

Un modelo sencillo para el estudio del movimiento orbital alrededor de planetas con anillos

E. Tresaco^{1,2}, A. Elipe^{1,2} and A. Riaguas³

¹Grupo de Mecánica Espacial-IUMA. Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain

²Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. 50090 Zaragoza, Spain

³Universidad de Valladolid, 42004 Soria Spain

Resumen

En este artículo presentamos el análisis de la dinámica global de una partícula que se encuentra orbitando una corona circular plana, este trabajo se planteó con idea de extender los estudios que encontramos en la literatura donde se aproxima un anillo planetario por una sucesión finita de partículas o por un anillo continuo sin grosor. Además se extiende nuestro modelo del disco anular al caso de tener un planeta achatado rodeado por la corona circular, con objetivo de ir añadiendo cada vez mayor complejidad al sistema para obtener un modelo más preciso de la dinámica alrededor de planetas con anillos tipo Saturno.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es extender los estudios previos sobre la dinámica de una partícula que orbita alrededor de un anillo, donde el anillo se considera o bien formado por una sucesión finita de partículas, o por un cable circular sin grosor, al caso de una corona circular plana. Aproximando así de forma más precisa la realidad de los anillos que podemos encontrar en los planetas de nuestro Sistema, como los de Saturno, que se extienden cientos de kilómetros alrededor del cuerpo. Extender a este nuevo modelo, aunque sencillo en su planteamiento, conlleva bastantes dificultades en el tratamiento de las expresiones que describen este potencial, que incluyen distintas especies de integrales elípticas. Encontramos en la literatura un par de trabajos de Krough, Ng y Snyder [13], y Lass y Blitzer [14], en los que se dan expresiones matemáticamente correctas para estas funciones pero que no sirven para su evaluación numérica por las singularidades existentes.

Por tanto, en una primera parte del trabajo hemos estudiado el potencial creado por la corona circular mediante el análisis de sus propiedades y el trabajo con las funciones elípticas, lo que nos ha permitido reescribir las complejas expresiones de la función potencial de manera que obtenemos una correcta evaluación numérica del mismo, y de sus derivadas sucesivas necesarias para el cómputo de órbitas periódicas.

Posteriormente se presenta el estudio de la dinámica de una partícula orbitando la corona, para ello realizamos un primer análisis de los equilibrios del sistema, para posteriormente calcular las semillas de órbitas periódicas y la continuación de las familias a las que pertenecen. Para estos cálculos numéricos se han desarrollado distintas herramientas, para el cálculo de las condiciones iniciales de las órbitas usamos un programa de representación de Secciones de Poincaré, y el programa *Zeros* basado en el uso de estrategias de evolución para la minimización de funciones [1]. Para el cálculo de las familias periódicas usamos el método de continuación basado en el algoritmos de Henrard y Deprit [8], y el método de continuación de mapas de Poincaré [18]. Además estos métodos nos dan información sobre la estabilidad lineal de las familias de órbitas obteniendo de esta manera una descripción global de la dinámica alrededor de la corona.

Por último, se hace una extensión de estos resultados a un modelo más realista, en que vamos a considerar un planeta circular rodeado por una corona circular plana. Detallando los cambios en la dinámica que se obtienen al incluir un cuerpo central. Además se estudia como afectaría el considerar un coeficiente de achatamiento para el planeta, y una partición de la corona en dos más pequeñas con un hueco entre ambas. Para el modelo de planeta achatado con corona, se presenta un análisis previo de las familias de órbitas periódicas encontradas, incluyendo órbitas en el espacio, que se encuentran por resonancias entre la velocidad orbital de la partícula en el plano meridional y la velocidad de rotación de este plano.

Así encontramos y describimos la evolución de un gran número de órbitas periódicas, que nos sirven para ilustrar estructuras relevantes en el espacio de fases y sus implicaciones. Estos modelos matemáticos relativamente sencillos constituyen una primera aproximación para posteriores estudios de sistemas dinámicos más complejos, ya que las conclusiones que podemos extraer de la estructura de su espacio físico son genéricas, y por tanto de interés en el contexto de modelos que se ajusten de manera más fiel a la realidad física del problema.

2. Descripción del problema

Consideramos un disco masivo plano, es decir una lámina circular sin grosor y con distribución uniforme de masa sobre el plano ecuatorial de un sistema Cartesiano de coordenadas $Oxyz$, y centrado en el origen. El potencial creado por este cuerpo se puede

obtener directamente de su definición, resolviendo una integral de superficie con integrando el inverso de las distancias al punto donde queremos computar el potencial, o también como una cuadratura sobre anillos circulares de radios incrementales. El desarrollo en detalle de los pasos realizados para obtener la expresión de este potencial se puede encontrar en el artículo [9].

Una vez tenemos la fórmula que describe el potencial de un disco plano, obtenemos la expresión del potencial creado por una corona plana circular de radios a y b como resultado de restar dos discos concéntricos de radios $b < a$,

$$U(x, y, z; a, b) = U(x, y, z; a) - U(x, y, z; b), \quad (1)$$

donde $U(x, y, z; a)$ y $U(x, y, z; b)$ son las funciones potenciales creadas por los discos concéntricos. Teniendo en cuenta que ahora la constante de gravitación es $G\sigma = GM/\pi(a^2 - b^2) \equiv \mu/\pi(a^2 - b^2)$.

