ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA

TEORIAS ANALITICAS SOBRE EL MOVIMIENTO ORBITAL DE SATELITES ARTIFICIALES

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. ANTONIO ELIPE SANCHEZ

EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 30 DE MARZO DEL AÑO 2.000

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Ilmo. Sr. D. RAFAEL CID PALACIOS

ACADEMICO NUMERARIO

ZARAGOZA

2.000

Depósito legal: Z-696-2000

Imprime:

Sdad. Coop. De Artes Gráficas
Librería General
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza
imprentalg@efor.es

TEORIAS ANALITICAS SOBRE EL MOVIMIENTO

ORBITAL DE SATELITES ARTIFICIALES

POR EL

Ilmo. Sr. D. ANTONIO ELIPE SANCHEZ

Excelentísimo Señor Presidente,
Excelentísimos e Ilustrísimos Señores Académicos,
Señoras y Señores:

Al honor que me concede la Academia de Ciencias de Zaragoza por haberme elegido como Miembro suyo y permitiéndome subir a esta tribuna, debo corresponder con mi más sincera gratitud, y de manera especial a los Académicos que en mí pensaron para ocupar tan alta distinción. Espero no defraudar la confianza depositada y colaborar eficazmente en las tareas de esta ilustre institución.

Mi presencia hoy aquí, no hubiese sido posible si no hubiera tenido la inmensa fortuna de contar a lo largo de mi vida con excelentes maestros, algunos de ellos pertenecientes a esta Academia. La lista es lo suficientemente extensa como para mencionar aquí a todos, pero sí quiero recordar de modo especial a tres de ellos, cuyo ejemplo es para mí un continuo estímulo en mi carrera profesional. En primer lugar, Don Guillermo Elipe, mi padre y mi primer maestro hasta los 12 años, en una pequeña escuela unitaria; él supo inculcarme el valor del estudio y la constancia en el trabajo. Don Rafael Cid, ya en la licenciatura, me hizo la Mecánica Celeste lo suficientemente atractiva como para que realizase mi tesis doctoral en esta disciplina; el profesor Cid guió mis primeros pasos en la investigación y, posteriormente, sus acertados consejos no me han faltado a lo largo de mi vida profesional. Por último, Don André Deprit, *Doctor Honoris Causa* de esta Universidad de Zaragoza, quien a su genialidad une una capacidad excepcional de trabajo; el Dr. Deprit me contagió su entusiasmo por la *matemática computacional* o cómo meses de pesadas tareas de cálculo simbólico manual podían convertirse en un par de días de, también pesadas, tareas de programación.

Hoy en día, la investigación difícilmente puede entenderse fuera de un equipo. En mi caso, debo decir que también he sido especialmente afortunado, pues formo parte del Grupo de Mecánica Espacial, con cuyos miembros más antiguos, Alberto Abad, Sebastián Ferrer y Manuel Palacios, hemos abierto nuevas líneas de investigación, así como planificado y desarrollado proyectos de investigación. Por la dinámica de la vida académica y, sobre todo, por la dificultad de promoción profesional en esta Universidad, el Grupo ha ido perdiendo varios de sus componentes, que han encontrado una estabilidad profesional en otras universidades o Institutos de investigación. A todos mis colaboradores, tanto los que quedan como los que tuvieron que marchar, mi reconocimiento más sincero, pues han contribuido en gran manera a mi formación académica.

Tras la lectura de este discurso, y si sus señorías lo consideran oportuno, me espera llevar la medalla número 16 de esta Academia, que en el momento de su fundación portaba Don Adoración Ruiz-Tapiador y a quien sucedió Don Antonio Plans Sanz de Bremond, mi predecesor en este honor.

Don Antonio nació en Madrid en 1922, hijo de Don José María Plans y Freire, catedrático de Astronomía de la Universidad Central y uno de los miembros fundadores de esta Academia. Tras sus brillantes estudios en la Universidad de Madrid, don Antonio consigue la cátedra de Geometría y Topología en la Universidad de Zaragoza, donde ya desarrollaría toda su vida profesional hasta su fallecimiento en agosto de 1998. Sus primeras investigaciones fueron realizadas en Topología, a la sazón rama relativamente nueva en las Matemáticas. Posteriormente, centra sus investigaciones en los espacios de Hilbert, donde obtiene los resultados más relevantes de su extensa lista de publicaciones. Finalmente, también realiza investigaciones en espacios de Banach, donde abre nuevas líneas de investigación. A la gran cantidad de artículos de investigación y a la excelencia de su trabajo, los que, como yo, hemos tenido el privilegio de tenerlo como profesor, recordaremos siempre su buen hacer en clase y, sobre todo, su bondad, sencillez y gran humanidad.

1. La mecánica celeste

El tema central del presente discurso es el de las teorías analíticas en el problema de movimiento de un satélite artificial. Es éste un problema de la mecánica celeste, de astrodinámica, como se le llama ahora, y también de Matemática aplicada. Se trata de estudios recientes, pues la llamada era espacial nace con el lanzamiento del primer satélite artificial, el soviético Sputnik 1, en 1957, casualmente el mismo año en que vino al mundo quien les habla.

El tema elegido es una de mis principales líneas de investigación, iniciada en Zaragoza por el profesor Cid, casi desde el mismo momento de su incorporación a esta universidad, y continuada por él mismo junto con sus discípulos, miembros del antiguo Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos, hoy repartidos en Departamentos de Matemática Aplicada y de Astronomía por las distintas universidades españolas.

Se puede decir que el lanzamiento del primer satélite artificial supuso para la Mecánica celeste, algo así como salir de un estado de coma. La Mecánica celeste es la ciencia que estudia el movimiento de los objetos celestes, aunque se podría decir de un modo aproximado que trata de la dinámica originada por la Ley de gravitación universal, que si bien esto fue cierto en sus orígenes, dejó de serlo al descubrirse la influencia de otras fuerzas.

Uno de los mayores problemas científicos planteados consistía en poder describir el movimiento de los planetas y demás objetos celestes. Fue Newton quien descubre cómo tenía que ser la fuerza existente entre dos objetos, el Sol y un planeta, para que el movimiento originado concordase con las observaciones. Sus tres leyes de la Mecánica, enunciadas en los Principia, junto con su famosa Ley de Gravitación Universal constituyen una revolución en el mundo científico. Con ellas se pueden deducir las Leyes de Kepler, obtenidas a través de observaciones, de modo que el llamado problema de dos cuerpos quedaba totalmente resuelto. Kepler describe cómo se mueven los planetas, pero es Newton quien explica el origen de ese movimiento. Del sistema de ecuaciones diferenciales, seis ecuaciones de segundo orden, se deduce que el centro de masas de los dos cuerpos se mueve en movimiento rectilíneo y uniforme (seis integrales primeras), el momento angular es un vector fijo en el espacio (tres integrales), por lo que el movimiento siempre tiene lugar en un plano y además se verifica la llamada constante aerolar (las áreas barridas por el radio vector son proporcionales a los tiempos empleados en describirlas); la energía también se conserva a lo largo de la trayectoria (otra integral más) y por último, existe un vector constante (otras tres integrales) en la dirección del periastro, el llamado vector de Laplace, de modo que se puede deducir sin dificultad la ecuación de la trayectoria de cada uno de los cuerpos con respecto a su centro de masas (o de uno con respecto al otro), que resulta ser una cónica. De hecho, la totalidad de órbitas observadas eran elípticas. Únicamente ciertas estrellas dobles presentaban indicios de que su movimiento pudiera efectuarse en alguna de las restantes cónicas.

Así pues, el movimiento relativo de dos cuerpos (el planeta con respecto al Sol) se puede reducir a un sistema diferencial de tres ecuaciones de segundo orden. Bastan seis condiciones iniciales, posición y velocidad en un instante inicial por ejemplo, para poder conocer éstas en cualquier instante. Sin embargo, las coordenadas cartesianas no fueron las favoritas hasta el siglo XX, con la aplicación de métodos numéricos y de ordenadores, estando relegadas por otros conjuntos de variables que describían mucho más intuitivamente la geometría subyacente del problema. Uno de los sistemas de uso más frecuente ha sido el llamado conjunto de *elementos orbitales* o de Campbell. Dado un sistema cartesiano $OXYZ$ con origen en el cuerpo central, y puesto que la órbita se encuentra en un plano fijo que contiene al origen, la posición del plano del movimiento con respecto al sistema de referencia viene determinada por dos ángulos, la inclinación I entre el plano del movimiento y el plano OXY, y el ángulo del nodo, Ω, que forma el eje OX con una de las direcciones de la recta intersección del plano del movimiento con el plano OXY (nodo ascendente). El tamaño de la órbita está determinado por su semieje mayor a y el tipo de cónica por la excentricidad e; su orientación en su plano puede determinarse, por ejemplo, por el llamado argumento del periastro ω, que es el ángulo desde el nodo ascendente hasta la posición del periastro. Por último, nos falta dar un elemento dinámico, su posición en un cierto instante. Se suele tomar como época de referencia el instante de paso por el periastro T. Así pues, estos seis elementos

$$(a, e, I, \Omega, \omega, T),$$

que en el caso del problema de dos cuerpos son constantes, nos determinan la órbita (véase Fig. 1).

