

# Deflexión de asteroides por medio de fuerzas electromagnéticas durante un fly-by a la Tierra

M. Sanjurjo-Rivo<sup>1</sup>, J. Peláez<sup>1</sup>, D. Izzo<sup>2</sup>, O. Purcell<sup>2</sup>, and D.J. Scheeres<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidad Politécnica de Madrid, Pza. Cardenal Cisneros 3, 28040 Madrid, Spain.

<sup>2</sup> Advanced Concepts Team, ESA

<sup>3</sup> Colorado University at Boulder

## Resumen

En los últimos años, se han dirigido muchos esfuerzos a tratar de evitar un posible impacto sobre la superficie terrestre de un asteroide. Se han propuesto nuevas estrategias y tecnologías en este campo, investigando la utilización de aplicaciones innovadoras para ese propósito. En este contexto, este trabajo explora la posibilidad de utilizar las fuerzas que actuarían sobre el asteroide durante un fly-by a la Tierra debido a la interacción con el campo magnético terrestre. Entre estas interacciones, este artículo se centra en la fuerza de Lorentz, valorando bajo qué hipótesis y condiciones podría proporcionar una deflexión efectiva de la órbita del asteroide.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen asteroides próximos a la órbita terrestre (NEO en su acrónimo en inglés) que representan un peligro potencial para la Tierra, debido al riesgo de que dichos objetos puedan entrar en trayectoria de colisión con la misma. Reducir este riesgo requiere de la consideración y el análisis de aquellas técnicas que permitan modificar la trayectoria de asteroides. El objetivo de cualquier misión de deflexión de asteroides es la de alterar su órbita para evitar posibles encuentros en el futuro. Habitualmente estas misiones se caracterizan en la literatura por la actuación continua sobre la trayectoria heliocéntrica del asteroide a lo largo de su órbita.

No obstante, es posible explorar las oportunidades de modificar la órbita de un asteroide en unas escalas de espacio y tiempo más corta, esto es, durante un fly-by a la Tierra. En esta situación, existen condiciones particulares que dejan abiertas algunas cuestiones. En particular, nos centraremos en responder a la pregunta de si es factible aprovechar

la interacción entre el campo geomagnético y el asteroide. En trabajos previos, se ha considerado el uso de fuerzas electrostáticas para la deflexión de asteroides [1], donde se proporciona la estimación de la carga necesaria para obtener una fuerza significativa, o en el diseño del Electrostatic Tractor [2]. Asimismo, en [3] se pueden encontrar estimaciones de las perturbaciones electromagnéticas en las órbitas de los asteroides.

En el presente artículo, se desarrolla un método general para el análisis del efecto de aceleraciones de perturbación durante un fly-by de un asteroide. Este método nos permitirá estimar la fuerza necesaria para obtener la deflexión deseada. Además, se han considerado tres escenarios diferentes en este estudio. En primer lugar, se supondrá que un asteroide cargado electrostáticamente evoluciona bajo los efectos de las fuerzas gravitatoria y de Lorentz, asumiendo una carga eléctrica fija durante el fly-by. El efecto de esta fuerza de perturbación en la órbita es analizado en términos de las condiciones iniciales necesarias de un fly-by puramente gravitatorio para obtener unas condiciones de salida iguales a las de la trayectoria perturbada. En segundo lugar, se estudiará la posibilidad de utilizar amarras electrodinámicas en fly-bys que crucen la ionosfera terrestre. La operación de estos dispositivos está fuertemente condicionada por la capacidad de coleccionar electrones en un ambiente plasmático muy rarificado. Finalmente, se analizará la importancia del uso de amarras electrodinámicas en el movimiento de actitud del asteroide durante el fly-by, estudiando el efecto de estos dispositivos en el cambio de momento angular que sufre el asteroide en este proceso. La viabilidad de estas estrategias se discutirá a la luz de los resultados obtenidos.

En resumen, este artículo está dedicado a evaluar la viabilidad de utilizar la fuerza de Lorentz para la deflexión de órbita de asteroides, proporcionando estimaciones de los efectos de las interacciones electromagnéticas con el campo geomagnético.

## **2. Análisis de la deflexión de asteroides durante un fly-by**

El propósito de este artículo es el de analizar la deflexión de asteroides durante un fly-by terrestre. Por lo tanto, y en primer lugar, nos centraremos en establecer las herramientas necesarias para el estudio del efecto de las fuerzas de perturbación que actúan durante el swing-by en la subsiguiente trayectoria heliocéntrica del asteroide. Para ello, usaremos la aproximación de las “patched conic”, es decir, durante el fly-by únicamente consideraremos la fuerza gravitatoria terrestre, despreciando la fuerza atractiva del resto de cuerpos celestes. Además, analizaremos las ecuaciones planetarias de Gauss para determinar el efecto de las fuerzas de perturbación en la trayectoria hiperbólica del fly-by, por una parte; y por otra parte, la modificación que resulta en el “b-plane” (plano perpendicular a la asíntota de llegada que contiene al foco atractor).

Dentro de la validez de la aproximación de “patched-conic”, la órbita inicial será una

hipérbola. Para analizar el problema, se usarán tres sistemas de referencia:

- Sistema de referencia osculador polar local  $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_h)$ . El vector unitario  $\vec{i}_r$  apunta en la dirección del vector de posición y  $\vec{i}_h$  apunta en la dirección perpendicular a los vectores de posición y velocidad, simultáneamente.
- Sistema de referencia del plano orbital osculador  $(\vec{i}_e, \vec{i}_p, \vec{i}_h)$ . El vector unitario  $\vec{i}_e$  se encuentra en la dirección del vector excentricidad y  $\vec{i}_h$  se define de la misma forma que en el caso anterior.
- Sistema de referencia pseudo-inercial  $(\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z)$ . El origen de este sistema de referencia sería el centro de masas de la Tierra, los ejes  $\vec{i}_x$  y  $\vec{i}_y$  definen el plano ecuatorial y  $\vec{i}_z$  coincide con el eje de rotación de la Tierra. Además, la proyección de  $\vec{i}_x$  en la eclíptica tiene el mismo sentido que el vector de posición de la Tierra respecto del Sol<sup>1</sup>.

La hipérbola inicial se puede caracterizar bien por los elementos orbitales osculadores iniciales  $(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, \tau_0)$ , donde  $a_0 < 0$  y  $e_0 > 1$ ) o bien por el vector velocidad de llegada  $\vec{v}_\infty$  y el pretendido vector de posición en el periapsis  $\vec{r}_p$ . Los elementos osculadores usados para describir el cambio de la hipérbola serán:  $\Omega, i, \omega, a, e, \lambda$ , donde  $\lambda = n\tau$ , y  $n = \sqrt{\mu/(-a)^3}$ . Otras relaciones que han sido utilizadas para la descripción de la hipérbola son:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cosh H) & p &= a(1 - e^2) \\ b &= a\sqrt{e^2 - 1} & h &= n a b \end{aligned}$$

donde  $H$  es una cantidad relacionada con la anomalía verdadera de la siguiente forma:

$$\tan\left(\frac{1}{2}f\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh\left(\frac{1}{2}H\right)$$

Si el vector de aceleraciones de perturbación se expresa en el sistema de referencia osculador polar local de la forma:  $\vec{a} = \{a_{d,r}, a_{d,\theta}, a_{d,h}\}^T$ , la formulación de las ecuaciones

---

<sup>1</sup>Se supone que la órbita terrestre es perfectamente circular

planetarias de Gauss para la hipérbola es como sigue:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin \theta}{h \sin i} a_{d,h} \quad (1)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos \theta}{h} a_{d,h} \quad (2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{h e} [-p \cos f a_{d,r} + (p+r) \sin f a_{d,\theta}] - \frac{r \cos i \sin \theta}{h \sin i} a_{d,h} \quad (3)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{h} [e \sin f a_{d,r} + (1+e \cos f) a_{d,\theta}] \quad (4)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{h} \left[ p \sin f a_{d,r} + \left( p \cos f + p \frac{(a+r)}{a e} \right) a_{d,\theta} \right] \quad (5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = a_{d,r} \left[ \frac{b}{h a e} (2r e - p \cos f) - \frac{3 t e \sin f}{b} \right] - a_{d,\theta} \left[ \frac{3 t (1+e \cos f)}{b} - \frac{b \sin f}{h a e} (p+r) \right] \quad (6)$$

Junto con la ecuación de Kepler:

$$n t + \lambda = e \sinh H - H \quad (7)$$

las ecuaciones planetarias permiten calcular la evolución de los elementos orbitales osculadores dadas unas condiciones iniciales y la ley de aceleraciones de perturbación  $\{a_{d,r}(t), a_{d,\theta}(t), a_{d,h}(t)\}$ .

