DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL

Ilmo. Sr. D. JOSE LUIS VIVIENTE MATEU

Excmo. Sr. Presidente

Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos

Señoras y Señores

En primer lugar, deseo agradecer a nuestra Academia de Ciencias la gran distinción que nos supone el haber sido designado para efectuar en su nombre la presentación, recepción y bienvenida del Prof. Dr. D. Eladio Domínguez Murillo con la lectura del discurso de contestación. El recipiendario pasa a poseer la medalla académica que últimamente llevó el distinguido académico D. Agustín Alfaro Moreno cuya valía y dedicación a esta Academia, tan notoria y efectiva, ya ha sido glosada por el Dr. Domínguez Murillo.

Ello también es para mí una satisfacción y un gran honor. Satisfacción pues, además de considerarle un buen amigo, me permite revivir con emoción mis diez o quince primeros años como catedrático en la Universidad de Zaragoza y rememorar mis tres primeros cursos en el Seminario H. Cartan de la École Normale Superieure en la rue d'Ulm de Paris, así como mi asistencia a los Seminarios Bourbaki [1] en el Intitut Henri Poincaré.

Honor, dada la destacada humanidad, imaginación y talla investigadora del profesor Dr. D. Eladio Domínguez Murillo, aptitudes que supo alternar con la formación de una familia y con una fecunda actividad docente en otras universidades, llegando incluso a constituir, en alguna de ellas, grupos de investigación que siguen hoy el desarrollo de sus iniciales ideas y con los que, en alguna ocasión, aún sigue colaborando. Su creatividad, curiosidad, formación, y circunstancias le llevaron a orientar su actividad en Ciencias de la Computación. En este campo, sus anteriores aptitudes junto con la competente actividad de los miembros de su equipo, le está

---

[1] En los años 1953 a 1958 las obras de Geometría Algebraica a nuestro alcance eran las de la escuela italiana, las de Algebra de Van der Vaerden y los dos tomos de Algebra Conmutativa de P. Samuel con O. Zariski. Esta bibliografía para el tratamiento topológico algebraico que pretendíamos obtener con nuestra tesis nos presentaba dificultades que tratamos de resolver con ayuda de la obra de A. Weil, "Foundations of Algebraic Geometry", la fundamentación topológica y las limitaciones de esta obra en teoría de la intersección nos condujeron a la necesidad de asistir a los seminarios de C. Chevalley y H. Cartan en París. Una beca de intercambio entre el C. S. I. C. y el C. N. R. S. seguida de otra del M. E. C. nos permitió asistir a dichos seminarios en el curso 1958/59. Nuestra presencia en París facilitó la asistencia al Seminario Bourbaki en su sesión nº 180, en febrero de 1959, concretamente a la conferencia que el Prof. R. Thom presentó sobre los "Travaux de Milnor sur le cobordisme", tema que si bien atrajo nuestra atención, en aquel momento sólo nos fue posible registrarlo y completarlo con una serie de referencias bibliográficas de los anteriores trabajos de Thom y seguir en años sucesivos la evolución de la teoría del cobordismo.

permitiendo alcanzar resultados de reconocido interés. Uno de ellos, estoy intimamente convencido aunque no me sienta capacitado para predecir su éxito, está en su creación de la Fenomática, creación de la que todos los aquí presentes tenemos el privilegio de ser testigos. Gracias Eladio por permitirnos compartir este momento.

Como es norma, trataremos de justificar los valores y méritos por los que ha sido designado Académico Electo el Prof. Dr. D. Eladio Domínguez Murillo, mediante un seguimiento socio-personal a su evolución intelectual, profesional y humana, necesariamente breve, de su enorme labor desde 1970 a nuestros días, ya que una reseña de todo su trabajo sobrepasaría con creces el espacio que podemos dedicarle. La persona interesada puede acudir a su currículum. Baste con unos pocos números: proyectos de investigación financiados 12, de los cuales 3 como investigador y 9 como investigador principal; publicaciones: 24 artículos individuales y unos 38 en colaboración más unas 7 Lectures Notes y 4 libros (algunos en colaboración); 10 tesis y 8 tesinas dirigidas, y unas 30 conferencias impartidas en España o en el extranjero, etc., etc. Entre los últimos etcéteras conviene citar su colaboración en la creación de software y, excepcionalmente para un matemático, de un prototipo de hardware.

Su labor docente se inicia como Profesor Adjunto Contratado el curso 1971/72 en la Universidad de Valencia [2]. Defendida en 1974 su tesis doctoral que obtuvo la máxima calificación (versó sobre una extensión de los fibrados Mock de Rourke-Sanderson a complejos de conos y la correspondiente sucesión exacta de pares de complejos de conos con vistas a su utilización para la construcción de una sucesión espectral -siguiendo la técnica de los pares exactos de Masey- y concluyó con un estudio de la dualidad de Poincaré para estos objetos) fue nombrado profesor Adjunto Interino durante dos años más en la Universidad de Valencia, hasta fin del curso 1976/77. En septiembre de 1977 pasó a la Universidad de Sevilla donde fue nombrado Profesor Agregado Interino durante dos cursos 1977/78 y 1978/79, año en que, superada la correspondiente oposición, pasó a ocupar una plaza de Profesor Titular de Geometría y Topología de nuestra Universidad de Zaragoza desde el curso de 1979/80 hasta el de 1987/88, en que pasó en Comisión de Servicios durante todo el curso de 1988/89 a la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Lo que motivó el que reincorporado a nuestro Departamento de Geometría y Topología durante el curso de 1989/90 cesara en él a fines de este curso y se incorporara como Profesor Titular hasta fines del curso 1991/92 al Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática (actualmente denominado Informática e Ingeniería de Sistemas), en el que se halla destinado desde el curso 1992/93, superada la correspondiente oposición, como Catedrático de Universidad de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Esta trayectoria profesional debió hacerla compatible con el ejercicio del cargo de Decano de la Facultad de Ciencias de 1984 a 1986 y de Subdirector del Departamento de Geometría y Topología durante 1987 y los nueve primeros meses de 1988. Pero a la trayectoria profesional se superpone de modo ideal la humana: el Profesor Eladio Domínguez contrajo matrimonio en 1984 con Mª Jesús Lapeña Marcos, Licenciada en Matemáticas, más

---

[2] Como consecuencia de una semana intensiva de charlas y conferencias sobre la Topología y Geometría Diferencial que, por invitación de la Universidad de Valencia a través de los Profesores Valdivia y Ferrer, desarrollamos en el curso 1970/71, el Prof. Valdivia me solicitó si alguno de mis alumnos de doctorado estaría dispuesto a encargarse bajo nuestra dirección, como Profesor Adjunto Contratado, de las asignaturas de Topología y Geometría Diferencial de 5º Curso -por primera vez tal 5º curso de Licenciatura iba a impartirse allí el curso 1971/72. Se lo indiqué al Profesor Domínguez Murillo, quien lo aceptó encantado.

tarde Doctora y hoy Profesora Titular de Escuela Universitaria de Lenguajes y Sistemas Informáticos. Se suele decir que "detrás de todo gran hombre siempre hay una gran mujer", en este caso la influencia ha sido mutua, no sabríamos decidir quién ha influido más en el otro, quién nutre más la convivencia humana favoreciendo la actividad de cada uno de ellos y de cada uno de sus tres hijos (Jorge, Victor y Alejandro). ¿Es en esta alianza donde se encuentra una de las razones para, primero ir en comisión de servicio durante un curso a la Universidad Politécnica de Madrid y posteriormente efectuar su adscripción al Departamento de Informática de la Universidad de Zaragoza?

El Profesor Dr. Eladio Domínguez Murillo nació en Graus (Huesca) en 1946, cursó los estudios de bachillerato como alumno libre del I. N. B. de Huesca, excepto el último año que fue alumno oficial del Colegio de los Salesianos de dicha ciudad, y la licenciatura de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Barcelona con gran regularidad. En estos últimos estudios, ya se pusieron en evidencia su capacidad de trabajo, junto a una especial aptitud para la organización o coordinación de actividades, como me precisó un profesor de aquella Universidad de Barcelona cuando me indicó que iba venir a verme el Dr. Domínguez. Y, efectivamente, días después, hacia mediados de enero de 1970, se personó en mi despacho de la Facultad de Ciencias de Zaragoza para expresarme su deseo de que yo le dirigiera sus estudios de doctorado. Lo que acepté con agrado, pero preguntándonos ¿en qué trabajo de investigación convendría iniciarle de modo que le permitiera hacer una tesis doctoral de interés en un tiempo adecuado? Con objeto de conocer la formación y dominio matemático al que podía presentar una mayor predisposición, le propusimos realizar como tesina una síntesis de los diferentes modos de clasificar las singularidades de curvas sobre el plano complejo [3]. Ello le llevó a estudiar la relación entre la geometría algebraica asociada con un punto singular de una curva compleja con la correspondiente teoría de nudos, con ayuda de la fibración de Neuwirth-Stallings asociada y la presentación del grupo del nudo. En septiembre de 1971 presentaba con éxito su tesina en la Universidad de Barcelona y vino a Zaragoza. El trabajo que realizó nos evidenció una buena formación previa en topología de variedades y fibraciones (homología singular, celular y de De Rham, dualidad de Poincaré, etc.), una clara intuición topológico-geométrica, un buen método de trabajo, una buena capacidad de análisis, de estructuración y de síntesis junto a una gran capacidad de trabajo.

Su ejercicio docente en la Universidad de Valencia le exigió seguir su trabajo de doctorado haciendo viajes más o menos frecuentes a Zaragoza para contrastar ideas con nosotros y asistir a nuestro seminario. Es así como pudo asistir a las conferencias de algunos de los profesores extranjeros que invitábamos a participar en nuestro seminario de Geometría Diferencial, como las conferencias que expuso el Profesor Karoubi sobre "Teoría K y functores derivados" en 1974, o las del profesor S. Buoncristiano en 1972 sobre las "Teorías de bordismo". Estoy convencido de que el recipiendario supo obtener el fruto que tales relaciones favorecen, originándose una enriquecedora colaboración que se prosiguió durante varios cursos. Su estancia en Valencia facilitó nuestra labor de dirección de unas cinco tesinas y dos tesis por postgraduados de aquella

---

[3] En aquel momento, a las caracterizaciones de la escuela italiana se unía la diferenciable considerada por Withney y Thom, las de equisingularidad (topológica, diferencial y analítica) introducidas por Zariski y el estudio que -ante los trabajos de Brieskorn- Milnor realizó, apoyándose en las propiedades de la noción de espacio fibrado, generalizando los de Brauner, Kähler, Zariski, ... que las relaciona con la teoría de nudos.

Universidad, gracias Eladio. Durante su estancia en Sevilla creó un grupo de investigación en teoría de la homotopía cuya labor es cada día más eficaz.

En aquella época la problemática investigadora que nos ocupaba giraba en torno a una serie de problemas originados por la búsqueda de la *realización geométrica de un álgebra dada* (al considerarla como un álgebra de homotopía), luego propio de la categoría homotópica $\prod$ o la lineal a trozos PL; y las aplicaciones de las soluciones de éstos al problema que teníamos planteado en la categoría Diff de las variedades diferenciables relativo al estudio cualitativo y topológico algebraico de la teoría de foliaciones, o más concretamente de la estructura cociente de una foliación.