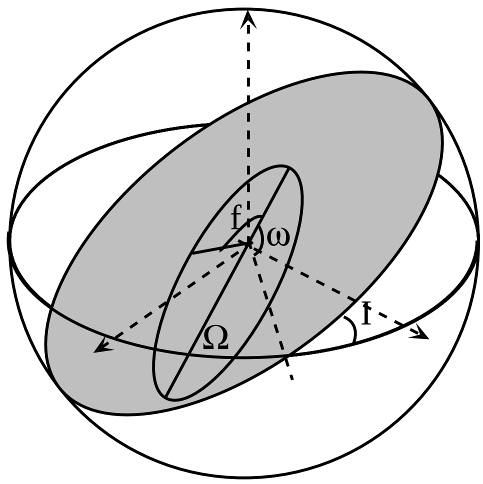

Figura 1.—Elementos orbitales $(a, e, I, \Omega, \omega, T)$ de un satélite artificial.

Sin embargo, no hace falta pensar mucho para darse uno cuenta de que el problema de dos cuerpos es puramente teórico, pues en primer lugar, los planetas no son esferas, ni su densidad es homogénea y, además, sobre un planeta, junto a la influencia gravitatoria del Sol, también actúa el campo gravitatorio de cada uno de los demás planetas. Prescindiendo de la no esfericidad y suponiendo la densidad homogénea de los planetas, estamos ante el llamado problema de n cuerpos, es decir, se trata de determinar el movimiento de un planeta sobre el que actúa gravitatoriamente el Sol y el resto de planetas. Este problema, junto con el de movimiento de la Luna han sido los problemas científico más importantes de los siglos XVIII, XIX y comienzos del XX. A ambos dedicaron sus esfuerzos los matemáticos más brillantes del momento, como el mismo Newton, Gauss, Euler, Lagrange, Laplace, Weierstrass, Hermite, Delaunay y Poincaré, entre otros. Aparte del indudable interés científico, se unían a éste los sustanciosos premios económicos que las distintas Academias Nacionales y las Coronas de los distintos países convocaban para la resolución de ellos. Ante este aparente desinterés de los Mecenas, conviene recordar que la resolución de estos problemas, es decir, el poseer unas efemérides precisas de los planetas y de la Luna, eran cuestión de seguridad nacional, pues este conocimiento permitía el determinar la longitud de un barco en sus viajes oceánicos, lo que en aquellos momentos era de importacia capital, puesto que una de las mayores fuentes de riqueza de un país se encontraba en el comercio con las colonias, saboteado frecuentemente por flotas de países enemigos.

Así, por ejemplo, en 1718, la reina Anne de Inglaterra convocó tres premios para la determinación de la longitud, que consistían en un primer premio de 20,000 libras para un método que determinase la longitud con una precisión de hasta medio grado de un círculo máximo; un segundo premio de 15,000 libras para un método con precisión de hasta dos tercios de grado y un tercero de 10,000 libras para una precisión de un grado. Recordemos que un grado de longitud sobre el ecuador tiene una longitud de 60 millas naúticas, es decir, unos 111 km, por lo que el error tolerado era grande para nuestra época, pero inalcanzable para entonces.

Otro premio famoso fue el convocado en 1889 por la Corona sueca con objeto de encontrar desarrollos asintóticos uniformemente convergentes para el problema de n cuerpos, y que tan brillantemente fue expuesto por el profesor Sesma en su Discurso de Ingreso en esta Academia.

Ahora bien, si resulta que el problema de dos cuerpos es una mala aproximación del problema de n cuerpos, ¿cuál es la razón de que se estudie con tanto detalle en los libros de texto? La respuesta es la esencia misma de la teoría de perturbaciones. El resto de planetas lo que hace es perturbar el movimiento que describiría el planeta de no existir éstos, es decir, una elipse, que recibe el nombre de *elipse perturbada.* Así pues, los seis elementos orbitales anteriormente descritos ahora ya no son constantes, sino que pasan a ser funciones del tiempo t, que habrá que determinar.

Toda la experiencia y métodos desarrollados en estos problemas pasaron a ser de gran utilidad en la teoría del satélite artificial, a la vez que hubo que desarrollar nuevos métodos y técnicas, pues el modelo de fuerzas que actúan sobre el satélite son distintas que en el problema de n cuerpos o en el de la Luna.

No vamos a comentar los distintos tipos de cohetes y lanzaderas que se necesitan para poner un satélite en órbita, pues entre otras cosas, se encuentran muy alejadas de la especialidad de quien les habla. Sin embargo, los pioneros en este campo, como Tsiolkovsky, Goddard y Oberth fueron personas con una enorme imaginación, a menudo inspirados en libros de ciencia ficción como los de Jules Verne. Además, a su imaginación añadieron lo mejor de su saber científico, calculando la potencia que tenían que alcanzar los cohetes para salir de la atmósfera terrestre, el tipo de combustible que había que emplear, así como ideas brillantes como la de diseñar cohetes de varias etapas, de modo que al consumirse el combustible de una etapa, el recinto que lo albergaba se desprendiese, con lo que la pérdida de masa daría lugar a una aceleración del cohete. Posteriormente, el desarrollo de los cohetes se vio impulsado durante la Segunda Guerra Mundial, principalmente por parte del bando alemán, quienes desarrollaron los primeros misiles balísticos en el famoso centro de Peenemunde bajo la dirección de Wernher von Braun, donde se construyeron las famosas V-2. Con la victoria aliada de la Guerra, von Braun y todo su equipo fueron llevados a los Estados Unidos de América, donde contribuyeron de forma decisiva a la carrera espacial americana. Por parte de la Unión Soviética, fueron también militares como Korolev, que habían construído misiles durante dicha guerra, quienes pasaron a desarrollar el programa espacial soviético, que consiguió el triunfo de poner en órbita el primer satélite.

2. Tipo de órbitas

Las órbitas de los objetos celestes naturales están determinadas por unas ciertas condiciones iniciales que la Naturaleza imprimió de modo caprichoso (aunque siguen ciertas pautas). Sin embargo, con los satélites artificiales se tiene la posibilidad de conseguir unas órbitas específicas, de modo que sean de utilidad para la misión para la que se ha diseñado el satélite. El conseguir una determinada órbita no es tarea simple, pues dependerá de múltiples factores como, entre otros, del lugar de lanzamiento, del tipo de cohete que lo ponga en órbita y de la cantidad de combustible que se esté dispuesto a consumir.

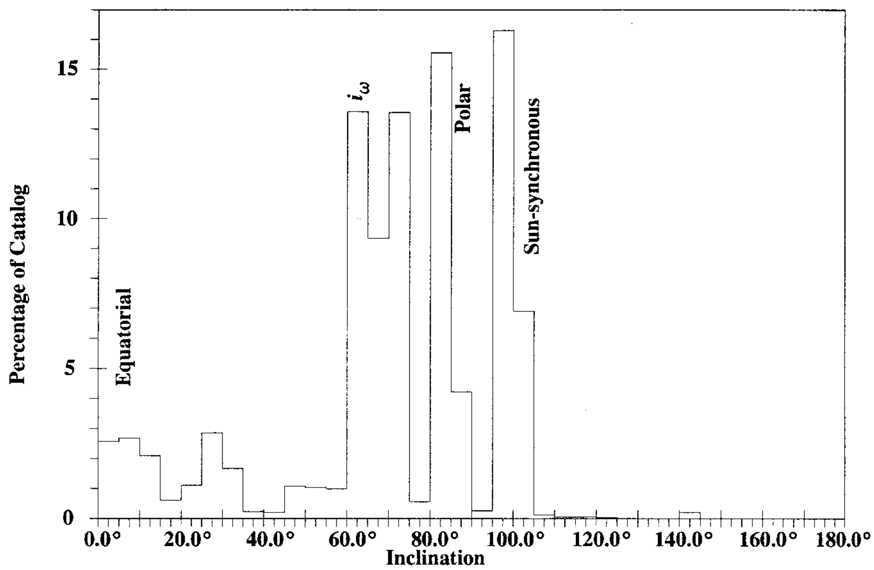

Figura 2.—Distribución de la inclinación de los satélites artificiales terrestres

