

Órbitas casi geoestacionarias y casi periódicas con control

F. Blesa[†], A. Elipe[‡] y M. Lara^{*}

[†] Grupo de Mecánica Espacial y Departamento de Física Aplicada.

[‡] Grupo de Mecánica Espacial.

Universidad de Zaragoza.

50009 Zaragoza, Spain.

^{*} Real Instituto y Observatorio de la Armada.

11110 San Fernando (Cádiz), Spain.

Resumen

Es sabido que la dinámica de un satélite bajo la acción de un potencial, que tiene en cuenta el efecto de los armónicos de segundo orden, presenta equilibrios estables e inestables. Cuando añadimos las perturbaciones producidas por la presión de radiación solar y la atracción de la marea debida al Sol y a la Luna dicha periodicidad se rompe. Sin embargo, por medio de algunas técnicas de optimización, podemos introducir ciertas restricciones relacionadas con la periodicidad de la órbita. De ese modo, somos capaces de encontrar unas condiciones iniciales que fuerzan a que la órbita permanezca dentro de una caja, evitando excesivas maniobras de mantenimiento en posición. Este procedimiento puede aplicarse tanto en las órbitas alrededor de un equilibrio estable como inestable. Para órbitas geoestacionarias alejadas de los puntos de equilibrio los resultados no son tan satisfactorios, pero es posible conseguir que permanezca dentro de una caja de mayor tamaño.

Palabras clave y expresiones: Satélites geoestacionarios, optimización y control de trayectorias.

MSC: 49-04, 70F40.

1 Introducción

Es bien sabido [9] que la dinámica de un satélite bajo la acción de un potencial, que tiene en cuenta el efecto de los armónicos de segundo orden, presenta equilibrios estables e inestables. También se conoce bien su estabilidad lineal: dos son de carácter estable y

los otros dos son inestables [7]. Por lo tanto, el entorno de los puntos estables parece un buen lugar para colocar satélites artificiales, algo que ya se conoce desde hace tiempo.

Recientemente, los autores [3] demostraron que es posible encontrar órbitas periódicas alrededor de los puntos inestables y que dichas órbitas pueden ser estables bajo ciertas condiciones. Es posible encontrar movimientos de corto y largo periodo alrededor de los puntos estables, mientras que sólo se obtienen movimientos de corto periodo alrededor de los puntos inestables. Al ser estable, las soluciones de corto periodo podrían ser útiles para situar satélites, evitando de este modo las maniobras de mantenimiento en estación debidas a los armónicos tesorales del potencial. Como era de esperar, las órbitas alrededor de los puntos inestables son también inestables.

Por lo tanto, se emplean soluciones de corto y largo periodo, primero como soluciones nominales para cuando incluimos la presión de radiación solar y la marea lunisolar (es decir, las perturbaciones del mismo orden del potencial terrestre de nuestro modelo). Pero cuando estas contribuciones se tienen en cuenta, las órbitas dejan de ser periódicas y las trayectorias abandonan la ventana en la que están confinadas y el mantenimiento en estación es necesario.

Para evitar este gasto de combustible, nosotros empleamos un procedimiento de optimización que mantiene la periodicidad, y de esta manera, somos capaces de mantener la órbita en una caja determinada unos 30 días. El procedimiento que mostramos es efectivo incluso para órbitas inestables. En el caso de órbitas geoestacionarias, pero lejos de los puntos de equilibrio, los resultados no son tan buenos como los anteriores, pero aún así, la órbita permanece dentro de una caja, aunque de mayor tamaño.

2 Órbitas Periódicas para Armónicos de Segundo Orden

Consideremos el movimiento de un satélite referido a un sistema de referencia que rota con el planeta. El origen del sistema de referencia es el centro de masas de la Tierra, pero los ejes coinciden con los ejes principales de inercia. Tomamos el satélite como si fuera una masa puntual, y tomamos hasta el segundo orden en el desarrollo del potencial. También suponemos que la Tierra rota alrededor del eje z con una velocidad ω constante. En ese caso, el Lagrangiano que nos define el movimiento es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \omega(xy - yx) + \Omega(x, y, z), \quad (1)$$

donde Ω es el potencial efectivo

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - \mathcal{V}(x, y, z), \quad (2)$$