Es decir, el potencial gravitatorio creado por la corona circular es

$$\begin{aligned} U = & \frac{2\mu}{\pi(a^2 - b^2)} \left(-p_a E(k_a) - \frac{a^2 - r^2}{p_a} K(k_a) + |z| \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{sign}(a - r) \right) \right. \\ & - |z| \text{sign}(a - r) [E(k_a)F(\phi_a, k'_a) + K(k_a)E(\phi_a, k'_a) - K(k_a)F(\phi_a, k'_a)] \\ & + p_b E(k_b) + \frac{b^2 - r^2}{p_b} K(k_b) - |z| \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{sign}(b - r) \right) \\ & \left. + |z| \text{sign}(b - r) [E(k_b)F(\phi_b, k'_b) + K(k_b)E(\phi_b, k'_b) - K(k_b)F(\phi_b, k'_b)] \right), \end{aligned} \quad (2)$$

donde hemos introducido las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, & R^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ p_a^2 &= (a + r)^2 + z^2, & q_a^2 &= (a - r)^2 + z^2, \\ k_a^2 &= 4ar/p_a^2, & k'_a &= \sqrt{1 - k_a^2}, & \phi_a &= \arcsin \frac{|z|}{q_a}, \\ p_b^2 &= (b + r)^2 + z^2, & q_b^2 &= (b - r)^2 + z^2, \\ k_b^2 &= 4br/p_b^2, & k'_b &= \sqrt{1 - k_b^2}, & \phi_b &= \arcsin \frac{|z|}{q_b}. \end{aligned}$$

Este potencial es simétrico respecto a los tres ejes Ox , Oy y Oz gracias a la simetría cilíndrica del problema. Una representación de la función potencial para la sección de corte $y = z = 0$ nos muestra la existencia del origen como único punto de equilibrio inestable con sentido físico ya que encontramos otro punto crítico de carácter estable pero localizado dentro de la corona. Notar además que esta expresión del potencial solventa las dificultades de computación encontradas en formulaciones presentadas en anteriores

trabajos, de esta manera podemos proceder a obtener las ecuaciones del movimiento. La lagrangiana correspondiente al movimiento de la partícula en el espacio atraída por la fuerza gravitatoria de la corona es

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z), \quad (3)$$

donde $U(x, y, z)$ es el potencial anteriormente hallado.

Con todo esto, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la lagrangiana son

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -U_x, \\ \ddot{y} &= -U_y, \\ \ddot{z} &= -U_z, \end{aligned} \quad (4)$$

donde U_x, U_y, U_z corresponden a las derivadas parciales de la función potencial,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2\mu}{\pi(a^2 - b^2)} \frac{x}{r^2} \left(\sqrt{R^2 + a^2 + 2ar} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k_a^2\right)K(k_a) - E(k_a) \right] - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{R^2 + b^2 + 2br} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k_b^2\right)K(k_b) - E(k_b) \right] \right), \\ \ddot{y} &= -\frac{2\mu}{\pi(a^2 - b^2)} \frac{y}{r^2} \left(\sqrt{R^2 + a^2 + 2ar} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k_a^2\right)K(k_a) - E(k_a) \right] - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{R^2 + b^2 + 2br} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k_b^2\right)K(k_b) - E(k_b) \right] \right), \\ \ddot{z} &= \frac{\mu}{\pi(a^2 - b^2)} \left(\frac{2z}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2ar}} K(k_a) - 2 \operatorname{sign}(z) \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(a - r) \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sign}(a - r) \left[(E(k_a) - K(k_a))F(\phi, k'_a) + K(k_a)E(\phi, k'_a) \right] \right) \\ &\quad - \frac{2z}{\sqrt{R^2 + b^2 + 2br}} K(k_b) + 2 \operatorname{sign}(z) \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(b - r) \right) \\ &\quad \left. - \operatorname{sign}(b - r) \left[(E(k_b) - K(k_b))F(\phi_b, k'_b) + K(k_b)E(\phi_b, k'_b) \right] \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Debido a la simetría axial del problema, es de esperar la existencia de ciertas integrales que permitan la reducción del mismo. Se observa que la lagrangiana es invariante a rotaciones alrededor del eje Oz , por lo que la proyección sobre este eje del vector momento angular es una integral. En estas circunstancias el uso de coordenadas cilíndricas (r, λ, z) aparece de forma natural. Por tanto la lagrangiana (3) se transformará en

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2) + U(r, -, z),$$

como vemos la variable angular λ es cíclica, por lo que su momento conjugado $\Lambda = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\lambda} = r^2\dot{\lambda}$ es una integral del movimiento, y su correspondiente término de la energía cinética lo podemos añadir al potencial U definiendo un potencial efectivo W como

$$W(r, z) = U(r, z) + \frac{\Lambda^2}{2r^2} \quad (6)$$

Así, las ecuaciones del movimiento en coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\partial W/\partial r = -\partial U/\partial r + \Lambda^2/r^3, \\ \ddot{z} &= -\partial W/\partial z = -\partial U/\partial z, \\ d\Lambda/dt &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

El problema ha quedado por tanto reducido a un sistema de dos grados de libertad, basta con integrar el sistema formado por las dos primeras ecuaciones del sistema anterior (7), y posteriormente, mediante la cuadratura

$$\lambda = \int \frac{\Lambda}{\rho^2} dt,$$

obtendremos λ .