En relación con el “b-plane”, es posible establecer la relación entre el vector  $\vec{B}$  (vector contenido en el “b-plane” que une el foco de atracción de la trayectoria y la intersección entre el propio plano y la hipérbola, también llamado b-vector) y los elementos osculadores de la hipérbola. De hecho, llamando  $\vec{s}$  al vector unitario en la dirección de la asíntota de llegada y  $\vec{n}$  al vector unitario en la dirección perpendicular al plano orbital ( $\vec{n} = (\vec{r} \times \vec{v}) / |\vec{r} \times \vec{v}|$ ), el parámetro de impacto puede ser calculado como:

$$\vec{B} = (-b) (\vec{s} \times \vec{n})$$

Las expresiones de dichos vectores en el sistema de referencia inercial será:

$$\vec{s} = \mathcal{R} \{ \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \}^T \quad \vec{n} = \mathcal{R} \{ 0, 0, 1 \}^T$$

donde  $\mathcal{R}(\Omega, i, \omega)$  es la matriz de rotación de las coordenadas del plano osculador a las coordenadas del sistema de referencia inercial y  $\alpha$  es el ángulo definido como:

$$\alpha = \arccos(1/e)$$

Por lo tanto, la variación del vector  $\vec{B}$  debido a las aceleraciones de perturbación puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{db}{dt} (\vec{s} \times \vec{n}) - b \left( \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{n} \right) - b \left( \vec{s} \times \frac{d\vec{n}}{dt} \right)$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{n}}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \frac{d\vec{s}}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{R} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial e} \frac{de}{dt} \\ \frac{db}{dt} &= \frac{b}{a} \frac{da}{dt} + \frac{a^2 e}{b} \frac{de}{dt}\end{aligned}$$

### 2.1. Análisis asintótico

En este apartado se intenta sacar partido del hecho de que las variaciones de los elementos orbitales del asteroide serán pequeños como lo es la aceleración de perturbación. Comenzaremos estableciendo la formulación adimensional de las ecuaciones planetarias. La longitud característica será el valor absoluto del semi-eje mayor en el instante inicial,  $|a_i|$ . Por su parte, el tiempo característico,  $\tau_c$ , será  $\tau_c = \sqrt{|a_i|^3 / \mu_{\oplus}^*}$ . Las variables adimensionales se designarán con un sombrero, esto es,  $a = |a_i| \hat{a}$ . Las ecuaciones planetarias (1-6) se rescriben teniendo en cuenta lo anterior como:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{d\tau} &= \frac{\hat{r} \sin \theta}{\hat{h} \sin i} \hat{a}_{d,h} \\ \frac{di}{d\tau} &= \frac{\hat{r} \cos \theta}{\hat{h}} \hat{a}_{d,h} \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{1}{\hat{h} e} [-\hat{p} \cos f \hat{a}_{d,r} + (\hat{p} + \hat{r}) \sin f \hat{a}_{d,\theta}] - \frac{\hat{r} \cos i \sin \theta}{\hat{h} \sin i} \hat{a}_{d,h} \\ \frac{d\hat{a}}{d\tau} &= -\frac{2\hat{a}^2}{\hat{h}} [e \sin f \hat{a}_{d,r} + (1 + e \cos f) \hat{a}_{d,\theta}] \\ \frac{de}{d\tau} &= -\frac{1}{\hat{h}} \left[ \hat{p} \sin f \hat{a}_{d,r} + \left( \hat{p} \cos f + \hat{p} \frac{(\hat{a} + \hat{r})}{\hat{a} e} \right) \hat{a}_{d,\theta} \right] \\ \frac{d\lambda}{d\tau} &= \hat{a}_{d,r} \left[ \frac{\hat{b}}{\hat{h} \hat{a} e} (2\hat{r} e - \hat{p} \cos f) - \frac{3\tau e \sin f}{\hat{b}} \right] - \hat{a}_{d,\theta} \left[ \frac{3\tau (1 + e \cos f)}{\hat{b}} - \frac{\hat{b} \sin f}{\hat{h} \hat{a} e} (\hat{p} + \hat{r}) \right]\end{aligned}$$

Mientras que la ecuación de Kepler equation se expresa del siguiente modo:

$$\tau + \lambda = e \sinh H - H$$

Las siguientes relaciones se han usado en el sistema (8-8):

$$\begin{aligned}r &= |a_i| \hat{r} & p &= |a_i| \hat{p} \\ b &= |a_i| \hat{b} & h &= \sqrt{|a_i| \mu_{\oplus}^*} \hat{h} \\ a_d &= \frac{\mu_{\oplus}^*}{|a_i|^2} \hat{a}_d\end{aligned}$$

Suponiendo que la aceleración de perturbación es pequeña comparada con la aceleración gravitatoria, es posible derivar una formulación más simple para el cálculo de la variación de los elementos orbitales osculadores. Sea  $\varepsilon \ll 1$  un parámetro pequeño, que satisface la siguiente relación para la aceleración de perturbación adimensional  $\hat{a}_d = \varepsilon \tilde{a}_d$ . Haciendo uso de este parámetro, se considera la expansión asintótica de los elementos orbitales en potencias de  $\varepsilon$ :  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \varepsilon \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \varepsilon^2 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , donde  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$  se corresponde con la solución del problema no perturbado. Además, se supondrá que la variable  $H$  relacionada con la anomalía verdadera puede expandirse en términos del mismo parámetro  $\varepsilon$ :  $H(\tau) = H_0(\tau) + \varepsilon H_1(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la evolución de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$  se puede calcular haciendo uso de las ecuaciones planetarias adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{d\tau} &= \frac{(1 - e_0 \cosh H_0(\tau)) \sin(f(\tau) + \omega_0) \tilde{a}_{d,h}}{\sqrt{e_0^2 - 1} \sin i_0} \\ \frac{di_1}{d\tau} &= \frac{(1 - e_0 \cosh H_0(\tau)) \cos(f(\tau) + \omega_0) \tilde{a}_{d,h}}{\sqrt{e_0^2 - 1}} \\ \frac{d\omega_1}{d\tau} &= -\frac{(1 - e_0^2) \cos f(\tau) \tilde{a}_{d,r} + (e_0^2 - 2 + e_0 \cosh H_0(\tau)) \sin f(\tau) \tilde{a}_{d,\theta}}{e_0 \sqrt{e_0^2 - 1}} \\ &\quad - \frac{(1 - e_0 \cosh H_0(\tau)) \cos i_0 \sin(f(\tau) + \omega_0) \tilde{a}_{d,h}}{\sqrt{e_0^2 - 1} \sin i_0} \\ \frac{d\hat{a}_1}{d\tau} &= \frac{2(e_0 \sin f(\tau) \tilde{a}_{d,r} + (1 + e_0 \cos f(\tau)) \tilde{a}_{d,\theta})}{\sqrt{e_0^2 - 1}} \\ \frac{de_1}{d\tau} &= \sqrt{e_0^2 - 1} \left[ \sin f(\tau) \tilde{a}_{d,r} + \left( \cos f(\tau) + \frac{(-2 + e_0 \cosh H_0(\tau))}{e_0} \right) \tilde{a}_{d,\theta} \right] \\ \frac{d\lambda_1}{d\tau} &= \left[ \frac{3\tau e_0 \sin f(\tau)}{\sqrt{e_0^2 - 1}} + 2(e_0 \cosh H_0(\tau) - 1) - \frac{e_0^2 - 1}{e_0} \cos f(\tau) \right] \tilde{a}_{d,r} + \\ &\quad \left[ -\frac{3\tau(1 + e_0 \cos f(\tau))}{\sqrt{e_0^2 - 1}} + \frac{(e_0^2 - 1 + (e_0 \cosh H_0(\tau) - 1)) \sin f(\tau)}{e_0} \right] \tilde{a}_{d,\theta} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la relación  $\hat{a}_0 = -1$ . Las condiciones iniciales para este sistema de ecuaciones diferenciales es  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$ , dado que inicialmente los valores osculadores se corresponden con los del problema no perturbado.