Para mejor comprender la situación precisemos qué se entiende por topología-geométrica. En Topología se suele distinguir la: *Topología Algebraica* (antigua topología combinatoria), *Topología Diferencial, Topología Geométrica* y *Topología Conjuntista* o Topología General. Aunque hoy quizás sea más correcto hablar de métodos, es decir, que la *Topología Algebraica,* es el método de trabajo que pretende la *caracterización y estudio algebraico* de las propiedades invariantes de la categoría Top, la homotópica $\prod$, la PL lineal a trozos y la Diferenciable Diff [4].

---

[4] Sus objetos, *las variedades diferenciables,* aunque introducidos por Riemann y Poincaré, fueron concretados por Whitney en 1936 y codificados por Veblen y J. H. C. Whitehead. Whitney estableció el primer teorema de "posición general" al probar que "toda m-variedad diferenciable puede encajarse diferenciablemente en $\mathbb{R}^n$ siempre que $n \geq 2m+1$", lo que si en lugar de $\mathbb{R}^n$ se toma otra n-variedad P diferenciable nos permite decir que *una subvariedad $f: M \longrightarrow P$ se halla en "posición general" si para $n \geq m+q$ evita a una q-variedad Q subvariedad de P.*

En Diff se dispone de la noción de *vecindad tubular* T de M en P, las nociones de fibrados tangente y normal de M en P, mientras se aborda el problema de la *clasificación salvo difeomorfismo de todas las variedades diferenciables.* Pronto se vio que este problema era algorítmicamente imposible en dimensión ≥ 4, y lo que se hizo es reducirlo al menos fino de "la clasificación salvo equivalencia homotópica" (menos fino incluso que la clasificación salvo homeomorfismo) que se traduce a un problema de álgebra donde se dispone de un número mayor de medios técnicos. Para alcanzar esta clasificación también se acudió a la teoría de Smale (1961) o técnica topológica denominada "cirugía de variedades" o "a cortar y a pegar" que supone describir las variedades a través de su "descomposición en asas", mediante el "pegado de asas" al borde de la variedad junto a las "modificaciones esféricas de su borde" precisas; últimas operaciones que nos permiten construir nuevas variedades. Los problemas básicos de la cirugía conducen al álgebra determinando los *L-grupos* que caracterizan el problema geométrico. Los resultados de Wall sobre toros homotópicos fueron utilizados por Kirby y Siebenmann en su espectacular trabajo sobre variedades topológicas. Smale (1961) y Wallace (1960) demostraron que toda variedad posee una descomposición en asas (suponen que el borde de una variedad M es unión disjunta de subvariedades no acotadas -posiblemente vacías - $\partial_- M$ y $\partial_+ M$; en este caso, M se dice un cobordismo entre $\partial_- M$ y $\partial_+ M$ que son entonces cobordantes, y hacen uso de la teoría de Morse para determinar el índice de la singularidad en los puntos críticos. Señalemos que aquí Thom indicó se obtenía así información sobre el tipo de homotopía de M, lo que fue utilizado por Bott para deducir su célebre teorema de periodicidad. Smale (1961) observó que esto también era válido para problemas con difeomorfismos. De hecho se puede efectuar un uso sistemático de funciones en lugar de asas (Cerf, 1966).

Los primeros resultados sobre clasificación (salvo difeomorfismo, dando ciertas hipótesis sobre el tipo de homotopía) fueron dados por Smale hacia 1961 y 1962 y, como consecuencia, se pudo resolver toda una serie de problemas de clasificación por Smale, Wall y Tamura entre 1962 y 1964, mientras que Browder, Levine y Livesay probaban que el producto de $\mathbb{R}$ por una variedad topológica simplemente conexa M es difeomorfa al producto de $\mathbb{R}$ y una única variedad diferenciable N, h-cobordante a M. Otro de los más útiles descubrimientos en PL-topología durante la década de los 60 es el teorema del "engulfing" que fue establecido por Stallings en 1962. Aquí también hay que citar el trabajo de Zeeman dando la solución del fundamental problema de no anudamiento de la n-esfera

Pero también los métodos de cada una de éstas pueden ser útiles a las demás, y lo que es más, pueden ser útiles para la topología algebraica como, por ejemplo, sucede con la primera demostración dada por R. Bott de la periodicidad de los grupos de homotopía estable que se apoyó en la teoría de M. Morse de la topología diferencial, o el cálculo práctico mediante formas diferenciales, con ayuda de la teoría de De Rham, de invariantes topológicos o geométricos como las clases de Euler, números de intersección o el número de Lefschetz, o aquél de la clase de Thom subyacente a todos ellos. Los trabajos sobre el cobordismo han enriquecido la relación entre los problemas geométricos y la teoría de homotopía, permitiendo un más sencillo cálculo de invariantes homotópicos.

Recuérdese que la topología combinatoria aparece como precursora de la topología algebraica, y en ella se trataba de resolver problemas como *la clasificación de espacios o variedades*. Los intentos de Poincaré hacia 1895 por dar una solución geométrica mediante la representación de los ciclos por subvariedades inmersas en una variedad fija presentaron tales dificultades que motivaron la introducción de los métodos combinatorios con un desarrollo que nadie pudo unificar con el geométrico inicial. Ello condujo a que, en la década de los 30, ante diversos problemas, como la imposibilidad de demostrar el Hauptvermutung (equivalencia de las clasificaciones combinatoria y topológica), se acudiese a métodos más algebraicos que aclararan el estudio de los grupos de homología de los poliedros iniciado por Poincaré. Se puede decir que fue con los trabajos de Hurewicz de 1935 y 1936 con los que *se inició la era de la topología algebraica* al proporcionar toda una serie de resultados inesperados con ayuda de los grupos de homotopía de orden superior. Aunque tales grupos fueron inventados por Čech en 1932, al ser todos conmutativos no fueron apreciados al principio. Otro paso esencial se dio entre 1942 y 1945 por Eilenberg y MacLane al crear la Teoría de Categorías (functores y equivalencias naturales) que pasó a ser no sólo el lenguaje más adecuado sino que pronto apareció como la esencia de la estructura matemática.

Quizás la viabilidad de una topología geométrica se intuyó con el trabajo de Pontrjagin de 1947 en que conjeturó que "una 3-variedad cerrada y orientada siempre era el borde de una 4-variedad orientada" (conjetura que fue demostrada por Rohlin en 1951); mientras que la solución por Thom en 1954 (apoyándose en la noción de espacio fibrado y en los trabajos sobre homotopía hasta entonces relizados por H. Cartan y J. P. Serre) del problema que Eilenberg propuso en 1949 de "caracterizar algebraicamente el que una variedad fuese el borde de otra", con la introducción de la Teoría del Cobordismo, señalaba el camino de la fundamentación de la Topología Geométrica.

El fundamental trabajo de Thom (Quelques propriétés globales des variétés differentiables. Comm. Math. Helv. 28, 17-86, 1954; que le valió una de las medallas Fields del C. I. M. de 1958 en Edinburgo) es uno de los hechos que confirman lo mucho que debe la topología geométrica y alguna de sus aplicaciones al trabajo efectuado por la escuela francesa de 1945 a 1960 y que se inició con los trabajos de J. Leray [5] junto a los trabajos de A. Borel sobre los

---

para n>5.

[5] Durante la segunda guerra europea, siendo prisionero de los alemanes, J. Leray desarrolló un curso de topología algebraica en el que aparece por primera vez la noción de sucesión espectral para la cohomología, como puede verse en una primera redacción efectuada en 1946, y que, después de una más adecuada presentación dada en 1948, fue publicada en 1950.

grupos clásicos, seguido por la formalización de H. Cartan, y J. P. Serre[6] de las ideas de Leray en la hoy denominada Teoría de Haces de funciones sobre una variedad, facilitando el paso de lo local a lo global, así como la introducción de la importante técnica de la hoy denominada sucesión espectral de Leray-Serre, junto a los trabajos sobre homotopía y álgebra homológica de H. Cartan de 1946 a 1960 más los de J. P. Serre desde 1950. Precisemos que las propiedades algebraicas fueron codificadas por J. L. Koszul en 1947. En este periodo fue también decisiva la obra en teoría de la homotopía realizada por Toda, Moore, James, (J. H. C. y G. W.) Whitehead, y otros. Es de señalar que, independientemente, R. C. Lindon, en su tesis doctoral en 1946 en la universidad de Harvard, construyó una sucesión espectral para la cohomología de un grupo G, mediante una filtración de Hom(B(G), A), -por construcción bar- con características análogas a las de la sucesión espectral de Leray y que Serre actualizó en la conocida sucesión espectral de Hoschild-Serre. En 1952, W. S. Massey dio la formulación de una sucesión espectral mediante pares exactos. No obstante en 1956 Milnor estableció la construcción de una filtración functorial, apoyándose en lo que podría interpretarse como una realización geométrica de la construcción bar, dando origen a lo que se llamó la sucesión espectral de Milnor de la que siguió la construcción de la sucesión espectral correspondiente en la categoría pro-homotópica.

J. H. C. Whitehead, demostró que toda variedad diferenciable admite una única triangulación lisa (lo que determina un functor W). Si con F designamos el functor olvido de la estructura y con C el functor paso a las clases de aplicaciones homótopas, se dispone del esquema categorial

$$Diff \xrightarrow{W} PL \xrightarrow{F} Top \xrightarrow{C} \Pi$$

A veces, dada una variedad diferenciable n-dimensional cerrada, se presentan problemas en que tenemos un invariante para la variedad con una conveniente expresión en términos de una de las estructuras y deseamos expresar este invariante en términos de otra estructura. Por ejemplo, las clases de Pontrjagin p_i, $1 \leq i \leq n/4$, de la variedad X. Si elegimos una estructura riemanniana sobre X, entonces por la teoría de Chern-Weil podemos escribir explícitamente una 4i-forma cerrada representando la i-ésima clase de Pontrjagin vista como un elemento de $H^{4i}(X, R)$. Con la notación de este esquema, Thom, estableció la igualdad t(WM) = p(M) para toda variedad diferenciable, M $\in$ Diff, donde por "t" designamos las clases (de cohomología) definidas por Thom [7] (1954), y con "p" designamos las clases (de cohomología racional) de Pontrjagin de una variedad diferenciable, igualdad que puede considerarse como la interpretación en la categoría PL de las clases de Pontrjagin en la categoría Diff [8]. Por otro lado, Novikov probó que dados dos

---

[6] Como anécdota se cuenta que, en un coloquio desarrollado en Bruselas en 1952, al concluir Cartan y Serre su conferencia sobre las variedades de Stein con dos teoremas sobre grupos de cohomología con coeficientes en haces analíticos coherentes, parece ser que un alemán participante en el coloquio sin poderse contener exclamó "We have bows and arrows, the French have tanks".

[7] Este periodo está marcado por tres listas de problemas en topología: la de Eilenberg de 1949, la de Massey en 1955 y la de Lashof en 1963 (analizada y resuelta en parte por Novikov en 1965), periodo en el que la topología algebraica experimentó un gran desarrollo impulsado por la escuela francesa surgida alrededor de H. Cartan en la E. N. S. de Paris a partir de los trabajos de Leray de 1945.