y el potencial

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ 3C_{2,2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} - \frac{1}{2}C_{2,0} \left(1 - 3\frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \right], \quad (3)$$

donde μ es la constante gravitacional, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia radial del satélite, R_\oplus el radio ecuatorial, y los coeficientes armónicos son $C_{2,0} < 0 < C_{2,2}$ ya que la Tierra gira alrededor de su eje de mayor inercia. Los valores numéricos que usamos son $C_{2,0} = -0.1082630 \times 10^{-2}$ y $C_{2,2} = 0.1814964 \times 10^{-5}$, tomados de [1]. Hay que tener en cuenta que esos coeficientes no son que se emplean habitualmente, puesto que se calculan con respecto a los ejes principales de inercia de la Tierra.

Las ecuaciones de movimiento de acuerdo con el Lagrangiano (1) son

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2\omega \dot{x} = \Omega_y, \quad \ddot{z} = \Omega_z. \quad (4)$$

Este sistema tiene la integral Jacobiana dada por

$$C = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (5)$$

Es bien conocido que las ecuaciones del movimiento (4) tienen cuatro equilibrios, situados en el plano xy . Dos están en el eje x , que denotaremos por $E_1(\pm r_1, 0)$ y los otros dos en el eje y , que llamamos $E_2(0, \pm r_2)$. Realizando un análisis lineal, se puede probar que los equilibrios E_1 en el eje x son inestables, mientras que los E_2 en el eje y son linealmente estables. Además, tras un complejo análisis, Deprit y López-Moratalla [1] demostraron que esos puntos son orbitalmente estables.

Los puntos próximos a los equilibrios estables son regiones a tener en cuenta a la hora de colocar satélites artificiales [9, 7], puesto que tienen características similares a los puntos geoestacionarios. Lara y Elife [3, 4] encontraron familias de órbitas periódicas alrededor de puntos geoestacionarios estables e inestables. La familia E_1 está hecha a partir de órbitas de corto periodo que son como pequeñas elipses alrededor de puntos inestables E_1 con el semieje mayor paralelo al eje y (véase la Figura 1). El problema es que para valores de la constante de Jacobi $C < 2.46315$, a la que corresponden órbitas cercanas al equilibrio, éstas resultan ser inestables, lo que hace que no nos sirvan. Sin embargo, alrededor del punto estable E_2 , encontramos dos tipos diferentes de órbitas: de largo periodo, cuya estabilidad es altamente oscilatoria (ver Figura 2), y órbitas de corto periodo (ver Figura 1, izquierda), bastante similares a las de la familia E_1 . En este caso, las órbitas tipo elipse tienen el semieje mayor en la dirección del eje x . En este caso, para valores $C < 2.46315$ las órbitas son estables, lo que las hace buenas candidatas para usos prácticos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estas órbitas son periódicas para un modelo que incluye solamente los armónicos de segundo orden del geopotencial, es decir, J_2 , C_{22} y S_{22} .

3 El Modelo Completo

El movimiento de satélites síncronos está afectado por un desplazamiento en la longitud del satélite producido por una perturbación de los armónicos tesaerales, lo que hace que

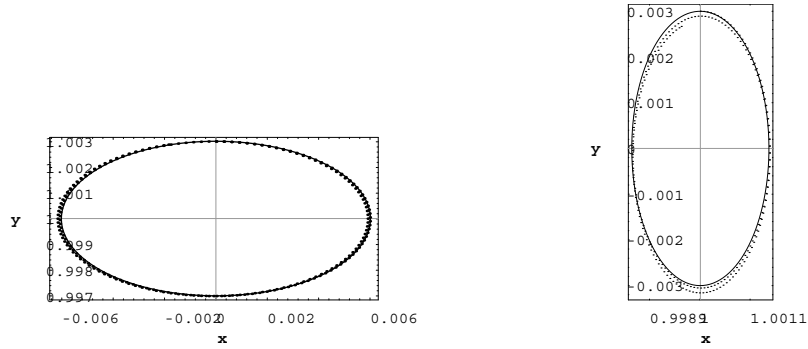


Figura 1: Órbitas de corto periodo alrededor de los equilibrios geostacionarios estable $E_2(0, +r_2)$ (a la izquierda) e inestable $E_1(r_1, 0)$ (a la derecha) para el segundo orden del potencial armónico. La línea de puntos corresponde a una solución aproximadamente periódica. La línea continua es la solución mejorada.