Por lo tanto, asumiendo, ya sea aceleración constante  $\tilde{a}_d = \tilde{A}_d$ , ya sea aceleración impulsiva  $\tilde{a}_d = \delta(\tau_M) \tilde{A}_d$ , los elementos orbitales osculadores de la trayectoria perturbada

pueden ser expresados en función de los parámetros de la hipérbola no perturbada:

$$\Omega_1^F = \frac{\tilde{A}_{d,h}}{\sqrt{e_0^2 - 1} \sin i_0} [\cos \omega_0 \mathcal{I}_2 + \sin \omega_0 \mathcal{I}_1] \quad (8)$$

$$i_1^F = \frac{\tilde{A}_{d,h}}{\sqrt{e_0^2 - 1}} [\cos \omega_0 \mathcal{I}_1 - \sin \omega_0 \mathcal{I}_2] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \omega_1^F &= \frac{\sqrt{e_0^2 - 1}}{e_0} \tilde{A}_{d,r} \mathcal{I}_3 - \frac{\tilde{A}_{d,\theta}}{e_0 \sqrt{e_0^2 - 1}} [(e_0^2 - 1) \mathcal{I}_4 - \mathcal{I}_2] \\ &\quad - \frac{\cos i_0 \tilde{A}_{d,h}}{\sqrt{e_0^2 - 1} \sin i_0} [\cos \omega_0 \mathcal{I}_1 + \sin \omega_0 \mathcal{I}_2] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{a}_1^F = \frac{2(e_0 \mathcal{I}_4 \tilde{A}_{d,r} + (\mathcal{I}_5 + e_0 \mathcal{I}_3) \tilde{A}_{d,\theta})}{\sqrt{e_0^2 - 1}} \quad (11)$$

$$e_1^F = \sqrt{e_0^2 - 1} \left[ \mathcal{I}_4 \tilde{A}_{d,r} + \left( \mathcal{I}_3 - \frac{\mathcal{I}_5 + \mathcal{I}_6}{e_0} \right) \tilde{A}_{d,\theta} \right] \quad (12)$$

donde  $\mathcal{I}_i$  representa el valor de las integrales que aparecen en las ecuaciones anteriores. Es posible obtener las cuadraturas en una forma sencilla cuando consideramos una maniobra impulsiva. En ese caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= -\hat{r}_M \cos f_M & \mathcal{I}_2 &= -\hat{r}_M \sin f_M \\ \mathcal{I}_3 &= \cos f_M & \mathcal{I}_4 &= \sin f_M \\ \mathcal{I}_5 &= \tau_M & \mathcal{I}_6 &= -\hat{r}_M \end{aligned}$$

donde el subíndice  $M$  hace referencia al instante en el que el impulso es aplicado y, por tanto,  $\hat{r}_M = (e_0 \cosh(H_0(\tau_M)) - 1)$ . En el caso de empuje continuo, las expresiones resultan más complejas, pero aún es posible encontrar una expresión analítica cerrada para las integrales. No se han incluido las relaciones explícitas para el parámetro  $\lambda$  dado que los términos seculares conducen a cuadraturas más complejas.

El planteamiento asintótico adimensional puede utilizarse del mismo modo para el cálculo de la variación del vector  $\vec{B}$  debido a la aceleración de perturbación. Los valores adimensionales serán:

$$\hat{\vec{B}} = \frac{\vec{B}}{|a_i|} \quad \text{and} \quad \hat{b} = \frac{b}{|a_i|}$$

Por otro lado, la expansión asintótica presenta la misma forma que para los elementos orbitales, es decir,  $\hat{\vec{B}} = \hat{\vec{B}}_0 + \varepsilon \hat{\vec{B}}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ , donde  $\hat{\vec{B}}_0$  es el vector adimensional del problema no perturbado. Por tanto, la variación del vector  $\vec{B}$  con respecto al tiempo tiene la siguiente forma:

$$\frac{d\hat{\vec{B}}_1}{d\tau} = -\frac{d\hat{b}_1}{d\tau} (\vec{s}_0 \times \vec{n}_0) - b_0 \left( \frac{d\vec{s}_1}{d\tau} \times \vec{n}_0 \right) - b_0 \left( \vec{s}_0 \times \frac{d\vec{n}_1}{d\tau} \right)$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{n}_1}{d\tau} &= \left( \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0} \frac{d\Omega_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0} \frac{di_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0} \frac{d\omega_1}{d\tau} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \frac{d\vec{s}_1}{d\tau} &= \left( \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0} \frac{d\Omega_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0} \frac{di_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0} \frac{d\omega_1}{d\tau} \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{R}_0 \begin{bmatrix} -\sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \alpha_0}{\partial e_0} \frac{de_1}{d\tau} \\ \frac{d\hat{b}_1}{d\tau} &= \sqrt{e_0^2 - 1} \frac{d\hat{a}_1}{d\tau} + \frac{e_0}{\sqrt{e_0^2 - 1}} \frac{de_1}{d\tau}\end{aligned}$$

y  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(\Omega_0, i_0, \omega_0)$ . El anterior sistema de ecuaciones puede integrarse en función de los valores finales de los elementos orbitales osculadores. Y sustituyendo (8-12) en aquellos resultados, finalmente obtenemos una relación directa entre la variación del vector  $\vec{B}$  y las aceleraciones adimensionales aplicadas en dos casos: empuje continuo y maniobras impulsivas <sup>2</sup>.

Estos resultados permiten calcular la diferencia vectorial entre los vectores  $\vec{B}$  inicial y final:  $\vec{B}^F - \vec{B}_0 = \varepsilon |a_i| \hat{B}_1$ ,

$$\begin{aligned}\hat{B}_1 &= -\hat{b}_1^F (\vec{s}_0 \times \vec{n}_0) - \hat{b}_0 (\vec{s}_1^F \times \vec{n}_0) - \hat{b}_0 (\vec{s}_0 \times \vec{n}_1^F) \\ \vec{n}_1^F &= \left( \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0} \Omega_1^F + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0} i_1^F + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0} \omega_1^F \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vec{s}_1^F &= \left( \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0} \Omega_1^F + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0} i_1^F + \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0} \omega_1^F \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{R}_0 \begin{bmatrix} -\sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \alpha_0}{\partial e_0} e_1^F \\ \hat{b}_1^F &= 3 e_0 \mathcal{I}_4 \tilde{A}_{d,r} + (3 e_0 \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_5 - \mathcal{I}_6) \tilde{A}_{d,\theta}\end{aligned}$$

