \in U_A/U_B \mapsto uG_B \in G_A/G_B$ es un difeomorfismo de U_A/U_B sobre la subvariedad de puntos fijos de la involución de G_A/G_B. En este sentido, decimos que el espacio homogéneo complejo G_A/G_B es una *complexificación* del espacio homogéneo real U_A/U_B.

Sea ahora G_J el grupo de todos los elementos invertibles de la C^*-algebra $J = A$ ó $J = B$, provisto de la involución inducida por la de J. Sea $\mathcal{E}\colon A \to B$ esperanza condicional.

Teorema 2.4.1 ([BG1]). *Consideremos el espacio* $\mathfrak{p} := (\ker \mathcal{E}) \cap \mathfrak{u}_A$ *bajo la acción adjunta de* U_B*, that is,* $(u, X) \mapsto uXu^{-1}$*, y sea* $U_A \times_{U_B} \mathfrak{p}$ *el correspondiente fibrado vectorial con fibra típica* $\mathfrak{p}$*. Entonces el espacio homogéneo complejo* G_A/G_B *posee una estructura de fibrado vectorial real* U_A*-equivariante sobre* U_A/U_B *de modo que existe un difeomorfismo real-analítico* $G_A/G_B \simeq U_A \times_{U_B} \mathfrak{p}$*. Más aún,* G_A/G_B *es una complexificación de* U_A/U_B *con respecto al difeomorfismo involutivo anti-holomorfo*

$$u \exp(i\ X)G_B \mapsto u \exp(-i\ X)G_B,\ \ G_A/G_B \to G_A/G_B$$

siendo $u \in U_A$*,* $X \in \mathfrak{p}$ *(alternativamente,* $[(u, X)] \mapsto [(u, -X)]$*).*

Puesto que el fibrado vectorial $U_A \times_{U_B} \mathfrak{p} \to U_A/U_B$ se identifica con el fibrado tangente $T(U_A/U_B) \to U_A/U_B$ el teorema proporciona una interesante interpretación de G_A/G_B como fibrado tangente de U_A/U_B. Por otra parte, como notaremos, la esperanza $\mathcal{E}$ puede verse como forma de conexión de un fibrado. Estos hechos nos llevan a numerosos ejemplos de variedades de Banach real-analíticas cuyos fibrados tangentes tienen estructura compleja asociada a conexiones sobre fibrados, véase la última sección de [BG2].

• *Realizaciones holomorfas de representaciones*

La teoría de representación geométrica de grupos de Banach-Lie involutivos introducida en [BG1] necesita de la noción de fibrado vectorial *casi-hermítico*, válida para cualquier fibrado vectorial $\Pi\colon D \to Z$ cuya base Z sea variedad de Banach equipada con un difeomorfismo involutivo. Por razones de espacio no debo entrar en ella y me limitaré a exponer unos cuantos hechos en el caso de fibrados homogéneos.

Sean G_A, G_B grupos involutivos, y $\pi_J\colon G_J \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_J)$ $*$-representación continua en norma ($J \in \{A, B\}$) tal que $\pi_A \mid_{G_B} = \pi_B$. En esta situación puede dotarse al fibrado $\Pi^G\colon D := G_A \times_{G_B, \pi_B} \mathcal{H}_B \to G_A/G_B$ de una estructura casi-hermítica, y la familia de aplicaciones

$$K^G(s, t)\eta = [(u, P_{AB}(\pi_A(u^{-1})\pi_A(v)f))]$$

para $s, t \in G_A/G_B$, $s = uG_B$, $t = vG_B$, y $\eta = [(v, f)] \in D_t \subset D$, constituye un $(-*)$-*núcleo reproductivo* sobre Π^G [BG1, sección 4]. El núcleo se llama reproductivo porque genera un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^K$ de secciones de Π^G. Si G_A, G_B son grupos complejos y π_A holomorfa, el fibrado Π^G es holomorfo, casi-hermítico, y tenemos el

Teorema 2.4.2 ([BG1]). *Toda $*$-representacion holomorfa $\pi_A\colon G_A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$, como antes, admite realización como multiplicación sobre espacios de secciones holomorfas de un fibrado. Además, existe una inyección real-analítica y U_A-equivariante del fibrado vectorial real $U_A \times_{U_B,\pi_B} \mathcal{H}_B \to U_A/U_B$ en el fibrado complejo $G_A \times_{G_B,\pi_B} \mathcal{H}_B \to G_A/G_B$, en donde $U_J := \{a \in G_J : a^{-*} = a\}$ para $J \in \{A, B\}$.*

