Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza. **25:** 13–22, (2004).

Estudio de la estabilidad en sistemas estelares triples con pérdida de masa

M. Andrade y J. A. Docobo

Observatorio Astronómico R. M. Aller.
Universidade de Santiago de Compostela.
15782 Santiago de Compostela, Spain.

Resumen

Taking into account mass-loss laws (either with or without periastron effect), we study its influence on the stability conditions proposed by different authors for triple stellar systems. Attention is focussed on situations where a stable configuration would be expected, but not obtained due to mass loss.

Palabras clave y expresiones: Stellar three-body problem, mass-loss, stability.

MSC: 70F07, 70F15, 70E50, 70E55.

1 Introducción

Como un caso de especial interés del problema de tres cuerpos, históricamente uno de los principales temas de la mecánica celeste [15], se define el problema estelar de tres cuerpos como aquél de masas arbitrarias pero comparables moviéndose en órbitas donde la separación entre dos de los cuerpos es mucho menor que la distancia al tercero [11, 12, 6, 2]. Suponemos, además, que la separación entre las componentes de la binaria interna es lo suficientemente grande como para que los cuerpos puedan ser tratados como masas puntuales y que la distancia al tercero es lo suficientemente pequeña como para que las fuerzas de marea galácticas se puedan despreciar. El único pequeño parámetro es el cociente entre las separaciones, que es del orden de 0.1 ó inferior, de modo que existe cierta similitud entre este problema y el problema lunar, a pesar de que en el primero no existe ninguna restricción ni para las excentricidades ($e < 1$) ni para la inclinación mutua.

Sean m_0 y m_1 las masas de la binaria, tal que $m_0 \geq m_1$, y sea m_2 la masa de la tercera componente. Definimos r_1 como la distancia de m_0 a m_1 y r_2 la distancia del centro de

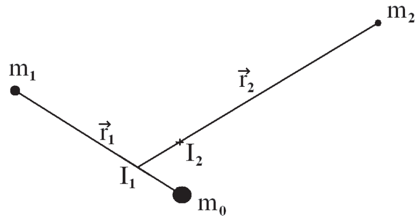

Figura 1: Coordenadas de Jacobi.

masas de m_0 y m_1 a m_2. Usaremos el subíndice 1 para referirnos a los elementos de la órbita de m_1 con respecto a m_0 y el 2 para la de m_2 con respecto al baricentro de m_0 y m_1 (ver Figura 1).

Si S es el ángulo entre los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, a_1 y a_2 los semiejes mayores orbitales, $\varepsilon = a_1/a_2$, P_j es el j-ésimo polinomio de Legendre, G es la constante de Gauss ($G = 4\pi^2$ si las unidades son unidades astronómicas, años y masas solares) y

$$M_j = m_0\, m_1\, m_2\, \frac{m_0^{j-1} - (-m_1)^{j-1}}{(m_0 + m_1)^j},$$

la hamiltoniana para este sistema será:

$$H = \frac{G\, m_0\, m_1}{2\, a_1} + \frac{G\,(m_0 + m_1) m_2}{2\, a_2} + \frac{G}{a_2} \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j\, M_j\, \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^j \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^{j+1} P_j(\cos S), \tag{1}$$

donde el último término representa la perturbación sobre las dos órbitas keplerianas.

El problema de la estabilidad dinámica en sistemas triples jerárquicos ha sido tradicionalmente objeto de incesante estudio. No es, sin embargo, hasta la década de los años 60 del pasado siglo cuando se empiezan a establecer los primeros criterios de estabilidad asociados a valores críticos de ciertos parámetros.

2 Criterios de Estabilidad para Sistemas Triples Jerárquicos

Partiendo de condiciones iniciales arbitrarias, salvo en casos especiales, cualquier sistema de n cuerpos es inestable. Aunque, si el sistema presenta una configuración jerárquica, es posible que éste pueda ser al menos cuasi-estable, en el sentido de que permanecerá en esta configuración durante mucho tiempo.

En el caso particular de las estrellas triples parece claro que, si la distancia de la tercera componente al baricentro de la binaria es grande comparada con la separación entre las componentes de la binaria, el sistema será estable en el sentido de que no habrá términos seculares en los semiejes mayores.