Para buscar las soluciones estacionarias, vamos a analizar las ecuaciones del movimiento (7) reducido a dos grados de libertad (r, z) . Debido a la complejidad de las expresiones al contener integrales elípticas, no podemos resolver analíticamente las ecuaciones de forma general, y por tanto nos vamos a centrar en el estudio de los equilibrios cuando el movimiento se da sobre el plano ecuatorial y sobre el eje Oz .

Antes de comenzar con el estudio de los puntos de equilibrios vamos a obtener una formulación para la expresión del potencial que ejerce una corona circular a la cual le añadimos un cuerpo central con un cierto coeficiente de achatamiento $\varepsilon > 0$.

Consideramos ahora una corona de radios $b < a$ localizada en el plano Oxy de un sistema de referencia inercial y centrada en el origen del sistema, por otra parte introducimos un planeta achatado con centro de masas el origen de coordenadas y tal que su plano ecuatorial normal a los polos coincida con el plano Oxy .

La representación del potencial gravitacional de un planeta de radio ecuatorial α , achatamiento ε y coeficiente gravitatorio $\beta = GM_{bod}$, viene expresado en coordenadas cilíndricas (r, λ, z) como

$$U_{bod} = -\frac{\beta}{R} + \frac{\beta}{R} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \varepsilon P_2(z/R) = \beta \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon \frac{3\alpha^2}{2R^4}\right), \quad (8)$$

con $R^2 = r^2 + z^2$.

El nuevo potencial gravitatorio vendrá dado por la composición de este con el potencial de la corona, obteniendo una función que va a depender de varios parámetros propios del problema, el coeficiente gravitatorio β del planeta y μ de la corona circular, los radios

interior b y exterior a de la corona, y el radio ecuatorial y el achatamiento del planeta α, ε . Antes de estudiar los equilibrios del sistema, vamos a introducir una nueva cantidad, el ratio de masas entre los cuerpos, este parámetro adimensional es el cociente entre los coeficientes gravitatorios de ambos cuerpos, $k = \beta/\mu$.

Para ello multiplicamos nuestro lagrangiano por μ , ya que un cambio de escala en la función lagrangiana no modifica formalmente las ecuaciones del movimiento.

Notar que ambos cuerpos tendrán la misma masa si $k = 1$, mientras que valores de $k < 1$ implicarán que el anillo es más masivo que el planeta, y respectivamente para el cuerpo central si $k > 1$.

De esta manera la nueva función potencial queda definida como

$$U(r, z; k; a; b; \varepsilon; \alpha) = U_{ann}(r, z; a; b) + kU_{bod}(r, z; \varepsilon; \alpha). \quad (9)$$

La figura (1) muestra los cortes de la función potencial $U(r, 0)$ en el caso de una corona con un cuerpo central, y en el caso de partir la corona en dos más pequeñas con un hueco entre ambas, esta representación nos da de forma sencilla información sobre la localización de los equilibrios.

Observamos la existencia de un punto de equilibrio de carácter estable sobre la corona,

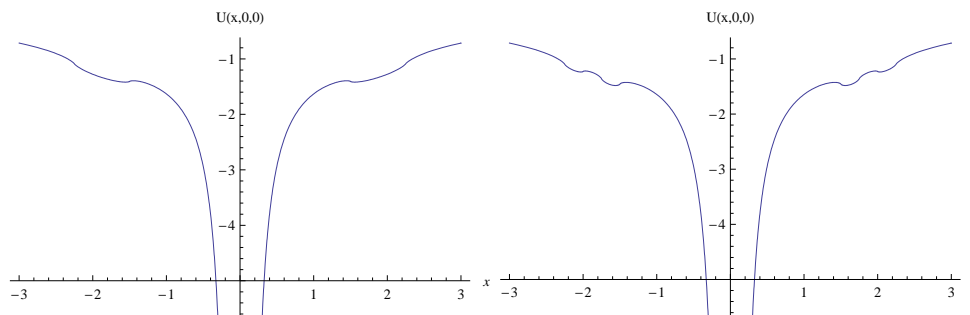


Figura 1.— Representación del corte de la función $U(r, 0)$ para el modelo corona + anillo, y dos coronas + anillo respectivamente.

este punto no es un equilibrio aislado si no una sucesión de puntos, puesto que gracias a la simetría cilíndrica del problema lo que tenemos es toda una circunferencia de equilibrios a una cierta distancia r tal que $b < r < a$. Por otra parte el origen que encontrábamos para la corona simple como punto crítico inestable desaparece ahora al introducir un planeta centrado en el origen de coordenadas.

3. Estudio de los equilibrios

La existencia de las integrales elípticas de primera, segunda y tercera especie, completas e incompletas nos imposibilita obtener expresiones analíticas de los equilibrios. Por

ello nos centramos en la restricción del movimiento al plano ecuatorial Oxy y sobre el eje Oz .