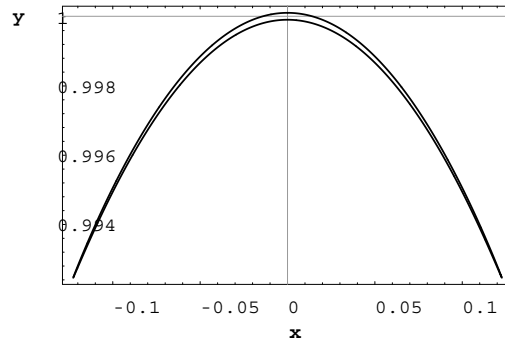


Figura 2: Órbitas de largo periodo alrededor del equilibrio geostacionario $E_2(0, +r_2)$ para el segundo orden del potencial armónico.

sean necesarias las maniobras este-oeste en la práctica [2]. El semieje mayor y la longitud también se ven afectados por la perturbación lunisolar por lo que la estrategia de las maniobras este-oeste debe tenerlas en cuenta. La presión de radiación solar produce efectos de largo periodo en longitud, inclinación y excentricidad para satélites síncronos [5]. La inclinación también se ve afectada por los tesaerales y la perturbación lunisolar, pero en la práctica, los efectos de largo periodo en inclinación se consideran independientes de los otros efectos, y las maniobras para corregir la inclinación se preparan independientemente [9]. El desplazamiento en longitud producido por los tesaerales produce las soluciones periódicas calculadas en este trabajo. Por lo tanto, puede ser de interés hacer que la parte que corresponde a las maniobras este-oeste no sea necesaria, pero como hemos dicho antes, nuestro modelo está simplificado, y contiene sólo la influencia de los primeros armónicos del campo gravitatorio. Sería interesante ver si estas órbitas mantienen su periodicidad cuando usamos un modelo más realista. Con esto en mente, cambiamos nuestro modelo de fuerzas, al que llamaremos el modelo completo, e incluiremos en él el potencial gravitatorio terrestre, la presión de radiación solar y la atracción de marea del

Sol y la Luna dada por el JPL.

Para ver cómo evoluciona una órbita periódica cuando se impone un modelo más completo, estudiaremos dos tipos de órbitas: una estable alrededor del punto estable E_2 , y una órbita periódica en el anillo geostacionario, lejos de los puntos estables e inestables.

4 Órbita Estable Alrededor de E_2

Primero, consideremos una órbita de corto periodo alrededor de E_2 , dado por las condiciones iniciales ($z = 0.0$ km, $\dot{z} = 0.0$ km/s)

$$\begin{aligned} x &= -0.5668767573023876 \times 10^{-3} \text{ km}, & \dot{x} &= 0.2656720678179895 \times 10^{-2} \text{ km/s}, \\ y &= +0.4218287749750287 \times 10^5 \text{ km}, & \dot{y} &= 0.2075417909170305 \times 10^{-7} \text{ km/s}. \end{aligned}$$

Para el problema tesimal, esta órbita es periódica y su periodo es cercano a las 24 horas $P = 0.8616725549964927 \times 10^5$ s.

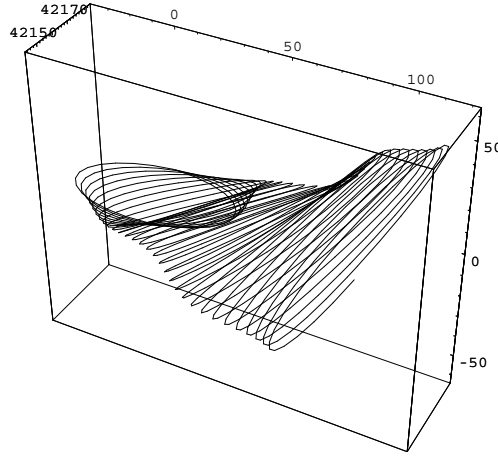


Figura 3: Evolución de la órbita periódica estable cuando se incluye el modelo de fuerzas completo. La periodicidad desaparece, y la órbita tiende a emigrar de su posición inicial.