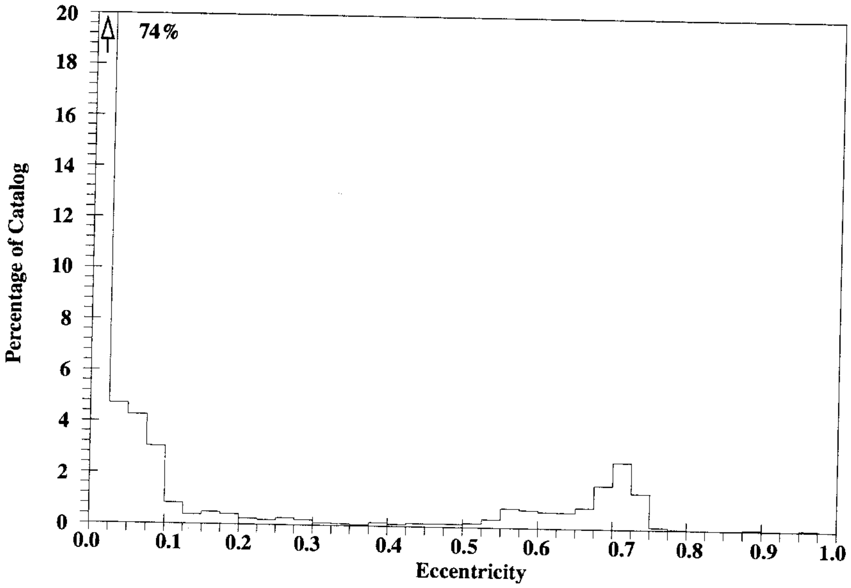

Figura 3.—Distribución de la excentricidad de los satélites artificiales terrestres

En las Figuras 2 y 3 presentamos la distribución por inclinación y excentricidad de los satélites artificiales terrestres catalogados por el Ejército del Aire de los EEUU. Como podemos apreciar, hay prácticamente de todas clases, aunque abunda más algún tipo de inclinación y de excentricidad, si bien la mayor parte son casi circulares.

La misión a que esté destinado el satélite va a determinar el tipo de órbita. De modo esquemático, podemos distinguir cuatro tipos de misiones: científicas, de aplicaciones, de comunicaciones y de navegación. Los satélites científicos llevan instrumentos a bordo con objeto de medir campos magnéticos u observar el universo en diferentes diferentes longitudes de onda del espectro. Los de comunicaciones se emplean para trasmitir llamadas telefónicas, señales de televisión, de radio, e incluso para rápidas conexiones a Internet. Los de aplicaciones son satélites de observación de la Tierra, como por ejemplo, satélites meteorológicos, oceanográficos, de reconocimiento de determinadas zonas terrestres, con fines civiles o militares. Por último, los de navegación, sirven para localizar puntos de la superficie terrestre.

Para los satélites de comunicaciones o meteorológicos resultará especialmente atractiva la posibilidad de que el satélite siempre sea visible desde un cierto lugar, es decir, que su periodo orbital coincida con el periodo de rotación de la Tierra, un día sidéreo. En virtud de la tercera Ley de Kepler, el semieje mayor de esa órbita será de 42164.5 km. A estos satélites se les denomina *Geosíncronos* (GEO). Pero si realmente lo que queremos es que el satélite esté siempre en el zenit de un mismo punto, este punto ha de encontrarse sobre el Ecuador terrestre, la órbita ha de ser circular y la inclinación nula. Éstos son los llamados *Geoestacionarios*.

Otros satélites necesitan una continua iluminación de sus paneles solares, pues es el Sol su fuente de energía. Por eso interesa que la línea de los nodos se encuentre fija con respecto al Sol; a éstos se les llama *Heliosíncronos*. Otras misiones de reconocimiento de ciertas áreas de la superficie terrestre, necesitan que los satélites vuelvan a pasar de modo periódico por esas zonas, es decir, que repitan su traza periódicamente.

Como vamos a ver a continuación, para conseguir una cierta inclinación orbital, la base de lanzamiento debe encontrarse en una determinada latitud. Algunos países, no disponen de centros de lanzamiento en latitudes próximas al Ecuador, por lo que forzosamente tienen que colocar sus satélites con una gran inclinación, pero si se emplean para comunicaciones o como reconocimiento, interesa que pasen sobre unas determinadas zonas con una cierta periodicidad y además, a la misma altitud, a pesar de que no sean circulares. Esto se consigue *congelando* algunos elementos orbitales, como la excentricidad, y sobre todo, el argumento del perigeo; de este modo, pueden sobrepasar una zona a altitudes muy bajas, y siempre con la misma altitud. A esta clase pertenenecen los llamados satélites *Molniya*, con un periodo de 12 horas, una excentricidad de 0.7 y una inclinación de $63\overset{\circ}{.}4$, la llamada inclinación crítica, que describiremos más adelante.

Hay otros satélites que forman parte de un conjunto de satélites, que reciben el nombre de constelaciones, como los conocidos GPS (Global Positioning Satellites), tan difundido hoy en día, que lo mismo se emplean en la Vuelta ciclista para dar la diferencia de tiempos entre el pelotón y los ciclistas escapados, como nos informa de los minutos que va a tardar en llegar el autobús urbano a la parada. Cada uno de los satélites de estas constelaciones posee la misma órbita que el resto, pero con el ángulo del nodo desplazado, de modo que desde cualquier lugar siempre son visibles varios de éstos. Los GPS son una constelación de 24 satélites, con órbitas circulares de periodo 12 horas e inclinación $i = 55°$. En total, hay 6 órbitas distintas (el ángulo del nodo de una órbita está desfasado 60° con respecto a la anterior) y 4 satélites en cada órbita.

Como vemos, hay una gran variedad de órbitas. La situación geográfica de la base de lanzamiento juega un papel fundamental, puesto que para conseguir una órbita directamente desde la base de lanzamiento, la latitud de ésta debe ser menor o igual que la inclinación de la órbita deseada. Ese hecho es una de las causas por la que la mayor parte de los centros espaciales de lanzamiento se encuentran en las proximidades del Ecuador. Por otra parte, el conseguir un determinado ángulo del nodo requiere por un lado que el lanzamiento se efectúe con un cierto azimut y en un preciso instante (en general será un intervalo de tiempo). A este intervalo de tiempo en que puede efectuarse el lanzamiento de un satélite en una determinada órbita, manteniendo los parámetros deseados para la misión, se le llama *ventana de lanzamiento*. Si se lanza el satélite desde lugares que no reúnan estas características, forzosamente se necesitarán *maniobras* que permitan conseguir la inclinación y ángulo del nodo diseñados. A este respecto, hay dos tipos fundamentales que se pueden realizar, las coplanarias y las no coplanarias.

Las maniobras coplanarias, como su nombre indica, no cambian el plano orbital, sino que permiten cambiar el tamaño y la forma (semieje mayor y excentricidad) así como la línea de los ápsides. Para conseguir estos cambios en la órbita hay que modificar la energía que lleva, lo que se suele hacer variando la velocidad con el encendido de cohetes en los momentos adecuados de la órbita para conseguir el efecto deseado. Este incremento de velocidad necesario para obtener la órbita deseada, se llama *velocidad característica* (Δv), y su minimización es un problema fundamental en Astrodinámica, pues supone un ahorro del combustible que tiene que ir a bordo del satélite. El problema de pasar de una órbita inicial a otra final a través de una órbita de trasferencia no tiene solución única.

La trasferencia entre órbitas circulares coplanarias fue el primer caso estudiado y se fundamenta en los trabajos de Walter Hohmann, quien en 1925 probó que la trasferencia con menor enegía entre órbitas, y por tanto más eficiente, podría conseguirse empleando dos impulsos tangenciales. Aunque el trabajo inicial consideraba únicamente órbitas circulares, puede aplicarse a órbitas elípticas sin demasiada dificultad. Para ello, se realiza un primer impulso en el perigeo, con lo que se consigue una órbita elíptica de trasferencia con semieje mucho más grande. En el perigeo de esta órbita de trasferencia se efectúa otro impulso que nos proporcionará la órbita final deseada, que puede ser circular o elíptica. Existen numerosas variantes de este método de trasferencia, como es la llamada trasferencia bi-elíptica, que emplea dos trasferencias de Hohmann. En algunos casos, suele ahorrar combustible, pero en otros, el tiempo necesario para la conseguir la órbita final es demasiado elevado. También suelen hacerse trasferencias con múltiples impulsos no tangenciales, dependiendo de si interesa sacrificar combustible en aras de una ganancia temporal.