Respecto al movimiento con $r = 0$, si particularizamos las ecuaciones del movimiento para el caso de la corona (Eq. 5) veremos fácilmente que el único punto de equilibrio que aparece corresponde a $z = 0$ o al caso en que ambos radios coinciden $a = b$ y por tanto estaríamos en el problema del anillo circular. La energía en el origen es $E^* = -2\mu/(a+b)$, y por tanto sólo para valores de la energía $E^* < E < 0$ vamos a encontrar órbitas periódicas.

En cuanto al movimiento sobre el plano ecuatorial, las soluciones estacionarias serán los puntos críticos del potencial efectivo que ahora es una función radial

$$W'(r) \equiv \partial W / \partial r = U'(r) - \frac{\Lambda^2}{r^3} = 0. \quad (10)$$

La Figura (2) muestra la derivada del potencial efectivo tanto para la corona como para la corona con un cuerpo central esférico en su interior, para la representación de esta gráfica y posteriores vamos a fijar unos valores de las constantes del problema, consideraremos una corona de radios $a = 2.25$ y $b = 1.5$, y un planeta de radio $\alpha = 1$ con un ratio de masas entre los cuerpos de $k = 1$. En ambas gráficas se presenta $W'(r)$ para distintos valores del momento angular. En ellas observamos que en el caso de la corona aislada, obtenemos siempre un punto crítico de carácter estable perteneciente a la corona $b < r < a$, mientras que en la región interior de la corona $r < b$ sólo encontramos órbitas que parten y mueren en ella para momento angular no nulo, mientras que para $\Lambda = 0$ aparece el origen como punto crítico estable, este equilibrio corresponde a las oscilaciones periódicas sobre el eje Oz . Respecto a la región exterior a la corona $r > a$ vemos que el comportamiento varía según el valor de Λ , para momento angular nulo y hasta un cierto valor del mismo sólo encontramos órbitas de escape, sin embargo al ir incrementando Λ nos aparece claramente un punto crítico estable, e intuimos la existencia de otro inestable para valores de r cercanos al radio exterior a . Esto también lo podríamos haber observado mediante la representación de sus diagramas de flujo.

En resumen, en el exterior de la corona observamos la existencia de un valor $\tilde{\Lambda}$ dependiente de las constantes del problema, tal que para valores $\Lambda < \tilde{\Lambda}$ no existen puntos críticos, mientras que para valores mayores el potencial efectivo tiene al menos un máximo y un mínimo local, que corresponden a soluciones circulares inestable y estable del problema.

La gráfica derecha de la Figura (2) muestra la derivada del potencial efectivo para el caso de un planeta esférico rodeado por una corona. Observamos idéntico comportamiento en cuanto al movimiento dentro y en el exterior de la corona, mientras que en el interior, la existencia de cuerpo central esférico nos permite obtener ningún o un par de equilibrios,

de nuevo dependiendo del valor del momento angular.

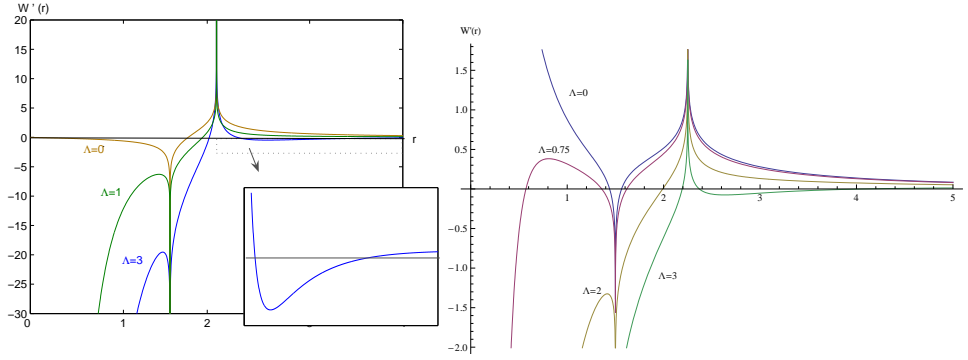


Figura 2.— Puntos críticos del potencial efectivo para distintos valores de Λ en el problema de la corona y de la corona más cuerpo central esférico.

Si consideramos un coeficiente de achatamiento $\varepsilon > 0$ los límites cuando r tiende a 0 cambian modificando únicamente la dinámica en el interior de la corona, ver Figura (3), de manera que ahora obtenemos además del par de equilibrios estable e inestable que veíamos para $\varepsilon = 0$, un nuevo punto crítico de carácter inestable muy próximo a $r = 0$, reseñar que no hemos encontrado ningún set de constantes del problema tal que este punto esté localizado fuera del planeta y por tanto tenga sentido físico. Por último en la gráfica derecha de la Figura (3) está representada la derivada del potencial efectivo en caso de un modelo de planeta esférico más corona, donde hemos partido la corona en dos más pequeñas con un hueco entre ambas. En este caso podemos ver la existencia de un nuevo equilibrio inestable en el agujero comprendido entre las coronas, este punto crítico va a ser único, no va a existir ningún valor del momento angular que modifique el comportamiento en esta región como pasaba en el exterior e interior de la corona.