[8] Otra importante aplicación de la Topología Algebraica se encuentra en el origen y desarrollo de la Topología Diferencial, disciplina en la que prosiguió su obra Thom con importantes resultados en el estudio de las singularidades de las aplicaciones diferenciables (curso en Bonn redactado por Levine, 1960) y en la que destacan los trabajos de Whitney, Cairns, J. H. C. Whithead, Milnor, Kervaire, Munkres, Pontrjagin, Smale, Thom,

objetos M_1, $M_2 \in PL$ tales que FM_1 es homeomorfo a FM_2 entonces es $t(M_1) = t(M_2)$. Además Kervaire (1960) probó *que existen variedades triangulables que no son diferenciables* (es decir encontró una variedad PL 10-dimensional, N, para la que no existe variedad $M \in$ Diff tal que FW(M) sea homoemorfa a F(N). Más aun, Eells y Kuiper (1962) demostraron que existen variedades PL en cuyo tipo de homotopía (luego objetos de Π) no existe variedad diferenciable alguna. Quedó asi evidenciada *la necesidad de desarrollar el estudio de la "enrevesada"* (según Wall) *categoría PL.*

Mientras Massey desde 1955 destacaba el interés de los trabajos de Thom sobre el cobordismo y Milnor les dedicaba una particular atención, un gran número de investigadores del mundo anglo-sajón, particularmente en las universidades de Princeton, Harvard y Chicago (USA), las de Cambridge, Liverpool y Warwick (Gran Bretaña), Bonn (Alemania), Moscú (URSS), Tokio y Nagoya (Japón), y algo más tarde en Aarhus (Dinamarca), consiguieron un importante desarrollo y estructuración de la teoría.

Pero en el periodo que va desde el C. I. M. de Edimburgo (1958) hasta principio de los 70, junto al desarrollo y estructuración de la teoría del bordismo y cobordismo iniciada por Milnor y Novikov y la búsqueda de la *adecuada* categoría PL, sobre lo que volveremos más adelante, tuvo lugar la caracterización de las *teorías de cohomología y homología generalizada*: la primera de estas teorías fue la teoría K [9] (Atiyah y Hirzebruch) que surgió y se desarrolló apoyándose en dos nuevos e importantes avances que se produjeron en topología algebraica, y en particular en teoría de la homotopía, basados en los trabajos de Adams y Bott [10] que, con el trabajo de Atiyah

---

Boardman, Wallace, Wall, Zeeman. Esta asignatura fue ya intuida por E. Cartan al enunciar, en una nota al C. R. A. S. de París de 1928, teoremas básicos relacionando las formas diferenciales con los números de Betti del tipo del teorema de De Rham. De hecho, se puede decir que el origen como disciplina matemática de la Topología Diferencial se estableció con el trabajo de Milnor que, apoyándose en la noción de espacio fibrado, le permitió demostrar en 1956 que la esfera S^7 admite varias estructuras diferenciables no difeomorfas (más tarde probó que admitía 27 estructuras distintas). A estos y a los resultados de Kervaire (1960), Eells y Kuiper (1962) ya mencionados se fueron sumando sus aplicaciones a otras disciplinas matemáticas y físicas, y las que aún hoy siguen obteniéndose particularmente en Mecánica Cuántica. Todo ello evidenció la necesidad de la introducción en el segundo ciclo de estudios de la Licenciatura de Matemáticas, como asignatura básica, la Topología Diferencial, lo que así se efectuó en la Universidad de Zaragoza antes que en ninguna otra universidad de España.

[9] Las ideas de Grothendieck (1958) para el tratamiento de la teoría de la intersección global de variedades algebraicas, le llevaron a definir el denominado "grupo de Grothendieck K(X)" de los fibrados vectoriales sobre un esquema X, concepto que fue aplicado por Atiyah y Hirzebruch al caso en que X fuese un CW-complejo finito, habida cuenta del teorema de periodicidad de Bott. Vieron que K satisfacía la fórmula de Künneth $K(X \times S^2) = K(X) \otimes K(S^2)$, lo que no sólo les fue fundamental para demostrar (1959) un teorema Riemann-Roch diferenciable [al considerar para un espacio topológico compacto X y para las clases de isomorfía de fibrados topológicos vectoriales complejos de base X el "anillo de fibrados vectoriales complejos" $\tilde{K}(X)$] sino que, en un segundo trabajo (1961), les permitió obtener la teoría K con el cálculo efectivo de K(X) de los *functores cohomológicos generalizados,* tomando $K^{-i}(X) = \tilde{K}(\Sigma^i X)$ para $i \geq 1$, donde Σ designa la supensión, y estableciendo *una sucesión espectral del tipo de la de Adams* que relacionaba, para un espacio dado, *su cohomología ordinaria con la generalizada.* Construyeron así sendas "teorías de cohomología periódica", real y compleja, que *resultaron ser teorías de cohomología generalizada* (functores contravariantes que satisfacen todos los axiomas de Eilenberg-Steenrod *excepto el axioma de dimensión*).

[10] Precisamente nuestra incorporación al Seminario H. Cartan en la E. N. S. de Paris, en octubre de 1958, nos permitió seguir primero el de 1958/59, dedicado al estudio del "Invariante de Hopf y operaciones cohomólogicas

de 1961, se aplicaron también a las teorías de bordismo y cobordismo. En el desarrollo de ambos tipos de cohomologías generalizadas también fueron decisivos los trabajos en este periodo de E. H. Brown, H. Toda y G. W. Whitehead.

El *primer resultado esencial*, más allá del buscado conocimiento de los grupos de homotopía de los grupos clásicos, y en frase de Adams "último avance realmente inesperado", se debe a Bott con el llamado "teorema de periodicidad de Bott" (que condujo a establecer las bases de la *teoría K* y de la "*categoría de homotopía estable*" Stab_Σ). En sus trabajos de 1957 y 1959, y apoyándose en la teoría de Morse, demostró las relaciones de periodicidad de la homotopía de los grupos clásicos estables

$$\pi_r(U) = \pi_{r+2}(U),\ \pi_r(O) = \pi_{r+4}(Sp),\ \pi_r(Sp) = \pi_{r+4}(O),$$

donde $O = \cup\, O(m)$, $U = \cup\, U(m)$ y $Sp = \cup\, Sp(m)$ son los grupos clásicos estables.

El *segundo resultado esencial* se debe a Adams y fue Hopf en 1935 quien lo planteó. Trata del problema de la existencia de clases de homotopía de aplicaciones de S^{2n-1} en S^n. La solución parcial de Hopf con ayuda del, desde entonces denominado, invariante de Hopf, redujo el problema a determinar si "existían aplicaciones con invariante de Hopf igual a uno". Adams en 1958 anunció su solución afirmando que "tales aplicaciones existían *si y sólo si* n = 2, 4 u 8", lo que obtuvo apoyándose en las operaciones cohomológicas secundarias y en la fundamental *sucesión espectral de su nombre*, que *relaciona el módulo de cohomología y el grupo de homotopía estable* (toma la cohomología de un espacio como un módulo sobre el álgebra de Steenrod y a partir de él construye la homotopía estable del espacio, transformando así información algebraica en geométrica) cuya demostración en 84 páginas la publicó en 1960. De hecho fue en su publicación de 1959, donde Adams demostró que "dados dos CW-complejos finitos X e Y existe una sucesión expectral que empieza con $\mathrm{Ext}_A(H^*(X, Z_p), H^*(Y, Z_p))$ y tiende a ${}_p\pi_*^\Sigma(X, Y)$ en donde con ${}_p\pi$ se designa el cociente de π por los elementos de orden finito primos con p.

Una aplicación importante de la técnica de las sucesiones espectrales se tiene cuando el espacio total de una fibración es contráctil como sucede, por ejemplo, para los fibrados principales universales cuyo espacio base B(G) es el clasificante del grupo estructural G (fibra del fibrado). En el mismo Seminario de H. Cartan de 1959/60, J. C. Moore puso en evidencia que *todo invariante homotópico algebraico de interés de un espacio estaba contenido en su complejo singular*, y al analizar la estructura algebraica de la homología de los espacios clasificantes sentó las bases de la general e importante sucesión espectral de Eilenberg-Moore, cuya exposición completa apareció en los trabajos conjuntos de 1962, 1965 y 1966, en los que estudiaron las propiedades de convergencia y dualidad de las sucesiones espectrales en una categoría abeliana.

Su sucesión espectral les obligó a desarrollar un nuevo tipo de álgebra homológica, dicha a veces "álgebra homológica diferencial graduada", que les exigió definir, para una coálgebra diferencial graduada L sobre un anillo conmutativo K, el functor producto cotensor $A \,\square_\Lambda B$ de

---

secundarias", y en el curso siguiente, ya nombrado Profesor Adjunto de Matemáticas en la Sorbona (Universidad de Paris 6), al Seminario de 1959/60, que se dedicó al estudio de la "Periodicidad de los grupos de homotopía estables de los grupos clásicos, según Bott".

dos L-módulos graduados diferenciales A y B, y el correspondiente functor derivado primero $\mathrm{Cotor}^{\Lambda}(A, B)$, que resulta ser un K-módulo graduado que es el *límite al que tiende una sucesión espectral* cuyo término E^2 es igual al $\mathrm{Cotor}^{H(L)}(H(A), H(B))$. De todos modos los argumentos de Eilenberg-Moore parece que sólo son de utilidad para la homología (cohomología) singular. Un caso particular de gran interés fue determinado por Adams (1956) al considerar la construcción co-bar.

La publicación de la sucesión espectral de Adams, la del mismo tipo para teoría K por Atiyah-Hirzebruch de 1961 (que relaciona la cohomología ordinaria con *cualquier otra* cohomología generalizada dada) y habida cuenta de la publicación de G. W. Whitehead de 1962, la denominada sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch-Whitehead, los trabajos de Moore en el Seminario de H. Cartan de 1959/60 junto a los de Eilenberg-Moore antes citados, dada su potencia y alcance, atrajeron la atención sobre las sucesiones espectrales originando toda una serie de trabajos apoyados en ellas con importantes aplicaciones. Destaquemos: la de Rothenberg y Steenrod (1965) que estudian la cohomología de un H-espacio mediante la construcción de una sucesión espectral para el fibrado asociado, es decir determinan H(F) a partir de H(B); el trabajo de D. W. Kahn (1966) determina una sucesión espectral de la construcción geométrica del sistema de Postnikov asociado a un espacio topológico X, que, en cierto sentido, se puede considerar dual a la de Adams pues comienza con $H_*(K(\pi_n, n))$, donde $\pi_n = \pi_n(X)$, y converge a $H_*(X)$; esta misma construcción la consideró L. Smith en 1967 al estudiar la cohomología del sistema estable de Postnikov a dos pisos.