Como corolario obtenemos una extensión directa de [BR, Th. 5.4] a representaciones de Stinespring que son dilataciones de aplicaciones *completamente positivas*, de las que los estados son caso particular. Este hecho es de relieve pues revela propiedades geométrico-diferenciales, inesperadas en principio, de las aplicaciones completamente positivas y la teoría de dilatación de Stinespring. Véase [BG1, Sec. 6] para definiciones y resultados.

Otro ejemplo de mucho interés en el presente contexto es el del fibrado tautológico universal $\Pi_{\mathcal{H}}$ de un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$, cuyo espacio base es la *variedad grasmaniana* $Gr(\mathcal{H})$ de los subespacios lineales cerrados de $\mathcal{H}$. La restricción de $\Pi_{\mathcal{H}}$ a cada componente conexa de $Gr(\mathcal{H})$ es un fibrado homogéneo hermítico y holomorfo con núcleo reproductivo, y posee una rica estructura diferencial [BG2, BG4].

- *Conexiones en fibrados homogéneos. Derivada covariante y curvatura*

Dado Π fibrado vectorial hermítico con núcleo reproductivo K se muestra en [BG3] que existe un morfismo $\Theta_K\colon \Pi \to \Pi_{\mathcal{H}_K}$ "de clasificación". Para núcleos K que llamamos *admisibles* –abundan en la práctica– las propiedades geométricas de $\Pi_{\mathcal{H}_K}$ se traspasan a Π mediante operaciones "pullback" guiadas por Θ_K y así el fibrado Π resulta dotado de conexión, derivada covariante, forma de curvatura, etc. Este hecho podría ser de utilidad en la clasificación de los núcleos reproductivos (dificil problema, en general), en un programa que, desde sus inicios, se está llevando a cabo con D. Beltita y aparece en [BG3], [BG4] y [BG5]. El trabajo [BG6] contiene un resumen y motivaciones.

En el caso de fibrados homogéneos Π^G, la conexión sobre el fibrado obtenida mediante "pullback" desde $\Pi_{\mathcal{H}_K}$ toma la forma

$$\Phi_\pi\colon [((g, X), (f, h))] \mapsto [((g, 0), (f, P_{A,B}(\mathrm{d}\rho(X)f) + h))],$$

si $g \in G_A$, $X \in \mathfrak{g}_A$ y $f, h \in \mathcal{H}_B$, y la derivada covariante ∇_π asociada a Φ_π es

$$(\nabla_\pi\sigma)([(u, X)]) = [(u, \mathrm{d}\phi(u, X) + P_{A,B}(\mathrm{d}\pi_A(X)\phi(u)))],$$

para cada vector tangente $[(u, X)] \in T(G_A/G_B)$, en donde: (a) σ es una sección del fibrado Π^G con $\sigma(uG_B) = [(u, \phi(u))]$, $u \in G_A$, y $\phi\colon G_A \to \mathcal{H}_B$ de clase C^∞ tal que

$\phi(uw) = \pi_A(w)^{-1}\phi(u)$ $\forall u \in G_A, w \in G_B$; (b) $\widetilde{\sigma}$ es sección diferenciable del fibrado tautológico de $\mathcal{H}_A$ tal que $\widetilde{\sigma}(\pi_A(u)\mathcal{H}_B) := (\pi_A(u)\mathcal{H}_B, \pi_A(u)\phi(u))$, $u \in G_A$ [BG4].

En [BG5] se estudia la compatibilidad de las derivadas covariantes definidas por núcleos reproductivos con estructuras holomorfas y hermíticas en un fibrado, así como la posibilidad de curvatura positiva en el sentido de Griffiths.

• **Representaciones, promediabilidad y geometría**

Los fibrados a considerar en esta sección son principales, y se presentan asociados a espacios de representaciones vistos como variedades de Banach-Lie.

• *Caracterización de la promediabilidad*

Sea $\mathfrak{A}$ una C^*-álgebra. El siguiente resultado es realmente notable. Diremos que $\mathfrak{S}(\varphi)$ es una $*$-órbita si contiene una $*$-representación. Si $\mathfrak{A}$ es promediable esto siempre ocurre.