De acuerdo con Orlov y Petrova [16] dos son las alteraciones que puede sufrir el movimiento de un sistema triple jerarquizado:

- una violación de la jerarquía debido a la substitución de una de las componentes del par cerrado por la tercera componente, y
- la fuga del sistema de la tercera componente siguiendo una órbita hiperbólica sin violación de la jerarquía.

Es difícil establecer una definición general de lo que se entiende por estabilidad de sistemas triples. En este estudio consideraremos que un sistema triple jerárquico es estable cuando las componentes presentan movimientos ligados de manera que los semiejes mayores y las excentricidades no exhiben variaciones seculares.

Así, nuestro interés estará centrado en aquellos casos en los que se produce la ruptura del sistema triple como consecuencia de la fuga de la tercera componente. Consideraremos únicamente criterios de estabilidad para los cuales exista una expresión analítica. El fin último es establecer la influencia de la pérdida de masa de una o varias de las componentes sobre la estabilidad dinámica del sistema en el sentido de Laplace (esto es, mostrando cambios seculares claros en los elementos orbitales). No obstante, también nos interesará estimar la sensibilidad de estos criterios a la pérdida de masa que sufre el sistema estelar triple, así como la respuesta que cada uno de ellos ofrece.

2.1 Criterio de Harrington

Este criterio, establecido a partir de simulaciones numéricas de sistemas triples con masas iguales [13] y posteriormente generalizado para cualesquiera masas [14], es válido para problemas tridimensionales excepto para sistemas con mutua inclinación orbital ortogonal. El parámetro de estabilidad tiene la forma:

$$F = \frac{a_{ex}(1 - e_{ex})}{a_{in}}, \tag{2}$$

siendo a_{in} y a_{ex} los semiejes mayores de las órbitas interna y externa, respectivamente. El parámetro crítico F_c depende de las masas de las estrellas y de su mutua inclinación:

$$F_c = A\left[1 + B\log\left(\frac{1 + \frac{m_2}{m_0+m_1}}{3/2}\right)\right] + K, \tag{3}$$

siendo $K = 2$; $A = 3.50$ y $B = 0.70$ si el movimiento es directo; y $A = 2.75$ y $B = 0.64$ si el movimiento es retrógrado. Para que haya estabilidad se tiene que satisfacer $F > F_c$.

2.2 Criterio de Graziani-Black

En una serie de trabajos realizados por Black y colaboradores [10, 5, 17] se establece, a partir de simulaciones numéricas, el siguiente criterio de estabilidad.

El parámetro de estabilidad viene dado por:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{2m_0}. \tag{4}$$

Por otra parte, el parámetro crítico es:

$$\begin{aligned} \mu_c &= 0.175 \tfrac{\Delta^3}{(2-\Delta)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{para} \quad \mu \leq 1, \\ \mu_c &= 0.083 \tfrac{\Delta^3}{(2-\Delta)^3} \qquad \text{para} \quad \mu \geq 1, \end{aligned} \tag{5}$$

donde:

$$\Delta = \frac{2(R-1)}{R+1}, \tag{6}$$

$$R = \frac{a_{ex}\,(1-e_{ex})}{a_{in}} + \frac{m_1}{m_0+m_1}. \tag{7}$$

Según indican los autores, un sistema será dinámicamente estable si $\mu < \mu_c$.

2.3 Criterio de Eggleton-Kiseleva

El parámetro de estabilidad [9] viene definido por:

$$X = \frac{P_{ex}}{P_{in}}, \tag{8}$$

de manera que el sistema triple jerárquico será estable si $X > X_c$, siendo:

$$X_c = \left(\frac{q_{ex}}{1+q_{ex}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e_{in}}{1-e_{ex}}\right)^{\frac{3}{2}} Y_c^{\frac{3}{2}}, \tag{9}$$

$$Y_c \approx 1 + \frac{3.7}{q_{ex}^{\frac{1}{3}}} + \frac{2.2}{1+q_{ex}^{\frac{1}{3}}} + \frac{1.4}{q_{in}^{\frac{1}{3}}}\frac{q_{ex}^{\frac{1}{3}}-1}{q_{ex}^{\frac{1}{3}}+1}, \tag{10}$$

con $q_{in} = m_0/m_1$ y $q_{ex} = (m_0+m_1)/m_2$. Además Y_c es el cociente crítico entre la distancia pericéntrica de la binaria externa y la distancia apocéntrica de la interna.