Sin embargo, para el modelo completo, esta órbita ya no es periódica, y su evolución durante un mes se presenta en la Figura 3. Como se puede ver, primero la órbita ya no es periódica, y segundo, al comienzo estaba colocada en el ecuador y a partir de entonces tiende a estar más y más inclinada conforme incrementa su tamaño.

Por tanto, nos propusimos encontrar un nuevo conjunto de condiciones iniciales, tales que su órbita para el modelo completo esté dentro de una caja de cierto tamaño alrededor del punto estable. Para conseguirlo, empleamos un programa de optimización que fue el paquete OPTIMA [6], que está escrito en FORTRAN y ha sido desarrollado por el Numerical Optimization Centre (NOC) de la Universidad de Hertfordshire.

El problema de optimización con restricciones consiste en minimizar una función sujeta a restricciones no lineales. Una formulación típica [6] de este problema que es útil para

describir algoritmos es: encontrar

$$\min\{f(x) \mid c_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}, c_j(x) = 0, j \in \mathcal{E}\},$$

donde cada c_i, c_j es una aplicación de R^n a R , y \mathcal{I}, \mathcal{E} son conjuntos de índices para restricciones de igualdad y de desigualdad, respectivamente.

Las principales técnicas que se han propuesto para resolver problemas de optimización con restricciones son métodos de gradiente, métodos secuenciales lineales, métodos de programación cuadráticos y métodos basados en Lagrangianos aumentados y funciones de penalización exacta. En cuanto a OPTIMA, usa algoritmos de programación secuencial cuadrática como se explica en Pocha *et al.* [8] y se ha empleado para la optimización de materias tan dispares como las trayectorias de satélites, el diseño de motores de aviones, en talleres de laminación de acero o para la calibración de instrumentos de medida.

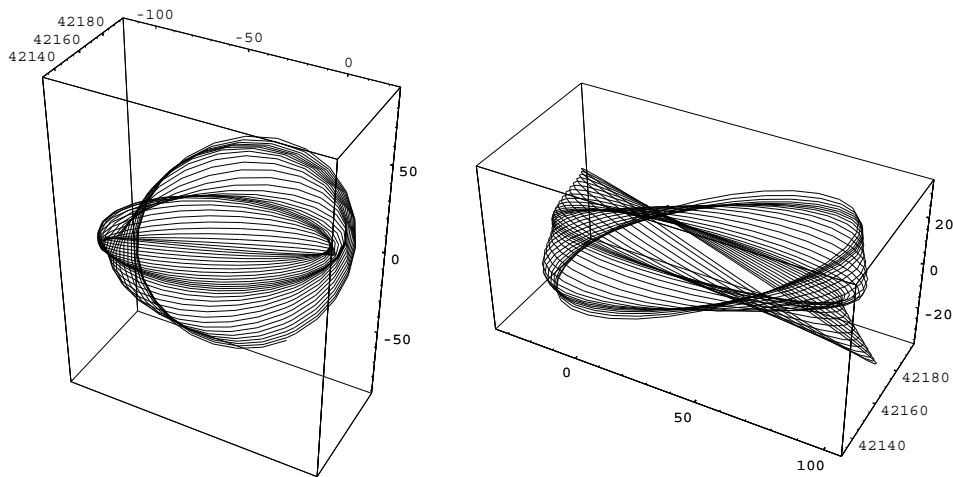


Figura 4: Evolución a lo largo de un mes de la órbita periódica estable cuando se incluye el modelo de fuerzas completo. A la izquierda: optimizada de modo que sea periódica tras un periodo. A la derecha: optimizada para que sea periódica después de tres periodos.