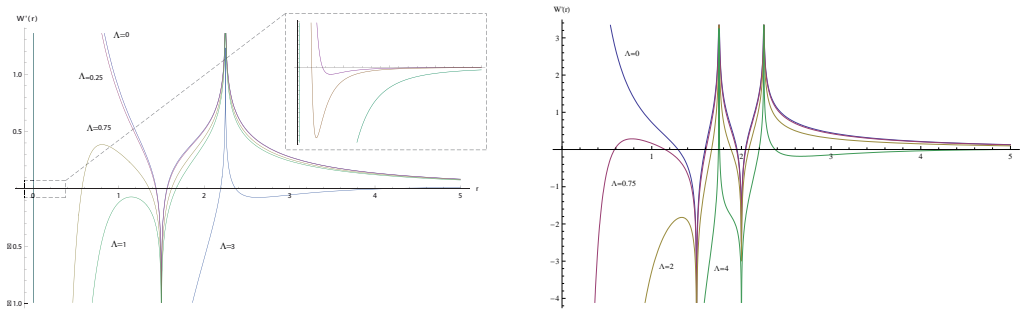


Figura 3.— Derivada del potencial efectivo para distintos valores de Λ en el problema de la corona más cuerpo central achatado y en caso de dos coronas más cuerpo central esférico.

Los puntos estacionarios serán soluciones circulares del problema completo (r, λ, z) , es decir, los puntos críticos r_0 del potencial efectivo para valores del momento angular $\Lambda \neq 0$ corresponderán a soluciones circulares en el plano ecuatorial, $(r_0 \cos(\Lambda t/r_0^2), r_0 \sin(\Lambda t/r_0^2), 0)$

de periodo $T = 2\pi r_0^2/\Lambda$.

Por tanto vamos a usar este análisis numérico que hemos hecho de los puntos críticos en el plano para calcular órbitas periódicas cuando restringimos el movimiento al plano ecuatorial.

4. Cómputo de familias de órbitas periódicas

El objetivo es calcular familias de órbitas periódicas, comenzando por las órbitas restringidas al plano ecuatorial que es el caso más sencillo. Para ello partimos de una órbita periódica plana, correspondiente como hemos visto a un punto de equilibrio $W'(r) = 0$ para un cierto valor del momento angular. Estudiaremos la estabilidad de estas soluciones mediante la continuación de las familias de órbitas circulares planas de las cuales hemos probado su existencia, tanto en el interior, exterior como sobre la corona en el apartado anterior.

Consideramos los valores de las constantes del apartado anterior más un coeficiente de achatamiento para el cuerpo central de $\varepsilon = 0.001$. Para el cálculo de las familias usamos el programa de continuación tomando como parámetro de continuación la coordenada x_0 de la órbita.

Comenzaremos calculando la familia exterior a la corona, para ello tomamos un valor del momento angular que satisfaga la condición de existencia de punto crítico, la representación del retrato de fases o la derivada del potencial efectivo para este valor del momento angular nos permite calcular directamente el valor de r_0 , y obtener la órbita de arranque del método de continuación.

La siguiente figura (4) representa la evolución de los índices de estabilidad, en el plano k_n y fuera del plano k_b , al continuar la familia exterior de órbitas circulares. Observamos la transición de estabilidad a inestabilidad al aproximarnos a la corona, consecuencia de la coexistencia de dos puntos críticos, uno más exterior estable, y el inestable cercano a la misma.

Por otro lado también encontramos movimiento plano dentro de la propia corona, esto es matemáticamente posible debido a que el potencial creado por la corona tiene discontinuidad esencial en el borde pero es una función definida en el interior. De nuevo tomamos una órbita de arranque para comenzar la continuación, la Figura (5) nos dice que la familia tiene un comportamiento estable con grandes oscilaciones entre los valores límite $Tr = \pm 2$, y que conforme el radio va incrementando, es decir, nos aproximamos al extremo exterior de la corona, ambos índice de estabilidad cruzan la línea $Tr = 2$ y se diparan en magnitud, es decir la familia se vuelve altamente inestable y de muy difícil

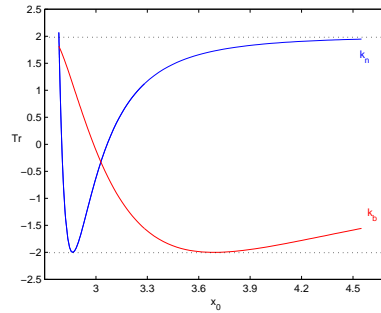


Figura 4.— Evolución de los índices de estabilidad para la familia de órbitas circulares exteriores a la corona.

continuación.

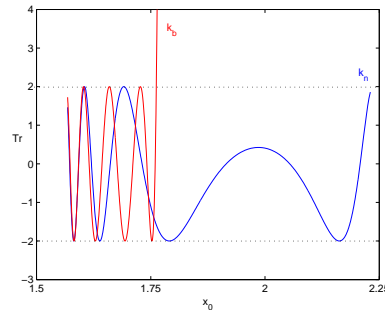


Figura 5.— Evolución de los índices de estabilidad para la familia de órbitas circulares dentro de la corona, $b < r < a$.