Finalmente, la variación del vector  $\vec{B}$  puede ser expresado en términos de las fuerzas aplicadas. Por claridad, derivamos dicha relación para la variación del semi-eje menor  $b$  (el semi-eje menor es el módulo del vector  $\vec{B}$ ). La variación del semi-eje menor es:  $\Delta b = b^F - b_0 = \varepsilon |a_i| \hat{b}_1^F$ . Por otra parte, tenemos:  $\varepsilon \tilde{A}_d = F |a_i|^2 / (M_a \mu_{\ddagger})$  para empuje continuo, y  $\varepsilon \tilde{A}_d = \eta m |a_i|^{1/2} / (m + M_a) / \mu_{\ddagger}^{1/2} U$  donde se ha utilizado la misma notación que en [4] (donde  $\eta$  es la eficiencia del impacto,  $M_a$  la masa del asteroide,  $m$  la masa del vehículo que impacta contra el asteroide y  $U$  la velocidad de impacto). Por consiguiente, la variación  $\Delta b$  se expresa como:

$$\Delta b = \frac{|a_i|^3}{M_a \mu_{\ddagger}} [3 e_0 \mathcal{I}_4 F_r + (3 e_0 \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_5 - \mathcal{I}_6) F_\theta]$$

---

<sup>2</sup>Se considera que no hay pérdida de masa en el sistema, de manera que se utiliza indistintamente aceleración y empuje de perturbación continuos.



o

$$\Delta b = \frac{\eta m}{m + M_a} \frac{|a_i|^{3/2}}{M_a \mu_{\frac{1}{2}}} [3 e_0 \mathcal{I}_4 U_r + (3 e_0 \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_5 - \mathcal{I}_6) U_\theta]$$

Por lo tanto, dada una trayectoria inicial, la masa del asteroide (y la masa del vehículo espacial) y la fuerza aplicada (o la velocidad relativa respecto al asteroide en caso de impacto), es posible calcular directamente la variación del vector  $\vec{b}$ . Esto se ha llevado a cabo para los dos casos de empuje considerados: continuo e impulsivo. Para el empuje continuo hemos obtenido que la inclinación de la órbita tiene relativa importancia cuando se aplican aceleraciones normales o tangenciales. Sin embargo, el comportamiento es diferente en sendos casos: mientras que las mayores variaciones en el módulo del b-vector se consiguen para órbitas casi polares cuando el empuje es aplicado en dirección normal a la trayectoria, para empuje tangencial los mejores resultados se obtienen para inclinaciones de alrededor de los  $45^\circ$ . La mayor variación en el módulo del b-vector considerando todas las diferentes estrategias de orientación se obtiene para aceleración de perturbación en dirección normal a la trayectoria, y esta variación es del orden de 60 cm cuando el empuje continuo aplicado es de 1 N, como puede observarse en la Figura 1. La razón por la cual las variaciones en el módulo del b-vector son tan pequeñas las podemos encontrar en el pequeño intervalo de tiempo en el que se ejerce la fuerza de perturbación. Por otra parte, la eficiencia de la aceleración normal a la órbita puede explicarse por el hecho de que el efecto de dicha aceleración es el de cambiar el momento angular de la órbita, y el brazo del momento aplicado es grande. Este resultado es más interesante para una maniobra impulsiva, no sólo para impulsos normales a la órbita sino también para impulsos tangenciales, dado que permite cambiar la orientación de la órbita dentro del plano orbital. De hecho, la estrategia de maniobra impulsiva presenta un grado de libertad adicional: la posición del encuentro. Hay dos ubicaciones extremas privilegiadas, el pericentro y la posición inicial a la distancia de la esfera de influencia. En el perigeo la velocidad relativa es mayor mientras que en la esfera de influencia el brazo del momento para cambiar el momento angular de la órbita es máximo. Para clarificar cuál es el efecto dominante, hemos realizado simulaciones suponiendo que la maniobra impulsiva es producida por un vehículo espacial viajando en la órbita del asteroide en sentido contrario. Los resultados muestran que la deflexión máxima que se obtiene cuando el impacto se produce a la distancia de la esfera de influencia es uno o dos órdenes de magnitud mayor que los obtenidos en el pericentro. Esto es, para la misma velocidad de impacto, la ubicación lejana del impacto es más eficiente. En la Figura 1 se presentan los resultados para una maniobra impulsiva a la distancia de la esfera de influencia. La velocidad relativa considerada es de 10 km/s, la masa del vehículo espacial es 1 Tn y  $\eta = 1$ . De nuevo la influencia de la inclinación sigue el mismo patrón que para el empuje continuo y las mayores variaciones del b-vector se consiguen para inclinaciones de aproximadamente  $45^\circ$  cuando se aplican impulsos radiales

o tangenciales y órbitas casi polares cuando se aplican impulsos normales a la trayectoria.

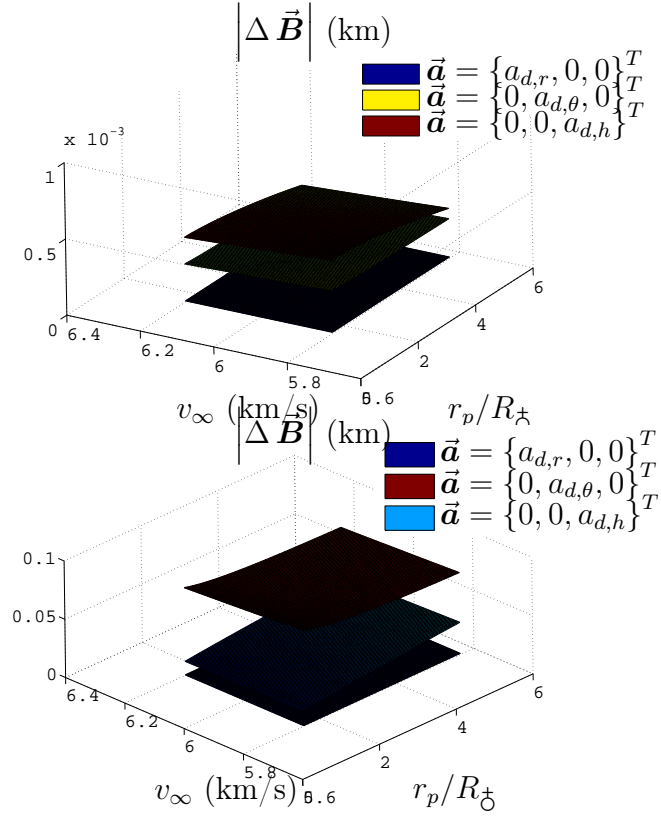


Figura 1.— En el gráfico de la izquierda se muestra la variación de  $|\vec{B}|$  cuando se aplica un empuje continuo de 1 N durante el fly-by para diferentes hipérbolas iniciales y diferentes orientaciones de la aceleración de perturbación. En el gráfico de la derecha, se muestra la variación del b-vector para el caso de impacto. La velocidad relativa es 10 km/s, la masa del vehículo espacial que impacta sobre el asteroide es de 1 Tn y  $\eta = 1$ . Los resultados se presentan para distintas hipérbolas iniciales y distintas orientaciones de impacto.

### 3. Modelo de la fuerza electrostática

La posibilidad de cargar la superficie de un asteroide para proporcionar la deflexión de su órbita ya ha sido estudiada en trabajos anteriores [3, 1]. No obstante, siempre ha sido considerado en el contexto de la órbita heliocéntrica del asteroide. Aquí, supondremos que el comportamiento del asteroide durante el fly-by terrestre puede ser caracterizado como el de una partícula cargada con una carga eléctrica constante  $Q$  durante toda la trayectoria. La fuerza electrostática que actúa sobre el asteroide puede calcularse como:

$$\vec{F} = Q \left( \vec{v} \times \vec{B}_{Mg} \right)$$

La velocidad  $\vec{v}$  es la velocidad relativa al sistema de referencia pseudo-inercial y puede expresarse en función de los elementos orbitales osculadores como sigue:

$$\vec{v} = -\frac{\sqrt{-\mu a}}{r} \sinh H \vec{i}_e + \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cosh H \vec{i}_p$$

Por otra parte, el campo magnético  $\vec{B}_{Mg}$  es el campo geomagnético, es este caso. En este trabajo consideraremos un modelo simple de dipolo:

$$\vec{B}_{Mg} = \frac{\mu_m R_{\oplus}^3}{r^3} (3(\hat{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{m})$$

donde  $\hat{m}$  es el vector unitario en la dirección del dipolo,  $\mu_m$  es la intensidad del dipolo,  $\hat{r}$  el radio vector,  $r$  su módulo y  $R_{earth}$  el radio ecuatorial terrestre. Se supondrá que el dipolo está alineado con el eje de rotación terrestre,  $\hat{m} = \vec{i}_z$ .