Las trasferencias no coplanarias permiten modificar otros dos elementos orbitales, la inclinación y el ángulo del nodo. Para modificar la inclinación, debemos efectuar la maniobra en la línea de los nodos, es decir, cuando el satélite cruce el plano del ecuador, por lo que solamente hay dos puntos en los que la maniobra puede realizarse. El impulso ha de hacerse en la dirección normal a la órbita. Si queremos modificar el ángulo del nodo, necesitaremos otra maniobra no coplanaria que se efectuará en uno de los dos puntos comunes de ambas órbitas, inicial y final. Por último, se pueden realizar trasferencias que modifiquen simultáneamente la inclinación y el ángulo del nodo. En general, todas estas maniobras no coplanarias requieren mucha energía. Sin embargo, en algunas misiones son estrictamente necesarias; así, para conseguir una órbita geoestacionaria que, recordemos, tenía inclinación nula, se suele emplear una maniobra de dos impulsos, uno de los cuales incluye el cambio de plano orbital al ecuatorial.

Un problema añadido al de las maniobras consiste en saber en qué instante hay que realizarlas con objeto de que el satélite se encuentre en una órbita predeterminada en una posición y en un instante de tiempo fijados de antemano. Esto se conoce como *Rendez-vous* o encuentro espacial. Podemos poner varios ejemplos en los que se realizan encuentros, así, en ocasiones el trasbordador espacial tiene que capturar un satélite en órbita, con objeto de realizar reparaciones, o cuando el trasbordador se acopla a la estación espacial MIR, o cuando se colocan los distintos satélites de una constelación; en la misma órbita hay varios de ellos, aunque cada uno ocupa una posición relativa –predeterminada– con respecto a los demás. En los casos de encuentros entre satélites, además, las velocidades relativas entre ellos deben de ser muy pequeñas. No ocurrirá lo mismo en misiones de interceptación, es decir, cuando un satélite se envía a chocar con otro objeto potencialmente peligroso para ciertos intereses.

En estos problemas de encuentros espaciales, juega un papel esencial el llamado Teorema de Lambert, que dice que *el tiempo transcurrido entre dos posiciones de una misma órbita, depende del semieje mayor, de la suma de las distancias en los puntos inicial y final, y de la longitud de la cuerda que une esos puntos.* De hecho, al problema de la determinación de una órbita teniendo especificado el tiempo de transferencia entre dos puntos dados, se le conoce como Problema de Lambert.

3. Perturbaciones

Tradicionalmente, la Mecánica celeste se refiere al problema gravitacional de n cuerpos, o sus variantes, esto es, a problemas que pueden estudiarse con el formalismo de la Mecánica Hamiltoniana. Por otro lado, el principal propósito de de la Mecánica celeste es explicar y predecir el movimiento de cada objeto real en el espacio exterior, independientemente del tipo de fuerzas que origina su órbita. En líneas generales, ambas definiciones eran equivalentes, puesto que el movimiento de los cuerpos celestes se explicaba con gran precisión mediante las leyes conservativas de la mecánica celeste.

Sin embargo, todo cambió el 4 de octubre de 1957 con la puesta en órbita del SPUTNIK 1; a los cuerpos naturales en el espacio exterior había que añadir los artificiales. Junto a las fuerzas clásicas, se hizo preciso modelar otras perturbaciones no gravitacionales, que describiremos más adelante.

La principal fuerza que actúa sobre un satélite terrestre es la atracción gravitacional. Ahora bien, la distribución de masas de la Tierra no posee simetría esférica, lo que origina que al potencial de Newton (problema de dos cuerpos) haya que añadirle otros términos adicionales.

A efectos gravitacionales, la Tierra se considera un sólido rígido. El potencial creado por la Tierra sobre un punto exterior a ella estará determinado por el valor de una integral de volumen, que desafortunadamente no puede expresarse en forma cerrada, sino que únicamente pueden darse en forma de desarrollos asintóticos. Tradicionalmente, el potencial de elipsoides se ha venido representando como desarrollos de polinomios de Legendre, y es ésta la que también se ha convertido en la más popular para representar el potencial terrestre.

La expresión más habitual de estas series para el geopotencial es

$$U = \frac{\mathcal{G}\, M}{r} \left[1 - \sum_{n\geq 2} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n \left\{ J_n P_n(\cos\theta) + \sum_{1\leq \ell \leq n} J_n^\ell P_n^\ell(\cos\theta) \cos\ell(\lambda - \lambda_n^\ell) \right\} \right], \qquad (1)$$

donde $\mathcal{G}$ es la constante gausiana, M la masa de la Tierra, $R_\oplus$ el radio ecuatorial medio terrestre; r, θ y λ son la distancia, latitud y longitud geocéntricas del satélite. P_n y P_n^ℓ son, respectivamente, los polinomios y los polinomios asociados de Legendre; los coeficientes J_n reciben el nombre armónicos zonales y los J_n^ℓ armónicos teserales. Los armónicos, dan idea de la forma y distribución de masas de la Tierra. De ellos, el de magnitud mayor es $J_2 = 10^{-3}$, mientras que los siguientes son del orden de 10^{-6} ó inferiores.

Si el sólido tiene simetría de revolución, los términos dependientes de la longitud λ desaparecerían, y nos quedaríamos únicamente con los coeficientes J_n, que representan bandas de latitud, de ahí el nombre de zonales. El zonal J_2 corresponde al ensanchamiento que posee la Tierra alrededor del ecuador terrestre. Cuando en la fórmula anterior $\ell = n$, los coeficientes $J_{\ell\ell}$ modelan bandas de longitud; la Tierra queda dividida en 2ℓ sectores y por eso, a estos armónicos se les llama *sectoriales.* El resto de armónicos ($\ell \neq n$) reciben el nombre de *teserales*, pues representan las baldosas de una Tierra cubierta por un mosaico.

El término predominante en el potencial terrestre es el de Kepler, es decir, como si toda la masa se encontrase en el centro de la Tierra; los restantes términos son cada vez más pequeños.

Al problema de movimiento de un satélite sujeto a un potencial que considera únicamente los armónicos zonales, se le conoce como *Problema zonal*, y cuando se prescinde de todos los zonales, excepto de J_2, recibe el nombre *problema principal del satélite artificial*, o en inglés, *main problem*, pues resulta una simplificación que representa con cierto grado de aproximación el movimiento del satélite. El zonal J_2 corresponde al achatamiento de la Tierra en los polos, por ello, el *problema principal* consiste en determinar el movimiento de un satélite atraído por un planeta cuya forma es un elipsoide de revolución achatado.

Si linealizamos las ecuaciones del movimiento correspondientes al problema principal, podemos ver que de todos los elementos orbitales, únicamente el ángulo del nodo y del periastro tienen movimiento secular, mientras que los demás tienen variaciones periódicas. El ángulo del nodo, para órbitas directas tiene movimiento retrógrado. Por su parte, la variación del argumento del periastro viene dada por la fórmula

$$\dot{\omega} = \frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{4p^2}(4 - 5\sin^2 I). \tag{2}$$

De ésta, únicamente nos fijaremos en el último factor, que se anula cuando la inclinación de la órbita es $I_c = 63^\circ\!.43$ (ó $116^\circ\!.57$), que recibe el nombre de *inclinación crítica*. Así pues, para esta inclinación, el periastro permanece estacionario, mientras que la línea de los ápsides avanza o retrocede según que la inclinación orbital sea menor o mayor, respectivamente, que la inclinación crítica.

El valor de estos armónicos, en algunos casos se ha obtenido directamente mediante medidas gravimétricas, mientras que en la mayor parte, se han determinado a posteriori, tras el análisis de la órbita de satélites geodésicos. Es decir, el problema inverso consiste en determinar el campo de fuerzas que producen una cierta órbita que se obtiene mediante observaciones. El problema es complicado, pues por una parte, el problema no es único al haber varios campos de fuerzas que pueden producir la misma órbita y, por otro lado, la determinación de los coeficientes del desarrollo anterior, especialmente para los de orden alto, a menudo presentan dependencia de la órbita. Éste es un problema fundamental de la Geodesia Espacial y cada pocos años aparecen publicados distintos modelos del potencial terrestre con los coeficientes mejorados respecto a los anteriores.

Junto con el achatamiento de la Tierra, es la atmósfera quien más fuertemente influye en el movimiento de satélites próximos a la Tierra. De hecho, en las primeras órbitas de la vida de un satélite, el *frenaje atmosférico* puede ser incluso más importante que el achatamiento terrestre. Sin embargo, para satélites altos, como por ejemplo los geosíncronos, este efecto puede despreciarse, aunque hay que tener en cuenta otras perturbaciones, como la atracción del Sol y de la Luna, lo que se conoce como atracción de un tercer cuerpo.