Por último si observamos en la Figura (6) el comportamiento de la familia de órbitas circulares planas en la región interior a la corona, vemos que las órbitas se vuelve altamente inestable al aproximarse a la corona, mientras que cuando la distancia hacia el cuerpo central disminuye permanecen estables pero con una tendencia asintótica a $Tr = 2$. Esta tendencia se mantiene hasta $r = 0$ en caso de cuerpo esférico, y se vuelve inestable muy próxima al origen cuando el cuerpo es achatado. Esto es consecuencia de la existencia de dos puntos críticos correspondientes a una órbita circular inestable y otra estable en el caso de $\varepsilon = 0$, y de tres órbitas inestable, estable e inestable para coeficiente de achatamiento no nulo.

En resumen encontramos dos regiones marcadas de inestabilidad, un cambio de estabilidad a inestabilidad cuando el radio de las órbitas circulares se aproxima al borde de la corona desde el interior, y otro al aproximarnos a la corona desde el exterior. Además encontramos varias posiciones donde el índice $k_n = -2$ dando lugar a una bifurcación con una familia de órbitas de doble periodo, hemos continuado a su vez esta nueva familia observando un nuevo punto de bifurcación de periodo doble. Repitiendo este procedi-

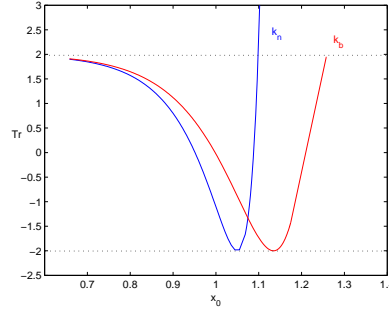


Figura 6.— Evolución de los índices de estabilidad para la familia de órbitas circulares a distancia $0 < r < b$.

miendo podemos encontrar las familias de múltiple periodo cuya evolución del índice de estabilidad en el plano viene dada por la fórmula(11), y están representados en la Figura (4).

$$k_m = 2 \cos \left(m \arccos \left(\frac{k}{2} \right) \right), \quad |k| \leq 2 \quad (11)$$

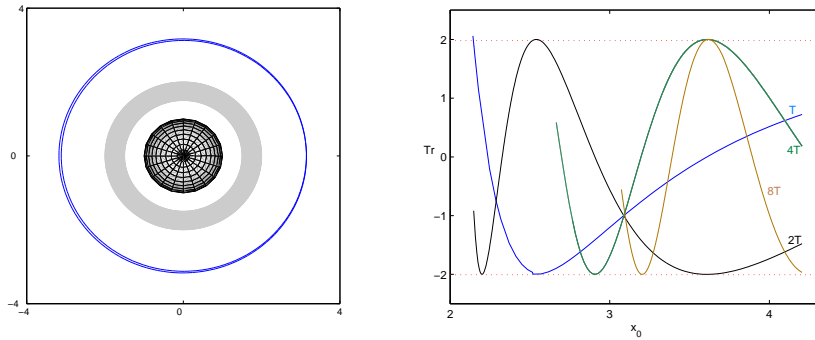


Figura 7.— Evolución del índice de estabilidad en el plano para las familias ecuatoriales de múltiple periodo.

En lo que respecta a la dinámica, fuera del plano podemos restringir el movimiento al plano perpendicular a la corona pasando por el origen. En este caso estamos en un problema no integrable y el procedimiento que vamos a seguir para conseguir órbitas periódicas es la representación de Secciones de Poincaré o del programa *Zeros* que nos servirán para proporcionarnos condiciones iniciales que usaremos para la posterior continuación de sus familias. De este modo encontramos órbitas como las que están representadas en la Figura (8) donde algunas de ellas han sido calculadas directamente de Secciones de Poincaré para distintos niveles de la energía, y otras aparecen como bifurcaciones de las anteriores.

Por otro lado podemos obtener órbitas periódicas en el espacio $Oxyz$ a partir de órbitas periódicas en el plano meridiano Orz , para ello volvemos a las ecuaciones del movimiento expresadas en coordenadas cilíndricas. Recordar que gracias a la simetría cilíndrica del problema y por tanto a la existencia del momento angular como integral del problema, podemos reducir el estudio a la búsqueda de órbitas en el plano meridiano Orz , que rota