Teorema 2.4.3 ([ACS]). *Una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ es nuclear (esto es, promediable) si y solamente si toda $*$-órbita $\mathfrak{S}(\varphi)$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, subvariedad de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, y el fibrado τ_φ^G posee conexión principal, para todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

La demostración original del teorema pasa por construir una (forma de) conexión a partir de una media sobre el grupo de unitarios del bidual $\mathfrak{A}''$, visto éste como álgebra de von Neumann (inyectiva). La conexión en τ_φ^G puede construirse directamente sin pasar por $\mathfrak{A}''$: Dada una diagonal virtual M para el álgebra nuclear $\mathfrak{A}$ definimos $\mathcal{E}_\varphi(b)(b_*) := M\,(a \otimes a' \mapsto \langle \varphi(a)\beta\varphi(a'), b_*\rangle)$, con $b \in \mathfrak{B}$, $a, a' \in \mathfrak{A}$, $b_* \in \mathfrak{B}_*$. El operador $\mathcal{E}_\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ es una esperanza condicional tal que $\mathcal{E}_\varphi(\mathfrak{B}) = \varphi(\mathfrak{A})' := \{b \in \mathfrak{B} \mid b\varphi(a) = \varphi(a)b,\ (a \in \mathfrak{A})\}$. Ya con $\mathcal{E}_\varphi$ a mano se obtienen secciones locales, mostrando pues que τ_φ^G y τ_φ^U son fibrados de Banach principales sobre los espacios homogéneos de Banach, holomorfo el $\mathfrak{S}(\varphi)$ y real-analítico el $\mathfrak{U}(\varphi)$. Todavía más, la esperanza $\mathcal{E}_\varphi$ genera la conexión buscada, de vectores verticales $g\ \mathrm{Im}\mathcal{E}_\varphi$ y horizontales $g\ \ker\mathcal{E}_\varphi$ $(g \in G_{\mathcal{E}_\varphi(\mathfrak{B})})$. De forma semejante, la restricción de $\mathcal{E}_\varphi$ a $\{b \in \mathfrak{B} : b^* = -b\}$ da lugar a una conexión en el fibrado τ_φ^U.

Los hechos precedentes, incluido el teorema, tienen sus correspondientes análogos para álgebras de von Neumann $\mathcal{M}$ inyectivas (propiedad equivalente a la promediabilidad en el sentido de Connes) y representaciones de $\mathcal{M}$ ultradébilmente continuas [ACS, CoG].

Las ideas anteriores se aplican a representaciones de grupos. Sea $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto. Cada órbita en $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$ es una $*$-órbita si el grupo $\mathfrak{G}$ es promediable [Gre]. Del Teorema 2.4.3 se obtiene de manera inmediata que el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$ es nuclear si y solamente si cada $*$-órbita en $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, tal que el fibrado $\mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\pi)$ está dotado de una conexión principal [ACS].

Por otra parte es bien sabido que $\mathfrak{G}$ promediable implica $C^*(\mathfrak{G})$ nuclear pero que $C^*(\mathfrak{G})$ puede ser nuclear sin que $\mathfrak{G}$ sea promediable (v. g. $\mathfrak{G} = SL(2, \mathbb{R})$). Es pues natural tratar de caracterizar la promediabilidad de $\mathfrak{G}$ mediante la geometría del fibrado principal $\mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\pi)$. Al respecto, se puede abordar el estudio geométrico del espacio $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H}))$ directamente sobre $\mathfrak{G}$, en lugar de a través de $C^*(\mathfrak{G})$, recurriendo al álgebra de grupo $L^1(\mathfrak{G})$, ya que se verifica el isomorfismo topológico

$$\mathrm{Rep}(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(\mathcal{H})) \equiv \mathrm{Hom}(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