Por otra parte Heller, en su trabajo sobre la categoría de homotopía estable de 1968 y 1970, se vio conducido, en particular, a profundizar en el conocimiento de dos sucesiones espectrales de Eilenberg-Moore relativas, una a la homología del pull-back de una fibración, y la otra a la homología del espacio fibrado con fibra la asociada a un fibrado principal. La primera, es decir *la sucesión espectral pull-back,* fue obtenida por Rector por métodos cosimpliciales al estudiar las operaciones de Steenrod para la sucesión espectral de Eilenberg-Moore en 1970. Mientras en 1969 L. Smith, siguiendo una idea de Hodgkin, da una construcción geométrica de la sucesión espectral considerando la *sucesión espectral de Eilenberg-Moore como una sucesión espectral de Künneth para una adecuada teoría de cohomología en una conveniente categoría* que aclara la construcción de la sucesión espectral para teorías de cohomología generalizada. No obstante, en este trabajo de 1969, L. Smith ya *indicó la existencia de cierta analogía entre la sucesión espectral pull-back y la sucesión espectral de Adams.*

Recordemos que Atiyah en 1962 estableció un método, de naturaleza geométrica, método que se extendió a situaciones más generales como la realizada en teoría del cobordismo por P. E. Conner y L. Smith en 1968. En este mismo año Novikov al estudiar el álgebra de las operaciones cohomológicas sobre el bordismo complejo desarrolló una sucesión espectral análoga a la de Adams que, en general, proporciona una mejor (más rápida) aproximación a la homotopía estable de la esfera, partiendo, en este caso, de la información algebraica proporcionada por el álgebra de las operaciones cohomológicas de la teoría del cobordismo complejo (ver más abajo), sucesión que se conoce como sucesión espectral de Adams-Novikov. Mientras que A. Dress en 1967 establecía una elegante actualización del desarrollo de la sucesión espectral de Serre para la homología y cohomología singular de una fibración.

Particularmente desde que Milnor demostró que se trataba de una teoría de cohomología generalizada, la atracción de la teoría K no sólo no fue un obstáculo, sino que fue un estímulo para que se despertara el interés por el estudio de la teoría del cobordismo, después del largo periodo en que permanecieron olvidados los resultados alcanzados por R. Thom. Excluidos los trabajos de Dold de 1956 sobre la estructura algebraica, los geométricos de Rohlin y Wall a finales de los 50 y primeros de los 60, así como los iniciales de Novikov y las exigencias que presentaban los que se realizaban en Topología Diferencial (teoría S, interpretación en una categoría de los resultados obtenidos en otra, teoría de inclusiones y encajes, h-cobordismo de Smale, transversalidad para variedades PL por Armstrong y Zeeman, problema del engulfing, no anudamiento, etc.), los problemas y técnicas de la teoría del cobordismo estuvieron prácticamente subordinadas a la de la categoría Diff hasta que en 1966 apareció publicado el trabajo de R. E. Williamson Jr. Tal resurgir del interés por la teoría del cobordismo no sólo la motivó el trabajo de Milnor de 1960 antes citado, sino también el de Atiyah sobre "bordismo y cobordismo" de 1961, que situaban a la teoría del cobordismo de Thom como *una teoría de homología generalizada*. También fueron determinantes los que se dedicaron a sus aplicaciónes geométricas y al estudio de la teoría de la homotopía como los trabajos de Dold sobre las relaciones entre la cohomología ordinaria y la extraordinaria o los trabajos de Conner y Floyd de 1966 relacionando las teorias K y las de cobordismo.

Recordemos brevemente que si $\mathcal{D} \subset$ Diff es la clase de variedades diferenciables ($\mathcal{C}^\infty$), compactas, con borde y orientadas (resp. no orientadas) luego con grupo de estructura de su fibrado normal el SO(q) (resp. el O(q)) para todo q>0, se dice que dos variedades V, V' $\in \mathcal{D}$, de igual dimensión q, son "cobordantes" si su unión disjunta es el borde, ∂M, de una tercera variedad M $\in \mathcal{D}$ (q+1)-dimensional. Esta noción determina sobre $\mathcal{D}$ una relación de equivalencia (menos fina que la clasificación salvo difeomorfismo) cuyas clases forman, con la operación unión disjunta de variedades representantes, un grupo abeliano Ω_q (resp. $\mathfrak{N}_q$) con la notación que el trabajo de Atiyah de 1961 justifica. Además el producto topológico hace de la suma directa $\Omega_* = \Sigma\, \Omega_q$ (resp. $\mathfrak{N}_* = \Sigma\, \mathfrak{N}_q$) un anillo graduado.

El problema es *cómo decidir si una variedad es borde de otra*, y *determinar cuántas clases existen en Ω_* (resp. en $\mathfrak{N}_*$)*. La *primera* pregunta ya fue respondida por Pontrjagin, antes y además de Thom, demostrando que ello sucedía "si y sólo si los números de Stiefel-Whitney son todos cero". La *segunda* la respondió Thom en 1954 ayudándose del concepto de regularidad transversa, de "posición general", de la teoría de fibraciones y de los últimos resultados en teoría de la homotopía, demostrando que se reducía a un problema de teoría de homotopía. Precísamente demostró que $\mathfrak{N}_*(O) = \mathbb{Z}_2\,[X_2, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9,...]$ con un generador $X_q \in \mathfrak{N}_q$ para cada dimensión que no es de la forma 2^m - 1; si q es par entonces puede ser tomado como generador el q-espacio proyectivo. Dold en 1956 construyó generadores para q impar.

Para el caso orientado, la primera pregunta fue respondida por Pontrjagin, Thom, Milnor, Averbuh y Wall demostrando que ello sucedía "si y sólo si se anulaban tanto sus números de Stiefel-Whitney como los números de Pontrjagin", mientras que fue Thom quien demostró que "El anillo Ω_*, módulo el ideal constituido por los elementos de torsión 2, es un anillo de polinomios $\mathbb{Z}[X_4, X_8, X_{12}, X_{16},...]$ con un generador en cada dimensión divisible por 4". La descripción de los términos de torsión 2 de Ω_*, fue establecida por Wall en 1960.

Para su demostración Thom se apoyó en los siguientes hechos sobre fibrados y homotopía: Sea A(SO(q)) el fibrado universal en q-bolas asociado a SO(q), cuya base es la grasmaniana de los q-planos en un *espacio euclídeo* de dimensión suficientemente grande (satisfaga encaje de Whitney); si se identifica su borde a un punto, se obtiene un espacio designado M(SO(q)) que se conoce como el complejo o espacio de Thom. Si G es un subgrupo cerrado de modo análogo se obtiene el espacio de Thom M(G), y la inyección de G en SO(q) induce una aplicación canónica de M(G) en M(SO(q)). Análogamente la inclusión de SO(q) en SO(q+1) induce un encaje de M(SO(q)) en M(SO(q+1)) . Es fácil ver que esta inyección posee la propiedad homotópica de una suspensión, es decir, que induce un isomorfismo de los grupos de homotopía

$$\pi_{q+k}(M(SO(q))) \to \pi_{q+k+1}(M(SO(q+1)))$$

para $k < q$, de modo que estos grupos son independientes de q, siempre que q sea suficientemente grande, es decir el espacio u objeto de Thom estable para el *grupo especial ortogonal estable* $SO = \cup SO(q)$ viene dado por $\mathbf{M}(SO) = (O, M(SO_1), M(SO_2),\ldots)$. En su trabajo de 1954 Thom demostró que el llamado "grupo de homotopía traza" $\{S^o, \mathbf{M}(SO)\}_q = \lim \pi_{q+k}(M(SO(k)))$ es isomorfo al grupo de cobordismo Ω_q para el grupo SO, o bien que el grupo de homotopía estable para q suficientemente grande $\pi_{q+k}(M(SO_q))$ es isomorfo al $\Omega_q(SO)$.

Análogamente al considerar el subgrupo $G = U_q \subset SO_{2q}$, como el espacio clasificante BU_q es un subcomplejo de BU_{q+1} se sigue que el espacio de Thom $M(U_q)$ es un CW-complejo y puede verse que la doble suspensión $\Sigma^2 M(U_q)$ es un subcomplejo de $M(U_{q+1})$ lo que nos determina el *complejo de Thom estable* para el grupo $U = \cup U(q)$ por $\mathbf{MU} = (0, 0, M(U_1), \Sigma M(U_1), M(U_2), \Sigma M(U_2),\ldots)$ y, como antes, el "grupo traza" $\{S^o, \mathbf{MU}\}_q$ (isomorfo al grupo de homotopía estable $\pi_{2q+k}(M(Uq))$ para q suficientemente grande) es isomorfo al $\Omega_q(U)$ [Obsérvese que los isomorfismos de los grupos de homotopía anteriores nos definen las equivalencias homotópicas débiles ω_q: $\Sigma M(SO(q)) \approx M(SO(q+1))$].

Después del teorema de representabilidad de Brown (1962) {Dado un functor contravariante h definido en una categoría homotópica de CW-complejos con punto base y valores en la categoría de conjuntos, para todo $X \in CW^+$ existe un isomorfismo $h^q(X) \approx [X,E_q]$ para algún CW-complejo E_q}, y además después de la introducción por G. W. Whitehead en 1960 de la noción de espectro (en particuar Ω-espectro o Σ-espectro), éste no sólo determina una teoría de cohomología generalizada sino también una teoría de homología generalizada dada por $h_q(X) = \lim \pi_{k+q}(E_k \wedge X)$. Una de las más importantes aplicaciones a problemas geométricos de la cohomología generalizada, el espectro del complejo de Thom MU define una teoría de cohomología U^* cuyo anillo base (o de coeficientes) $\Lambda_* = U^*(S^o)$ es isomorfo al anillo de bordismo complejo Ω_*^U , donde Λ_* posee graduación no positiva y Ω_*^U graduación no negativa. Novikov en 1967 calculó el algebra A^U de las operaciones cohomológicas de la teoría U^* y construyó la denominada sucesión espectral de Adams-Novikov. En 1970, apoyándose en la cohomología del espacio clasificante $H^*(BSp)$ (anillo de polinomios sobre $\mathbb{Z}_2$ con generadores las clases de Pontrjagin simplécticas $p_i \in H^{4i}(BSp)$) Don Porter procedió al estudio del bordismo simpléctico Ω_*^{Sp}, es decir $U^*(MSp)$. Uno de los modos de conocer los grupos de bordismo y cobordismo de los seis grupos $1 \subset Sp \subset SU \subset U \subset SO \subset O$, es con ayuda del concepto de la noción de X-variedad.

Para toda q-variedad $V \in$ Diff, si X es un espacio sobre el que opera el grupo O_q, se puede formar el espacio débilmente asociado con base V y fibra X de modo que después de Atiyah los grupos de bordismo correspondientes se designan $\mathfrak{N}_q(X)$, en particular tomando como X los espacios homogéneos O/G sobre los que opera G, resulta que el anillo $\mathfrak{N}_*(O/O)$ es exactamente el anillo de cobordismo no orientado $\mathfrak{N}_*$ y $\mathfrak{N}_*(O/SO)$ es el anillo de cobordismo orientado Ω_*. El estudio del anillo $\mathfrak{N}_* = \mathfrak{N}_*(O/1) = \mathfrak{N}_*(O)$ fue estudiado por Pontrjagin en su publicación *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory* de 1959. Una O-estructura sobre V es una *trivialización del O-fibrado tangente* de V (el fibrado tangente estable). Las variedades que admiten una tal estructura (paralelizables) se las dice "π-variedades" o variedades referenciadas. Se deduce que $\mathfrak{N}_k(O)$ es isomorfo al grupo de homotopía estable $\pi_{k+n}(S^n)$ de la n-esfera con n suficientemente grande. Este es el hecho básico para el método de estudio por Pontrjagin de los grupos de homotopía.