Finalmente, la expresión que permite calcular la aceleración de perturbación debida a las fuerzas electrostáticas es como sigue:

$$\vec{a}_d = \frac{Q}{M_a} (\vec{v} \times \vec{B}_{Mg})$$

donde  $M_a$  es la masa del asteroide. Dado que la aceleración se expresa en coordenadas osculadoras polares en las ecuaciones (1- 6), debemos expresar el vector  $(\vec{v} \times \vec{B}_{Mg})$  en dichas coordenadas.

$$\vec{v}|_{OPC} = \mathcal{R}_f^T \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{-\mu a}}{r} \sinh H \\ \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cosh H \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{B}_{Mg}|_{OPC} = \frac{\mu_m R_{\oplus}^3}{r^3} \left\{ 3 \left( \mathcal{R}^T \mathcal{R}_f^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathcal{R}^T \mathcal{R}_f^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

donde:

$$\mathcal{R}_f = \begin{bmatrix} \cos f & \sin f & 0 \\ -\sin f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la Figura 2, se muestran los resultados obtenidos para una carga del asteroide de  $10^9$  C para diferentes hipérbolas iniciales y diferentes inclinaciones. La máxima desviación en el módulo del b-vector corresponde a las inclinaciones más bajas. A pesar de la enorme carga eléctrica, los efectos en el vector  $\vec{B}$  son del orden del milímetro. Un cálculo estimativo proporciona una primera aproximación al valor del potencial eléctrico necesario para conseguir dicha carga en el asteroide:  $Q = CV$  donde  $C$  es su capacitancia y  $V$  su potencial eléctrico. La capacitancia de una esfera es  $C = 4\pi\epsilon_0 r$  y por tanto:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para obtener  $Q = 10^9$  C, el potencial eléctrico debe ser del orden de  $V \sim 10^{17}$  kV. La potencia necesaria para mantener dicha diferencia de potencial en la superficie del asteroide es inviable, independientemente del método utilizado para estimar la corriente de especies repelidas o de las partículas emitidas [2].

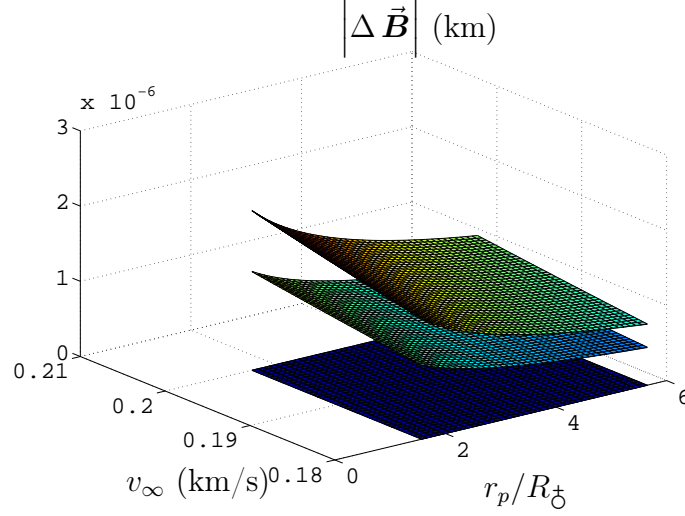


Figura 2.— Variación del b-vector cuando la fuerza electrostática actúa sobre el asteroide. Carga del asteroide:  $10^9$  C. Los resultados se presentan para distintas hipérbolas e inclinaciones iniciales.

#### 4. Modelo de la fuerza electrodinámica

El modelo de la fuerza electrodinámica es necesario para estimar el efecto de un tether electrodinámico que actúa sobre un asteroide. No se estudia en detalle el modo de unión del cable al asteroide. El objetivo de esta sección es la de proporcionar una primera aproximación de las aceleraciones de perturbación que podrían obtenerse si la totalidad de la fuerza electrodinámica generada en el cable pudiese aplicarse directamente en el centro de masas del asteroide.

La fuerza electrodinámica que actúa en un elemento de cable,  $F_{ed}^{ds}$ , puede escribirse como:

$$\vec{F}_{ed}^{ds} = I(s, \vec{r}, \vec{v}, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) \vec{u}(\vec{q}) \times \vec{B}_{Mg}(s, \vec{r})$$

donde  $I(s, \vec{r}, \vec{v}, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$  es la corriente a lo largo del cable,  $\vec{B}_{Mg}(s, \vec{r})$  es el campo magnético en el elemento de cable,  $s$  es la variable a lo largo del tether y  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{q}, \dot{\vec{q}}$  es el estado del sistema. Para simplificar esta expresión, se han realizado algunas hipótesis:

- Tanto el campo magnético y la velocidad no varían a lo largo del cable:  $\vec{B}_{Mg}(s, \vec{r}) \approx \vec{B}_{Mg}(\vec{r})$ ,  $\vec{v}(s, \vec{r}) \approx \vec{v}(\vec{r})$ .
- El vector unitario en la dirección del cátodo al ánodo,  $\vec{u}$ , apunta siempre al origen del sistema de referencia pseudo-inercial. Por lo tanto,  $\vec{u} = \hat{\vec{r}}$ .

- La intensidad a lo largo del cable se calcula como la media de la intensidad en un instante dado:  $L_t I_{av}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{u}) = \int_{s_0}^{s_f} I(\xi, \vec{r}, \vec{v}, \vec{u}) d\xi$ .

- El campo magnético se define como en el apartado anterior:

$$\vec{B}_{Mg} = \frac{\mu_m R_t^3}{r^3} (3(\hat{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{m})$$

Por consiguiente, la fuerza de Lorentz se escribe como:

$$\vec{F}_{ed} \Big|_{OPC} = L_t I_{av} \left( \{1, 0, 0\}^T \times \vec{B}_{Mg} \Big|_{OPC} \right)$$

El parámetro  $L_t I_{av}$  puede utilizarse para estimar el efecto de las fuerzas electrodinámicas en la deflexión del asteroide. No obstante, también es posible establecer un modelo que permita estimar la intensidad media a lo largo del cable como función del estado del sistema y de los parámetros ambientales. En este trabajo, usaremos el modelo del régimen OML (orbital-motion-limited) como se define en [5]:

$$I_{av,OML}(\vec{r}, \vec{v}, \phi) = \frac{2}{5} e N_\infty \frac{L_t p}{\pi} \sqrt{\frac{2 e E_m L_t}{m_e}}$$

donde

$$E_m = \vec{u} \cdot [(\vec{v} - \vec{v}_{pl}) \times \vec{B}_{Mg}] = \{1, 0, 0\}^T \cdot \left[ (\vec{v} \Big|_{OPC} - \mathcal{R}^T \mathcal{R}_f^T \{1, 0, 0\}^T) \times \vec{B}_{Mg} \Big|_{OPC} \right]$$

es el campo electromotriz,  $e$  es la carga del electrón,  $N_\infty$  es la densidad de plasma,  $m_e$  es la masa del electrón y  $p$  es el perímetro de la sección transversal del cable. Hay que hacer notar que la utilización del OML en este escenario no se ajusta completamente a las condiciones en las que la expresión de la intensidad OML ha sido obtenida. En particular, la distribución de velocidad del viento solar no sigue una distribución maxwellliana [6].