Si $\mathfrak{G}$ es promediable, fijando una media m invariante a izquierda en $L^\infty(\mathfrak{G})$, el operador $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado, para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x, y \in \mathcal{H}$, por

$$\langle \mathcal{E}_\pi(T)x, y \rangle := m\left(s \mapsto \langle \pi(s)T\pi(s)^{-1}x, y \rangle\right)$$

es una proyección de norma uno tal que $\mathrm{Im}\ \mathcal{E}_\pi = \pi(\mathfrak{G})'$, y da lugar a una conexión sobre el fibrado principal $\tau_\pi : \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\pi)$. De hecho, en un grupo promediable se puede tomar una media m que sea, *a la vez*, invariante a izquierda y a derecha, y entonces, la conexión $\mathcal{E}_\pi$ asociada satisface adicionalmente $\mathcal{E}_\pi(\pi(t)T\pi(t^{-1})) = \mathcal{E}_\pi(T)$, o equivalentemente $\mathcal{E}_\pi(\pi(t)T) = \mathcal{E}_\pi(T\pi(t))$, $\forall t \in \mathfrak{G}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En otras palabras, la estructura reductiva definida por el subespacio de vectores horizontales $H_\pi := \ker \mathcal{E}_\pi$ en $\mathfrak{S}(\pi)$ satisface $[\pi(\mathfrak{G}), H_\pi] \subset H_\pi$, estructura reductiva que llamaremos *π-invariante.*

Teorema 2.4.4 ([CoG]). *Sea $\mathfrak{G}$ grupo localmente compacto. Son equivalentes:*

(i) *$\mathfrak{G}$ es promediable*

(ii) *Para todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y toda representación π de $\mathfrak{G}$ en $\mathcal{H}$, la órbita $\mathfrak{S}(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach, holomorfo, con estructura reductiva π-invariante.*

En [CoG] hay algún resultado más de caracterización de grupos promediables dentro de familias de grupos mayores que la clase de los promediables. En cuanto a álgebras de Banach generales, se demuestra en [CoG] la existencia de conexiones en los fibrados sobre las órbitas, etc., análogamente a como se ha indicado en el caso de C^*-álgebras. Queda por plantear la posible caracterización geométrica de la promediabilidad de un álgebra de Banach. La π-invariación de conexiones funciona bien en el caso de grupos, como hemos visto, y por otra parte es posible obtener π-invariación para álgebras de Banach:

$[\pi(\mathfrak{A}), H_\pi] \subset H_\pi$ [CoG]; por ejemplo, cuando el álgebra es *simétricamente promediable* [CoG]. La cuestión es si la π-invariación de conexiones caracteriza las álgebras de Banach simétricamente promediables.

• *Complexificación de órbitas*

Los fibrados τ_φ^G, τ_φ^U son casos particulares de la teoría vista en secciones previas, de donde se deduce que la órbita de semejanza $\mathfrak{S}(\varphi)$ es complexificación de la unitaria $\mathfrak{U}(\varphi)$.

Para $X \in \mathfrak{p}_\varphi := \ker E_\varphi \cap \mathfrak{u}_A$, sea $[X]$ la clase de equivalencia de X bajo la acción adjunta de U_B sobre $\mathfrak{p}\varphi$.

Teorema 2.4.5 ([BG1])**.** *Sea $\mathfrak{A}$ una C^*-álgebra nuclear y $\mathfrak{B}$ álgebra de von Neumann.*

(a) *Cada componente conexa de* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *es una órbita de semejanza* $\mathfrak{S}(\varphi)$*, para algún* $\varphi \in \mathrm{Hom}_*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. *Además, cada órbita* $\mathfrak{S}(\varphi)$ *es la unión disjunta*

$$\mathfrak{S}(\varphi) = \bigcup_{[X] \in \mathfrak{p}_\varphi / U_B} \mathfrak{U}(e^{iX} \varphi e^{-iX})$$

siendo $\mathfrak{U}(e^{iX}\varphi e^{-iX})$ *conexo, para todo* $[X] \in \mathfrak{p}_\varphi / U_B$.

(b) *La órbita de semejanza* $\mathfrak{S}(\varphi)$ *es una complexificación de la órbita unitaria* $\mathfrak{U}(\varphi)$ *con respecto al difeomorfismo involutivo*

$$u e^{iX} \varphi e^{-iX} u^{-1} \mapsto u e^{-iX} \varphi e^{iX} u^{-1} \quad (u \in U_{\mathfrak{B}}).$$

(c) *La aplicación* $ue^{iX}\varphi e^{-iX}u^{-1} \mapsto u\varphi u^{-1}$, $\mathfrak{S}(\varphi) \to \mathfrak{U}(\varphi)$ *es una retracción continua que define un fibrado vectorial difeomorfo al fibrado tangente* $U_A \times_{U_B} \mathfrak{p}_\varphi \to \mathfrak{U}(\varphi)$ *de* $\mathfrak{U}(\varphi)$.