Si P es el espacio proyectivo real infinito, con el grupo de rotaciones infinito SO actuando de modo natural, a los grupos de cobordismo $\Omega_k(P)$ para variedades con una P-estructura se les llama *grupos de bordismo spinorial.*. Este nombre es apropiado puesto que una P-estructura, hablando sin precisión, es una "elevación" del grupo estructural del fibrado tangente al grupo espinorial infinito. Una variedad admite una P-estructura si y sólo si su clase de Stiefel-Whitney w_2 es cero. Los grupos $\Omega_k(P)$ no tienen torsión impar.

Los trabajos de cálculo de los grupos de cobordismo completando los de Thom y extendiéndoles a los demás grupos clásicos tuvieron lugar operando básicamente sobre variedades diferenciables, y así la determinación final de Ω_* (incluida la estructura multiplicativa de Ω_*) fue realizada por Wall en 1960, también los trabajos de Milnor con el trabajo ya citado, Liulevicius en 1962, el de Wall de 1961 sobre el cobordismo de pares, el de Atiyah en 1961 sobre la dualidad bordismo - cobordismo y la demostración de varias sucesiones exactas relacionando el cobordismo orientado y el no orientado introducidas con anterioridad por Rolhin, lo que a su vez consideró de nuevo Wall en sus trabajos de 1963 (Cobordism of combinatorial n-manifolds for n<8, 1964) al tratar estas sucesiones en el cobordismo diferencial y combinatorio; no obstante fue en este trabajo de 1964 donde por primera vez se introduce la noción de PL-variedad como concepto natural para desarrollar una teoría de homología generalizada, (ver el libro sobre PL topología de J. F. P. Hudson publicado en 1969). En el año 1964 también vio la luz el trabajo de Milnor introduciendo la noción de "microfibrado" que evita el problema de la no existencia del fibrado tangente en las categorias PL y Top lo que impedía aplicar las ideas de Thom pese a la posibilidad de definir adecuadas clases características como las de Stiefel-Whitney para la categoría Top, como ya había probado el propio Thom en 1952. El estudio del grupo especial unitario SU_r se debe a Conner y Floyd en trabajos de1964 y de 1965 aunque también Lashof y Rothenberg determinaron su valor.

Fue en 1966 con la obra de R. E. Williamson Jr. (como ya hemos señalado) que por primera vez, apoyándose en la noción de microfibrado, se estudia el PL-cobordismo sobre la categoría de los complejos simpliciales localmente finitos y PL aplicaciones para establecer la relación entre los grupos de PL-cobordismo Ω_q^{PL} y los grupos de homotopía de un cierto espectro y prueba así que $\mathfrak{N}_*^{PL} = \pi_*(MPL)$. Siguieron entre otros, los trabajos de W. Browder sobre la clasificación salvo difeomorfismo de todas las variedades diferenciables de un determinado tipo PL fijo, prototipo del cual es el trabajo de Milnor sobre estructuras diferenciables sobre esferas y que culminó con la teoría del "suavizamiento" de esquinas desarrollada por Hirsch, Mazur, Lashof y Rothenberg . También son de destacar los trabajos de 1964 y 1965 sobre clases características de Brown y Petersen, los de Sullivan en 1966 con la determinación de $H^*(G/PL)$ y $H^*(\Omega(G/PL))$, los de Kirby-Siebenmann y los de Milgram determinando $H^*(G)$, $H^*(BG)$ y $H^*(G/O)$, los de

Levitt en 1969 sobre el espectro de Thom generalizado, los de Browder, Liulevicius y Peterson en 1966 sobre teorias de cobordismo determinando el isomorfismo entre los anillos $\mathfrak{N}_*^{PL}$ y $\mathfrak{N}_*^{O} \oplus H_*(BPL)/H_*(BO)$ con $\mathfrak{N}_*^{O}$ el anillo de cobordismo no orientado determinado por Thom, la determinación del tipo de homotopía de G/Top así como por Sullivan, mientras que los resultados de Browder, Liulevicius y Peterson antes citados junto al teorema de transversalidad topológica de Kirby y Siebenmann implicaban, salvo quizás para q = 4, que $\mathfrak{N}_*^{Top} = \pi_*(MTop) = \mathfrak{N}_*^{O} \otimes H_*(BTop)/H_*(BO)$ con $\mathfrak{N}_*^{O}$ el anillo de cobordismo no orientado de Thom, y que o bien $\mathfrak{N}_4^{Top} = \pi_4(MTop) \cong \mathfrak{N}_*^{O} \oplus \mathbb{Z}_2$ o bien $\mathfrak{N}_4^{Top} = \pi_4(MTop)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathfrak{N}_4^{O}$.

Así como Milnor introdujo la noción de Microfibrado para disponer en las categorías PL y Top de una noción equivalente a la de fibrado tangente en la Diff, para disponer de una noción de fibrado normal en la categoría PL, Kato y Morlet crearon la noción de "*fibrado en bloques*": Para un PL complejo celular K, esto es un poliedron, un q-fibrado en bloques ξ/K posee un espacio total $E(\xi) \subset |K|$ que para cada célula $\sigma \in K$ el bloque $\beta_\sigma \subset E(\xi)$ es tal que (β_σ, σ) es un par de (q+i, i)-bolas no anudadas. El estudio detallado de sus propiedades como functor homotópico fue iniciado en 1966 por Rourke y Sanderson, aunque su publicación se efectuó a partir de 1968. El carácter functorial de esta construccion, propia de la topología geométrica, sigue por satisfacer un teorema de subdivisión, este functor posee pulls-backs, la adecuada suma de Whitney, etc. En 1969 F. S. Quinn (A geometric approach to surgery), en su tesis doctoral en Princeton, introducía la noción de *fibrado mock* (casi fibrado) que también estudiaron Rourke y Sanderson. Es una teoría de fibrados sobre la categoría PL de los CW-complejos celulares que permite dar directamente una interpretación geométrica de una teoría de cohomología generalizada como por ejemplo la teoría del cobordismo que es el caso más sencillo. Por ejemplo, Rourke probó que cualquier $\mathbb{Z}_p$-variedad está representada por un p-poliedron lo que prueba parcialmente una conjetura establecida por Sullivan en el curso que desarrolló en el M. I. T. con el título "Geometric Topology Lectures Notes" en 1971. En esta interpretación geométrica se tienen los habituales conceptos como: productos, isomorfismo de Thom, teoremas de dualidad, composición de fibrados mock, etc. y que poseen demostraciones inmediatas. También una breve demostración de un PL- teorema de transversalidad.

Rourke y Sanderson generalizan y consideran una categoría $\mathfrak{M}$ de "pseudo-variedades" e inclusiones en el borde, donde una pseudo-variedad es un cierto objeto con una determinada dimensión y un borde con una dimensión inferior. Dado un complejo celular K definen *la categoría asociada*, que designan también K [como en el trabajo sobre Δ-sets de 1970], con objetos las celulas de K y morfismos las inclusiones "cara" en K. Entonces definen el concepto de un *($\mathfrak{M}$, q)-fibrado*, ξ^q/K, como *un functor* ξ: $K \to \mathfrak{M}$ *que eleva la dimensión en* q *y tal que los bloques* $\xi(\sigma)$ "se unen juntos análogamente a las células de K" [(i) $\partial\xi(\sigma) = \{\xi(\tau) \mid \tau \subset \sigma\}$; (ii) $\xi(\sigma) \cap \xi(\sigma) = \{\xi(\rho) \mid \rho \in \sigma \cap \tau\}$]. Concepto del que resultan como caso particular toda una serie de teorías de bordismo. Estas situaciones llevaron a Rourke y Sanderson a establecer una caracterización axiomática de las variedades que admiten una "teoría bordante" enunciando los que llamaron "Axiomas para una teoría", es decir, fijaron las propiedades que debe cumplir una categoría $\mathfrak{M}$ para que admita una teoría bordante.

Resumiendo: Señalemos que desde los trabajos de Thom, los avances y resultados alcanzados en la teoría del cobordismo, principalmente a partir de los trabajos de Wall, Milnor, Atiyah y Novikov, ha sido espectacular obteniéndose la respuesta a diversos y fundamentales problemas de la Topología Geométrica, como la refutación por Milnor del Hauptvermutung (demostrando, para variedades de dimensión mayor que cuatro, la falsedad de la afirmación: "si M_1, $M_2 \in$ PL tales que FM_1 es homeomorfo a FM_2 entonces M_1, M_2 son PL-isomorfas" o sea la equivalencia de los isomorfismos en ambas categorías) y el poder abordar problemas que, como el de la teoría de cobordismo de variedades con singularidades, encontraron su correcto planteamiento mediante métodos geométricos naturales más simples como los proporcionados por las teorías de los espacios fibrados Block y Mock introducidos por C.P. Rourke, y B. J. Sanderson [11], y la colaboración de S. Buoncristiano, al inicio de la década de los 70 en la Universidad de Warwick (G. B.). Conceptos que, a su vez, permitieron un superior proceso de abstracción y generalización de la noción de cobordismo que permitió el abordar la solución de problemas hasta entonces inaccesibles, contexto en el que se encuentra la notoria labor investigadora del Profesor Domínguez Murillo en su primer periodo investigador. La generalización dada, no obstante, hacen de esta disciplina matemática un dominio con innumerables problemas abiertos, del mayor interés tanto en Topología Geométrica, como en sus aplicaciones. Precisemos que hoy, además de las clásicas obras de R. Stong de 1968 ["*Notes on Cobordism Theory* " de la Princeton U. P.], de las notas de C. Schochet del curso 1970/71 ["*Cobordism from an Algebraic point of view*", publicadas por la universidad de Aarhus, Dinamarca], y del I. Madsen and J. Milgram ["*The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds* "], se dispone de la traducción de la obra de B. I. Botvinnik en 1992 ["*Manifolds with singularities and the Adams-Novikov spectral sequence*", publicada por la Cambr. Univ. Press] (que nos confirma en la efectividad de la primera orientación en que pensamos iniciar al recipiendario) y, un cuarto libro últimamente publicado por la Springer, en diciembre de 1998, en su serie "Monographs in Mathematics", un completo tratado realizado por Yu. B. Rudyak en el Mathematisches Institut de la Universidad de Heidelberg con el título "*On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism* ", cuyo estudio aconsejamos como quizás la mejor y más rápida vía de penetración en este campo de investigación, hoy, aún tan poco conocido en España y que tantas posibilidades ofrece.