En nuestro caso, la restricción consiste en forzar a que la órbita sea casi periódica después de uno o varios periodos de órbita nominal. Para comenzar, imponemos la condición de que la órbita sea periódica tras un periodo, y entonces, propagamos la órbita a lo largo de un mes (ver Figura 4, izquierda). Ahora, la órbita permanece dentro de una caja de 150 Km de lado, similar en tamaño al caso sin optimizar (Fig. 3), por lo que no ganamos mucho. Sin embargo, si imponemos para la optimización la condición de que la órbita sea periódica después de tres periodos, la altura de la caja se reduce a sólo 40 Km (Figura 4, derecha). De manera parecida, imponiendo ahora que la órbita sea periódica después de un mes, todavía tenemos que la órbita está dentro de una caja aceptable (Figura 5, izquierda), e incluso la evolución al cabo de dos meses no es tan mala (Figura 5, derecha). Las condiciones iniciales para estas órbitas se dan en la Tabla 1.

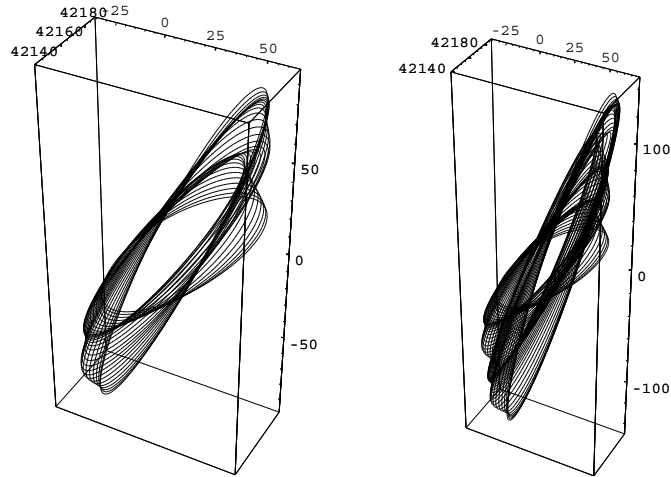


Figura 5: Evolución de la órbita estable periódica cuando se incluye el modelo de fuerzas completo. Ambas están optimizadas para que sean periódicas al cabo de un mes. A la izquierda: propagadas un mes. A la derecha: propagadas dos meses.

5 Una Órbita Tipo Hispasat

Por último, tomamos otra órbita periódica, pero que está lejos de los equilibrios E_1 y E_2 . Por tener una referencia, lo intentamos con una órbita similar a las del satélite de comunicaciones HISPASAT-1C. En particular, tomamos las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 x &= -0.4006113368757354 \times 10^5 \text{ km}, & \dot{x} &= +0.1970574525434962 \times 10^{-2} \text{ km/s}, \\
 y &= +0.1315141267076188 \times 10^5 \text{ km}, & \dot{y} &= -0.6332303732075889 \times 10^{-3} \text{ km/s}, \\
 z &= 0.0 \text{ km}, & \dot{z} &= 0.0 \text{ km/s}.
 \end{aligned}$$

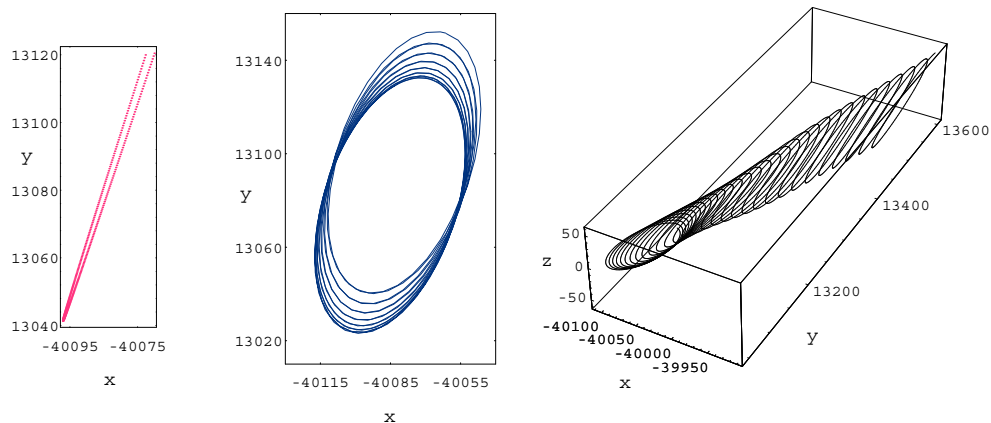


Figura 6: Derecha: evolución de un mes de una órbita periódica tipo Hispasat cuando se incluye el modelo completo de fuerzas. En el centro: la órbita inicial, que es periódica en el modelo simplificado. A la izquierda: parte de la órbita que pertenece a la familia de largo periodo para el problema tesimal.