El frenaje atmosférico fue uno de los efectos que primero y más rápidamente se investigaron, analizando los resultados del seguimiento del SPUTNIK 1. La atmósfera terrestre se extiende mucho más de lo que se pensaba hace 50 años y, debido a la gran velocidad relativa del satélite con respecto a las partículas de gas, se produce un efecto de frenado aerodinámico, incluso en niveles de muy baja densidad. El frenaje es una perturbación no conservativa, pues depende de la velocidad. Habitualmente se suele evaluar mediante la ecuación

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A,$$

siendo C_D el coeficiente de frenaje, ρ la densidad, V la velocidad y A la superficie de la sección del satélite normal al vector velocidad. Aunque esta fórmula pueda parecer simple, la realidad es todo lo contrario, pues la densidad de la atmósfera depende de la posición, la sección normal varía con la altitud del satélite y cambia continuamente en el caso de satélites no esféricos. Se han elaborado diversos modelos de atmósfera, que también se siguen perfeccionando.

A partir de las simples ecuaciones linealizadas, se puede ver que el frenaje atmosférico tiene un efecto secular sobre el semieje mayor de la órbita, que disminuye, y sobre la excentricidad, que tiende a cero; así pues, la órbita tiende a hacerse circular y con el semieje mayor cada vez más corto, hasta que el satélite se destruye en la atmósfera o cae sobre la Tierra.

El análisis de las perturbaciones debidas a un tercer cuerpo sobre la órbita de un satélite es difícil, debido a que los periodos suelen ser muy largos. Sin embargo, a través de las ecuaciones linealizadas, se puede ver que el semieje mayor no se encuentra afectado por esta perturbación, no así los demás, que sufren cambios periódicos y, además, el nodo y perigeo también tienen variaciones seculares, lo que, en definitiva, conlleva una precesión del plano orbital alrededor de un polo medio, entre el polo de la Tierra y el de la eclíptica.

En algunos satélites, por ejemplo los que tienen una excentricidad elevada, hay que combinar ambas perturbaciones, el frenaje (cuando se encuentran a baja altitud) y la atracción de un tercer cuerpo (cuando su altitud es elevada). Además, algunas misiones se diseñan para sacar provecho de ambos factores; así, el efecto de tipo periódico sobre la excentricidad debido al tercer cuerpo, se emplea para modificar la altitud del perigeo, lo que influye poderosamente sobre la vida útil del satélite, que se puede alargar o acortar.

Otra fuerza que también actúa sobre los satélites, especialmente los muy elevados y con gran superficie y poca masa es la *presión de la radiación solar*. Cada fotón posee un cierto momento, que se cambiará cuando choque con el satélite. Parte de la energía se absorberá (en forma de calor) y parte se reflejará, lo que origina una fuerza adicional. Para el estudio de la presión de radiación solar es necesario un preciso modelado de la radiación solar, así como de sus ciclos y variaciones. Además, en su movimiento orbital, el satélite se encontrará en ocasiones dentro del cono de sombra creado por la Tierra, es decir, estará eclipsado, con lo que se producirá una interrupción de la presión de radiación. Podemos resumir sus efectos reseñando que para la mayor parte de los satélites sus efectos son muy pequeños, pero que para aquellos con gran superficie y poca masa, los globos Echo, de unos 40 m de radio, sí que influye poderosamente, afectando seriamente la vida útil de los mismos.

Finalmente, señalemos otra perturbación a las ecuaciones newtonianas del movimiento, debida a la relatividad general. La principal corrección consiste en añadir un término de aceleración al movimiento kepleriano, que en la mayor parte de los estudios no se tiene en cuenta. Dependiendo del tipo de satélites, se tienen en consideración otras perturbaciones, pero de magnitud muy pequeña, que solamente en determinados casos puede ser relevante.

4. Teorías analíticas

Una vez establecidas las diferentes fuerzas que actúan sobre los satélites, la siguiente cuestión es predecir dónde se va a encontrar el satélite en un instante de tiempo determinado. Es decir, hay que integrar las ecuaciones del movimiento. Éstas, salvo en contadísims ocasiones, van a formar un sistema diferencial no integrable y no va a quedar más remedio que integrarlas de modo aproximado, bien sea numéricamente, bien analíticamente, bien mediante una combinación de ambas técnicas, lo que se ha dado en llamar métodos semi-analíticos, o semi-numéricos. Respecto a los métodos numéricos, podemos remitir a la magistral exposición de su historia y aplicabilidad que el profesor Calvo Pinilla realizó en su Discurso de Ingreso en esta Institución.

Únicamente vamos a considerar aquí los métodos analíticos, a los que la investigación desarrollada por nuestro Grupo, comenzada con el profesor Cid, ha contribuido. Los métodos analíticos están basados en desarrollos asintóticos en torno a un pequeño parámetro ε. Esta representación mediante series es puramente formal, pues como ya probó Poincaré en su famosa obra *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, en general no son uniformemente convergentes, pero sin embargo, resultan muy útiles para desarrollar soluciones aproximadas a lo largo de un intervalo de tiempo, supuesto que ε es suficientemente pequeño. Lógicamente, la solución aproximada obtenida será tanto más próxima a la solución exacta cuantos más términos tomemos en los desarrollos. Sin embargo, la complejidad de estos desarrollos, hace que el orden (es decir, la potencia mayor de ε que aparece en los desarrollos) se vea limitado a un número bajo, casi siempre el segundo orden, aunque también se han desarrollado técnicas para conseguir órdenes más elevados.

Genéricamente, podemos decir que los métodos analíticos son precisos y de fácil evaluación. Por su parte, los numéricos son más precisos, pero más costosos de evaluar y son válidos para un intervalo de tiempo menor. Los métodos analíticos suelen ser mucho más complicados de desarrollar, aunque a menudo, ofrecen una mejor compresión del comportamiento global y de la influencia de las distintas fuerzas.

En palabras del Dr. Duncombe, la "culpa" de las teorías analíticas se debe a la Luna, pues de todos los astros visibles a simple vista en el cielo, la Luna es el que más dificultades ha presentado a los astrónomos teóricos y constructores de efemérides. En efecto, gran parte de los resultados de Newton en los *Principia* se deben al estudio del movimiento de la Luna, al que también dedicaron sus esfuerzos científicos de la talla de Clairaut, d'Alembert, Euler, Adams y Laplace, que llegaron a obtener una discrepancia de 6" entre la predicción y las observaciones. Para ello, tuvieron que diseñar métodos muy conocidos hoy en día, como el de *variación de parámetros*, ideado por Euler y desarrollado por Lagrange. Sin embargo, esa precisión no era suficiente para los propósitos de navegación, por lo que se siguió avanzando en el desarrollo de nuevas teorías. Así, podemos destacar los trabajos de Hansen, Newcomb y sobre todo, de Delaunay, quien desarrolló la teoría algebraica de la Luna más completa de su época, para lo que empleó 17 años hasta que publicó su obra *La théorie du mouvement de la lune*. Sin embargo, todavía no era lo suficientemente precisa, a pesar de que predecía el movimiento de la luna con un error de un radio lunar a lo largo de 20 años. Esta teoría lunar fue el banco de pruebas de los primeros procesadores algebraicos simbólicos (SAP) a finales de los años 60, tal como veremos. En definitiva, las técnicas generales de perturbaciones que iban a emplearse en la teoría del satélite artificial serían, en sus comienzos, las empleadas en la Teoría de la Luna.

Desde el momento en que comenzó la era espacial empezaron a aparecer las primeras teorías analíticas. Estos trabajos pioneros se pueden encontrar en el número de noviembre de 1959 de la revista *Astronomical Journal* (*A. J.* **64**). Aquí encontramos tres trabajos de Kozai, Brouwer y Garfinkel, respectivamente, con tres teorías analíticas diferentes.

Kozai considera los cuatro primeros armónicos del desarrollo del potencial terrestre, y supone que el segundo harmónico es de primer orden, mientras que los tercero y cuarto son de segundo orden. En su artículo, mediante el método de variación de las constantes desarrollado por Lagrange proporciona las perturbaciones de los seis elementos orbitales para un satélite próximo a la Tierra, a pesar de que no considera el frenaje atmosférico. Fue ésta una de las primeras teorías elaboradas y por ello, gran parte de las elecciones que hizo, como los sistemas de referencia, siguen empleándose hoy en día, a pesar de que esas elecciones introducen singularidades.