Creo que es llegado el momento de finalizar. Gracias por su atención.

Referencias

[AKL] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. L. Laurentiev y otros, *La matemática, métodos y significado III*, AU 70, Alianza Ed., Madrid 1985.

[ACS] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, *A geometric characterization of nuclearity and injectivity*, J. Funct. Anal. 133 (1995), 474-494.

[A] R. Apéry et al., *Pensar la matemática*, Cuadernos Infimos 114, Tusquets Ed. Barcelona 1984.

[AB] W. Arendt y C. J. K. Batty, *Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 837 – 852.

[ABHN] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber and F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Monographs in Math. 96, Birkhäuser, Basel, 2001.

[Ba] J. M. Bachar y otros (ed.), *Radical Banach Algebras and Automatic Continuity*, Proc. Long Beach, Lect. Notes in Maths. 975, Berlín-Heilderberg-Nueva York: Springer 1983.

[Be] D. Beltiţă, *Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. 137, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[BBG] D. Beltiţă, I. Beltiţă, J. E. Galé, *Transference for Banach space representations of nilpotent Lie groups*, sometido a publicación.

[BG1] D. Beltiţă y J. E. Galé, *Holomorphic geometric realizations for representations of C^*-algebras*, J. Funct. Anal. 255 (2008), 2888-2932.

[BG2] D. Beltiţă y J. E. Galé, *On complex infinite-dimensional Grassmann manifolds*, Complex Anal. Op. Th. 3 (2009), 739-758.

[BG3] D. Beltiţă y J. E. Galé, *Universal objects in categories of reproducing kernels*, Rev. Mat. Iberoamericana 27 (2011), 123-179.

[BG4] D. Beltiţă y J. E. Galé, *Linear connections for reproducing kernels on vector bundles*, Math. Zeitschrift 277 (2014), 29-62.

[BG5] D. Beltiţă y J. E. Galé, *Geometric perspectives of reproducing kernels.* En: "Operator Theory" D. Alpay (ed.), Springer 2015, ISBN: 978-3-0348-0692-3.

[BG6] D. Beltiţă y J. E. Galé, *Reproducing kernels and positivity of vector bundles in infinite dimensions.* En: M. de Jeu, B. de Pagter, O. van Gaans, and M. Veraar (eds.), Proceedings "Positivity VII 2013", Trends in Math., Birkhäuser, Basel 2016.

[BR] D. Beltiţă y T.S. Ratiu, *Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras*, Adv. Math. 208 (2007), 299–317.

[Bu] F. J. Budden, *The fascination of groups*, Cabridge U. P. 1972.

[BNT] P. L. Butzer, R. J. Nessel y W. Trebels, *Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation*, J. Approx. Theory 8 (1973), 335-356.

[CS] L. Caffarelli y L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), 1245–1260.

[CG] J. C. Candeal y J. E. Galé, *On the existence of analytic semigroups bounded on the half-disc in some Banach algebras.* Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 573-576.

[CoG] G. Corach y J. E. Galé, *On amenability and geometry of spaces of bounded representations*, J. London Math. Soc. 59 (1999), 311-329.

[CoGr] L. J. Corwin y F. P. Greenleaf, *Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications. Part I. Basic Theory and Examples.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 18. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[CDMY] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh y A. Yagi, *Banach operators with a bounded H^∞ functional calculus*, J. Austral. Math. Soc. 60 (1996), 51-89.

[CuG] B. Cuartero y J. E. Galé, *Bounded degree of algebraic topological algebras*, Comm. in Algebra 22 (1994), 329-337.

[CGRS] B. Cuartero, J. E. Galé, A. Rodríguez Palacios y A. Slinko, *Bounded degree of weakly algebraic topological Lie algebras*, Manuscripta Math. 81 (1993), 129-140.

[CGS] B. Cuartero, J. E. Galé y A. Slinko, *Linearly compact algebraic Lie algebras and coalgebraic Lie coalgebras*, Proc. Amer. Math. 125 (1997), 1945-1952.

[DE] H.G. Dales y J. Esterle, *Analytic continuation for holomorphic generalized functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 257-259.