Sobre la obra del Prof. Domínguez Murillo

De cuanto precede aparece claro que, en aquella época, era muy atrayente la efectividad del método de las sucesiones espectrales, particularmente en el estudio de las teorías de cohomología y homología generalizadas. Ahora bien, dadas las aptitudes y formación del recipiendario, pensamos que dentro del primer grupo de problemas que hemos indicado nos ocupaba, le sería más factible y de interés el que realizase una tesis doctoral sobre un tema de topología geométrica con más peso geométrico que algebraico. Fue la ocasión de abordar las técnicas geométricas de estudio y análisis de la teoría del cobordismo en la categoría PL, dominio en el que, desgraciadamente, ningún otro trabajaba en España, al menos que nosotros supiéramos. Normalmente para abordar un problema topológico del tipo de "clasificación", "extensión", "elevación" de aplicaciones se recurre a expresarlos en la teoría de homotopía y para su resolución se comienza con el cálculo de los grupos de homología para seguir con los de cohomología de todos los espacios implicados; de no encontrar la solución se observa su

[11] En 1971, tuvimos ocasión de, invitados por la Universidad de Warwick, asistir durante mes y medio a un simposium en el que cambiamos ideas con el profesor Rourke, así como conocer a S. Buoncristiano y los trabajos que realizaba sobre la teoría del cobordismo, bordismo con coeficientes, etc. y alguno de los resultados obtenidos en la elaboración de su tesis doctoral.

comportamiento respecto a las operaciones cohomológicas primarias (productos cup, operaciones de Steenrod); de no quedar aún resuelto se recurre a las operaciones secundarias, terciarias, etc. hasta que uno se aburre y, cansado de operar y operar sin poderlo resolver, acaba abandonándolo o se le ocurre estudiarlo con la técnica más potente de las sucesiones espectrales aplicadas, preferentemente, sobre un planteamiento del problema en una teoría de cohomología generalizada. Es así que, más de un especialista, en aquella época lo que hacía era abordar directamente el problema planteándolo o reduciéndolo al estudio de una adecuada sucesión espectral.

Por ello, y ante la analogía observada por L. Smith entre la sucesión espectral pullback y la sucesión espectral de Adams y la de Novikov, compartiendo la idea de Adams y otros especialistas sobre la conveniencia de introducir cuanto antes al joven estudioso en la técnica de la sucesión espectral, de modo análogo a lo que ya habíamos comenzado a realizar con otros dos colaboradores cuyos trabajos de doctorado dirigíamos en aquellas fechas, inicialmente pensamos familiarizar al Prof. Domínguez Murillo en el conocimiento y utilización de las sucesiones espectrales del tipo de las de Adams pretendiendo, en primer lugar, aclarar y/o precisar la relación observada por L. Smith, y que posteriormente tratase de interpretarlo en la cohomología generalizada definida por las teorías de cobordismo, habida cuenta la denominada sucesión espectral de Adams-Novikov. La publicación del libro de Botvinnik en 1992 antes citado nos mostró, más tarde, que no hubiera sido una idea equivocada.

Los trabajos del recipiendario, Prof. Dr. Dominguez Murillo, se pueden clasificar en cuatro épocas distinguidas: 1ª) Teoría del Cobordismo, 2ª) Teoría de la Homotopia Propia, 3ª) Topología Digital, y 4ª) Sistemas Informáticos. Epocas que se agrupan en dos periodos bien diferenciados que podríamos llamar: el "topológico geométrico" al que pertenecen las dos primeras épocas, y el "topológico informático" que comprende la tercera y cuarta época. El primer periodo viene caracterizado, esencialmente, por desarrollar una investigación básica en las categorías PL, Top y Π; mientras que, en el segundo periodo, parece centrarse en una a modo de búsqueda de la *aplicación* al campo fenomenólogico -en el más amplio sentido de la palabra- de su formación y resultados en el primer periodo".

Si el paso de la primera a la segunda época fue por puras exigencias matemáticas, estamos convencidos o *sentímos* -sin que hayamos podido saberlo- que el paso de la segunda a la tercera, fue más instintiva que racional, más por circunstancias humanas que por razones matemáticas o de satisfacción intelectual, lo que -y ello prueba una vez más la inteligencia o capacidad de adaptación del recipiendario- no es obstáculo para que, en todas y cada una de ellas, haya desarrollado siempre una muy satisfactoria, responsable y eficaz labor. Veamos cada una de estas épocas. Aunque dados los resultados y formación que había alcanzado en teoría del cobordismo esperamos que no abandonará este campo de investigación en el que -a nuestro conocimiento- tampoco ha llegado a introducir a ninguno de los investigadores por él formado. No obstante ha tenido la precaución de redactar muy completos e interesantes "Lectures Notes" y libros (redactados en solitario o en colaboración) sobre los temas esenciales, que demuestran hasta qué punto ha penetrado en el fondo de las ideas abordadas, como son los titulados: "Introducción a la teoría topológica de la dimensión"; "Introducción a la Intuición Topo-Geométrica y Clasificación de superficies"; especial mención por su elegancia y claridad, nos merece el "Geometrical Introduction to bordism theory" (La primera obra completa en español de introducción a la teoría del cobordismo); así como el "Topología Poliedral" esencial exposición en el orden de ideas de los cursos de Zeeman sobre topología combinatoría en el I. H. E. S. ; más el libro de texto redactado en colaboración "Elementos de Topología General" publicado en 1997 por Addison-Wesley Iberoamericana.

Epoca 1ª . - Interpretación geométrica de la Topología Algebraica

Como consecuencia de la formación y aptitudes que en la realización de la tesina nos había demostrado, pensamos que lo más adecuado era orientar su trabajo para que se sirviese de sus conocimientos sobre variedades topológicas y que abordase el estudio del trabajo de Thom de 1954. La familiaridad del Prof. Dr. Domínguez Murillo con las técnicas de la Topología y la Geometría, pronto se reforzaron con las propias a la Topología Diferencial y su aplicación o interpretación en PL-topología y/o tratamiento de las variedades PL, técnicas que se pueden considerar, junto con su imaginación y fino análisis, una constante en su obra. Fue suficiente con un curso de estudios profundizando su formación en Topología Algebraica y espacios fibrados, más la teorías de los fibrados en bloques y los fibrados mock de Rourke y Sanderson.

Su tesis doctoral, sostenida en 1974 y en la que consiguió la máxima calificación, se publicó en varios trabajos. En el primero recoge el resultado de su observación sobre el hecho de que las teorías de cohomología generalizada si no eran teorías ordinarias se debía a que los modelos que consideraban no admitian la construcción cono, lo que le indujo a considerar el bordismo singular entre pseudovariedades ["Grupos de pseudobordismo ", Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza, 1975] que resultó ser una homología ordinaria. Hecho que demostró construyendo un isomorfismo canónico entre estos grupos y los de homología singular, como aparece publicado en la nota de la Rev. Real Acad. Ciencias, 69, 149-156, 1975 titulada "Interpretación geométrica de la homología singular". C. McCrory en su tesis hizo algo análogo, desarrollando las ideas de Alexander en 1915 y, aunque utiliza modelos más débiles que las pseudovariedades, le permiten ver con ayuda de la *sucesión espectral de Zeeman*, cómo las singularidades de un espacio perturban la dualidad de Poincaré limitando el grado de libertad de sus ciclos. Hay que tener en cuenta, como recuerda McCrory, que en la dualidad de Poincaré se manifiesta la mayor o menor homogeneidad de una variedad, hecho cuya mejor expresión geométrica la proporciona la teoría de la intersección de Lefschetz.

Es decir, el recipiendario interpretó la homología como una teoría de bordismo con pseudovariedades y la cohomología como una teoría de fibrados mock sobre pseudovariedades (en el orden de ideas de las teorías bordantes de Rourke y Sanderson). Entre las interpretaciones determinadas destaca la correpondiente al teorema de Hurewicz que aparece como un proceso de desingularización. Estas interpretaciones geométricas despertaron tal interés que, en el grupo de Topología de Lille, J. P. Dematte en 1983 defendió una tesis doctoral, dirigida por el Profesor J. P. Brasselet, sobre el trabajo realizado por el Dr. Eladio Domínguez. Estudios sobre temas análogos también fueron realizados por J. P. Reveille y A. Didierjean y colaboradores del grupo de topología de Estrasburgo.

Otro resultado obtenido por el recipiendario fue una generalización del teorema de subdivisión cilíndrica a los complejos de bolas localmente finitos de dimensión finita, lo que le permitió construir una extensión directa del PL-cobordismo a los poliedros euclídeos con lo que todos los resultados del libro de S. Buonocristiano, C. P. Rourke y B. J. Sanderson (A Geometric

Approach to homology theory) son válidos para los poliedros euclídeos. Tambien es de destacar el trabajo sobre bordismo infinito que al considerar como modelos las pseudovariedades se obtiene una teoría de homología ordinaria que sobre los espacios localmente compactos coincide con la de segunda especie.

Epoca 2ª.- Teoría de la homotopía propia

Al querer dar una interpretación del principio de dualidad de Poincaré sobre las variedades homológicas, el recipiendario se vio obligado a considerar los grupos de homotopía propia, que ya habían sido considerados por Siebenmann en 1965 y en teoría de esquemas por Grothendiek en 1956, y los que desarrollaron R. Brown, Čerin y T. Porter. Estos consiguieron determinar un gran número de tipos distintos de grupos de homotopía cada uno midiendo unas particulares propiedades geométricas, aunque encontraron alguna relación entre ellos facilitando su cálculo, no se conocían teoremas suficientemente potentes de cálculo, relaciones con teorías de homología y, quizás lo más importante, no se comprendía bien la homotopía propia como una teoría de homotopía. Son diversos los trabajos sobre este tema de Domínguez Murillo, bien individuales o en colaboración, destacan el "*Calculations of cylindrical p-homotopy groups* " [Proc. Edinb. Math. Soc. (1989)] dando técnicas de cálculo, el "*A theoretical framework for proper homotopy theory* " [Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. (1990)] en el que se sitúan todos los grupos de homotopía propios conocidos en el marco de una teoría de homotopía sobre una adecuada categoría que admite cofibraciones en el sentido de Baues, verificando que las relaciones conocidas son casos particulares de sucesiones de tipo Puppe. Una de las aplicaciones obtenidas, presentada en "*Lusternik-Schnirelmann in proper category* " [Pacific. J. Math. (1992)], es la que caracteriza a los espacios euclídeos como las únicas variedades abiertas con invariantes de Lusternik-Schnirelman igual a 2, mientras que en la "*Proper homotopy classificatión of graphs* " [Bull. London Math Soc. (1990)] se presenta la clasificación de los grafos localmente finitos.

Uno de los problemas aún abiertos, que ocupó a Domínguez Murillo en su segunda época (y sigue ocupando a distintos profesores de los grupos de Sevilla, Canarias y Logroño que inicialmente se formaron bajo la dirección del recipiendario o de nosotros mismos) es el de encontrar la más *adecuada categoría para desarrollar una teoría de homotopía*. Una primera solución la proporcionó la categoría de los CW-complejos [12] introducida por J. H. C. Whitehead en 1949, como probaron Milnor en 1959 y Steenrod en 1967 dado que "toda aplicación entre CW-complejos es homotópica a una aplicación celular", lo que proporciona una analogía entre lo que *se puede hacer topológicamente con un espacio*, y lo *que podemos hacer algebraicamente con su cadena de grupos de homotopía.*

Epoca 3ª.- Topología digital

Las imágenes digitales localizadas en la pantalla de un ordenador son objetos discretos que tratan de simular un objeto continuo, por lo que se producen graves inconsistencias entre el mundo y la máquina, que utiliza procesos discretos, y el mundo representado que está construido

---

[12] Donde las letras CW, provienen: la C de cierre finito (el cierre de cada célula está contenido en la unión de un número finito de células abiertas); y la W de topología débil (weack, la topología del espacio topológico subyacente es la topología débil con respecto a las celulas cerradas del complejo).

con los números reales. Diversos autores están dedicando grandes esfuerzos al desarrollo de técnicas formales discretas que permitan simular el mundo continuo percibido en el mundo discreto de la máquina, pero en la mayoría de los casos tienen que reconstruir la topología, desde un punto de vista discreto, a imagen y semejanza de la topología continua, sin poder utilizar herramientas ya desarrolladas en ésta última especialidad.