Por su parte, Brouwer, emplea el formalismo hamiltoniano y variables canónicas (las mismas que Delaunay introdujo para su teoría lunar). Aquí define el *problema principal* de la teoría del satélite artificial, es decir, cuando considera únicamente el segundo armónico J_2, y emplea como método de perturbaciones el que él atribuye a von Zeipel, aunque ese método fue desarrollado por Poincaré (*la nouvelle méthode*) y aplicado por von Zeipel al movimiento de pequeños planetas. En su artículo, Brouwer obtiene una solución de primer orden en forma cerrada mediante una descomposición de las perturbaciones en términos de corto periodo, que contienen la anomalía media, y los de largo periodo, que contienen el argumento del perigeo. Para los términos seculares obtiene una solución de segundo orden. Resulta curioso en este artículo la nota añadida en las pruebas de imprenta. En su comentario, Brouwer se queja de la falta de uniformidad en la representación del potencial terrestre, pues a partir del libro de Tisserand, se han venido empleando diversas expresiones para un problema que en principio era teórico o bien solamente aplicado a la rotación terrestre. En particular, se lamenta de la notación que él introdujo en 1946 y añade que, de haber previsto el interés creciente en esta materia y la confusión a que él contribuyó, hubiera adoptado la formulación mucho más clara de Vinti, que es la dada en la fórmula (1).

Garfinkel da otro tratamiento diferente al problema del satélite. También considera el formulismo hamiltoniano, pero está interesado en encontrar un hamiltoniano que, si bien no coincide con el del satélite artificial, sí que se le acerca mucho y además posee una serie de ventajas, como es que sea separable. Esto es lo que se llama un *intermediario*. El intermediario que él encuentra es zonal, pues contiene términos zonales a través del argumento de latitud, y obtiene su separabilidad a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Volviendo de nuevo al artículo de Brouwer, dice que él y Garfinkel se han puesto en contacto y discutido sobre el problema, pero que han decidido que lo mejor es proceder de maneras separadas. ¿Por qué?. La respuesta es que los cálculos que hay que hacer son muy largos, con muchas posibilidades de introducir errores, y que el disponer de dos teorías diferentes, permitirá el contrastarlas y descubrir, en su caso, los posibles errores introducidos. Esta posibilidad de cometer errores, es algo que hay que tener muy en cuenta a la hora de elaborar una teoría analítica. Con los procesadores algebraicos, se puede llegar a órdenes relativamente altos, con lo que aparecen miles de términos y resulta materialmente imposible el comprobar uno a uno cada sumando o factor, por lo que se hace necesario el introducir a lo largo de la elaboración del resultado final una serie de controles, como puede ser el que se verifique la constante de la energía, o ciertas ecuaciones en derivadas parciales. De este modo, a pesar de ralentizar el proceso de generación de la toería, tenemos la certeza de que los resultados son correctos.

La solución ofrecida por Brouwer para el problema principal del satélite artificial, resultó ser la que tuvo mayor éxito entre los ingenieros aeroespaciales, pues ofrecía una solución válida para bastante tiempo, era fácil de evaluar y relativamente próxima a la solución obtenida numéricamente, aunque con muchísimo mayor esfuerzo de cálculo. El método que utilizó, (el de Poincaré) consiste esencialmente en construir unas transformaciones canónicas, que proceden de una cierta función generatriz (que a su vez es un desarrollo en serie de potencias del pequeño parámetro), de modo que el nuevo hamiltoniano contenga únicamente momentos canónicos, es decir, que todas las coordenadas canónicas hayan sido eliminadas. Sin embargo, este método presenta varios puntos débiles. Por un lado, la dificultad en resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen en cada orden de aproximación. Si la aproximación es solamente de primer orden, tal dificultad no existe, pero resulta evidente cuando se quiere llegar a un segundo orden. Otro gran inconveniente es que, por construcción, la función generatriz viene dada en variables *mixtas*, es decir, depende de las coordenadas antiguas y de los momentos nuevos; aquí, de nuevo, un primer orden resulta elemental, pero en órdenes más elevados, hay que resolver unas ecuaciones implícitas, con objeto de obtener tanto la tranformación directa como la inversa, que nos proporcionará la solución en las variables antiguas.

Estos inconvenientes, junto con una falta de método sistemático que lo hiciera fácilmente programable con un procesador algebraico, han hecho que este método se fuera abandonando en favor de otros métodos nuevos —los métodos basados en series de Lie— más idóneos para su tratamiento algebraico. No obstante, resulta paradójico que uno de los inventores de estos métodos de Lie, el profesor Deprit, haya retomado junto a su hijo Etienne Deprit el método de Poincaré, formulando en un nuevo contexto, las *skew series* y *skew transformations* (¿transformaciones oblicuas?). De este modo, tal como prueban en un brillante artículo aparecido en uno de los últimos números de la revista *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, proporcionan un algoritmo para el método de Poincaré, y además obienen de modo simbólico la solución de ecuaciones implícitas mediante inversión de series oblicuas. Con esta formulación, estos autores concluyen que el renovado *méthode nouvelle* es tan bueno como el método de transformaciones de Lie, e incluso mejor en algunos casos.

El sucesor del método de Poincaré, es el llamado de transformaciones de Lie, aunque el famoso matemático sueco poco tuviese que ver con su desarrollo. Hay diversas variantes de este método, de modo que estrictamente hablando, no puede decirse que sea un método único, sino varios que surgieron a finales de los 60. El primero fue dado por Hori y un poco después apareció el de Deprit. Por las mismas épocas se formularon otros similares, como el de Garrido. Empero, a nuestro juicio, es el de Deprit el más rigurosamente formulado, válido para sistemas no autónomos, a la par que da el algoritmo para su construcción hasta cualquier orden, el *triángulo de Lie*. La aparición de las transformaciones de Lie supuso un importante hito, no solo en Mecánica celeste, sino en la Teoría de Perturbaciones, puesto que se ha aplicado prácticamente a todas las ramas de la Mecánica no lineal.

Una transformación de Lie se puede definir como una tranformación canónica de contacto del tipo

$$\varphi \,:\, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Y}; \varepsilon) \longmapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}),$$

tal que $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y};\varepsilon)$ y $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y};\varepsilon)$ verifican

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\varepsilon}=\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\boldsymbol{X}},\qquad\frac{d\boldsymbol{X}}{d\varepsilon}=-\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\boldsymbol{x}},$$

con condiciones iniciales $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y};0)=\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y};0)=\boldsymbol{Y}$.

La función $\mathcal{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X})$ es el generador de la transformación, que en las ecuaciones anteriores juega el papel de un hamiltoniano, mientras que el pequeño parámetro hace de variable temporal. Las condiciones iniciales, nos aseguran que ambas variables, nuevas y viejas coinciden para $\varepsilon=0$. Además, como la función generatriz depende únicamente de las variables nuevas o de las viejas, la transformación viene dada explícitamente.

El método de la transformada de Lie consiste en que dado un hamiltoniano desarrollado en serie de potencias de un pequeño parámetro ε,

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}\,;\,\varepsilon)=\sum_{n\geq0}\frac{\varepsilon^n}{n!}\mathcal{H}_{n,0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}),\tag{3}$$

hay que encontrar una transformación de Lie de función generatriz

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}\,;\,\varepsilon)=\sum_{n\geq0}\frac{\varepsilon^n}{n!}\mathcal{W}_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}),\tag{4}$$

de modo que el hamiltoniano transformado $\mathcal{K}$, que también será una serie de potencias de ε,

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y}\,;\,\varepsilon)=\sum_{n\geq0}\frac{\varepsilon^n}{n!}\mathcal{K}_{n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y}),\tag{5}$$

cumpla unos ciertos requisitos.

Deprit proporciona el método para ir construyendo la transformación término a término mediante la siguiente relación de recurrencia

$$\mathcal{H}_{i,j}=\mathcal{H}_{i+1,j-1}+\sum_{0\leq k\leq i}\binom{i}{k}(\mathcal{H}_{k,j-1}\,;\,\mathcal{W}_{i+1-k}),\quad\text{con}\quad i\geq0,\,j\geq1,$$

y siendo $(-\,;\,-)$ el paréntesis de Poisson, también llamado derivada de Lie. De modo esquemático, denotando $\mathcal{K}_n=\mathcal{H}_{0,n}$, el proceso recurrente puede representarse mediante lo que Deprit llamó el *triángulo de Lie*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathcal{H}_{0,0} & & & \\
 & & \swarrow & & & & \\
 & & \mathcal{H}_{1,0} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{0,1} & & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & \mathcal{H}_{2,0} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{1,1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{0,2} & \\
\swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
\mathcal{H}_{3,0} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{2,1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{1,2} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{0,3} \\
\swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow
\end{array}$$

Para el cálculo de cada término, se necesitan los anteriores en su fila, así como los elementos por encima de la diagonal. Por ejemplo,

$$\mathcal{H}_{2,1} = \mathcal{H}_{3,0} + (\mathcal{H}_{2,0}\,;\,\mathcal{W}_1) + 2(\mathcal{H}_{1,0}\,;\,\mathcal{W}_2) + (\mathcal{H}_{0,0}\,;\,\mathcal{W}_3).$$

Pero se necesitan también los distintos sumandos de la función generatriz. Ésta se construye también término a término a partir de los últimos elementos de cada fila, de modo que

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{H}_{0,n} = (\mathcal{H}_{0,0}\,;\,\mathcal{W}_n) + \tilde{\mathcal{H}}_{0,n},$$

donde $\tilde{\mathcal{H}}_{0,n}$ contiene todos los términos anteriores del triángulo de Lie.