[Da1] E. B. Davies, *The functional calculus*, J. London Math. Soc. 52(1995), 166-176.

[Da2] E. B. Davies, *L^p spectral independence and L^1 analyticity*, J. London Math. Soc. 52 (1995), 177-184.

[DH] Ph. J. Davis y R. Hersh, *Experiencia Matemática*, M. E. C., Ed. Labor, Madrid 1982.

[deH] P. de la Harpe, *Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 285. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. iii+160

[deL1] R. de Laubenfels, *Functional calculus for generators of uniformly bounded holomorphic semigroups*, Semigroup Forum 38 (1989), 91-103.

[deL2] R. de Laubenfels, *Unbounded well-bounded operators, strongly continuous semigroups and the Laplace transform*, Studia Math. 103 (1992), 143-159.

[deL3] R. de Laubenfels, *Existence families, functional calculi and evolution equations*, Lecture Notes in Math. 1570, Springer-Verlag, Berlin,1994.

[E1] J. Esterle, *A complex-variable proof of the Wiener tauberian theorem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 30 (1980), 91-96.

[E2] J. Esterle, *Elements for a classification of commutative radical Banach algebras*, en [Ba, pp. 4-65].

[E3] J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras*, en [Ba, pp. 66-162].

[EG] J. Esterle y J. E. Galé, *Regularity of Banach algebras generated by analytic semigroups satisfying some growth conditions*, Proc. Math. Soc 92 (1984), 377-380.

[ESZ] J. Esterle, E. Strouse y F. Zouakia, *Stabilité asymptotique de certains semi-groupes d'operateurs et ideaux primaires de $L^1(\mathbb{R})^+$*, J. Operator Theory 28 (1992), 203 – 227.

[F] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Adv. Math., CRC Press, Boca Raton 1995.

[G] J. E. Galé, *Weakly compact homomorphisms and semigroups in Banach algebras*, J. London Math. Soc. 45 (1992), 113-125.

[GMM1] J. E. Galé, M. Martínez y P. J. Miana, *Katznelson-Tzafriri type theorem for integrated semigroups*, J. Oper. Th. 69 (2013), 59-85.

[GMM2] J. E. Galé, M. Martínez y P. J. Miana, *Spectralty and asymptotics of integrated semigroups*, sometido a publicación.

[GM] J. E. Galé y P. J. Miana, *One-parameter groups of regular quasimultipliers*, J. Funct. Anal. 237 (2006), 1-53.

[GMMu] J. E. Galé, P. J. Miana y D. Müller, *Extensions of well-boundedness and C^m-scalarity*, Int. Eq. Op. Th. 57 (2007), 327-337.

[GMP] J. E. Galé, P. J. Miana y A. Peña, *Hermite matrix-valued functions associated to matrix differential equations*, Const. Appr. 26 (2007), 93-113.

[GMPy] J. E. Galé, P. J. Miana y T. Pytlik, *Spectral properties and norm estimates associated to the $C_c^{(k)}$ functional calculus*, J. Oper. Th. 48 (2002), 385-418.

[GMR1] J. E. Galé, P. J. Miana y J. J. Royo, *Estimates of the Laplace transform on convolution Sobolev algebras*, J. Appr. Th. 164 (2012), 162-178.

[GMR2] J. E. Galé, P. J. Miana y J. J. Royo, *Nyman type theorem in convolution Sobolev algebras*, Rev. Mat. Complutense 25 (2012), 1-19.

[GMS] J. E. Galé, P. J. Miana y P. R. Stinga, *Extension problem and fractional operators: Semigroups and wave equation*, J. Evol. Eq. 13 (2013), 343-368.

[GMY] J. E. Galé, P. J. Miana y D. Yakubovich, *H^∞-functional calculus and models of Nagy-Foias type for sectorial operators*, Math. Ann. 351 (2011), 733-760.

[GP] J. E. Galé y T. Pytlik, *Functional calculus for infinitesimal generators of holomorphic semigroups*, J. Funct. Anal. 150 (1997), 307-355.

[GR] J. E. Galé y T. J. Ransford, *On the growth of analytic semigroups along vertical lines*, Studia Math. 138 (2000), 165-177.

[GRW] J. E. Galé, T. Ransford y M. White, *Weakly compact homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), 815-824.