2.4 Criterio de Aarseth-Mardling

Más recientemente Aarseth y Mardling [1] han sugerido un nuevo criterio válido para un amplio rango de los valores de las masas, las excentricidades y la inclinación mutua (excepto para $i \approx 90°$).

Habrá estabilidad si el parámetro de estabilidad dado por:

$$Z = \frac{a_{ex}\,(1-e_{ex})}{a_{in}\,(1+e_{in})} \tag{11}$$

satisface $Z > Z_c$, siendo:

$$Z_c = 2.6\frac{(1+e_{ex})^{0.4}\,(1+q)^{0.4}}{(1-e_{ex})^{0.0728}\,(1+e_{in})^{1.2}}\left(1-0.3\frac{i}{\pi}\right), \tag{12}$$

con $q = m_2/(m_0+m_1)$ y la inclinación mutua dada por:

$$\cos i = \cos i_{in}\cos i_{ex} + \sin i_{in}\sin i_{ex}\cos(\Omega_{ex}-\Omega_{in}). \tag{13}$$

3 Pérdida de Masa en Sistemas Triples Jerárquicos

3.1 Ley de pérdida de masa generalizada

En anteriores trabajos [3] se establecieron expresiones analíticas que dan cuenta de la pérdida de masa en sistemas binarios. Este tipo de leyes describen no sólo la disminución de masa dependiente de la evolución temporal de las estrellas, sino también la producida por el llamado *efecto periastro* en sistemas binarios [4]:

$$\dot{m}(r, p_\theta, t, m_1, m_2) = -\alpha_1 m_1^n - \alpha_2 m_2^q - \beta\frac{p_\theta}{r^2}. \tag{14}$$

En el caso de sistemas triples, y considerando una ley de pérdida de masa de este tipo para cada una de las componentes, tendremos un efecto periastro generalizado que consistirá en un aumento de la pérdida de masa por causa de las aproximaciones mutuas entre las tres componentes. La pérdida de masa de cada una de ellas vendrá dada por una expresión del tipo anterior en la que aparecerá un término de interacción con cada una de las restantes:

$$\begin{aligned}\dot{m}_0 &= -\alpha_0 m_0^n - \beta_{01}\tfrac{c_0}{r_{01}^2} - \beta_{02}\tfrac{c_1}{r_{02}^2},\\ \dot{m}_1 &= -\alpha_1 m_1^q - \beta_{10}\tfrac{c_0}{r_{10}^2} - \beta_{12}\tfrac{c_1}{r_{12}^2},\\ \dot{m}_2 &= -\alpha_2 m_2^s - \beta_{20}\tfrac{c_1}{r_{20}^2} - \beta_{21}\tfrac{c_1}{r_{21}^2},\end{aligned} \tag{15}$$

donde r_{ij}, con $(i = 0, 1, 2)$, es la distancia de la componente i a la componente j (evidentemente $r_{ij} = r_{ji}$); c_0 es el momento angular de la órbita interior y c_1 el de la externa; los α_i $(i = 0, 1, 2)$ son tres pequeños parámetros que acoplan la pérdida de masa por evolución temporal, mientras que son los, también pequeños parámetros, β_{ij}, con $(i = 0, 1, 2)$, los que dan cuenta de la pérdida de masa por este nuevo efecto periastro generalizado. En general, $\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$, ya que el primero acopla la pérdida de masa de la componente i en función de su distancia a la j y la segunda la de la componente j a medida que se aproxima a la i.

3.2 Análisis de la estabilidad

Las correspondientes ecuaciones del movimiento en coordenadas de Jacobi son:

Tabla 1: Elementos orbitales del sistema triple.

P_1	5^a	P_2	378.076^a
e_1	0.8	e_2	0.7
a_1	$5\ UA$	a_2	$90\ UA$
i_1	$10°$	i_2	$120°$
Ω_1	0	Ω_2	0
ω_1	0	ω_2	0
f_1	0	f_2	0

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_0 &= -G\,(m_0+m_1)\,\tfrac{\vec{r}_0}{r_0^3} + G\,m_2\left(\tfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \tfrac{\vec{r}_{02}}{r_{02}^3}\right), \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= -G\,(m_0+m_1+m_2)\left(\tfrac{m_0}{m_0+m_1}\,\tfrac{\vec{r}_{02}}{r_{02}^3} + \tfrac{m_1}{m_0+m_1}\,\tfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

La aplicación de un método de Runge-Kutta conjuntamente a este sistema de ecuaciones y a las tres ecuaciones dadas por (15) nos permitirá analizar el movimiento del sistema y eventualmente hallar indicios de inestabilidad, producidos por la pérdida de masa del sistema, que puedan conducir a su ruptura.