En la Figura 3, se presentan los resultados obtenidos para una tether de 100 km de longitud con una corriente de 1 A a lo largo del mismo. En tal caso, la variación del módulo del b-vector es del orden de kilómetros, correspondiendo los mejores resultados a órbitas de baja inclinación. Los valores de deflexión son próximos a los obtenidos con estrategias impulsivas óptimas [4]. No obstante, se ha de evaluar si es factible tener una intensidad media de 1 A durante el fly-by. Utilizando los siguientes valores:

- Velocidad del plasma a 1 AU:  $v_{pl} = 500$  km/s [3].
- Densidad electrónica de plasma a 1 AU:  $N_\infty = 3 \cdot 10^6$  m<sup>-3</sup> [7].
- Campo magnético terrestre en el pericentro:  $B_{Mg} = 2.5 \cdot 10^{-7}$  T.

y la expresión para la intensidad media en el régimen OML, obtenemos una expresión que relaciona la longitud del cable y el perímetro de su sección transversal:

$$L_t^{3/2} p \approx 8 \cdot 10^7 \text{ m}^{5/2}$$

Suponiendo que  $p$  es del orden de centímetros, la longitud necesaria para lograr una corriente de 1 A durante el fly-by resulta ser  $L_t \sim 4 \cdot 10^3$  km. Esta longitud es, a priori, inviable desde un punto de vista práctico.

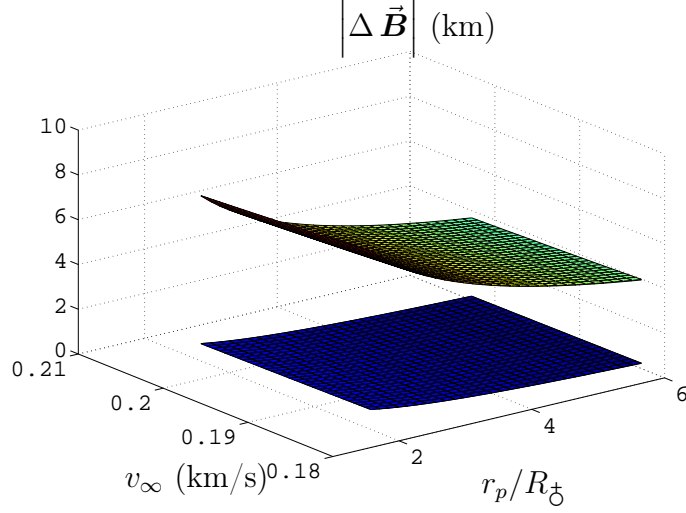


Figura 3.— Variación del b-vector cuando actúan fuerzas electrodinámicas sobre el asteroide. Intensidad en el tether 1 A. Los resultados se presentan para distintas hipérbolas e inclinaciones iniciales.

## 5. Cambio en momento angular haciendo uso de cables electrodinámicos

En trabajos anteriores se ha señalado la relevancia de la alteración en el estado dinámico de rotación de los asteroides durante un fly-by [8, 9]. Este fenómeno depende del coeficiente gravitatorio  $C_{22}$  del asteroide, relacionado con su elipticidad ecuatorial [10]. Este efecto natural puede conducir a la ruptura o reforma del asteroide bajo la acción de momentos gravitatorios. Además, la variación del estado rotacional del asteroide cambiará la subsiguiente aceleración de Yarkovsky que sufrirá durante el movimiento heliocéntrico.

En este apartado se estudia la posibilidad de potenciar este proceso haciendo uso de cables electrodinámicos. La contribución de estos dispositivos al cambio en el momento angular del asteroide presenta una doble vertiente. En primer lugar, modifican la forma del cuerpo y, en consecuencia, su coeficiente  $C_{22}$ . Por otra parte, pueden proporcionar un momento debido a la presencia de fuerzas electrodinámicas.

Para estimar la importancia de la primera contribución, es necesario calcular la influencia del tether en el coeficiente  $C_{22}$ . Se supondrá que el tether y el asteroide se encuentran rígidamente unidos de manera que ambos constituyen un único sólido rígido. Dentro de la validez de esta aproximación, la expresión del coeficiente recogida en [11] es válida:

$$C_{22} = \frac{A - B}{4M_a}$$

donde  $A$  y  $B$  son los momentos de inercia del cuerpo alrededor de los ejes  $Ox$  y  $Oy$  en el sistema de referenecia principal del cuerpo. Si la configuración relativa de tether y asteroide es tal que el tether se encuentra en el eje  $y$  del sistema de referencia fijado al cuerpo, el nuevo momento de inercia puede calcularse como:  $A' = A + A_t$ , siendo  $A_t$  el momento de inercia del cable respecto al eje  $Ox$ . Llamando  $d$  a la distancia entre el centro de masas del asteroide <sup>3</sup> y el punto de unión del cable en la superficie del asteroide, asumiendo que la masa del cable se concentra en sus dos extremos y que ambas masas extremas son iguales, el valor de  $A_t$  será:

$$A_t = \frac{1}{2} m_t L_t^2 \left[ 1 + 2 \frac{d}{L_t} + 2 \left( \frac{d}{L_t} \right)^2 \right]$$

Por tanto, la variación del coeficiente gravitatorio se puede expresar como:

$$\Delta C_{22} = \frac{m_t L_t^2}{8 M_a} \left[ 1 + 2 \frac{d}{L_t} + 2 \left( \frac{d}{L_t} \right)^2 \right] \quad (13)$$

Por otra parte, el efecto de las fuerzas electrodinámicas puede medirse por el cambio en el momento angular del asteroide. En este estudio preliminar, la naturaleza de la unión no se discute en detalle. Como anteriormente, se supone que el tether actúa como parte de un sólido rígido compuesto por asteroide y cable. Por consiguiente, la contribución en el cambio de  $\vec{H}$  debido a las fuerzas electrodinámicas será:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}_{ed}$$

A su vez, el momento electrodinámico debido a la fuerza de Lorentz actuando a lo largo del tether puede calcularse como:

$$\vec{M}_{ed} = \int_{\Omega} \left( (\vec{\rho}_{G,t} + s \vec{u}) \times \vec{F}_{ed}^{ds} \right) ds$$

donde  $\Omega$  es el volumen del cable y  $\vec{\rho}_{G,t}$  es el radio vector desde el centro de masas del asteroide al centro de masas del tether. Se tendrá en cuenta la anterior definición de las fuerzas electrodinámicas:

$$\vec{F}_{ed}^{ds} = I(s, \vec{r}, \vec{v}, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) \vec{u}(\vec{q}) \times \vec{B}(s, \vec{r})$$

Utilizando las siguientes hipótesis para simplificar la anterior expresión:

- El campo magnético y la velocidad no varían a lo largo del cable:  $\vec{B}(s, \vec{r}) \approx \vec{B}(\vec{r})$ ,  $\vec{v}(s, \vec{r}) \approx \vec{v}(\vec{r})$ .
- El vector unitario  $\vec{u}$  no varía a lo largo del cable.

---

<sup>3</sup>Se supone de manera implícita que la posición del centro de masas no varía debido a la presencia del tether.

obtenemos:

$$\vec{M}_{ed} = \vec{r}_{G,t} \times \left( \vec{u} \times \vec{B} \right) \int_{\Omega} I ds + \vec{u} \times \left( \vec{u} \times \vec{B} \right) \int_{\Omega} s I ds$$

Además, se tendrá en cuenta el valor medio de las integrales a lo largo del cable en cada instante:

$$L_t I_{av} = \int_{\Omega} I ds \quad L_t^2 I_{m1} = \int_{\Omega} s I ds$$

Por último, si el tether se despliega de modo que su dirección  $\vec{u}$  es coincidente con la dirección del radio vector que conecta los centros de masas de tether y asteroide, tendremos:

$$\vec{\rho}_{G,t} = D \vec{u}$$

siendo  $D$  la distancia entre ambos centros de masas. Para un tether homogéneo con masas extremas iguales unido a la superficie del asteroide:  $D = L_t/2 + d$ , donde  $d$  es la distancia desde el centro de masas del asteroide al punto de unión. Estas consideraciones conducen a:

$$\vec{M}_{ed} = L_t^2 I_{av} \left( \frac{1}{2} + \frac{d}{L_t} + \frac{I_{m1}}{I_{av}} \right) \vec{u} \times \left( \vec{u} \times \vec{B} \right)$$