Para el caso tesimal, esta órbita está casi cerrada en un intervalo de

$$P = 0.1292930479715697 \times 10^7 \text{ s,}$$

o unos 15 días, (ver Figura 6, en el centro), y está en una ventana similar a aquella en la que está confinado el HISPASAT. El extremo de una de las órbitas de una familia de órbitas de largo periodo obtenidas en [3] (ver Figura 2) está en esa misma región. Ya hemos dicho que la estabilidad de las órbitas que pertenecen a esta familia es altamente oscilatoria, lo que en la práctica hace la órbita inestable cuando se introduce el modelo completo. Su evolución se muestra en la Figura 6 (a la derecha), donde se puede ver que la órbita deja su órbita original rápidamente tras unas pocas revoluciones, por lo que se necesita realizar maniobras de mantenimiento en estación con frecuencia.

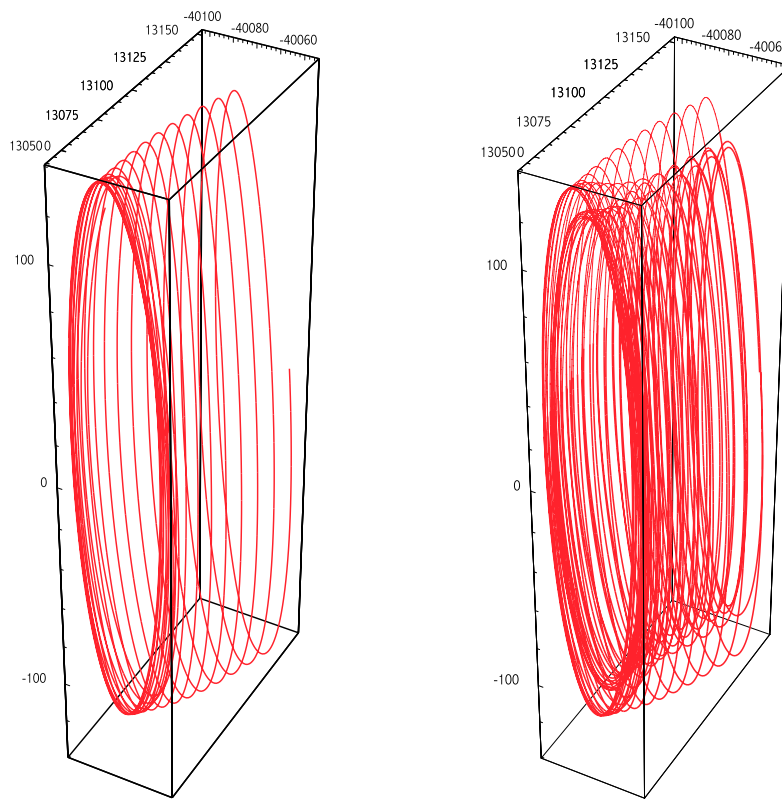


Figura 7: Evolución de la órbita tipo Hispasat cuando se incluye el modelo completo de fuerzas. Izquierda, propagadas y optimizadas para ser periódicas después de 30 días. A la derecha, propagadas y optimizadas para que sean periódicas tras dos meses.

Como hicimos en los otros casos, hemos empleado el paquete de optimización OPTIMA para obtener nuevos conjuntos de condiciones iniciales imponiendo algunas restricciones sobre su periodicidad. Así, imponemos que la órbita sea periódica tras 30 días (lo que corresponde con dos periodos de la órbita original), y propagamos la trayectoria para este intervalo de tiempo (ver Figura 7, izquierda). Repetimos el procedimiento para 60 días (que sea periódico tras 60 días) (Figura 7, derecha). En ambos casos, las componentes a

lo largo de las direcciones x e y son similares, es decir, se mantienen dentro de la ventana, pero la componente z aumenta mucho. Todavía no sabemos la razón, pero creemos que se debe a que la órbita está lejos del equilibrio del problema tesimal, aunque está en un equilibrio del problema principal (el círculo geoestacionario).