Como podemos ver, hay dos formas diferentes de abordar el problema, por una parte, podemos suponer que la función generatriz es conocida y entonces tenemos que determinar el nuevo hamiltoniano $\mathcal{K}$ mediante la ecuación anterior, o, por el contrario, podemos suponer dado el nuevo hamiltoniano y tendremos que resolver la ecuación en derivadas parciales anterior para determinar la función generatriz $\mathcal{W}$. Habitualmente, es este último el problema con que nos encontramos, pues el nuevo hamiltoniano se suele elegir de modo que cumpla algunas propiedades.

El criterio más frecuente para elegir el nuevo hamiltoniano, era el seguido por Brouwer, esto es, que la transformación eliminase la anomalía media, una variable angular rápida; de este modo se consigue reducir en una unidad el número de grados de libertad. Como éste era el criterio seguido por Delaunay en su teoría lunar, se le llamó a este algoritmo *normalización de Delaunay*.

Sin embargo, en 1981, Deprit volvió a revolucionar la teoría del satélite artificial con su *eliminación de la paralaje*, que no consiste en eliminar una variable angular, sino en convertir el problema original, cuya perturbación es proporcional a r^{-n}, en un sistema quasi-kepleriano, con la perturbación proporcional a r^{-2}, y con momento angular variable. Puesto que los términos parălácticos (r^{-n}, con $n > 2$) han sido eliminados, de ahí el nombre de eliminación de la paralaje. Con la eliminación de la paralaje, el número de grados de libertad queda inalterado, pero se ha conseguido un hamiltoniano más simple que el original. En su artículo original, Deprit consigue una teoría de cuarto orden, algo inaccesible con la normalización de Delaunay, pues el número de términos que aparecen se reduce drásticamente con respecto a la normalización, y lo que es muy importante, sin necesidad de efectuar desarrollos en serie de la excentricidad, lo que hace que el algoritmo sea válido para cualquier tipo de órbita elíptica, no necesariamente casi circular.

La eliminación de la paralaje no es una normalización, sino que entra en otra categoría: es una *simplificación*. A la clarificación y fundamentación matemática de la simplificación ha contribuido sustancialmente nuestro Grupo de Mecánica Espacial, principalmente los doctores Abad y Ferrer en colaboración con el Dr. Deprit. La normalización es de naturaleza geométrica, mientras que la simplificación es algebraica. La primera intenta extender propiedades de simetría que tiene la parte principal del hamiltoniano, mientras que la segunda lleva la perturbación desde un algebra de Poisson a uno de sus submódulos, eliminando una parte de la complejidad del sistema original para la explotación del resto con el menor coste y mayor beneficio.

La eliminación de la paralaje es el primer ejemplo dado de simplificación, aunque ya había surgido algo similar a una simplificación; nos estamos refiriendo a los llamados *intermediarios*. Éstos aparecen en artículos de Sterne y Garfinkel a finales de los 50. Un intermediario podría definirse como una cierta expresión integrable y tal que su solución sea una aproximación de primer orden del sistema hamiltoniano original. Dependiendo de si el intermeriario contiene al argumento de latitud ϑ o no, éste se denomina zonal o radial. El profesor Cid en 1969 fue el primero en proporcionar un intermediario radial al eliminar el argumento de la latitud mediante el método de Poincaré en variables polares-nodales. Posteriormente, este intermediario y otros varios han servido como base de extensiones de órdenes más elevados. Aunque ambos tipos de intermediarios, zonales y radiales presentan ventajas similares, los radiales suelen ser preferidos por su precisión, su simplicidad y la posibilidad de calcular perturbaciones de órdenes superiores de un modo relativamente sencillo.

La eliminación de la paralaje simplifica, pero no resuelve completamente el problema principal en la teoría de satélites artificiales. El problema sigue siendo de dos grados de libertad en variables polares-nodales y se hace necesario, por lo tanto, aplicar nuevas transformaciones al hamiltoniano resultante. Una primera transformación podría ser la normalización de Delaunay, en la misma línea que en la teoría de Brouwer, es decir, formular el problema de nuevo en variables de Delaunay y eliminar la anomalía media ℓ. Aunque esto es posible, la complejidad es muy grande. Alfriend y Coffey proponen una nueva simplificación, la *eliminación del argumento del perigeo* g. A pesar de que esta transformación también es muy complicada de obtener, su aplicación resulta muy útil para efectuar a continuación la normalización de Delaunay. Finalmente, mencionemos otra simplificación, *la relegación*. Cuando en el potencial terrestre (1) se tiene en cuenta el efecto de los armónicos teserales, el problema se complica, pues se trata de un problema con tres grados de libertad al aparecer explícitamente la longitud del nodo en el hamiltoniano. Por ello, tradicionalmente, el problema teseral se venía evitando en las teorías analíticas. Pero dentro del contexto de simplificaciones, Deprit y Palacián diseñaron una nueva transformación, la *relegación del nodo*, que consiste en una serie de transformaciones en cadena, de tal manera que en cada una de ellas, los términos que contienen la longitud del nodo no son eliminados, sino que se trasladan a un orden de perturbación cada vez más elevado, hasta que se pueda considerar insignificante su influencia. Lógicamente, la influencia no se ha eliminado, sino que está presente en las ecuaciones de las distintas transformaciones. Así, el problema se ha simplificado al problema zonal, donde pueden aplicarse las transformaciones anteriormente expuestas.

5. Manipuladores algebraicos

La cantidad tan enorme de cálculo y el número de términos que intervienen en estas teorías analíticas, hacen impensable, e imposible, el que se puedan llevar a cabo manualmente, sin un procesador algebraico. A este respecto, conviene decir que la mecánica celeste ha sido uno de los grandes impulsores de la creación y desarrollo del Álgebra Computacional, proporcionando ejemplos intrincados donde poner a prueba los nuevos sistemas e involucrando directamente a los investigadores en la elaboración de procesadores algebraicos.

Con objeto de situar temporalmente las aportaciones, recordemos que el lenguaje FORTRAN apareció en 1958 y ALGOL y LISP en 1960. Pues bien, en 1959, Herget y Musen publican un artículo en *Astronomical Journal* donde presentan un ejemplo de álgebra simbólica, con operaciones de sumas, multiplicaciones y multiplicaciones por un escalar en el álgebra de series de Fourier con varias variables sobre el cuerpo de números reales. Aunque hoy en día nos puede parecer un problema muy simple, no conviene olvidar las condiciones materiales del momento, ya que en los primeros ordenadores toda la información se sumistraba a través de tarjetas perforadas. Una vez abierta la brecha, los astrónomos teóricos abordaron tareas más ambiciosas; así, por ejemplo, Brouwer asignó a Kovalevsky como tema de tesis doctoral el elaborar con ordenador una teoría de la dinámica del octavo satélite de Júpiter. Enseguida se vislumbró la posibilidad de recrear las grandes teorías de los siglos XVIII y XIX, que parecían inamovibles, pues científicos de gran talla habían dedicado años de su existencia a elaborarlas. Eckert, encargado del Almanaque del U.S. Naval Observatory, había programado las tablas de Brown para la obtención de las efemérides de la Luna, pero al ser los ordenadores cada vez más potentes, empezó a evaluar no ya las tablas, sino las fórmulas matemáticas, con lo que descubrió una discrepancia sistemática de la teoría con las observaciones. El siguiente paso consistió en revisar la teoría con objeto de descubir los errores de ésta. Así surgió su *Improved Lunar Ephemeris*.

Gracias a los compiladores PL1 y FORTRAN, se pudo el trabajar simbólicamente con estructuras más ricas que las álgebras de polinomios o de series de Fourier, en particular, se pasó a las álgebras de *Poisson*, nombre inventado por Deprit para designar series de potencias positivas o negativas en varias variables con coeficientes en el álgebra de series reales de Fourier, que son la estructura básica de casi todas las teorías generales de perturbaciones en Mecánica celeste. Una vez reconocida esta estructura, se diseñaron programas especializados, los llamados Procesadores de Series de Poisson, para manipular estos objetos. A partir del primero de ellos, MAO, elaborado por Deprit y colaboradores, como Rom, Danby y Henrard, surgieron nuevas versiones como la de Broucke, entonces en el Jet Propulsion Laboratoy, o la de Dasenbroeck en el Naval Research Laboratory. Recientemente, ha sido rediseñado con nuevas concepciones de ordenadores, como MAO!! elaborado por Etienne Deprit en un procesador paralelo, o con nuevos lenguajes, como la versión en LISP de Miller o el PSPC de nuestro colega Alberto Abad, escrito en C.