En esta área de trabajo es de destacar la técnica que Domínguez Murillo y colaboradores están desarrollando. Y que coinsiste en el establecimiento de una arquitectura entre el mundo discreto y el mundo continuo que aquél pretende representar, basada en varios niveles intermedios que se relacionan mediante convenientes funciones. Con dicha arquitectura están desarrollando un método de trabajo en el campo de la Topología Digital que ya, en el momento actual, ha mostrado ser potente. De hecho se ha logrado probar el teorema del índice digital en cualquier dimensión, anteriormente conocido y probado sólo en dimensión dos y tres por Rosenfeld, presentado en "*Determinig the components of the complement of a digital (n-1)-manifold in* $\mathbb{Z}^n$ " [Lect. Not. Comp. Sc. (1996)]. También se ha probado que en dicha arquitectura se recogen todas las diferentes perspectivas desarrolladas por otros autores y la práctica totalidad de todas las nociones de superficie digital, lo que han presentado en "*Digital Lighting Functions* " [Lect. Notes Comp. Sc. (1997)].

Epoca 4ª.- Sistemas de Información

Uno de los problemas más acuciantes en el campo de los sistemas de información es el de su fundamentación, por no existir una teoría adecuada en la que basarse para el desarrollo de las técnicas que le son propias. Aunque en ocasiones se utiliza las matemáticas, la visión y los aspectos recogidos son muy pobres debido esencialmente a que, por su propia característica, los sistemas de información deben contemplar, como una componente inherente, la perspectiva que sobre ellos tienen los propios usuarios de dichos sistemas. Algo para lo que las matemáticas conocidas, actualmente, no proporcionan mecanismos adecuados. Todos los esfuerzos en esta línea se están dedicando a desarrollar técnicas, lo más formales posibles, que incluyendo la subjetividad como componente intrínseca, se oriente a lo que podría ser una teoría de los sistemas de información.

En esta línea de trabajo destacaríamos la propuesta de metamodelización, presentada por el recipiendario en "*A Conceptual Approach to Meta-Modelling* ", [Lect. Notes Comp. Sc. (1997)], mediante la que se pretende desarrollar una teoría de modelización; es decir, una teoría que proporciona herramientas y útiles para el desarrollo formal de tipos de modelos de sistemas de información. Dicha teoría está basada en los conceptos, como elementos primitivos que recogen la subjetividad, y la noción de soporte conceptual que refiere a un cierto tipo de estructura jerárquica de conceptos que determinan el tipo de modelo.

La Fenomática, objeto principal del discurso para el ingreso del Profesor Dr. D. Eladio Domínguez Murillo en esta Academia, se enmarca en esta área de trabajo. La Fenomática es en realidad el resultado de un análisis de las limitaciones de las matemáticas actuales respecto de su expresividad en el mundo de la comunicación y un intento de recoger y añadir los aspectos que aparentemente son necesarios. El discurso pertenece trivialmente a la cuarta época, pero entendemos que, por su naturaleza, no se trata de una consecuencia -en el sentido físico-práctico del término- sino más bien la consideraría un análisis, *una metateoria de los "sistemas de información"*. Es como un modo de reflexión, buscando la fundamentación matemática de la Teoría de los Sistemas de Información, desde la labor del recipiendario en las tres épocas precedentes ante las investigaciones, estudios teóricos y las experiencias (o resultados prácticos) alcanzados con los programas y proyectos que desarrolló durante la década de los 80. En un querer saber qué es lo que comprende, se conoce, o mejor, se siente, (o presiente) que pueda ser *razonablemente estructurable matemáticamente* en los Sistemas de Información. Me planteé, de modo inconsciente, la cuestión ¿qué tipo de actividad matemática desempeña Domínguez Murillo? la que manifiesta realizar el Prof. Zeeman [13] según dice al responder a una interview que le hicieron recientemente, o la que realiza el Prof. Thom.

Creo recordar la referencia que a nosotros realiza al inicio de su discurso Domínguez Murillo. El hecho es que algunas de las reflexiones, que nos presentaba, habíamos tenido ya ocasión de planteárnoslas nosotros mismos, en el segundo lustro de los años 70, ante la lectura del primer volumen de la obra de S. Eilenberg "Automata, Languages and Machines", y al dirigir la tesis doctoral del que fue nuestro apreciado alumno y hoy distinguido amigo Dr. Sols Lucía. Todos sabemos cómo la Informática ha revolucionado el cálculo numérico con la introducción de las computadoras digitales y el software científico. Las computadoras operan sobre una *discretización* de los problemas de cálculo de las Ciencias Físicas. Esta discretización se realiza, principalmente, mediante el método de 'Elementos Finitos' y, en general, reduce los problemas al estudio de *sistemas algebraicos* lineales o no lineales. Sin embargo, aunque en el caso lineal la existencia de solución numérica computacional está garantizada, no se puede decir lo mismo en el caso no lineal ya que, en éste, la solución numérica computacional, depende de la lentitud de la convergencia (o divergencia) del método iterativo que es necesario aplicar como, por ejemplo, sucede en los problemas de tipo dinámico no lineal. Esta tesis doctoral la realizó, como hemos citado, el Dr. D. Ignacio Sols Lucía, hoy Catedrático de Geométrica 3° de la Universidad de Madrid, y para su realización fueron esenciales las conversaciones que sostuvimos con el propio profesor S. Eilenberg quien, en el curo 1975/76, nos visitó y dio varias conferencias en nuestro seminario.

También fue de gran utilidad la colaboración, con la discusión sobre casos concretos que nos proporcionó nuestro, también apreciado alumno y hoy distinguido amigo, Dr. D. José Meseguer Guaita (hoy Principal Scientist del Computer Science Laboratory del Stanford Research Institut, USA) que en aquel momento estaba realizando su tesis doctoral sobre determinados problemas de Informática bajo la dirección de nuestro buen amigo el Profesor D. Roberto Moreno Díaz, primer Catedrático de Ciencias de la Computación en España, y entonces Catedrático de Electrónica de la Universidad de Zaragoza. Curiosamente encontramos en los doctores Meseguer y Sols una caracterización análoga a la existente entre los profesores Zeeman y Thom.

---

[13] El profesor Zeeman, fue el fundador del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Warwick y se hallaba al frente del mismo cuando asistí invitado al simposium que se desarrollaba en aquel centro en el verano de 1971. Es un destacado especialista en PL-topología, a quien se debe la demostración del importante teorema sobre el no anudamiento de la n-esfera para $n > 5$, y que más tarde colaboró con el Prof. Thom, creador de la teoría de catástrofes, tratando de explicar a partir de la fisiología del cerebro el pensamiento o psicología de la persona, de modo que a diferencia de Thom que se sitúa a medio camino entre matemáticas y filosofía, *Zeeman se sitúa a medio camino entre matemáticas y ciencia*. Zeeman prefiere hablar a los experimentalistas y predecir experimentos para que ellos los realicen. NEWSLETTER, European Math. Soc., 30, 14-19, December 1998.

Las reflexiones que nos hicimos con la dirección de la tesis del Dr. Sols Lucía volvieron a planteársenos, años más tarde, con la lectura del libro "El todo y las partes" del Profesor F. G. Asenjo (nuestro querido y distinguido amigo, fenomenólogo, Catedrático de Lógica de la Universidad de Pittsburg (U. S. A.) y Académico correspondiente de nuestra Academia) al que tanto debemos en el Departamento de Matemáticas de nuestra Facultad. Al escuchar los comentarios y algunas consideraciones realizadas por el Dr. Domínguez al tratar de hallar una fundamentación matemática de los Sistemas de Información, sensibilizados al problema como nos hallábamos, no fue difícil recordar que podía serle útil el libro mencionado de F. G. Asenjo [14], y como consecuencia entregarle un ejemplar, quizás después de algunas citas a la labor que realizamos con los doctores Sols y Meseguer. Siete u ocho años han pasado desde aquella conversación, siete u ocho años sobre los que ha reflexionado, precisado y concluido, con la perspicacia y finura de análisis que le caracteriza.

Comentarios sobre la Fenomática

Ante la densidad y profundidad de los sutiles conceptos del tema abordado en su discurso, entendí sería más adecuado y conveniente que el comentario al discurso lo relizara el fenomenólogo que es nuestro amigo el Profesor F. G. Asenjo y así se lo solicité. Esta es la respuesta: "Edmundo Husserl fue matemático antes de inventar la fenomenología. Estudió con Kronecker, Weierstrass y Cantor nada menos; su tesis fue sobre el cálculo de variaciones, y después de graduado fue asistente de Weierstrass por un tiempo. Esta formación es evidente en todo lo que publicó, especialmente en su sentido de precisión, su devoción al sistema, su manera de acumular resultados nuevos sobre resultados anteriores, su consistencia, etc. No es de sorprenderse pues que un número apreciable de matemáticos hayan sido fuertemente atraídos por su obra, entre ellos Herman Weyl, así como hoy el Profesor Eladio Domínguez Murillo.

Whitehead advirtió contra la tendencia tan común de sucumbir a la influencia todopoderosa de una gran figura intelectual al punto de quedar atrapado por las premisas no todas válidas de la obra de tales figuras. Husserl ejerce una enorme fascinación sobre quien se acerque a sus ideas con una mente predispuesta; esta fascinación es a veces contraproducente, como lo demuestran las opiniones de muchos fenomenólogos actuales incapaces de evadirse de Husserl que no sólo no son indispensables para su método, sino que son verdaderos obstáculos para el progreso mismo de la fenomenología. En particular, debido en buena parte a las influencias de su época o en reacción a ellas, ciertas nociones básicas de Husserl tales como el esencialismo y el antipsicologismo son incompatibles con el desarrollo presente de la matemática, la lógica, la fundamentación de ambas, la ciencia de la computación, y la informática.

---

[14] Conocimos al Profesor F. G. Asenjo hacia 1976 en la Fundación Juan March por la que había sido invitado a desarrollar un curso de lógica durante un mes en aquella Fundación. En aquellas fechas éramos Secretario del Departamento de Matemáticas de la Fundación. Aquel conocimiento evolucionó primero hacia una amistad intelectual que propició una intensa colaboración del Prof. F. G. Asenjo con nuestro Departamento de Matemáticas, iniciándose con un curso de introducción a la lógica desarrollado en el Departamento de Algebra, que fue la base del actual curso de Lógica de nuestra Licenciatura. La frecuencia de sus colaboraciones (nos ha visitado desde aquella fecha en unas diez ocasiones) le hicieron acreedor al nombramiento de Académico correspondiente de nuestra Academia, mientras su bonhomía, sencillez y carácter afectuoso transformaban un conocimiento profesional en una amistad humana que nos ha enriquecido.