Definiremos el rango de estabilidad de una estrella triple como el cociente:

$$\delta_p = \pm\frac{p - p_c}{p_c}, \tag{17}$$

donde p es F, μ, X ó Z y el signo es "+" para F, X y Z, y "$-$" para μ. Cuanto mayor es δ_p mayor es el rango de estabilidad del sistema según el criterio utilizado. Así, si $\delta_p < 0$, entonces el sistema puede ser dinámicamente inestable, o sea, es posible que se produzca una violación de la jerarquía o un escape de la tercera componente.

Realizaremos la integración numérica para tres casos diferentes:

SPM: No hay pérdida de masa.

MDT: Únicamente hay pérdida de masa por evolución temporal.

MDT+EP: A la anterior se superpone una disminución de la masa por efecto periastro.

Existen sistemas estelares triples para los cuales habrá o no estabilidad según el criterio que consideremos. Estos casos se situan en esa frontera tan poco clara entre la estabilidad y la inestabilidad. Sirva de ejemplo el siguiente caso cuyos elementos orbitales aparecen en el Cuadro 1. Las condiciones iniciales y los valores de los parámetros se muestran en el Cuadro 2.

La Figura 2 muestra la evolución temporal de las excentricidades y de los semiejes mayores para los tres casos considerados (la línea continua corresponde al caso SPM,

Tabla 2: Masas y parámetros de pérdida de masa.

μ_1	$4\ M_\odot$	n	2	α_i	10^{-6}
μ_2	$1\ M_\odot$	q	2	β_i	$5 \cdot 10^{-7}$
μ_3	$0.1\ M_\odot$	s	2		

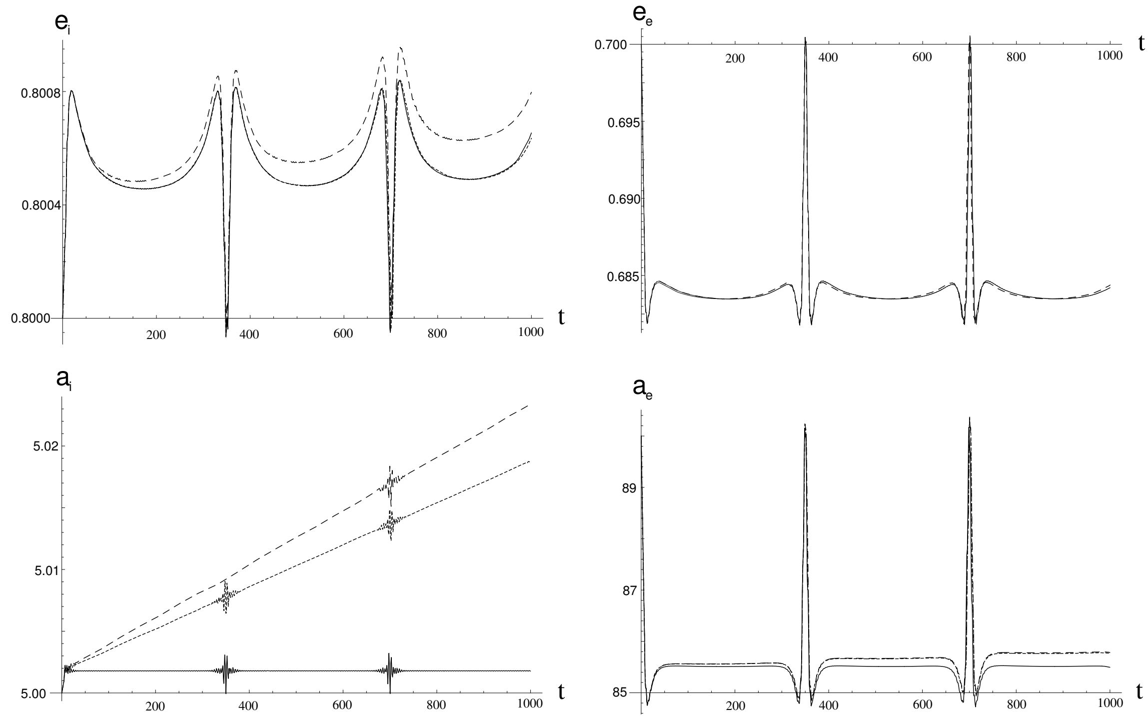

Figura 2: Evolución temporal de las excentricidades y semiejes mayores de ambas órbitas.

la punteada al MDT y la discontinua al MDT+EP). Se observa que las perturbaciones producidas por la pérdida de masa, especialmente, cuando hay efecto periastro ocasionan aumentos seculares de los elementos, sobre todo de los de la órbita interna y del semieje mayor de la externa.