Rápidamente florecieron nuevos procesadores de series de Poisson en diversos centros astronómicos y universidades, como el Bureau de Longitudes de París, la Universidad de Namur, el Instituto de Astronomía Teórica de San Petersburgo, etc.. Por otra parte, también aparecieron sistemas de álgebra computacional de carácter general, como MACSYMA, REDUCE, DERIVE, MAPLE y MATHEMATICA, entre otros. La utilidad de estos sistemas es muy grande, pues al ser comerciales, están al alcance de la mayor parte de los usuarios en ordenadores de muy diverso tipo, de manera que programas elaborados por un investigador en estos sistemas, pueden ser exportados a otros centros, con la garantía de un correcto funcionamiento. Su mayor inconveniente reside en que, al ser de carácter general, difícilmente se les podrá sacar el mismo rendimiento que en el caso de procesadores específicos como los PSP; en todo caso, suelen ser muy útiles en las primeras fases de elaboración de una teoría, para después ser completada con un procesador específico; incluso se han llegado a diseñar programas de interconexión entre procesadores generales con específicos, como el PSPCLink de nuestros colegas Abad y San-Juan, que comunican su procesador PSPC com Mathematica, de modo que trabajando desde Mathematica, cuando alguna operación necesita ser hecha con PSPC, el progama automáticamente lanza la tarea a PSPC y recoge el resultado dentro del programa Mathematica.

Uno de los hitos más importantes en la corta historia del álgebra computacional se debe a Deprit, Henrard y Rom y, cómo no, a la Luna. En 1970, con la primera versión de MAO, procedieron a reconstruir la teoría de la Luna de Delaunay, quien había dedicado 20 años a esta tarea. Mediante las transformaciones de Lie, recordemos que habían sido inventadas recientemente, reconstruyeron todas las operaciones de Delaunay con objeto de poder comparar sus resultados con los de Delaunay. Pues bien, tras 20 horas de tiempo de computación, el ordenador fue capaz de reproducir todos los términos de la teoría de Delaunay y descubrir tres pequeños errores en las fórmulas del famoso astrónomo francés. De este modo quedó reivindicada la figura de Delaunay, al mismo tiempo que se ponía de manifiesto la gran importancia que el álgebra computacional iba a tener en la Mecánica celeste y en la Dinámica no lineal.

6. Nuevas direcciones

Las teorías analíticas no solamente proporcionan fácilmente las efemérides del satélite durante un largo intervalo de tiempo, sino que permiten un análisis profundo de la dinámica, que difícilmente se podría conseguir con métodos exclusivamente numéricos. Veamos un ejemplo.

Cuando se aplica la teoría de Brouwer, uno se encuentra con el término $(4 - 5\sin^2 I)$ en el denominador, con lo que la teoría es singular cuando éste se anula o es muy pequeño. Este hecho ya fue puesto en evidencia en 1953 por Orlov. Sin embargo, resulta que muchos satélites se lanzan precisamente con esa inclinación crítica, debido a que, como vimos en la ecuación (2), en primera aproximación el argumento del perigeo se mantiene constante, con lo que esta órbitas presentan una caracterísitica muy importante, y es que sobre un cierto lugar pasará siempre a la misma altitud.

Podría creerse que la inclinación crítica es una singularidad evitable, originada por el sistema de referencia elegido y que podría eliminarse mediante una adecuada elección del referencial, de modo anólogo a como sucede con las singularidades que presentan las órbitas ecuatoriales o polares. Sin embargo, no se había descubierto ningún sistema de referencia que anulase la singularidad de la inclinación crítica y, sorprendentemente, algunos satélites situados en esa inclinación tienen órbitas estables mientras que otros son inestables, sin que se supiera la causa. Pues bien, en 1986, Deprit, Coffey y Miller encontraron la respuesta, se trata de una singularidad esencial que ocurre en una región donde se producen bifurcaciones. Para llegar a esta conclusión, mediante las transformaciones de Lie anteriormente mencionadas, consiguen reducir el problema zonal a un único grado de libertad en las variables de Delaunay (g, G). En estas variables, el *retrato fásico* está sobre un cilindro, pero sin embargo, estos autores probaron que la topología del espacio fásico era la de una esfera y, como es de todos bien conocido, hay dos puntos de la esfera no tienen imagen sobre el cilindro. Pues bien esos dos puntos resultaron ser los cruciales en el estudio: se trataba de puntos de equilibrio que sufrían varias bifurcaciones al variar la componente polar del momento angular, o lo que es lo mismo, la inclinación. De este modo se logró explicar el por qué unas órbitas eran estables, mientras que otras muy parecidas eran inestables. La respuesta es que correspondían a valores situados a ambos lados del valor de la bifurcación. Este resultado fue confirmado posteriormente por Broucke mediante métodos numéricos.

La representación de las trayectorias sobre la esfera (en realidad todo es mucho más complejo, pues sobre la esfera, cada punto representa en realidad una órbita) fueron obtenidas mediante integración numérica a partir de varias condiciones iniciales. Sin embargo, también podrían calcularse obteniendo la intersección de la esfera con las variedades de energía constante, convirtiendo el problema de integrar ecuaciones diferenciales en otro equivalente de resolver dos ecuaciones algebraicas (la esfera y la variedad de una energía dada) y representarlas gráficamente. Ahora bien, se corre también el riesgo de que entre dos valores de la energía ocurra alguna bifurcación y no se detecte. Para evitar este problema, Deprit, Coffey y Etienne Deprit elaboraron una técnica para visualizar los hamiltonianos sobre la esfera, en lo que vinieron a llamar *pintar hamiltonianos*. Esencialmente consiste en asignar a cada valor de energía un determinado color de la banda del arco iris. Como el rango de energías puede ser muy grande, consideran varias bandas, de modo que haya una transición continua de colores. Así, con unas matemáticas elementales se consigue una visualización del espacio fásico sobre la esfera. Estos autores emplearon un ordenador especial, la *Connection machine*, un ordenador en paralelo, de modo que cada procesador trabaja independientemente sobre zonas específicas de la pantalla y puede obtener, casi en tiempo real, (una pantalla por segundo) una película con la evolución del flujo fásico a medida que varía el parámetro considerado. De este modo, por una parte consiguieron reproducir las gráficas de la inclinación crítica con varios términos del potencial zonal, y por otra, como los puntos de equilibrio obtenidos en el sistema normalizado corresponden con órbitas periódicas del problema sin normalizar, obtuvieron una propagación de las órbitas periódicas para todo el rango de inclinaciones en el intervalo [0,90°]. Estas órbitas así obtenidas tienen la particularidad de que su inclinación, excentridad y argumento del perigeo permanecen casi constantes, lo que se conoce con el nombre de *órbitas congeladas*. Hasta entonces, se creía que únicamente existían órbitas congeladas para órbitas ecuatoriales o en la inclinación crítica, pues bien, con esta técnica se probó la existencia de órbitas congeladas para cualquier inclinación. Este resultado fue posteriormente comprobado mediante propagación numérica de familias de órbitas periódicas por nuestro colaborador Martín Lara en su tesis doctoral.

La técnica de pintar hamiltonianos resultaba muy interesante para abordar problemas similares. Ahora bien, nuestro grupo no disponía de la potencia de cálculo del Naval Research Laboratory, por lo que tuvimos que proceder de modo diferente, originando nuestros propios programas que funcionaran en ordenadores personales. De esta manera pudimos visualizar hamiltonianos, aunque de un modo más lento, pero suficiente para nuestros propósitos. Así, descubrimos bifurcaciones en ciertos sistemas dinámicos, aparentementen tan alejados, como pueden ser la dinámica galáctica y la física atómica, como en el problema de Stark-Zeeman, o la fuerza de interacción de van der Waals.

En resumen, a grandes rasgos hemos descrito los problemas con que podemos encontrarnos con las teorías analíticas del satélite artificial, un problema que vino a dar energía a una ciencia que parecía que estaba agotada, la Mecánica celeste, que a su vez había sido origen de gran parte de las matemáticas de hoy en día. Las nuevas técnicas desarrolladas abren el camino a nuevos horizontes, como por ejemplo en procesadores algebraicos, o en aplicación a problemas similares al de dos o n cuerpos. La astrodinámica tiene, pues, un futuro esperanzador, bien en su estado actual, bien en problemas futuros que el devenir se encargará de descubrirnos.