Felizmente, Domínguez Murillo ha sabido evadirse de una fascinación excesiva, lo cual le ha permitido utilizar varias ideas de Husserl que son pertinentes a la fundamentación de la informática de una manera sumamente original y creadora. Es imposible en unas pocas páginas resumir todo lo que el trabajo de Domínguez Murillo tiene de ingenioso y sugerente, por este motivo debo limitarme a seleccionar unos pocos tópicos que, a mi juicio, son de fundamental importancia por las razones que aclararé.

Comencemos por el hecho de que a pesar de que Domínguez Murillo utiliza las expresiones "esencia" y "eidética", su concepción del significado de tales palabras no es Platonista en el sentido de creer en la existencia de las Ideas en un cielo de objetos eternos. Husserl no era totalmente Platonista, pero sí lo suficiente para decir que dos más dos es cuatro y ni siquiera Dios puede cambiar esta situación esencial. El Platonismo es el cementerio del progreso matemático, y verdaderamente incompatible con el presente estado de la ciencia en el que la influencia de los ordenadores está en tan increíble ascenso. Cambio de premisas, hipótesis contradictorias, huida de los tratamientos axiomáticos rígidos, rechazo de un método de deducción universal, todo esto está a la orden del día, lo cual no significa de ninguna manera que la matemática tradicional esté agonizante, pero sí que hay importantes disciplinas nuevas que no podrían haber surgido sin haber dejado de lado la manera tradicional de deducir. Dice Domínguez Murillo: "Nada permanece exactamente igual, nada se mantiene." (p. 57). El énfasis, pues, está en la corriente de los fenómenos, en el proceso, en la percepción de que en todo devenir las entidades son continuamente y al mismo tiempo, idénticas y diferentes, no combinaciones de esencias fijas. Toda organización de conceptos es una función del tiempo e incluye el cambio como componente. En particular, los razonamientos de la informática son sucesiones de actos mentales, algunos relativamente completos o "finalizados", y otros "no finalizados", es decir actos cuyas referencias están aún por llegar a un estado de relativa suficiencia. En todo caso, se trata de una sucesión de transformaciones que es parte de un proceso potencialmente infinito. La concepción de Domínguez Murillo por lo tanto no pertenece en absoluto a lo que Brouwer calificó peyorativamente como "el museo de las ideas inmodificables".

Ni la matemática ni la lógica son muestrarios de un mundo de ideas por descubrir, son creaciones humanas, invenciones hechas a veces a partir de la nada. Esto nos conduce de la mano a otro tema importante, el hecho de que la subjetividad es un factor ineliminable de todo razonamiento formal. Brower reconoció este hecho e inventó el intuicionismo matemático, pero él es sólo uno de los matemáticos y lógicos que han seguido esta línea de pensamiento. Domínguez Murillo es muy consciente del papel fundamental que desempeña la subjetividad en todo razonamiento -en especial por lo que hace a los intentos de fundamentación- y en esta línea ha hecho un uso sumamente efectivo de las nociones husserlianas de nóesis y nóema. La nóesis es la parte activa de todo acto de conciencia, el buscar, cazar, crear intuitivo de la mente. El nóema es el correlato objetivo de tal intuición activa, el producto del aprehender consciente. El paralelo matemático de la nóesis es la operación como proceso computador, el del nóema es el resultado de ésa operación. Pero bien entendido, la operación comprendida como transformación en acto, como aplicación a una *situación particular de reglas preexistentes* o creadas para el caso, no como un conjunto estático de pares o tuplas ordenadas. Reducir las relaciones -y por tanto las operaciones- a meros subconjuntos de productos cartesianos ha tenido como resultado esterilizar las transformaciones, limitarlas a simples correspondencias. Los ordenadores, desde luego, ignoran y transcienden tales barreras, y así es que disciplinas como la del caos determinista han surgido y se han desarrollado al margen de un conjuntismo estrecho hoy a la defensiva y en retirada. Como dice Domínguez Murillo: "La matemática actual, bajo una actitud práctica, tiene importantes limitaciones que cuestionan su utilidad en amplias áreas de la tecnología de los sistemas de información, especialmente en aquellos en los que la subjetividad es parte esencial e indisociable." (pp. 11-12). La física reconoce por cierto la influencia del observador en la observación, y hay incluso un principio antrópico cosmológico que pone la actividad consciente humana -la nóesis- como componente esencial del cosmos. Lo cual sólo significa reconocer que "un hecho equivale al efecto de un percibir." (p. 42). Si la ciencia de los hechos físicos incluye los hechos subjetivos, la matemática no puede menos de hacer lo propio mucho más allá de lo que ya el intuicionismo e incluso el constructivismo de Erret Bishop han hecho.

Esto se puede llevar aún más lejos a un subjetivismo de segundo orden: "Lo que puede ser sentido como nóesis también es independiente de la propia nóesis. En el mismo sentido anterior algo puede ser dado como diferentes nóesis." (p. 43). Efectivamente, si la intersubjetividad ha de tomarse en serio, es necesario admitir que las nóesis del prójimo se sienten como nóesis propias. No es cosa de objetivar una nóesis como nóema, sino de sentir una nóesis como nóesis. Traducido a la matemática esto implica emplear las operaciones como parte operacional de otras operaciones, no como términos o argumentos. De lo que se trata es de obtener una nueva transformación compleja. Este tipo de reflexividad abre nuevas avenidas de investigación; pero bien entendido, no es esta la "reflexión segunda" de que se habla a menudo, la objetivación paralizante de un acto, sino *el actuar un acto*, el inyectar una transformación activa en otra transformación activa, todo lo cual puede iterarse indefinidamente.

Dice también Domínguez Murillo: "todo objeto es constructor o bien referencia genérica al efecto de un constructor. Todo objeto es nóesis o nóema genérico." (p. 39). Traducido matemáticamente, todo objeto puede ser más que un resultado intermedio de un proceso, puede ser el motor del proceso mismo, en sí una operación transformadora, así como los números pueden tomarse como funciones. Esta importante flexibilidad interpretativa hace que "La Fenomática, en cuanto a sus elementos, no debe entenderse como un sistema rígido e inamovible sino que hay que entender una plena maleabilidad en su uso." (p.51).

Y llegamos ahora a la inevitabilidad de la presencia de antinomias entendidas en un sentido eminentemennte positivo. El prejuicio anti-antinómico de siglos es, como el esencialismo, un obstáculo para la comprensión concreta de la relidad física y mental. La realidad es en alto grado antinómica, como todas las paradojas de la mecánica cuántica ponen en evidencia sin duda alguna. El devenir mismo es esencialmente antinómico: todo es igual a sí mismo al tiempo de cambiar en otra cosa, todo proceso exhibe diferencias en cada identidad discernible, así como identidades en cada diferencia. Dice Domínguez Murillo: "Quizás la corriente de fenómenos se perciba ahora como matizada, escorzada, con pequeñas o grandes variaciones, pero se siente, a pesar de ello, como la misma, se siente como el mismo perceptón anterior." (p. 59). Lo mismo y al mismo tiempo diferente. Esta verdad tan obvia, tan universalmente reconocida y entendida a fondo, se rechaza cuando se la expresa explícitamente como involucrando la contradicción que claramente incluye. Curiosa reacción intelectual, pero un hecho de siglos que está en proceso de cambio en la ciencia con la presente expansión de lógicas y matemáticas antinómicas. En las palabras de Domínguez Murillo: "Si el observador percibe dos intencionalidades distinguidas en un objeto primitivo, puede utilizar no sólo cualquiera de ellas sino que pudiera ser que le interesaran ambas en un mismo contexto. Ello es aceptable aunque concluya o sea conducido a una contradicción." (p. 84). Por esta razón una lógica fenomenológica debe ser una lógica antinómica. Domínguez Murillo tiene razón en decir que "no se conoce nada sobre las posibles leyes que regirían una lógica fenomenológica." (p. 63). Hay una fenomenología de la lógica pero no una lógica de la fenomenología. La razón está en que la descripción fenomenológica deduce a partir de contextos, y la forma de deducción varía de contexto a contexto. "El que estamos ante un estado es algo que se da o se deduce de un contexto" (p. 60). Por lo tanto la Fenomática tiene "tipos de deducción" (p. 63) pero no una manera universal de deducir.

La conclusión que debemos sacar es la de que ésto es tal cual como debe de ser. Un programa de computación es a menudo *ad hoc*, no responde a premisas universales. La situación de la Fenomática no es más que una consecuencia de la situación general creada por la práctica de los ordenadores.

Finalmente, otro tópico importante: la percepción de una parte a veces "nos conduce a la percepción de todas las partes presentes." (p. 96). Este es el principio de Proclus reafirmado por Gödel: hay partes que contienen el todo como parte. No es posible comprender la fisiología de un organismo vivo o la dinámica de un campo de fuerzas físico sin aceptar este principio. O como dice Domínguez Murillo: "un rasgo es el rasgo de algo pero siempre en relación a otra cosa." (p. 98). Esto hace que a menudo un nóema genérico debe tomarse como un universo; esto es, como una singularidad concreta que incluye todas las presencias relacionadas; en otras palabras, como un ejemplo del principio de localización múltiple, o del dicho del físico David Bohm de que todo está relacionado con todo, o del principio de Eddington de que el universo entero es inseparable del hecho más insignificante.

Es a mi juicio sumamente interesante que en el curso de desarrollar la Fenomática como una fundamentación unificada de la informática, Domínguez Murillo ha encontrado no sólo apropiado sino tambien efectivo recurrir a los tópicos que acabo de enumerar con mi mayor asentimiento personal".

Terminada la lectura de la colaboración del Prof. F. G. Asenjo, permítanme, que en primer lugar exprese, públicamente, mi agradecimiento por su tan interesante comentario al discurso del Dr. Domínguez Murillo, y, en segundo lugar, que añada una reflexión que, si puede parecer eventualmente que subjetiviza cuanto llevamos dicho en esta sesión de recepción en la Academia de Ciencias Exactas, F. Q. y N. de Zaragoza de nuestro admirado, buen amigo y compañero Prof. Dr. D. Eladio Domínguez Murillo, nos reafirma en "*el valor social e intrínseco de la ilusión del joven investigador y en la fe de que la Ciencia como contemplación sigue viva en nuestros días* ". Hace unos 38 años A. Weil (en publicación recogida en sus "Collected Papers, vol. 2, pp. 408-412, New York, Springer) decía que "Los matemáticos del siglo XVIII solían hablar de la *metafísica del cálculo* o la *metafísica de la teoría de ecuaciones*. Con ello querían expresar ciertas oscuras analogías que eran difíciles de comprender y hacer precisas pero que, sin embargo, eran esenciales para la investigación y el descubrimiento", para añadir con su fino y penetrante estilo: "Rien n'est plus féconde, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe, le pressentiment se change en certitude; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître; comme l'enseigne la Gitá on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La metaphysique est devenu mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir".

Y nada más sino concluir felicitando cordialmente por su discurso al recipiendario (y a su familia, más parte activa en la consecución de los logros del mismo de lo que puede creerse), por su actividad investigadora, docente e impulsora de jóvenes nuevos valores y por su excepcional humanidad. Reciba nuestra cariñosa bienvenida a esta Academía, desde hoy su casa, seguros que sabrá contribuir con su quehacer y excelentes dotes personales al buen nombre de esta Corporación y al bien cultural de nuestra Comunidad Aragonesa.

Gracias.