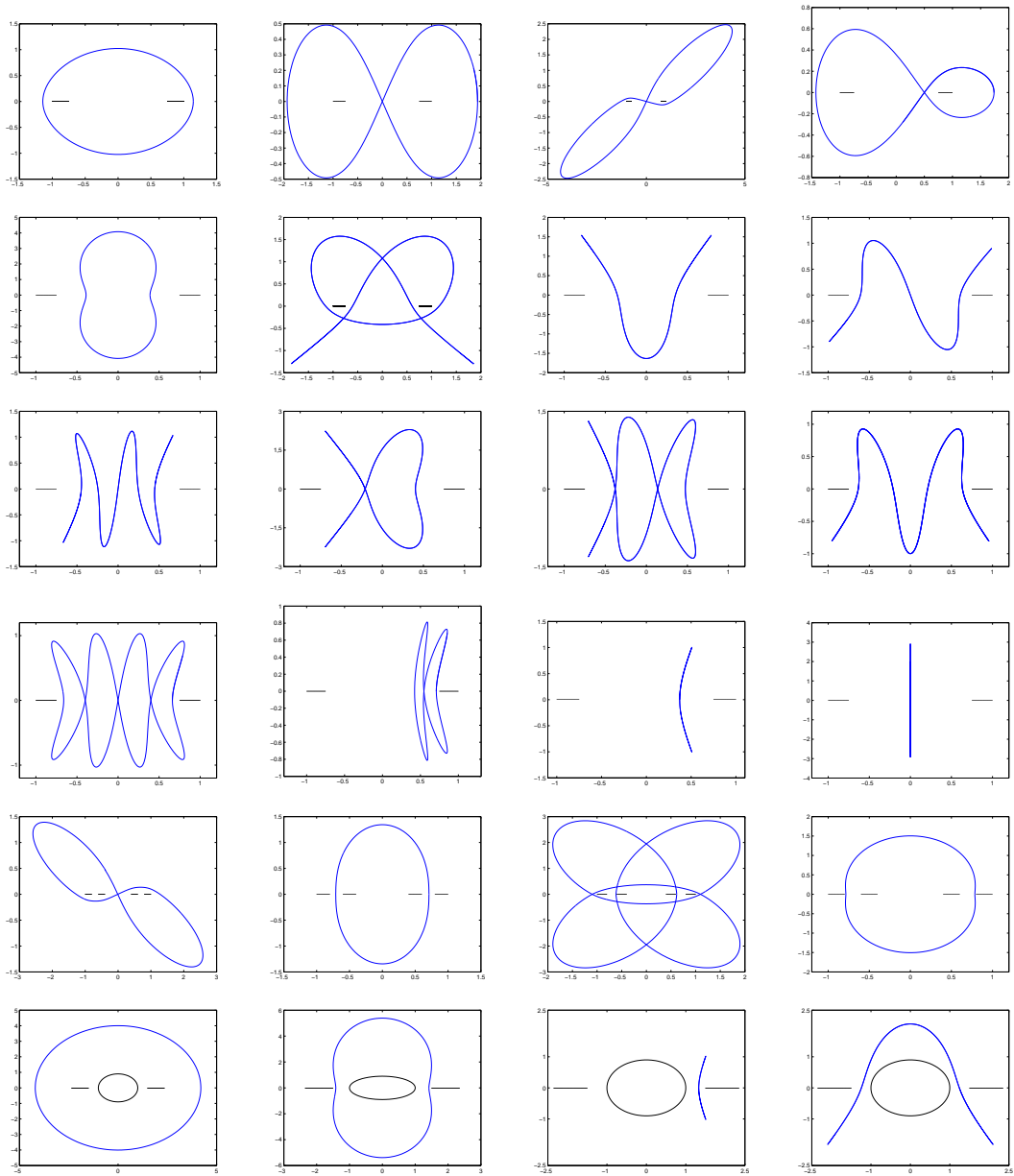


Figura 8.— Representación Oxz de órbitas polares para el problema de la corona, composición de coronas, y planeta + corona.

en torno al eje Oz con velocidad angular λ . Las órbitas periódicas en este plano no serán necesariamente cerradas en el espacio cartesiano debido a la precesión del ángulo λ . Es decir, si $r(t)$ y $z(t)$ son periódicas, entonces $\dot{\lambda} = \Lambda/r(t)^2$ será también función periódica con el mismo periodo, sin embargo para la longitud se tendrá $\lambda(t_0 + T) - \lambda(t_0) = C$ constante. El ángulo λ mide la posición del meridiano de rotación del satélite, que no es mas que la suma del movimiento del orbitador, y de la precesión de la órbita.

Para conseguir encontrar una órbita periódica en el espacio cartesiano $Oxyz$ a partir de una de las anteriores, es necesario imponer una relación de conmensurabilidad entre la velocidad de rotación de la partícula y la velocidad con la que se mueve el ángulo λ , es decir con la frecuencia de precesión de los nodos, de tal manera que

$$\lambda(t_0 + T) - \lambda(t_0) = 2\pi \frac{m}{n}, \quad (12)$$

es decir, que mientras el orbitador recorre n vueltas en su plano meridiano, este plano describe otro número entero m de rotaciones alrededor del eje polar.

La metodología para conseguir una órbita periódica en el espacio partiendo de una que lo sea en el espacio reducido consiste en aplicar nuevamente el método de continuación de órbitas periódicas, pero ahora el parámetro a variar será la energía. De esta manera, obtendremos una familia de órbitas con variaciones del periodo para las que comprobaremos si satisfacen la condición de periodicidad (12) para un par de enteros (m, n) . Notar que la mayoría de las órbitas no la verificarán aunque sí es posible encontrar algunas órbitas que lo hagan.

Hemos realizado este procedimiento para algunas de las familias de órbitas periódicas en el meridiano Orz que hemos encontrado. Aquí presentamos una órbita tipo arco exterior a la corona (E_0), y una de tipo elítico, cuyo uno de los extremos pasaba por la región confinada entre el planeta y la corona (E_1). Las Figuras (9) y (10) muestra su trayectoria en el plano reducido, y para cada una de ellas un par de órbitas periódicas en el espacio que hemos encontrado para relaciones de conmensurabilidad $(m = 9, n = 10)$, $(1, 1)$ y $(3, 4)$, $(5, 7)$ respectivamente.