Los valores iniciales de los parámetros que caracterizan la estabilidad del sistema son:

$$\begin{aligned} &F = 5.40 > F_c = 4.46 \Rightarrow \delta_F = +0.212, \\ &\mu = 0.138 < \mu_c = 1.00 \Rightarrow \delta_\mu = +0.863, \\ &X = 75.6 > X_c = 74.8 \Rightarrow \delta_X = +0.0104, \\ &Z = 3.00 > Z_c = 1.40 \Rightarrow \delta_Z = +1.15. \end{aligned} \tag{18}$$

Estos valores tan pequeños no permiten asegurar que el sistema (inicialmente sin pérdida de masa) sea completamente estable, aunque el hecho de que sean positivos así lo indica. Sin embargo, si ahora consideramos que existe pérdida de masa el sistema estará sometido a una perturbación que eventualmente podría acabar con la eyección de

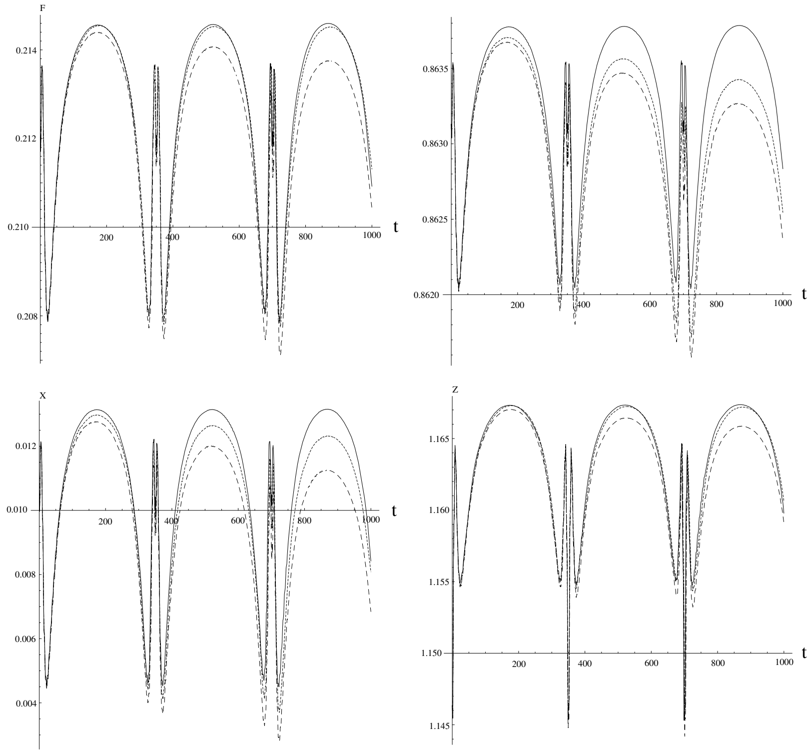

Figura 3: Evolución temporal de los rangos de estabilidad de cada criterio.

alguna de las componentes. Es más, si esta pérdida de masa dependiente del tiempo se viese potenciada en las proximidades del periastro, entonces se producirán variaciones seculares en algunos elementos orbitales que harán que el sistema se vuelva inestable.

En la Figura 3 se muestra la evolución temporal de los rangos de estabilidad correspondientes a cada criterio (la línea continua corresponde al caso SPM, la punteada al MDT y la discontinua al MDT+EP).

4 Conclusiones

Existen sistemas para los cuales podemos concluir que habrá o no estabilidad dependiendo del criterio aplicado. Se puede comprobar que la pérdida de masa provoca una disminución del parámetro crítico de Harrington, constante en el caso de que no haya pérdida de masa, contribuyendo al aumento del rango de estabilidad. Sin embargo, para el criterio de Graziani-Black es el parámetro de estabilidad del sistema el que disminuye ocasionando la reducción de dicho rango.