Para una intensidad uniforme a lo largo del cable con su centro de masas localizado en el centro del tether, el valor de  $I_{m1}$  sería cero. Con hipótesis menos restrictivas,  $I_{m1} \neq 0$  pero  $I_{m1} \ll I_{av}$ . Además, dada la dependencia del momento con la longitud del cable, cuanto más largo sea el cable mayor será el momento alrededor del centro de masas del sistema. Por tanto, consideraremos cables más largos que la distancia  $d$ ,  $L_t \gg d$ . De este modo, la expresión del momento resulta ser:

$$\vec{M}_{ed} \approx \frac{1}{2} L_t^2 I_{av} \vec{u} \times \left( \vec{u} \times \vec{B} \right) \quad (L_t \gg d)$$

Finalmente, es necesario establecer un modelo para estimar el producto vectorial  $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{B})$ . Para el campo magnético, consideraremos la descripción de dipolo alineado con el eje de rotación terrestre. Por otra parte, para la dirección del cable, la hipótesis tenidas en cuenta son:

- El asteroide se encuentra rotando uniformemente alrededor de su eje de máximo momento de inercia.
- El máximo momento de inercia es perpendicular al plano orbital.
- El tether está contenido en un plano perpendicular a la velocidad angular.

Con estas hipótesis restrictivas, se puede calcular una primera aproximación del cambio en momento angular debido al momento de perturbación de las fuerzas electrodinámicas en función de los parámetros  $L_t$  y  $I_{av}$ . No obstante, parece más interesante comparar la estimación del cambio en momento angular debido a este efecto con el correspondiente a



la modificación de la interacción gravitatoria entre asteroide y Tierra. Basándonos en [8], se puede estimar dicho cambio en momento angular en función del cambio en el coeficiente gravitatorio  $\Delta C_{22}$  del asteroide. De hecho, tenemos  $\Delta H_g \sim \Delta C_{22} \mathcal{F}_g(r_p, v_\infty, i, \Omega, \omega)$  para el cambio debido a la interacción gravitatoria y  $\Delta H_{ed} \sim (L_t^2 I_{av})/2 \mathcal{F}_{eg}(r_p, v_\infty, i, \Omega, \omega)$  para el caso electrodinámico. En la Figura 4, se presenta el ratio

$$\frac{\Delta H_{ed}}{\Delta H_g} \frac{2 \Delta C_{22}}{L_t^2 I_{av}} = \frac{\mathcal{F}_g(r_p, v_\infty, i, \Omega, \omega)}{\mathcal{F}_{eg}(r_p, v_\infty, i, \Omega, \omega)}$$

para diferentes fly-bys caracterizados por el radio de periapsis y el exceso de velocidad hiperbólica. Nótese que el ratio tiene dimensiones de  $1/A$ .

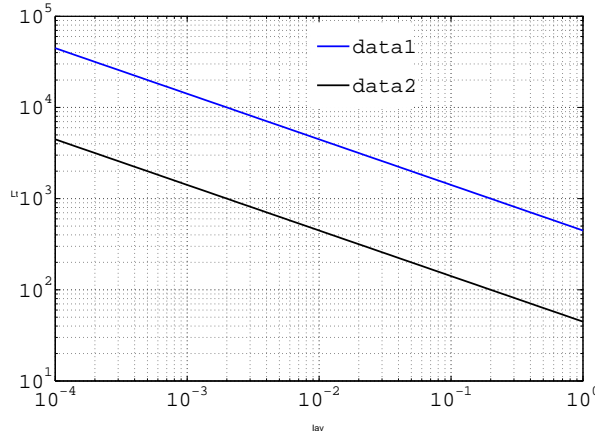


Figura 4.— Ratio entre el cambio en momento angular debido a los efectos gravitatorios y electrodinámicos en función del cambio en el coeficiente  $\Delta C_{22}$  y los parámetros del tether  $L_t$  y  $I_{av}$  para distintas inclinaciones.

De estos resultados, podemos deducir el orden de magnitud de los parámetros del tether necesarios para obtener un cambio en momento angular debido a la perturbación electrodinámica del mismo orden que el cambio debido a la perturbación gravitatoria imponiendo  $\Delta H_{ed} \sim \Delta H_g$ . La condición se expresa

$$\frac{2 \Delta C_{22}}{L_t^2 I_{av}} \sim 10^{-7} \frac{1}{A}$$

para el mejor ratio del momento electrodinámico. Además, teniendo en cuenta (13), puede encontrarse una relación que liga la intensidad en el cable y la masa necesaria para proporcionar un cambio de momento angular del mismo orden para ambas contribuciones.

$$I_{av} \sim \frac{m_t}{4 M_a} 10^7 \text{ A} \quad (14)$$

Nótese que la longitud del cable no aparece de manera explícita en esta relación. De la estimación de la intensidad del régimen OML, tenemos  $I_{av} \sim L_t^{3/2} p 10^{-7}/8 \text{ A}$ . Considerando

un perímetro del orden de centímetros  $p \sim 10^{-2}$  m, y usando una densidad linear para el cable de <sup>4</sup>  $\rho_l = m_t/L_t$ , la intensidad media OML toma la forma:

$$I_{av} \sim \frac{m_t \sqrt{L_t}}{8 \rho_l} 10^{-9} \text{ A}$$

Y sustituyendo estos resultados en la relación anterior (14), podemos obtener la longitud de tether necesaria para la cual las contribuciones al cambio en momento angular de los efectos electrodinámicos y gravitatorios son del mismo orden de magnitud:

$$L_t \sim \sqrt{\frac{2 \rho_l}{M_a}} 10^8 \text{ m}$$

Para un cable de aluminio ( $\rho_l \sim 2,7 \cdot 10^{-1}$  kg/m) unido a Apophis ( $M_a \sim 4,6 \cdot 10^{10}$  kg), la longitud de cable que proporcionaría el mismo cambio en momento angular debido al momento electrodinámico y como consecuencia del cambio en la forma del cuerpo será de:  $L_t \sim 350$  m. Se puede, por tanto, concluir que la presencia de tethers electrodinámicos largos será más significativa debido al momento electrodinámico, aunque el modelo de colección de corriente acarrea una incertidumbre en las estimaciones anteriores.

Por último, exploramos el cambio en velocidad angular producido por la modificación de la interacción gravitatoria debido a la presencia del cable. El máximo cambio en velocidad angular en un fly-by ecuatorial puede estimarse [8] como:

$$\Delta \Omega_z \sim \Omega_H \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

donde  $\Omega_H$  se define como sigue:

$$\Omega_H = 2 \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{C_{22}}{(I_z/M_a) r_p} \frac{v_\infty}{(1 + r_p v_\infty/\mu)}$$

siendo  $\nu = M_{\text{g}}/M_a$ . Cuando el tether es parte del cuerpo, los coeficientes del asteroide varían, así como  $\Omega_H$ :

$$\Omega'_H = 2 \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{C_{22} + \Delta C_{22}}{((I_z + \Delta I_z)/(M_a + m_t)) r_p} \frac{v_\infty}{(1 + r_p v_\infty/\mu)}$$

Suponiendo  $\Delta C_{22}/C_{22} \ll 1$ ,  $\Delta I_z/I_z \ll 1$  y  $m_t/M_a \ll 1$ , podemos calcular las variaciones de primer orden en  $\Omega_H$ , obteniendo:

$$\Omega'_H = \Omega_H \left( 1 + \frac{m_t}{M_a} + \frac{\Delta C_{22}}{C_{22}} - \frac{\Delta I_z}{I_z} \right)$$

Modelando el asteroide como un elipsoide triaxial [12], cuyo ancho, longitud y altura serán  $a, b, c$ , permite reescribir la relación anterior como una función de los parámetros del asteroide y del tether:

$$\Omega'_H = \Omega_H \left[ 1 + \frac{m_t}{M_a} \left( 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{L_t}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{(b/a)^4 - 1} \right) \right) \right]$$

---

<sup>4</sup>Se supone que el tether es homogéneo y de sección transversal constante.