Destacar que para cada una de estas órbitas periódicas en el espacio podemos calcular a su vez su familia utilizando de nuevo el método de continuación, proporcionándonos además información sobre el carácter estable o inestable de las órbitas mediante el análisis de la evolución de los índices de estabilidad k_1 y k_2 .

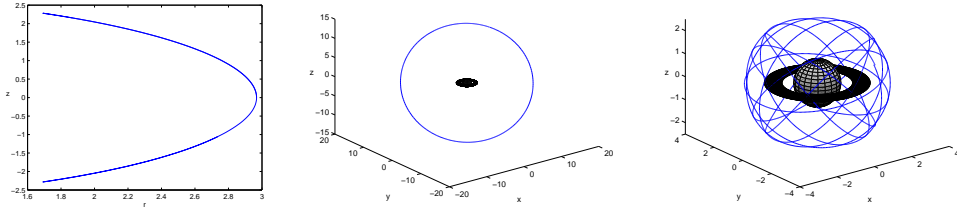


Figura 9.— Órbitas periódicas 1 : 1 y 9 : 10 en el plano cartesiano para E_0 .

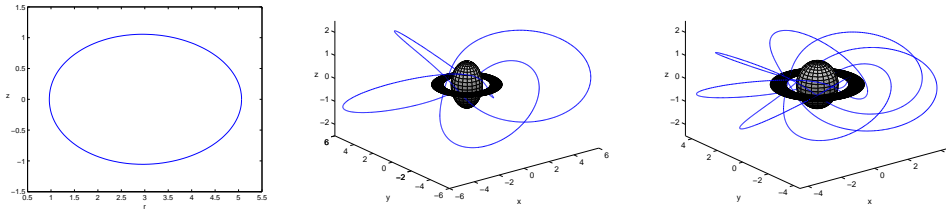


Figura 10.— Órbitas periódicas 3 : 4 y 5 : 7 en el plano cartesiano para E_1 .

Conclusiones

En este artículo se ha hecho una descripción en líneas generales de cómo se estructura la dinámica de una partícula alrededor de una corona circular con o sin planeta en su interior. Posteriores trabajos presentarán una más amplia variedad de familias encontradas, así como el análisis de su evolución a través del estudio de su estabilidad y posibles bifurcaciones, además de completar el estudio analítico de los equilibrios con resultados matemáticos que corroboren los comportamientos observados numéricamente.

Referencias

- [1] A. Abad and A. Elipe, “Evolution strategies for computing periodic orbits,” *Paper AAS 09-143. February 8-12, 19th AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting*, 2009.
- [2] A. Alberti and C. Vidal, “Dynamics of a particle in a gravitational field of a homogeneous annulus disk,” *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, Vol. 98, No. 2, 2007, pp. 75–93.
- [3] R. Barrio, R. and Blesa, F., “Systematic search of symmetric periodic orbits in 2DOF Hamiltonian systems” *Chaos, Solitons and Fractals*, (in press) doi:10.1016/j.chaos.2008.02.032
- [4] R. Bulirsch, “Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions,” *Numer. Math.*, Vol. 7, 1965, pp. 78–90.
- [5] R. A. Broucke and A. Elipe, “The dynamics of orbits in a potential field of a solid circular ring,” *Regul. Chaotic Dyn.*, Vol. 10, No. 2, 2005, pp. 129–143.

- [6] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [7] B. Carlson, “Computing elliptic integrals by duplication,” *Numerische Mathematik*, Vol. 33, 1979, pp. 1–16.
- [8] A. Deprit and J. Henrard, “Natural families of periodic orbits,” *Astronomical Journal*, Vol. 72, 1967, pp. 158–172.
- [9] A. Elipe, E. Tresaco and A. Riaguas, “Description of the dynamocs around an annular disk,” *Paper AAS 09-155. February 8-12, 19th AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting*, 2009.
- [10] M. Hénon, “Exploration Numérique du Problème Restreint. II Masses égales, Stabilité des Orbites périodiques,” Vol. 28, pp. 992–, 1965.
- [11] J. E. Howard and R. S. MacKay, “Linear stability of symplectic maps,” *J. Math. Phys.*, Vol. 28, No. 5, 1987, pp. 1036–1051.
- [12] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*. Reprint from the first edition of 1929. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 31, Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [13] F. T. Krough, E. W. Ng, and W. V. Snyder, “The gravitational field of a disk,” *Celestial Mechanics*, Vol. 26, Apr. 1982, pp. 395–405.
- [14] H. Lass and L. Blitzer, “The gravitational potential due to uniform disks and rings,” *Celestial Mechanics*, Vol. 30, July 1983, pp. 225–228.
- [15] J. Maxwell, *On the Stability of Motions of Saturn’s Rings*. Macmillan and Cia. Cambridge, 1859.
- [16] W. D. MacMillan, *The theory of the potential*. Reprint. Originally published: New York : McGraw-Hill, 1930. Series MacMillan’s Theoretical Mechanics. NewYork: Dover publications, 1958.
- [17] D. J. Scheeres, *On symmetric central configurations with application to the satellite motion about rings*. PhD thesis, University of Michigan, 1992.
- [18] D. J. Scheeres, “Satellite dynamics about asteroids: computing Poincaré maps for the general case,” *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S’Agaró, 1995)*, Vol. 533 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pp. 554–557, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.