[GS] J. E. Galé y L. Sánchez-Lajusticia, *A Sobolev algebra of Volterra type*, J. Aust. Math. Soc. 92 (3) (2012), 313-334.

[GV] J. E. Galé y A. R. Villena, *Semisimple Banach algebras generated by compact groups of operators on a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. 325 (1) (2007), 353-358.

[GW1] J. E. Galé y A. Wawrzyńczyk, *Standard ideals in weighted algebras of Korenblyum and Wiener types*, Math. Scandinavica 108 (2011), 291-319.

[GW2] J. E. Galé y A. Wawrzyńczyk, *Standard ideals in convolution Sobolev algebras on the half-line*, Colloquium Math. 124 (2011), 23-34.

[GWh] J. E. Galé y M. C. White, *An analytic semigroup version of the Beurling-Helson theorem*, Math. Zeitschrift 225 (1997), 151-166.

[Gh] F. Ghahramani, *Compact homomorphisms of C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 458-461.

[Gre] F. P. Greenleaf, *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*, Van Nostrand Math. Studies 16, Van Nostrand, New York, 1969.

[Gu] D. Gurarie, *Symmetries and Laplacians*, Math. Studies 174, North-Holland, Amsterdam 1992.

[HP] E. Hille y R. S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, AMS Colloq. Pub. 31, Providence 1957.

[JN] A. Jensen y S. Nakamura, *L^p-mapping properties of functions of Schrödinger operators and their applications to scattering theory*, J. Math. Soc. Japan 47 (1995), 253-273.

[J1] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972).

[J2] B. E. Johnson, *Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 120 (1996), 455-474.

[K] J. P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Ka] I. Kaplansky, *Topological methods in valuation theory*, Duke Math. J. 14 (1947), 527-541.

[Ki] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[KN] M. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* I, II, Interscience, New York, 1969.

[KM] A. Kriegl y P. W. Michor, *The Convenient Setting of Global Analysis* Math. Surveys and Monographs 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[LeL] F. Le Lionnais y otros, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Eudeba (Temas), Buenos Aires 1976.

[LV] Yu. Lyubich and Vũ Quôc Phóng, *Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces*, Studia Math. 88 (1988), 37 – 42.

[MS] B. D. Martin y R. Sarhangi, Symmetry, Chemestry, and Escher's Tiles, en Internet.

[M] G. Mauceri, *The Weyl transform and bounded operators on* $L^p(\mathbb{R}^n)$, J. Funct. Anal. 39 (1980), 408–429.

[MuS] D. Müller y E. Stein, L^p *estimates for the wave equation on* H^n, Revista Mat. Iberoamericana 15 (1999), 293–334.

[P] N.V. Pedersen, *Matrix coefficients and a Weyl correspondence for nilpotent Lie groups*, Invent. Math. 118 (1994), no. 1, 1–36.

[Pe] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke Univ. Math. Series I, Durham, 1976.

[R] A. Requena, *Las matemáticas de la química*, Serv. Pub. de la FESPM, 2010.

[Ru] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Pub., Wiley & Sons, New York, 1967.

[Run] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Math. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[S] A. I. Shtern, *A characterization of amenability in the class of connected locally compact groups*, Russian Math. Surv. 49 (1994), 174-175.

[Si] A. M. Sinclair, *Continuous Semigroups in Banach Algebras*, Cambridge UP, Cambridge 1982.

[Sl] A. M. Slin'ko, *Complete metric Jordan algebras*, Mat. Zametki **47** no. 5, 100–105 (1990). English translation: Math. Notes 47, no. 5–6, 491–494 (1990).

[ST] P. R. Stinga y J. L. Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Comm. Partial Diff. Eq. 35 (2010), 2092–2122.

[SV] S. Strătilă y D. Voiculescu, *Representations of AF-algebras and of the group* $U(\infty)$, Lecture Notes Math. 486, Springer, Berlin, 1975.

[U] H. Upmeier, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^*-algebras*. North-Holland Mathematics Studies, 104. Notas de Matemàtica, 96, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1985.

[V1] Vũ Quôc Phóng, *Theorems of Katznelson-Tzafriri type for semigroups of operators*, J. Funct. Anal. 119 (1992), 74–84.

[V2] Vũ Quôc Phóng, *Semigroups with nonquasianalytic growth*, Studia Math. 104 (1993), 229–241.