Por lo tanto, el ratio entre el cambio de velocidad angular debido a la interacción gravitacional con y sin tether se convierte en:

$$\frac{\Delta \Omega'}{\Delta \Omega} \sim 1 + \frac{m_t}{M_a} \left( 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{L_t}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{(b/a)^4 - 1} \right) \right)$$

Utilizando los resultados y el modelo de elipsoide del asteroide recogidos en [12], se puede expresar la anterior relación en términos del cambio del periodo rotacional. Considerando los casos que proporcionan un mayor cambio del periodo, el ratio con y sin tether puede establecerse como:

$$\frac{\Delta P'}{\Delta P} \sim \frac{1 - \frac{m_t}{M_a} \left[ \frac{2}{5} + \left( \frac{L_t}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{(b/a)^4 - 1} \right) \right]}{1 + \frac{m_t}{6M_a} \left[ \frac{2}{5} + \left( \frac{L_t}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{(b/a)^4 - 1} \right) \right]}$$

El cambio relativo en el periodo rotacional después de la maniobra se muestra en la Figura 5 en función del ratio  $L_t/a$ . El efecto de la presencia del tether en la interacción gravitacional es perceptible para valores de  $L_t/a$  mayores que  $10^3$ . En el caso de Apophis esto se traduce en longitudes de tethers del orden de kilómetros. Además, del análisis anterior se espera que la importancia del momento electrodinámico en esa situación será mayor que la interacción gravitacional. Como conclusión, es posible afirmar que los tethers electrodinámicos con longitudes del orden de miles de kilómetros alterarán el estado rotacional del asteroide de manera apreciable.

Por lo tanto, el ratio entre el cambio en la velocidad angular debido a la interacción gravitacional con y sin tethers pasa a ser:

$$\frac{\Delta \Omega'}{\Delta \Omega} \sim 1 + \frac{3 \rho_l}{4 \pi \rho_v b c} \left( \frac{L_t}{a} \right) \left( 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{L_t}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{(b/a)^4 - 1} \right) \right)$$

donde  $\rho_v$  es la densidad volumétrica del asteroide. Asumiendo que el cambio de velocidad angular es pequeño con respecto a la velocidad angular inicial  $\Delta \Omega / \Omega \ll 1$  y que la contribución del tether a ese cambio es pequeña  $\Delta \Omega' / \Delta \Omega = 1 + \mathcal{O}(1)$ , el ratio de los periodos rotacionales tiene la misma forma que el correspondiente ratio de velocidades angulares.

## 6. Conclusiones

En este documento, se desarrolla un método para analizar el efecto de las técnicas de deflexión durante un fly-bys de un asteroide a la Tierra. Dicho método permite estimar la variación de la órbita de un asteroide como función de la estrategia seguida para efectuar la deflexión. Se ha confirmado que pequeñas fuerzas actuando durante el fly-by no provocan grandes cambios en la órbita del asteroide, ya que el lapso de tiempo es pequeño. No obstante, las características específicas de la órbita hiperbólica alrededor del cuerpo principal

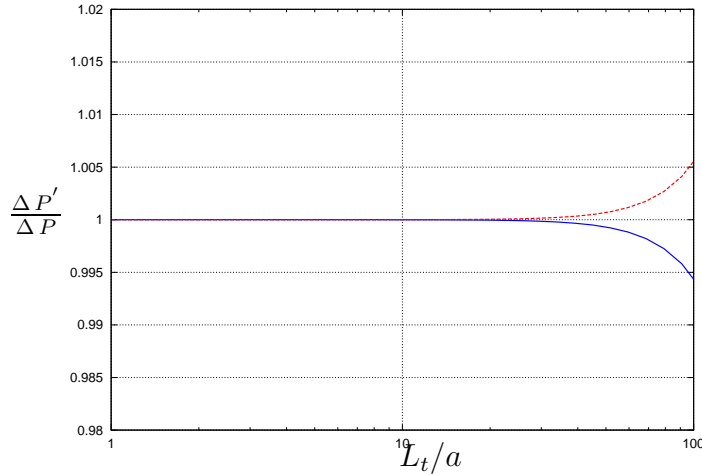


Figura 5.— Ratio entre la variación del período rotacional debido a la interacción gravitatoria con y sin tether en función de la relación  $L_t/a$ .

pueden ser explotadas para producir un cambio significativo en la subsiguiente órbita del asteroide. En particular, la posibilidad de cambiar la orientación del plano orbital por medio de una maniobra impulsiva parece factible incluso con velocidades de impacto no excesivas.

Asimismo, se han estudiado las potenciales interacciones del asteroide con el campo magnético terrestre. Cuando ambas fuerzas, la electrostática y la electrodinámica, son pequeñas, los resultados son similares a los obtenidos para un empuje continuo pequeño. De hecho, para obtener incluso pequeñas fuerzas, es necesario cargar el asteroide o proporcionar una corriente que no es, en principio, viable. Estos resultados establecen la baja importancia del efecto magnético en la trayectoria de los asteroides.

Finalmente, se analiza el efecto de un tether electrodinámico en la dinámica rotacional de un asteroide. En anteriores trabajos se indica la relevancia del estado rotacional del asteroide en la trayectoria. A diferencia de lo que ocurre en la dinámica del CM, fuerzas pequeñas actuando a gran distancia del CM pueden provocar un importante momento y jugar un papel significativo en el cambio del momento angular del asteroide. Además, a medida que el tether modifica la forma del cuerpo, puede aumentar la interacción gravitacional entre el primario y el asteroide, siendo ambos efectos simultáneos.

## Referencias

- [1] D. Fargion. Asteroid Deflection: How, Where and When? *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics Supplement*, 8:399–411, October 2008.
- [2] N. Murdoch, D. Izzo, C. Bombardelli, I. Carnelli, A. Hilgers, and D. Rodgers. Electrostatic Tractor for Near Earth Object Deflection. In *Proceedings of the 59th International Astronautical Congress*, number Paper IAC-08-A3.I.5, 2008.

- [3] D. Steel. Electromagnetic perturbations of the orbits of asteroids. In B. Warmbein, editor, *Asteroids, Comets, and Meteors: ACM 2002*, volume 500 of *ESA Special Publication*, pages 433–436, November 2002.
- [4] D. Izzo, A. Bourdoux, R. Walker, and F. Ongaro. Optimal trajectories for the impulsive deflection of near earth objects. *Acta Astronautica*, 59:294–300, July 2006.
- [5] J.R. Sanmartín, M.Martínez-Sánchez, and E. Ahedo. Bare Wire Anodes for Electrodynamic Tethers. *Journal of Propulsion and Power*, 9(3):353–360, May/June 1993.
- [6] W. G. Pilipp, K.-H. Muehlhaeuser, H. Miggenrieder, M. D. Montgomery, and H. Rosenbauer. Characteristics of electron velocity distribution functions in the solar wind derived from the HELIOS plasma experiment. *Journal of Geophysical Research*, 92:1075–1092, February 1987.
- [7] N. Meyer-Vernet. *Basics of the Solar Wind*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] D. J. Scheeres, S. J. Ostro, R. A. Werner, E. Asphaug, and R. S. Hudson. Effects of Gravitational Interactions on Asteroid Spin States. *Icarus*, 147:106–118, September 2000.
- [9] D. J. Scheeres. Changes in Rotational Angular Momentum due to Gravitational Interactions between Two Finite Bodies. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81:39–44, 2001.
- [10] D. J. Scheeres. The Effect of C22 on Orbit Energy and Angular Momentum. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 73:339–348, January 1999.
- [11] A. E. Roy. *Orbital motion*. 2005.
- [12] D. J. Scheeres, L. A. M. Benner, S. J. Ostro, A. Rossi, F. Marzari, and P. Washabaugh. Abrupt alteration of Asteroid 2004 MN4’s spin state during its 2029 Earth flyby. *Icarus*, 178:281–283, November 2005.