Órbita estable			
Periódica después de un periodo			
x (km)	$-0.5668767573023876E-03$	$0.4218287749750287E+05$	$0.0000000000000000E+00$
\dot{x} (km/s)	$0.2666556089922015E-02$	$-0.1738307117644730E-02$	$0.1949451495549421E-02$
P (s)	85878.23153696881632		
Periódica después de 2 periodos			
x (km)	$-0.5668767573023876E-03$	$0.4218287749750287E+05$	$0.0000000000000000E+00$
\dot{x} (km/s)	$0.2669195351878483E-02$	$-0.2667985097243755E-02$	$0.3342404189246247E-02$
P (s)	86000.2880164529184		
Periódica después de 30 periodos			
x (km)	$-0.5668767573023876E-03$	$0.4218287749750287E+05$	$0.0000000000000000E+00$
\dot{x} (km/s)	$0.2669585332412758E-02$	$0.7934514869259903E-03$	$0.2404217434499355E-02$
P (s)	86249.0944590887232		
Órbita tipo Hispasat			
Periódica después de un periodo (15 días)			
x (km)	$-0.4006113368757354E+05$	$0.1315141267076188E+05$	$0.0000000000000000E+00$
\dot{x} (km/s)	$0.2148586171425602E-02$	$-0.4813085416629900E-03$	$-0.3135509536499451E-01$
P (s)	1293247.648023552288		
Periódica después de dos periodos (30 días)			
x (km)	$-0.4006113368757354E+05$	$0.1315141267076188E+05$	$0.0000000000000000E+00$
\dot{x} (km/s)	$0.1616835602991519E-02$	$-0.3821247718805586E-03$	$-0.2040326739329990E-01$
P (s)	1293802.699815067536		

Tabla 1: Condiciones iniciales para diferentes trayectorias optimizadas

6 Conclusiones

En este trabajo se estudia cómo evitar que la periodicidad de las órbitas periódicas en el problema del satélite artificial se pierda al considerar un modelo de fuerzas más realista. Para ello, hemos empleado un método de optimización, lo que nos permite introducir algunas restricciones, para así intentar que se mantenga la periodicidad de la órbita.

De este modo conseguimos encontrar condiciones iniciales para algunas órbitas que están confinadas dentro de una cierta caja durante un cierto tiempo. En concreto, hemos estudiado dos casos: una órbita alrededor de un punto estable, y una órbita tipo Hispasat,

que se encuentra lejos de los equilibrios estables.

Los resultados obtenidos nos muestran que esta técnica podría usar para evitar que se realicen maniobras de mantenimiento en estación demasiado frecuentes.

Referencias

- [1] Deprit, A. and López, T. J.: 1996, ‘Estabilidad orbital de satélites estacionarios’, *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid* **9**, 311–333.
- [2] Gedeon, G. S.: 1969, ‘Tesseral resonance effects on satellite orbits’, *Celestial Mechanics* **1**, 167–189.
- [3] Lara, M. and Elipe, A.: 2000, ‘Periodic orbits around geostationary positions’, *Proceedings of AAS00-156, Space Flight Mechanics Meeting*, Clearwater, Florida.
- [4] Lara, M. and Elipe, A.: 2002, ‘Periodic orbits around geostationary positions’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **82**, 285–299.
- [5] Milani, A., Nobili, A. M. and Farinella, P.: 1987, *Non-gravitational Perturbations and Satellite Geodesy*, Adam Hilger, Bristol.
- [6] Moré, J. J. and Wright, S. J.: 1993, *Optimization Software Guide*, SIAM, Philadelphia.
- [7] Oberti, P.: 1994, ‘The main problem of geosynchronous satellite theory around an equilibrium position’, *Astronomy and Astrophysics* **284**, 281–284.
- [8] Pocha, J. J., Hersom, S. E., Dixon, L. C. W. and Bartholomew-Biggs, M. C.: 1977, ‘The optimization of satellite trajectories’, *ESA Contract No. 764/75/AR/SC*, Hawker Siddely Dynamics Ltd. vol **III**, 33–34.
- [9] Soop, E.M.: 1994, *Handbook of Geostationary Orbits*, Space Technology Library Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.