Es de destacar el hecho de que, al contrario de lo que ocurre con los criterios de Graziani-Black y Eggleton-Kiseleva, según los de Harrington y Aarseth-Mardling la pérdida de masa únicamente dependiente del tiempo apenas tiene influencia sobre la estabilidad del sistema, siendo la producida por efecto periastro la que reduce el rango de estabilidad dinámica (ver Figura 3). Tal comportamiento indicaría entonces que éstos últimos son menos sensibles a la pérdida de masa sin efecto periastro que los primeros.

Lo que parece claro es que la pérdida de masa, especialmente la producida en las proximidades del periastro, lleva asociada una clara tendencia hacia la inestabilidad, de manera que sistemas en principio estables podrían acabar siendo dinámicamente inestables debido a que esta disminución de su masa produce variaciones seculares en algunos elementos orbitales, principalmente en los semiejes mayores y la excentricidad de la órbita interna, que terminan inexorablemente en la ruptura del sistema.

Por todo lo anterior, en muchos casos será difícil determinar si un sistema triple jerárquico es o no estable. Sería interesante analizar en detalle un mayor número de casos con el fin de obtener resultados estadísticos que puedan confirmar la tendencia a la inestabilidad de ciertos sistemas con movimiento retrógrado [7] y/u órbitas altamente excéntricas [8].

Observar, por último, que este proceso podría explicar el decaimiento sucesivo de sistemas de n cuerpos a sistemas de $n-1$ cuerpos observados en algunas asociaciones estelares.

Referencias

[1] Aarseth, S. J. and Mardling, R. A.: 1999, 'Dynamics and stability of three-body systems', *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System, A Major Key to Solar System Studies*. Eds. B. A. Steves and A. E. Roy, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 385.

[2] Abad, A. J.: 1984, *Estudio de Sistemas Estelares Múltiples*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

[3] Andrade, M. and Docobo, J. A.: 2001, 'The influence of decreasing mass on the orbits of wide binaries: an approach to the problem'. *Highlights of Spanish Astrophysics II*. Eds. J. Zamorano, J. Gorgas and J. Gallego, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 273–276.

[4] Andrade, M. and Docobo, J. A.: 2003, 'Una ley de pérdida de masa en binarias que por efecto periastro produce un aumento secular de la excentricidad', *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza* **22,** 161–170.

[5] Black, D. C.: 1982, 'A simple criterion for determining the dynamical stability of three-body systems', *The Astronomical Journal* **87,** 1333–1337.

[6] Docobo, J. A.: 1977, *Aplicación de la Teoría de Perturbaciones al Estudio de Sistemas Estelares Triples*', *Tesis Doctoral*, Universidad de Zaragoza.

[7] Donnison, J. R. and Mikulskis, D. F.: 1994, 'Three–body orbital stability criteria for circular retrograde orbits', *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **266,** 25–30.

[8] Donnison, J. R. and Mikulskis, D. F.: 1995, 'The effect of eccentricity on three–body orbital stability criteria and its importance for triple star systems', *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **272,** 1–10.

[9] Eggleton, P. and Kiseleva, L.: 1995, 'An empirical condition for stability of hierarchical triple systems', *The Astrophysical Journal* **455,** 640–645.

[10] Graziani, F. and Black, D. C.: 1981, 'Orbital stability constrainst on the nature of planetary systems', *The Astrophysical Journal* **251,** 337–341.

[11] Harrington, R. S.: 1968, 'Dynamical evolution of triple stars', *The Astronomical Journal* **73,** 190–194.

[12] Harrington, R. S.: 1969, 'The stellar three–body problem', *Celestial Mechanics* **1,** 200–209.

[13] Harrington, R. S.: 1972, 'Stability criteria for triple stars', *Celestial Mechanics* **6,** 322–327.

[14] Harrington, R. S.: 1977, 'A review of the dynamics of classical triple stars', *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* **3,** 139–143.

[15] Marchal, C.: 1990, *The Three–Body Problem*, Elsevier, Amsterdam.

[16] Orlov, V. V. and Petrova, A. V.: 2000, 'Dynamical stability of triple stars', *Astronomy Letters* **26,** 250–260.

[17] Pendleton, Y. J. and Black, D. C.: 1983, 'Further studies on criteria for the onset of dynamical instability in general three-body systems', *The Astronomical Journal* **88,** 1415–1419.